Неоднородная среда

January 18, 2019

1 Выражение компанент векторного поля через E_z и H_z

Рассмотрим систему уравнений максвелла:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla};\vec{H}\right] = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\bar{e}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\bar{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(J_{sided} + J\right); & (1) \\ \left[\vec{\nabla};\vec{E}\right] = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\bar{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\bar{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & (2) \\ \left(\vec{\nabla};\vec{D}\right) = \rho; & (3) \\ \left(\vec{\nabla};\vec{B}\right) = 0. & (4) \end{cases} \tag{1}$$

И материальные уравнения к ней:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \\ \vec{B} = \mu\vec{H}; \\ \vec{J} = \sigma\vec{E}. \end{cases}$$

Перейдём в системе (1) к комплексным амплитудам, сделав следующую замену в уравнениях 1 и 2:

$$\begin{cases} \vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega, \\ \vec{E}_\omega\left(\vec{r},-\omega\right) = \vec{E}^*_\omega\left(\vec{r},\omega\right). \end{cases}, \begin{cases} \vec{H}\left(\vec{r},t\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega, \\ \vec{H}_\omega\left(\vec{r},-\omega\right) = H^*_\omega\left(\vec{r},\omega\right). \end{cases}$$

В нашем случае нет пространственных зарядов, и токов, поэтому:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla};\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega\right] = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega; \\ \left[\vec{\nabla};\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega\right] = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega; \end{cases}$$

Меняем пордок действия дифференциальных и интегральных операторов, так как интегрироваие и дифференцирование ведётся по не связанным переменным:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla};\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega\right] = -i\omega\frac{\varepsilon}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega; \\ \left[\vec{\nabla};\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega\right] = i\omega\frac{\mu}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega; \end{cases}$$

Последнее выражение должно выполняться при любом значении t, следовательно мы можем опустить интегрирование и сократить на $e^{-i\omega t}$:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla};\vec{H}\right] = -i\frac{\varepsilon\omega}{c}\vec{E}; \\ \left[\vec{\nabla};\vec{E}\right] = i\frac{\mu\omega}{c}\vec{H}; \end{cases} \tag{2}$$

Зависимость по z можно представить в виде:

$$\begin{cases} E_x\left(x,y,z\right) = E_{x,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \\ E_y\left(x,y,z\right) = E_{y,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \\ E_z\left(x,y,z\right) = E_{z,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x\left(x,y,z\right) = H_{x,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \\ H_y\left(x,y,z\right) = H_{y,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \\ H_z\left(x,y,z\right) = H_{z,0}\left(x,y,\gamma\right)e^{i\gamma z} \end{cases}$$

Тогда система 14 может быть записана в виде:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-i\gamma H_y\right)\bar{e}_x+\left(i\gamma H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\bar{e}_y+\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z=\frac{i\varepsilon\omega}{c}\vec{E};\\ \left(i\gamma E_z-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\bar{e}_x+\left(i\gamma E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\bar{e}_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z=-\frac{i\mu\omega}{c}\vec{H};\end{cases}$$

Распишем уравнения покомпанентно:

$$\begin{cases}\frac{\partial H_z}{\partial y}-i\gamma H_y=\frac{-i\omega\varepsilon}{c}E_x\\ i\gamma H_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{-i\omega\varepsilon}{c}E_y\\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{-i\omega\varepsilon}{c}E_z\end{cases},\begin{cases}\frac{\partial E_z}{\partial y}-i\gamma E_y=\frac{i\omega\mu}{c}H_x\\ i\gamma E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{i\omega\mu}{c}H_y\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{i\omega\mu}{c}H_z\end{cases}$$

Выражаем производные из первых двух уравнений каждой системы:

$$\begin{cases}i\gamma H_y-\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ i\gamma H_x+\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y=\frac{\partial H_z}{\partial x}\end{cases},\begin{cases}i\gamma E_y+\frac{i\omega\mu}{c}H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ i\gamma E_x-\frac{i\omega\mu}{c}H_y=\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{cases}$$

Рассмотрим два случйая поляризации волны:

$$\begin{cases}E_z\neq 0\\ H_z=0\end{cases},\begin{cases}E_z=0\\ H_z\neq 0\end{cases}$$

