ТВиМС

Чижов Андрей БПИ218

ИДЗ 2
вариант 28

Задача 3.
На плоскости с координатами (X,Y) дана случайная точка, причем $MX = 2$; $DX = 16$; $MY = 4$; $DY = 64$; $K_{XY} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось OZ, лежащую в плоскости XOY и образующую с осью OX угол $\lambda = 30°$.

Решение:

Обозначим искомое расстояние за A. A есть случайная величина. Заметим, что A является линейной функцией по величинам X, Y : $A = X\cos(\lambda) + Y\sin(\lambda)$
Тогда по св-ву мат. ожидания:

$$MA = M(X\cos(\lambda) + Y\sin(\lambda)) = MX\cos(\lambda) + MY\sin(\lambda) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 2$$

Из условия знаем, что случайные величины X, Y являются некоррелированными. И по св-ву дисперсии:

$$DA = D(Xcos\lambda + Ysin\lambda) = D(Xcos\lambda) + D(Ysin\lambda) + 2 \cdot cov(Xcos\lambda, Ysin\lambda) =$$

$$= cos^2\lambda \cdot DX + sin^2\lambda \cdot DY + 2sin\lambda cos\lambda \cdot K_{XY} = cos^2\lambda \cdot DX + sin^2\lambda \cdot DY + sin(2\lambda) \cdot K_{XY} =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{1}{4} \cdot 64 + 0 = 12 + 16 = 28$$

Ответ: Мат. ожидание - $\sqrt{3} + 2$. Дисперсия - 28.

Задача 4.
Пусть число ξ_1-число выпадений герба при 10-ти подбрасываниях монеты, а ξ_2-число выпавших очков при бросании игральной кости. Оценить вероятность осуществления неравенства $\xi_1 + \xi_2 < 14$. Решить задачу, используя первую и вторую формы неравенства Чебышева.

Решение:

Величина ξ_1 - число успехов в 10 испытаниях по схеме Бернулли, т.е. $\xi_1 \sim Bi(10, 0.5)$. Величина ξ_2 (распределение игральной кости) принимает целые значения от 1 до 6 с равной вероятностью, т.е. $P\{\xi_2 = i\} = \frac{1}{6}, i = \overline{1,6}$
ξ_1 и ξ_2 - независимые случайные величины
Рассмотрим случайную величину $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Ясно, что r-ый абсолютный момент η конечен, поскольку он конечен для ξ_1 и ξ_2.
Оценим вероятность выполнения неравенства $\eta < 14$, используя неравенство Чебышева:
(Т.к. все величины принимают только неотрицательные значения модули можно опустить.)

$$P\{\eta < 14\} = 1 - P\{\eta \geqslant 14\} \geqslant 1 - \frac{E\eta^r}{14^r}$$

$\boxed{\text{r} = 1}$

$$P\{\eta < 14\} \geqslant 1 - \frac{E\eta}{14}$$

Вычислим мат. ожидание величины η

$$E\eta = E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2 = 10 \cdot 0.5 + 3.5 = 8.5$$

$$=> \quad P\{\eta < 14\} \geqslant 1 - \frac{8.5}{14} \approx \mathbf{0.393}$$

$\boxed{\text{r} = 2}$

$$P\{\eta < 14\} \geqslant 1 - \frac{E\eta^2}{14^2}$$

$E\eta^2 = D\eta + (E\eta)^2$. Вычислим $D\eta$

$$D\eta = D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \cdot cov(\xi_1, \xi_2)$$

И так как величины независимы $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$.

$$D\xi_1 = 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2.5$$

$$D\xi_2 = \sum_{i=1}^{6} (i - 3.5)^2 \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

$$=> \quad D\eta = \frac{5}{2} + \frac{35}{12} = \frac{65}{12}$$

$$=> \quad E\eta^2 = \frac{65}{12} + 8.5^2 = \frac{233}{3}$$

$$=> \quad P\{\eta < 14\} \geqslant 1 - \frac{233}{3 \cdot 14^2} \approx \mathbf{0.604}$$