ТВиМС

Чижов Андрей БПИ218

ИДЗ 4
вариант 28

Задача 7.
На основании 20-ти подсчетов было установлено, что в среднем для выполнения операции требуется 1,5 мс, а оценка среднего квадратичного отклонения времени операции равна 2,1 мс. Полагая, что время операции подчиняется нормальному закону распределения, определить доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения времени операции, отвечающих доверительным вероятностям 0,95 и 0,90 соответственно.

Решение:

$X_1, X_2, \ldots, X_{20} \sim N(m, \sigma^2)$.

1) Оценка **мат. ожидания**

Центральная статистика:

$$G = \frac{(\overline{x} - m)\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} \sim t(n-1)$$

$$P(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < G < t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Где $\alpha = 0{,}05$, $n = 20$, $\overline{x} = 1{,}5$ и $s = 2{,}1$. Тогда доверительный интервал для мат. ожидания:

$$\left(\overline{x} - \frac{s \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \overline{x} + \frac{s \cdot t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

Значение $t_{19,\,0.975}$ определим по таблице: $t_{19,\,0.975} = 2{,}093$.

$$1{,}5 - \frac{2{,}1 \cdot 2{,}093}{\sqrt{20}} < m < 1{,}5 + \frac{2{,}1 \cdot 2{,}093}{\sqrt{20}}$$

$$0{,}517 < m < 2{,}483$$

2) Оценка **среднего квадратичного отклонения**

Центральная статистика:

$$G = \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < G < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Тогда запишем доверительный интервал для дисперсии:

$$\left(\frac{n \cdot s^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \;\; ; \;\; \frac{n \cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Подставляя $\alpha = 0{,}1$, найдем значения $\chi^2_{19,\,0.95}$ и $\chi^2_{19,\,0.05}$ по таблице: $\chi^2_{19,\,0.95} = 30{,}144$; $\chi^2_{19,\,0.05} = 10{,}117$ и найдем интервал для среднего квадратичного отклонения:

$$s\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{19,\,0.95}}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n}{\chi^2_{19,\,0.05}}}$$

$$2{,}1\sqrt{\frac{19}{30{,}144}} < \sigma < 2{,}1\sqrt{\frac{19}{10{,}117}}$$

$$1{,}667 < \sigma < 2{,}878$$

Ответ: для мат. ожидания: (0,517; 2,483); для с.к.о. (1,667; 2,878).

Задача 8.

Будем считать, что наблюдаемая в задаче **№6** СВ имеет гауссовское распределение

а) Постройте двусторонние доверительные интервалы уровня надежности 0,99 для математического ожидания и дисперсии наблюдаемой случайной величины.

б) Проверьте на уровне значимости 0,05 гипотезу о том, что математическое ожидание наблюдаемой СВ равно 65, а дисперсия равна 9.

Решение:

$n = 105$ Промежуточные вычисления задачи №6:
$\overline{x} = 37{,}193$; $s^2 = 15{,}524$

а) По аналогии с предыдущей задачей найдем интервалы для мат. ожидания и дисперсии, при этом учитывая достаточно большую выборку из 105 значений (≥ 30), будем иметь в виду, что $t(n) \sim N(0;1)$, а $\chi^2(n) \sim N(n;2n)$.

Для мат. ожидания:

$$37{,}193 - \frac{\sqrt{15{,}524}\cdot z_{0{,}99}}{\sqrt{105}} < m < 37{,}193 + \frac{\sqrt{15{,}524}\cdot z_{0{,}99}}{\sqrt{105}}$$

Пользуясь табличкой для функции Лапласа:

$$\Phi(z_{0{,}99}) = 0{,}99 \quad => \quad z_{0{,}99} \approx 2{,}326$$

$$36{,}297 < m < 38{,}087$$

Для дисперсии:

$$\frac{105\cdot 15{,}524}{z_{0.99}} < \sigma^2 < \frac{105\cdot 15{,}524}{z_{0{,}01}}$$

$$14{,}109 < \sigma^2 < 17{,}255$$

б) Для мат.ожидания $H_0:\ m = 65 \quad ; \quad H_A:\ m \neq 65.$

$$T = \frac{(\overline{x} - 125)\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$T|_{H_0} \sim N(0;1)$$

$$T = \frac{(37{,}193 - 65)\sqrt{105}}{3{,}94} = -72{,}319$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1{,}96; \quad z_{\alpha/2} = -1{,}96$$

Интервал: [-1,96;1,96] => Есть основания отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной.
Для дисперсии: $H_0:\ \sigma^2 = 9 \quad ; \quad H_A:\ \sigma^2 \neq 9.$

$$T \approx 16{,}967$$

$$T|_{H_0} \sim N(n;2n)$$

$$z_{1-\alpha/2} = -112{,}46; \quad z_{\alpha/2} = 112{,}46$$

=> Нет оснований отвергать нулевую гипотезу в пользу альтернативной, т.к. значение попадает в интервал.