Для первого можно записать:

$$\begin{cases}E_z\neq 0\\ H_z=0\end{cases}:\begin{cases}i\gamma H_y-\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x=0\\ i\gamma H_x+\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y=0\end{cases},\begin{cases}i\gamma E_y+\frac{i\omega\mu}{c}H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ i\gamma E_x-\frac{i\omega\mu}{c}H_y=\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{cases}$$

Перегруппируем уравнения в две новые сисстемы:

$$\begin{cases}i\gamma E_y+\frac{i\omega\mu}{c}H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ \frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y+i\gamma H_x=0\end{cases},\begin{cases}-\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x+i\gamma H_y=0\\ i\gamma E_x-\frac{i\omega\mu}{c}H_y=\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}i\gamma & \frac{i\omega\mu}{c}\\ \frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-\frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\\ i\gamma & -\frac{i\omega\mu}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mu\varepsilon-\gamma^2}\begin{bmatrix}i\gamma & -\frac{i\omega\mu}{c}\\ -\frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix},\ \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\mu+\gamma^2}\begin{bmatrix}-\frac{i\omega\mu}{c} & -i\gamma\\ -i\gamma & -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial E_z}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\mu\varepsilon=(k_0)^2\mu\varepsilon=k^2$$

$$\frac{i}{k^2-\gamma^2}\begin{bmatrix}\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y}\\ -\varepsilon k_0\frac{\partial E_z}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix},\ \frac{i}{k^2-\gamma^2}\begin{bmatrix}\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x}\\ \varepsilon k_0\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix}$$

Для второго случа поляризации:

$$\begin{cases}E_z=0\\ H_z\neq 0\end{cases}:\begin{cases}-\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x+i\gamma H_y=\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ \frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y+i\gamma H_x=\frac{\partial H_z}{\partial x}\end{cases},\begin{cases}i\gamma E_y+\frac{i\omega\mu}{c}H_x=0\\ i\gamma E_x-\frac{i\omega\mu}{c}H_y=0\end{cases}\rightarrow$$

$$,\begin{cases}-\frac{i\omega\varepsilon}{c}E_x+i\gamma H_y=\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ i\gamma E_x-\frac{i\omega\mu}{c}H_y=0\end{cases},\begin{cases}i\gamma E_y+\frac{i\omega\mu}{c}H_x=0\\ \frac{i\omega\varepsilon}{c}E_y+i\gamma H_x=\frac{\partial H_z}{\partial x}\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\\ i\gamma & -\frac{i\omega\mu}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}i\gamma & \frac{i\omega\mu}{c}\\ \frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial H_z}{\partial x}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\frac{1}{-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\mu+\gamma^2}\begin{bmatrix}-\frac{i\omega\mu}{c} & -i\gamma\\ -i\gamma & -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix},\ \frac{1}{-\gamma^2+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\mu}\begin{bmatrix}i\gamma & -\frac{i\omega\mu}{c}\\ -\frac{i\omega\varepsilon}{c} & i\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial H_z}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\frac{i}{k^2-\gamma^2}\begin{bmatrix}\mu k_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\\ \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_x\\ H_y\end{bmatrix},\ \frac{i}{k^2-\gamma^2}\begin{bmatrix}-\mu k_0\frac{\partial H_z}{\partial x}\\ \gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_y\\ H_x\end{bmatrix}$$

Окончательно для E_z, H_z поляризаций имеем:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{i}{k^2-\gamma^2} \begin{pmatrix} \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\varepsilon k_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \varepsilon k_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{i}{k^2-\gamma^2} \begin{pmatrix} \mu k_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\mu k_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

2 Уравнения для E_z и H_z в неоднородной среде

3 Уравнение для E_z

Рассмотрим систему уравнений максвелла:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla}; \vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(J_{sided} + J\right); & (1) \\ \left[\vec{\nabla}; \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & (2) \\ \left(\vec{\nabla}; \vec{D}\right) = \rho; & (3) \\ \left(\vec{\nabla}; \vec{B}\right) = 0. & (4) \end{cases} \tag{4}$$

И материальные уравнения к ней:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \\ \vec{B} = \mu \vec{H}; \\ \vec{J} = \sigma \vec{E}. \end{cases}$$

