Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Тульский государственный университет

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

ИЗУЧЕНИЕ ВСТРОЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Лабораторная работа № 7
по курсу «Структуры и алгоритмы обработки данных»

Вариант № 4

Выполнил:	студент группы 220601	_________ (подпись)	Белым А.А.
Проверил:	д. ф.-м.н, проф.каф. ИБ	_________ (подпись)	Двоенко С.Д.

Тула 2013

Цель работы

Изучить встроенные математические функции языка C\C++. Написать программу, реализующую одну из встроенных функций.

Задание

Вычислить ток диода до двух значащих цифр после запятой при значениях : тепловой ток I_0 = 0,1мкА , падение напряжения $U_д$ = 0,9 В, температурный потенциал φ_t = 26 мВ. (Указание: ток диода вычисляется по формуле $I_\partial = I_0(e^{\frac{U_\partial}{\varphi_t}} - 1)$. Это выражение надо разложить в ряд Тейлора.)

Теоретическая справка

В языке C\C++ некоторые математические функции модуля MATH.H, такие как тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и т.д., реализуются разложением их в ряд Тейлора.

Пусть

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (1)$$

- многочлен степени n с целыми коэффициентами. Будем последовательно дифференцировать это выражение n раз и в каждом получившемся выражении будем подставлять вместо аргумента – число 0, то есть $x = 0$:

$a_0 = p(0)$;

$a_1 = \frac{p'(0)}{1!}$; $a_2 = \frac{p''(0)}{2!}$; … $a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$;

Таким образом будут найдены все коэффициенты

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!} \quad (2), \text{ при } i = 0,..,n.$$

При подстановке (2) в выражение (1) получим

$$p(x) = p(0) + \ldots + \frac{p^{(i)}(0)x^i}{i!} + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)x^n}{n!} \quad (3)$$

Представим тот же самый многочлен $p(x)$ в виде суммы одночленов, но в другом виде. Запишем его так

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_i(x - x_0)^i + \ldots + A_n(x - x_0)^n \quad (4),$$

где x_0 - некоторое постоянное значение x из области определения многочлена, а A_i при $i = 0,..,n$ - некоторые коэффициенты, которые надо вычислить.

Введем новую переменную $\xi = x - x_0$ (значит $x = x_0 + \xi$) . Следовательно справедлива запись $p(x) = p(x_0 + \xi)$. Так как между переменными x и ξ установлена линейная связь, то в выражении (4) можно сделать замену переменной и записать так $p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$, где $P(\xi)$ - многочлен аргумента ξ. Получим выражение

$$P(\xi) = A_0 + \ldots + A_i\xi^i + \ldots + A_n\xi^n \quad (4'), \text{ где } \xi = x - x_0 .$$

Очевидно, что выражения (4') и (1) сходны.

Все коэффициенты A_i находятся аналогично (2), при $i = 1,..,n$.

$A_0 = P(0)$;

$$A_1 = \frac{P'(0)}{1!} ; \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!} ; \quad \ldots ; \; A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} ;$$

Но

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0 + \xi), \quad P''(\xi) = p''(x_0 + \xi), \ldots .$$

Так что

$$P(0) = p(x_0) , \; P'(0) = p'(x_0) , \; P''(0) = p''(x_0) , \ldots$$

и

$$A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!} , \; A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}, \; \ldots , \; A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Поэтому получим

$$p(x) = p(x_0) + \ldots + \frac{p^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i}{i!} + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \quad (5)$$

Формула (5) называется формулой Тейлора. Частный случай формулы Тейлора при $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена.

Обратимся теперь к произвольной функции $f(x)$, не являющейся многочленом с целыми коэффициентами, но определённой в некотором промежутке *X*. Пусть для окрестности некоторой её точки x_0 из *X* существуют производные всех порядков до $(n-1)$-го включительно, а в самой точке пусть существует производная n-го порядка. Тогда по образцу (5) для функции $f(x)$ может быть составлен многочлен вида:

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^i(f(x_0))/dx^i}{i!} * (x - x_0)^i \quad (6)$$

Но дело в том, что *f*(*x*) – не многочлен *n*-ой степени с целыми коэффициентами, поэтому нельзя утверждать о справедливости утверждения $p_n(x) = f(x)$, следовательно, для вычислений огромное значение имеет оценка погрешности:

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) \quad (7)$$

Наложим на функцию $f(x)$ ещё одно условие, что существует ещё и $(n+1)$ - я производная в окрестности точки x_0, и получим выражение для $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{d^{n+1}(f(c))/dx^{n+1}}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1} \quad (8), \quad \text{где } c = x_0 + q(x - x_0) \text{ при } (0 < q < 1)$$

Таким образом, учитывая (6) и (8), получим

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d^i(f(x_0))/dx^i}{i!} * (x - x_0)^i + \frac{d^{n+1}(f(c))/dx^{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (9)$$

Формула (9) называется формулой Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа. Форма дополнительного члена в формуле Тейлора применяется в тех случаях, когда при тех или иных фиксированных значениях *x* (отличных от x_0) мы желаем заменить приближенно функцию *f*(*x*) многочленом $p_n(x)$ и численно оценить погрешность такой замены.

