Основания алгебры и геометрии

Чижов Андрей Дмитриевич

Экзамен.

Задача 1.
Верно ли, что формула

$$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$$

истинна при любых значениях переменных?

Решение:

$$F = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$$

Пусть F ложно при каких-то a,b,c. Тогда ложно и следствие: $(a \to b) \to (a \to c) = 0$
=> $a \to c = 0$ => $a = 1$, $c = 0$.

Пусть $b = 0$. Тогда посылка: $1 \to (0 \to 0) = 1$, а следствие: $(a \to b) \to (a \to c) = 1$, т.к. $a \to b = 0$.
=> $F = 1 \to 1 = 1$.

$b = 1$, тогда посылка: $1 \to (1 \to 0) = 0$ => $F = 1$.

=> F - истина при любых a,b,c, т.е. является тавтологией.

Задача 2.
Решите в комплпексных числах уравнение $z^{2022} - \overline{z} = 0$.

Решение:

$$z^{2022} = \overline{z}$$

$$|z|^{2022} = |\overline{z}| = |z|$$

Получаем, что $|z| = 1$ или $|z| = 0$. $z = 0$ - решение, рассмотрим случай $|z| = 1$.
Пусть $z = e^{i\theta}$:

$$e^{i2022\theta} = e^{-i\theta}$$

$$2022\theta \equiv -\theta \bmod 2\pi$$

$$2023\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$$

$$=> \quad \theta = \frac{2k\pi}{2023} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Задача 3.
Последовательность чисел Фибоначчи рекурсивно определяется следующим образом:
$F_0 = F_1 = 1$ и, для $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Чему равен наибольший общий делитель двух подряд идущих членов данной последовательности?

Решение:

Рассмотрим НОД(F_{n+1}, F_n).

$$(F_n,F_{n+1}) = (F_{n+1} - F_n, F_n) = (F_{n-1}, F_n) = (F_{n-2},F_{n-1}) = \ldots = (F_1,F_0) = (1,1) = 1$$

=> два подряд идущих числа Фибоначчи взаимно просты.

Задача 4.
Сколько различных отношений эквивалентности существуют на множестве $\{1,2,3,4,5\}$?

Решение:

Пусть E_k - количество отношений эквивалентности на мн-ве $\{1,2,\ldots k\}$. Выразим E_{k+1} через $E_0,E_1,\ldots,E_k$.
Разобъем семейство всех отношений экв-ти на мн-ве $\underline{k}$ на группы в зависимости от того, сколько элементов из $\underline{k+1}\backslash\{1\}$ экв-ны 1. Обозначим последнее число через l. Для заданного l на мн-ве $\underline{k+1}$ имеем $C_k^l E_{k-l}$ отношений экв-ти.
Действительно, отношение экв-ти на мн-ве $\underline{k}$ однозначно задается выбором l элементов из мн-ва $\underline{k+1}\backslash\{1\}$, которые эквивалентны 1 (C_k^l способами), и определением отн-я экв-ти на оставшихся $k-l$ элементах (E_{k-l} способами).
Получаем, что

$$E_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l E_{k-l}$$

, где $E_0 = E_1 = 1$.

$$E_2 = E_1 + E_0 = 1 + 1 = 2$$

$$E_3 = E_2 + 2E_1 + E_0 = 2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$E_4 = E_3 + 3E_2 + 3E_1 + E_0 = 5 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 15$$

$$E_5 = E_4 + 4E_3 + 6E_2 + 4E_1 + E_0 = 15 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 52$$

Ответ: 52.

Задача 5.
Для многоугольника с центром симметрии найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Решение:

Пусть O - центр симметрии.
Рассмотрим вершину X и симметричную ей относительно O вершину X' и отрезок XX'.
Тогда для любых двух точек $A, A' \in XX'$: $XA + AX' = XA' + A'X'$.
И если $A'' \notin XX'$, то $XA'' + A''X > XA + AX' = XA' + A'X'$.
При этом точка O принадлежит всем таким отрезкам, соединяющим симметричные вершины.
=> O и есть искомая точка.

Задача 6.
Докажите, что множество всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ равномощно множеству всех последовательностей из 0 и 1 (т.е. имеет мощность континуума).

Решение:

Пусть X - мн-во всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Разобьем натуральный ряд на пары: $1{,}2,\ 3{,}4,\ 5{,}6,\ \dots\ ,2k-1{,}2k, \dots$.
Рассмотрим некоторую последовательность из 0 и 1 и определим биекцию $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: если на k-ом месте стоит 1, то $2k-1$, $2k$ остаются по порядку, иначе меняются местами.
Данная функция является биекцией для любой последовательности из 0 и 1. При этом разным последовательностям соответствуют разные биекции.
Значит $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \lesssim X$. (построили инъекцию)

Вспомним, что $\mathbb{N} \lesssim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$X \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \lesssim (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

=> $X \lesssim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

По теореме Кантора-Бернштейна получаем, что $X \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.