В нашем случае нет пространственных зарядов, и токов, поэтому:

$$\begin{cases} \left[\vec{\nabla}; \vec{H}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & (1) \\ \left[\vec{\nabla}; \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & (2) \\ \left(\vec{\nabla}; \vec{D}\right) = \rho; & (3) \\ \left(\vec{\nabla}; \vec{B}\right) = 0. & (4) \end{cases} \tag{5}$$

Посчитаем ротор от ротора для вторго уравния системы 5:

$$\left[\vec{\nabla}; \left[\vec{\nabla}; \vec{E}\right]\right] = \left[\vec{\nabla}; -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] \tag{6}$$

Следовательно:

$$\left[\vec{\nabla}; \left[\vec{\nabla}; \vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}; \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} \tag{7}$$

Так в нашем случае:

$$\left(\vec{\nabla}; \vec{D}\right) = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}; \varepsilon \vec{E}\right) = \left(\vec{E}; \vec{\nabla}\varepsilon\right) + \varepsilon\left(\vec{\nabla}; \vec{E}\right) = 0$$

Выражаем дивергенцию вектора электрической индукции:

$$\frac{\left(\vec{E}; \vec{\nabla}\varepsilon\right)}{\varepsilon} = -\left(\vec{\nabla}; \vec{E}\right)$$

Это же выражение может быть представлено, как:

$$-\left(\vec{E}; \vec{\nabla} ln\left(\varepsilon\right)\right) = \left(\vec{\nabla}; \vec{E}\right) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) получим:

$$\left[\vec{\nabla};\left[\vec{\nabla};\vec{E}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla};\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}$$

Вторая половина уравнения(6)

$$\left[\vec{\nabla};-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla};\mu\vec{H}\right]$$

Окончательно уравнение (6) запишется в виде:

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla};\mu\vec{H}\right]$$

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\left(\vec{\nabla};\mu\right);\vec{H}\right]+\mu\left[\vec{\nabla};\vec{H}\right]\right)$$

Из первого уравнения системы (5) имеем:

$$[\nabla;\vec{H}]=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

Тогда:

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\left(\vec{\nabla};\mu\right);\vec{H}\right]+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c}\left(\left[\left(\vec{\nabla};\mu\right);\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)\tag{9}$$

Из второго уравнения системы (5) имеем:

$$[\nabla;\vec{E}]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$-\frac{c}{\mu}[\nabla;\vec{E}]=\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (9):

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{1}{c}\left(-c\left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{\nabla};\mu\right);[\nabla;\vec{E}]\right]+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)-\nabla^2\vec{E}-\left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{\nabla};\mu\right);[\nabla;\vec{E}]\right]=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E}+\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);[\nabla;\vec{E}]\right]-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\tag{10}$$

Перейдём в формуле (10) к комплексным амплитудам, сделав следующую замену:

$$\begin{cases}\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega,\\ \vec{E}_\omega\left(\vec{r},-\omega\right)=\vec{E}^*_\omega\left(\vec{r},\omega\right).\end{cases}$$

$$\nabla^2\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega+\vec{\nabla}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega;\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+$$

$$+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);[\nabla;\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega]\right]-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega=0$$

Меняем пордок действия дифференциальных и интегральных операторов, так как интегрироваие и дифференцирование ведётся по не связанным переменным:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^2\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega+\vec{\nabla}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\vec{E}_\omega\left(\vec{r},\omega\right);\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)e^{-i\omega t}d\omega+$$

$$+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla;\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right)\right]e^{-i\omega t}d\omega\right]-\frac{\mu\varepsilon}{c^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right)\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}e^{-i\omega t}d\omega=0$$

Беря производную по времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^{2}\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega+\vec{\nabla}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right);\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)e^{-i\omega t}d\omega+$$

$$+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\int_{-\infty}^{\infty}\left[\nabla;\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right)\right]e^{-i\omega t}d\omega\right]+\frac{\omega^{2}\mu\varepsilon}{c^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}_{\omega}\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega=0$$

Последнее выражение должно выполняться при любом значении t, следовательно мы можем опустить интегрирование и сократить на $e^{-i\omega t}$:

$$\nabla^{2}\vec{E}+\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]+\frac{\omega^{2}\mu\varepsilon}{c^{2}}\vec{E}=0$$

$$\frac{\omega^{2}\mu\varepsilon}{c^{2}}=k_{0}^{2}n^{2}$$

$$\nabla^{2}\vec{E}+\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]+k_{0}^{2}n^{2}\vec{E}=0 \tag{11}$$

