Основания алгебры и геометрии

Чижов Андрей Дмитриевич
подгруппа 2

Домашнее задание

Задача 1.
Докажите, что в каждом поле выполняются следующие тождества:

$$-a = (-1) \cdot a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

Доказательства должны опираться только на аксиомы поля.

Доказательство:

(Везде подразумеваются аксиомы о коммутативности сложения и умножения.)
$-a = (-1) \cdot a$
Добавим к обем частям a. Получим: $a - a = a + (-1) \cdot a$.
a противоположный по сложению к $-a$, т.е. $a - a = 0$. И из существования единицы:

$$0 = 1 \cdot a + (-1) \cdot a$$

Пользуясь дистрибутивностью умножения относительно сложения:

$$0 = (1 - 1) \cdot a$$

$$0 = 0 \cdot a$$

Заметим, что:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a$$

$$=> \quad a = a \cdot 0 + a$$

$$=> \quad a \cdot 0 = 0$$

$$=> \quad a = (-1) \cdot a$$

Осталось доказать, что $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
Добавим к обем частям $a \cdot b$:

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = a \cdot b - (a \cdot b)$$

Из дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$(a - a) \cdot b = 0$$

$$0 \cdot b = 0$$

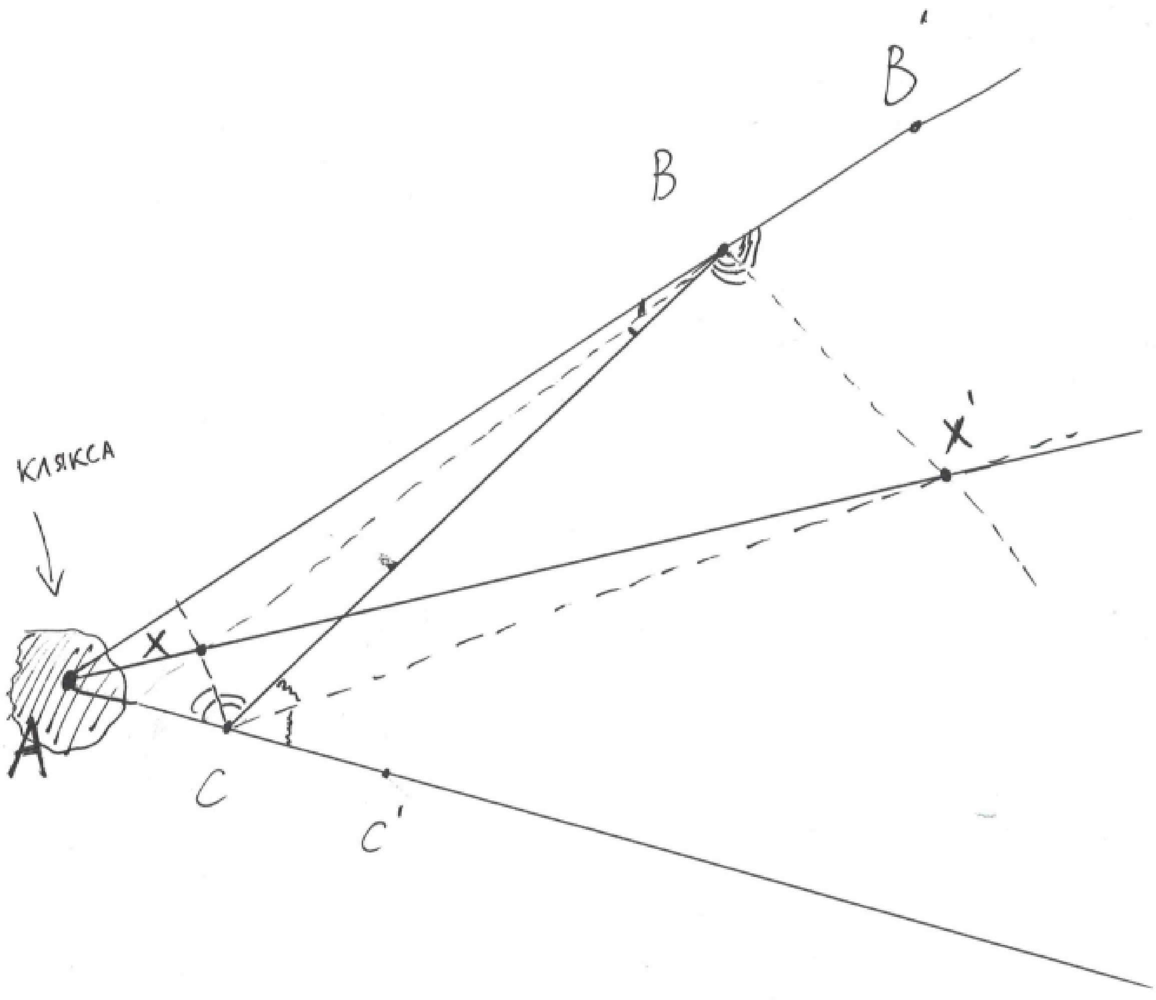
Последнее равенство уже было доказано выше. ■

Задача 2.
Постройте циркулем и линейкой биссектрису угла, вершина которого закрыта кляксой (проводить по кляксе линии или делать на ней другие построения нельзя).

