Многочлены Чебышёва второго рода

Бугров Андрей Викторович

07.11.22 - 20.11.22

1 Повторение - мать учения

Повторим идею многочленов Чебышёва первого порядка.

Рассмотрим множество многочленов степени n со старшим коэффициентом 1. Найдём тот из них, который наименее всего отклоняется от нуля на отрезке [-1;1]. Иными словами, найти такой многочлен $P_n(x)$, что

$$c_n = \max_{[-1;1]} |P_n(x)|$$

Оказывается, это многочлен Чебышёва первого рода, но делённый на 2^{n-1}, который называется усечённым полиномом Чебышёва:

$$\widetilde{T_n} = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \min c_n$$

2 Первое знакомство с многочленами Чебышёва второго рода

А что если бы мы измеряли отклонение от нуля не через максимум от значения на промежутке, а через интеграл? Задача уже представляется в другом виде. Теперь нужно найти многочлен со старшим коэффициентом 1, у которого минимально

$$l_n = \int_{-1}^{1} |F_n(x)| \, dx$$

И здесь уже необходимо брать полином второго рода. Но опять-таки не обычный, а усечённый:

$$\widetilde{U_n} = \frac{1}{2^n} U_n(x) = \min l_n$$

3 Второе знакомство с многочленами Чебышёва второго рода

Впервые рассмотрены в совместной работе двух учеников Чебышёва - Коркина и Золотарёва. Приступим к изучению их свойств.

1. **Реккурентная формула** задаётся так же, как и для многочленов первого рода, но с иными начальными значениями:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

2. **Явная формула**:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

3. Докажем теперь, что многочлены Чебышёва второго рода - **действительно многочлены**. Для этого продифференцируем многочлен Чебышёва первого рода:
   $T_n^{'}(x) = (\cos(n \arccos x))' = -\sin(n{\cdot}\arccos x){\cdot}\Big(-\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}\Big) = \sin(n{\cdot}\arccos x){\cdot}\dfrac{n}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} =$
   $\sin(n \cdot \arccos x) \cdot \dfrac{n}{\sin(\arccos x)} = n \cdot U_{n-1}(x)$

   Таким образом, мы получили ещё одну реккурентную формулу для n-го многочлена Чебышёва:
   $$U_n(x) = \frac{1}{n+1}T_{n+1}^{'}(x)$$

4. **Дифференциальное уравнение** для многочленов Чебышёва второго рода выглядит следующим образом:
   $$(1-x^2)U_n^{''}(x) - 3xU_n^{'}(x) + (n^2-4n)U_n(x) = 0$$
   Другой способ определить многочлены Чебышёва - это решить данное уравнение.

5. **Чередование чётности**.

   Начнём с того, что доказательство очевидно, если учесть, что у многочленов первого рода оно есть, а рекурентная формула та же самая с точностью до ненулевых коэффициентов.

   Однако докажем методом математической индукции, не опираясь на другой род.

   - $U_0(x) = 1 \Rightarrow$ имеет только чётные степени, $U_1(x) = 2x \Rightarrow$ имеет только нечётные степени. $U_2(x) = 4x^2 - 1$ имеет только чётные степени. $U_3(x) = 8x^3 - 2x - 2x = 8x^3 - 4x \Rightarrow$ имеет только нечётные степени. **Это база**.
   - Предположение индукции - $U_{2k-1}(x)$ имеет только нечётные, а $U_{2k}(x)$ только чётные степени.
   - Индукционный переход. Докажем теперь, что $U_{2k+1}(x)$ имеет нечётную степень.
     И снова доказательство очевидно: $2xU_{2k}(x)$ имеет теперь только нечётные степени, а у $U_{2k-1}(x)$ и так они были. Поэтому получили многочлен с нечётными степенями, что и требовалось доказать.

   Соответственно, $U_{2k-1}(-x) = -U_{2k-1}(x)$, а $U_{2k}(-x) = U_{2k}(x)$

6. Найдём **корни** данных многочленов.

   Нужно сделать так, чтобы занулилось выражение $\sin((n+1)\arccos x)$, а $\sin(\arccos x)$ нет. Иначе мы получим неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Имеем
   $$\sin((n+1)\arccos x) = 0$$
   $$(n+1)\arccos x = \pi k$$
   $$\arccos x = \frac{\pi k}{(n+1)}$$
   $$x = \cos\frac{\pi k}{(n+1)}$$

   Подставим полученный корень в знаменатель и получим, что он не равен нулю, если $k \neq n+1$.