Последнее уравнение может быть пероедставлено в виде трёх:

$$\begin{cases}\nabla^{2}E_{x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]_{x}+k_{0}^{2}n^{2}E_{x}=0 & (1)\\ \nabla^{2}E_{y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]_{y}+k_{0}^{2}n^{2}E_{y}=0 & (2)\\ \nabla^{2}E_{z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]_{z}+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0 & (3)\end{cases} \tag{12}$$

Глядя на формулы 14 и 16 приложения А можно стказать, что проще всего будет рассмотреть уравнение 3 системы 12 при условии, что$\mu\left(x,y,z\right)=\mu\left(x,y\right)=\mu_{x}\left(x\right)\mu_{y}\left(y\right)$ и $\varepsilon\left(x,y,z\right)=\varepsilon\left(x,y\right)=\varepsilon_{x}\left(x\right)\varepsilon_{y}\left(y\right)$

$$\nabla^{2}E_{z}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_{x}}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_{y}}{\partial z}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_{x}}{\partial z}-\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_{z}}{\partial y}-\frac{\partial E_{y}}{\partial z}\right)+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0 \tag{13}$$

Из пункта 1 мы знаем методику Выражение компанент векторного поля через E_z и H_z. Возвращаемся к уравнению 13 и подставляем выражения для производных, учитывая зависимость по z:

$$\nabla^{2}E_{z}+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_{x}}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_{y}}{\partial z}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_{x}}{\partial z}-\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_{z}}{\partial y}-\frac{\partial E_{y}}{\partial z}\right)+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0\rightarrow$$

Мы можем сделать следующее преобразование, так как ни μ, ни εне зависят от z.Функию $E_{z}=E_{z}\left(x,y\right)e^{i\gamma z}$

$$\nabla^{2}E_{z}+\frac{i\gamma}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_{x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_{y}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(i\gamma E_{x}-\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_{z}}{\partial y}-i\gamma E_{y}\right)+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0$$

$$\nabla^{2}E_{z}+\frac{i\gamma}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{i\gamma}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{i\gamma}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(i\gamma\left[\frac{i\gamma}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right]-\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_{z}}{\partial y}-i\gamma\left[\frac{i\gamma}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right]\right)+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0$$

$$\nabla^{2}E_{z}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(-\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}-\frac{\partial E_{z}}{\partial x}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_{z}}{\partial y}+\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+k_{0}^{2}n^{2}E_{z}=0$$

$$\nabla^{2}E_{z}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)-\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+k^{2}E_{z}=0$$

$$\nabla^{2}E_{z}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)-\left(\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}+1\right)\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+k^{2}E_{z}=0$$

$$\nabla^{2}E_{z}-\frac{\gamma^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\left(\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)-\frac{k^{2}}{k^{2}-\gamma^{2}}\left(\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial x}\frac{\partial E_{z}}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial y}\frac{\partial E_{z}}{\partial y}\right)+k^{2}E_{z}=0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}-\gamma^2 E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)+k^2 E_z=0$$

Окончательно имеем уравнение, которое в случае однородной среды легко переходит в уравнение гельмгольца.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\varepsilon\right)}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial ln\left(\mu\right)}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0 \quad (14)$$

Последнее уравнение можно представить в векторном виде:

$$\nabla^2_{xy}E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\varepsilon\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\mu\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0, \quad (15)$$

Где:

$$\vec{\nabla}_{xy}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

3.1 Уравнение для H_z

Воспользуемся уравнением 1 системы 5

$$\begin{cases}[\nabla;\bar{H}]=\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}; & (1)\\ [\nabla;\bar{E}]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}; & (2)\\ \left(\vec{\nabla};\vec{D}\right)=0; & (3)\\ \left(\vec{\nabla};\vec{B}\right)=0. & (4)\end{cases} \quad (16)$$

Посчитаем ротор от ротора для вторго уравния системы 5:

$$\left[\vec{\nabla};\left[\vec{\nabla};\vec{H}\right]\right]=\frac{1}{c}\left[\vec{\nabla};\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right] \quad (17)$$