Формула

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i} \frac{d^i(f(x_0))/dx^i}{i!} * (x - x_0)^i \quad (10)$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $(n+1)$ членов ряда Тейлора, согласно(9), есть как раз $r_n(x)$, то, очевидно: для того, чтобы при некотором значении $x = k$ действительно имело место разложение (10), необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $r_n(x)$ формулы Тейлора с дополнительным членом – при этом значении x – стремился к 0 с возрастанием n.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = \sin(x)$.

$$f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}), \quad \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

Так как $f(0) = 0$,

$$f^{(2m)}(0) = \sin(0 + 2m\frac{\pi}{2}) = \sin(2m\frac{\pi}{2}) = \sin(m\pi) = 0 \quad , \text{ при } m = 2,4,6,\ldots$$

$$f^{(2m-1)}(0) = f(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1} \quad , \text{ при } m = 1,3,5\ldots$$

Поэтому, положив в формуле (10) $n = 2m$ и $x_0 = 0$ получим конечную формулу:

$$f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x).$$

Текст программы

Далее представлен текст программы на языке C++, реализующей расчет тока диода с помощью ряда Тейлора.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;
double calcI(double I0,double U,double phi,double eps){
    double t=U/phi,r0=1,r=t,s=1+r;
    unsigned n=2;
    while(r>=r0||r>=eps){
        r0=r;
        r*=t/n;
        s+=r;n++;
```

```
    }
    return (s-1)*I0;
}
double test_calcI(double I0,double U,double phi) {
    return I0*(exp(U/phi)-1);
}

int main()
{
    double I0,U,phi,eps;
    cout<<"Программа рассчитывает ток диоода."<<endl;
    cout<<"Введите тепловой ток."<<endl;
    cin>>I0;
    cout<<"Введите падение напряжения."<<endl;
    cin>>U;
    cout<<"Введите температурный потенциал."<<endl;
    cin>>phi;
    cout<<"Введите точность."<<endl;
    cin>>eps;
    cout<<"Значение, рассчитанное через ряд Тейлора: "<<endl;
    cout <<setprecision(19)<<calcI(I0,U,phi,eps)<<endl;
    cout<<"Значение, рассчитанное стандартными функциями: "<<endl;
    cout <<setprecision(19)<<test_calcI(I0,U,phi)<<endl;
    return 0;
}
```

Тестовый пример

На рисунке 1 представлен пример работы программы, реализующей расчет тока диода с помощью ряда Тейлора.

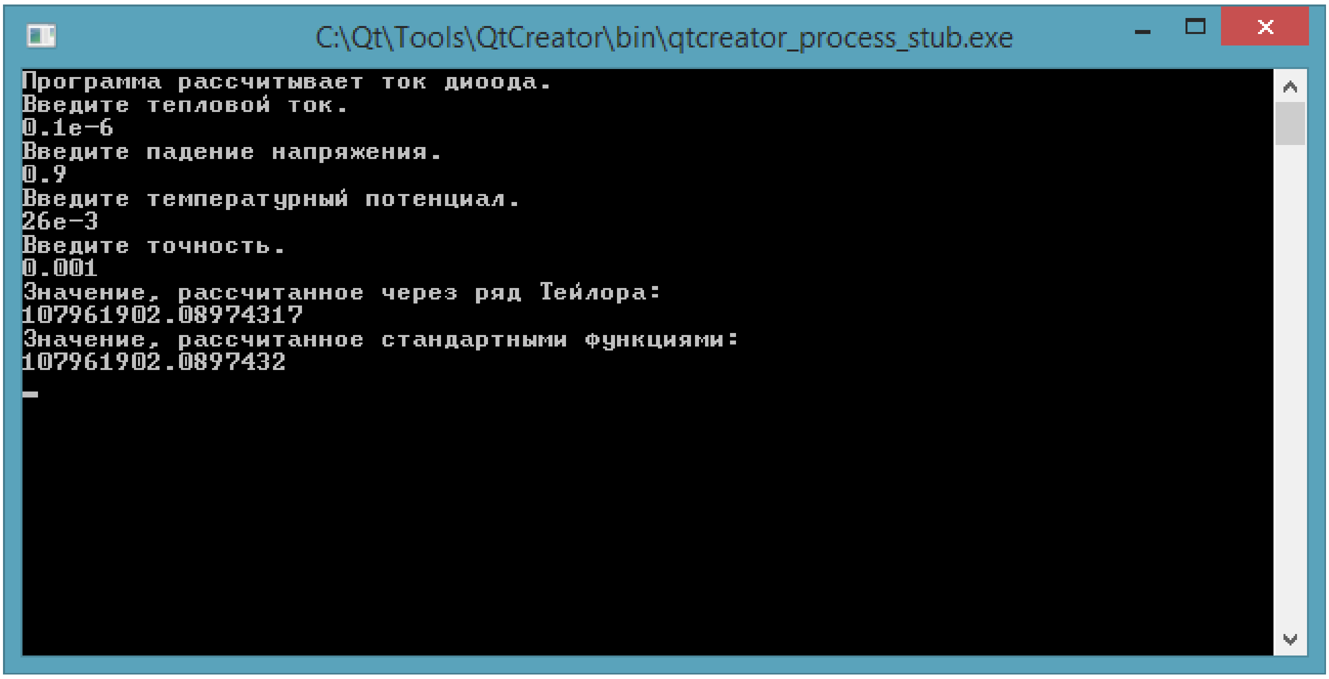

Рисунок 1 — Пример работы программы, реализующей расчет тока диода

Вывод

В данной работе я познакомился с расчетом математических функций с помощью ряда Тейлора. Разложение в ряд Тейлора позволяет рассчитывать с помощью ЭВМ такие сложные функции, как экспоненту, тригонометрические и гиперболические функции. Была написана программа, рассчитывающая ток диода с помощью разложения экспоненты в ряд Тейлора.