   Кроме того, учтём тот факт, что у любого многочлена степени n есть n корней. Тогда получаем итоговую формулу для n корней многочленов Чебышёва второго рода:
   $$x = \cos\frac{\pi k}{(n+1)}, k = \overline{1,n}$$

При $k = 0$ получим $x = \cos 0 = 1 \Rightarrow \arccos x = 0 \Rightarrow$ получаем неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Значит, именно такие n значений k как раз и нужно брать.

7. На отрезке $[-1; 1]$ все многочлены **ортогональны друг другу** с весовым коэффициентом $p = \sqrt{1 - x^2}$, то есть

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} U_m(x) U_k(x)\, dx = 0$$

$\forall m, k = 0, 1, 2, \ldots; \; m \neq k$

Доказательство. Учтём, что $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} U_m(x) U_k(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sin((m+1)\arccos x) \cdot \sin((k+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} dx = \left\{ \begin{matrix} x = \cos t \\ dx = -\sin t\, dt \\ -1 \to \pi \\ 1 \to 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$- \int_{0}^{\pi} - \frac{\sin((m+1)t) \cdot \sin((k+1)t) \cdot \sin t\, dt}{\sin t} = \int_{0}^{\pi} \sin((m+1)t) \cdot \sin((k+1)t)\, dt =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \sin\dfrac{\beta-\alpha}{2} \\ \begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{2} = m+1 \\ \dfrac{\beta-\alpha}{2} = k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = m+k+2 \\ \alpha = m-k \end{cases} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos((m-k)t) - \cos((m+k+2)t)\, dt.$$

Получившееся выражение зануляется, так как после интегрирования мы получаем синусы, значения которых в точках πk равны нулю.

8. **Разложение функции** по многочленам Чебышёва

Из предыдущего свойства следует другая особенность многочленов Чебышёва второго рода: функции могут быть разложены в конечную сумму n многочленов аналогично бесконечной сумме ряда Фурье. Если задать n, то функция приближённо представима в виде

$$P_n(x) = c_0 U_0(x) + c_1 U_1(x) + c_2 U_2(x) + \cdots + c_n U_{n-1}(x),$$

где коэффициенты c_k находятся по формуле

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) U_k(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Иначе говоря, получаем, что $U_0(x), U_1(x), \ldots, U_{n-1}(x)$ - это базис. $U_n(x)$ не встретился, потому что нумерация с нуля.

9. **Значения в нуле и** ± 1

- **Значения в нуле**. Применим явную формулу, подставив нуль:

$$U_n(0) = \frac{\sin((n+1)\arccos 0)}{\sin(\arccos 0)} = \sin\frac{\pi}{2}(n+1)$$

Вывод: $U_n(0) = \begin{cases} 0, n - \text{нечётное} \\ 1, n = 4k \\ -1, n = 4k+2 \end{cases}$

- **Значения в единице**. Применить явную формулу нельзя, так как $\sin 0 = 0$ и мы получаем неопределённость $\frac{0}{0}$. Поэтому выведем через реккурентное соотношение, сразу подставляя полученные ранее результаты.

$$U_0(1) = 1$$
$$U_1(1) = 2$$
$$U_2(1) = 2 \cdot U_1(1) - U_0(1) = 3$$
$$U_3(1) = 2 \cdot U_2(1) - U_1(1) = 4$$

  Мы получили следующую формулу:

$$U_n(1) = n + 1$$

  Докажем её справедливость методом математической индукции.

  (a) Здесь база очевидна.

  (b) Переход. Пусть $U_{k-1}(1) = k, U_k(1) = k + 1$

  (c) Получаем $U_{k+1} = 2k + 2 - k = k + 2$

- **Значения в** -1. Из ранее доказанного соотношения и знания о чередовании чётности многочленов сразу получаем формулу:

$$U_n(-1) = (-1)^n(n + 1)$$

10. **Сумма коэффициентов** n-го многочлена равна $n + 1$

    Доказательство совпадает с доказательством значения в единице.