Решение:

Пусть точка A - закрытая кляксой вершина.
Отметим на сторонах угла две произвольных точки B и C и соединим их прямой.
Используем доступный инструмент: построим биссектрисы углов ABC и ACB и отметим их точку пересечения - точка X.
Отметим на прямых AB и AC точки B' и C' соответственно, так что точка B лежит между A и B' и C лежит между A и C' на своих прямых.
Построим биссектрисы углов CBB' и BCC' и отметим точку их пересечения X'. Проведем прямую XX'.

Рассмотрим треугольник ABC.
X лежит на биссектрисе угла A (т.к. биссектрисы внутр. углов пересекаются в одной точке).
Значит XX' и есть искомая биссектриса, поскольку биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего в треугольнике пересекаются в одной точке.



Задача 3.
На одной из прямых в конечной проективной плоскости лежат ровно p точек. Сколько на этой проективной плоскости

(a) прямых, проходящих через данную точку;
(b) всего прямых.

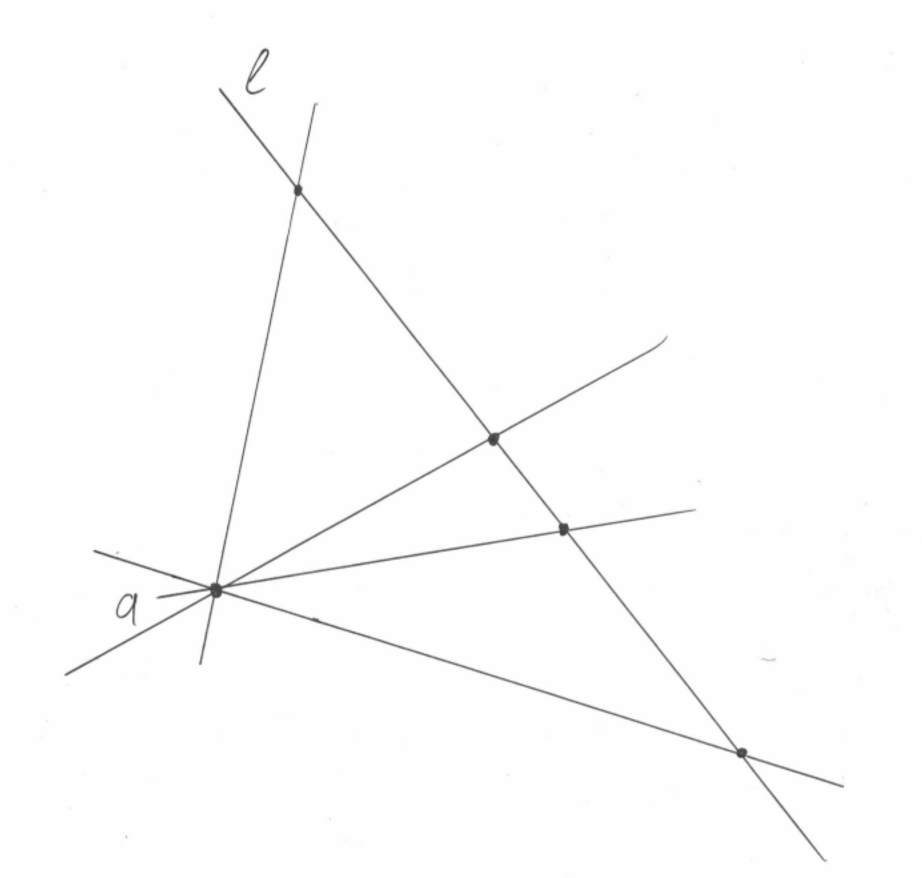
Решение:

Воспользуемся теоремой:

В конечной проективной плоскости на каждой прямой лежит одинаковое количество точек.

Рассмотрим точку a и прямую l, которая ее не содержит. Такая прямая существует по аксиоме проективной плоскости.
Пусть точку a пересекает n прямых.
Знаем, что на прямой l ровно p точек по теореме.
Тогда через каждую точку на l и a проходит прямая, значит $n \geqslant p$.
При этом каждая прямая проходящая через a пересекает l, значит $p \geqslant n$.
=> $p = n$.

Рассмотрим прямую на плоскости.
На ней лежит ровно p точек, через каждую из которых проходит еще $p - 1$ прямая.
Значит всего прямых на плоскости $1 + p(p-1) = p^2 - p + 1$.



Задача 4.
Докажите, что не существует поля, состоящего ровно из 6 элементов.

Доказательство:

Пусть существует поле $F = \{0, 1, a, a+1, b, b+1\}$, состоящее ровно из 6 элементов.
Для начала докажем вспомогательное утверждение:

$\forall x,y \in F$ => $x \cdot y = 0$ <=> $x = 0$ или $y = 0$
Пусть в силу симметрии $a \neq 0$, тогда умножая обе части равенства на a^{-1}
получим $1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0$ => $b = 0$.
(поле не имеет делителя нуля)

Пусть a и b отличны от 1 и $a \neq b \neq 0$.
Тогда по естественным причинам отождествим множество элементов поля с Z_6 и будем рассматривать поле $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
Рассмотрим $2 \cdot 3$:

$$2 \cdot 3 = (1+1) \cdot (1+1+1)$$

По дистрибутивности:

$$(1+1) \cdot (1+1+1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 =$$

$$= 1+1+1+1+1+1 = 0$$

$$(Char F = 6)$$

Значит $2 = 0$ или $3 = 0$. Получили противоречие.
=> Не существует поля с 6 элементами. ■