Основания алгебры и геометрии

Чижов Андрей Дмитриевич

Контрольная работа.

Задача 1.
Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните следующее утверждение:
"для любого элемента a из поля $\mathbb{F}$ и любого нечетного натурального n уравнение $\underbrace{x+\cdots+x}_{n}=a$ имеет единственное решение в поле $\mathbb{F}$".

Решение:

Пользуясь аксиомами поля, заметим, что:

$$x = 0 + x = (\underbrace{0+\cdots+0}_{k}) + x = (\underbrace{(x+x)+\cdots+(x+x)}_{k}) + x = \underbrace{x+\cdots+x}_{n}$$

$n=2k+1$. Значит уравнение $\underbrace{x+\cdots+x=a}$ имеет единственное решение $x=a$.

Задача 2.
Рассмотрим булевы операции $\rightarrow$ и $\neg$. Последнюю операцию также обозначают $\Rightarrow$. Выразите операции $\vee$ и $\wedge$ через $\neg$ и $\rightarrow$. Докажите, что операцию $\neg$ нельзя выразить через $\rightarrow$.

Решение:

$$a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b$$

Нетрудно заметить, что правое выражение обращается в 0 только при $a=b=0$ и в 1 в любом другом случае, поэтому оно эквивалентно дизъюнкции. Тогда можем выразить и конъюнкцию:

$$a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b) = \neg((\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg b)$$

Импликация сохраняет единицу $\{\rightarrow\} \in P_1 => [\rightarrow] \in P_1$. Но $\neg \notin P_1$
Следовательно, $\neg$ нельзя выразить через $\rightarrow$.

Задача 3.
Разложите в цепную дробь число $\sqrt{7}$.

Решение:

Представим $\sqrt{7}$ в виде $[a_1; a_2, a_3 \dots]$.
$[\sqrt{7}] = 2 => a_1 = 2$

$$\sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{1}{(\frac{2+\sqrt{7}}{3})} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3}}$$

$a_2 = 1$

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3} = \frac{1}{(\frac{1+\sqrt{7}}{2})} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(\frac{1+\sqrt{7}}{3})}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\sqrt{7}}}}$$

$a_3 = 1$, $a_4 = 1$. $[2 + \sqrt{7}] = 4$, значит $a_5 = 4$

$$2 + \sqrt{7} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3}} \quad \cdots$$

Получаем разложение:

$$\sqrt{7} = [2; 1,1,1,4,1,1,1,4 \dots]$$

Задача 4.
Рассмотрим комплексное число $z = \frac{2+i}{2-i}$.
(a) Определите модуль z.
(b) Покажите, что для всех $n \geq 1$ число $(3 + 4i)^n$ можно записать в виде $a_n + b_n i$, где $a_n \equiv 3 \bmod 5$ и $b_n \equiv 4 \bmod 5$.
(c) Докажите, что z не является корнем из единицы.

Решение:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

a) $|z| = 1$
b) Докажем по индукции по n.

Доказательство:

База $n = 1$: $(3 + 4i)^1 = 3 + 4i \quad 3 \equiv 3,\ 4 \equiv 4 \pmod 5$.
Пусть предположение верно для $n = k > 1$.
$k \to (k + 1)$:

$$(3+4i)^{n+1} = (3+4i)^n(3+4i) = \{\text{по предположению индукции}\} = (a_n + b_n i)(3 + 4i) =$$
$$= (3a_n - 4b_n) + (4a_n + 3b_n)i$$
$$3a_n - 4b_n \equiv 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \equiv 3 \bmod 5$$
$$4a_n + 3b_n \equiv 3 \cdot 4 + 4 \equiv 3 \equiv 4 \bmod 5$$

$=> a_{n+1} \equiv 3, \quad b_{n+1} \equiv 4 \pmod 5$. ■

c) Пусть z - корень из единицы, тогда $(3 + 4i)^n = 5^n$
Но из b) выяснили, что при любом $n \geq 1$ $b_n \equiv 4 \bmod 5$
$=> (3 + 4i)^n \neq 5^n \quad \perp$

Задача 5.
Представьте в виде произведения неприводимых многочлен $P(x) = 1 + x + \ldots + x^7$
(a) $\mathbb{C}[x]$.
(b) $\mathbb{R}[x]$.
(c) $\mathbb{Q}[x]$.

Решение:

P есть сумма геометрической прогрессии

$$P(x) = \frac{1 - x^8}{1 - x}$$

$$P = \prod_{k=1}^{7} \left(x - e^{\frac{2ki\pi}{8}} \right)$$

Получили разложение над $\mathbb{C}$. Для каждого корня z (кроме -1) $\overline{z}$ также является корнем.

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z}) + z\overline{z}$$

- полином с вещественными коэффициентами. Перепишем P, учитывая $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos(\theta)$

$$P = (x + 1) \prod_{k=1,2,3} (x - e^{\frac{2k\pi}{8}})(x - e^{\frac{-2k\pi}{8}}) =$$

$$= (x + 1) \prod_{k=1,2,3} (x^2 - 2cos(\frac{2k\pi}{8})x + 1) =$$

$$= (x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

- искомое разложение над $\mathbb{R}$.

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = \left((x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \right) =$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = x^4 + 1$$

Тогда разложение над $\mathbb{Q}$ имеет вид:

$$P = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$