Следовательно:

$$\left[\vec{\nabla};\left[\vec{\nabla};\vec{H}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla};\vec{H}\right)-\nabla^2\vec{H} \quad (18)$$

$$\left(\vec{\nabla};\vec{B}\right)=0$$

$$\left(\vec{\nabla};\mu\vec{H}\right)=\left(\vec{H};\vec{\nabla}\mu\right)+\mu\left(\vec{\nabla};H\right)=0$$

Выражаем дивергенцию вектора электрической индукции:

$$\frac{\left(\vec{H};\vec{\nabla}\mu\right)}{\mu}=-\left(\vec{\nabla};\vec{H}\right)$$

Это же выражение может быть представлено, как:

$$-\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)=\left(\vec{\nabla};\vec{H}\right) \quad (19)$$

$$\left[\vec{\nabla};\left[\vec{\nabla};\vec{H}\right]\right]=-\vec{\nabla}\left(\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)\right)-\nabla^2\vec{H}$$

Вспоминая про вторую половину равенства 20:

$$-\vec{\nabla}\left(\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)\right)-\nabla^2\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla};\varepsilon\vec{E}\right]=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left[\left(\vec{\nabla};\varepsilon\right);\vec{E}\right]+\varepsilon\left[\vec{\nabla};\vec{E}\right]\right)$$

Так как:

$$\left[\nabla ;\vec{E}\right]=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\ \ \left[\nabla ;\vec{H}\right]=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\to \frac{c}{\varepsilon}\left[\nabla ;\vec{H}\right]=\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Следовательно:

$$-\vec{\nabla}\left(\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)\right)-\nabla^2\vec{H}=\frac{1}{c}\left[\vec{\nabla}\varepsilon ;\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla};\vec{E}\right]$$

$$-\vec{\nabla}\left(\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)\right)-\nabla^2\vec{H}=\frac{1}{c}\left[\vec{\nabla}\varepsilon ;\frac{c}{\varepsilon}\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$-\vec{\nabla}\left(\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)\right)-\nabla^2\vec{H}=\left[\left(\vec{\nabla};ln\left(\varepsilon\right)\right);\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Окончательно:

$$\nabla^2\vec{H}+\vec{\nabla}\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right);\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}=0$$

Используя комплексные амплитуды:

$$\begin{cases}\vec{H}\left(\vec{r},t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{H}_\omega\left(\vec{r},\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega,\\ \vec{H}_\omega\left(\vec{r},-\omega\right)=\vec{H}^*_\omega\left(\vec{r},\omega\right).\end{cases}$$

Получим:

$$\nabla^2\vec{H}+\vec{\nabla}\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right);\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]+\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\vec{H}=0$$

$$\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}=k_0^2\varepsilon\mu=k_0^2n^2$$

$$\nabla^2\vec{H}+\vec{\nabla}\left(\vec{H};\vec{\nabla}ln\left(\mu\right)\right)+\left[\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right);\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]+k_0^2n^2\vec{H}=0 \tag{20}$$

У большинства изоляторов, коими диэлектрики являются $\mu\simeq 1$.Вспоминая уравнение 11, можно записать систему из следующих уравнений для электрического и магнитного поля:

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(n\right)\right)+k_0^2n^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+\left[\vec{\nabla}ln\left(n\right);\left[\nabla ;\vec{H}\right]\right]+k_0^2n^2\vec{H}=0\end{cases}$$

4 Разделение переменных в уравнениях для неоднородной среды

Воспользуемся уравнением 15 для случая, когда диэлектрическая проницаемость завсисит только от x и y, а $\mu\simeq 1$

$$\nabla^2_{xy}E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\varepsilon\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\mu\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0, \tag{21}$$

Где:

$$\vec{\nabla}_{xy}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\nabla^2_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$\nabla^2_{xy}E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\varepsilon\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\mu\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0,\to$$

$$\nabla^2_{xy}E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(\varepsilon\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)-\frac{k^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(1\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0,\quad n=\mu\varepsilon=1\varepsilon=\varepsilon.$$

$$\nabla^2_{xy}E_z-\frac{\gamma^2}{k^2-\gamma^2}\left(\vec{\nabla}_{xy}ln\left(n\right);\vec{\nabla}_{xy}E_z\right)+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0.$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial y}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\left(k_0^2n^2-\gamma^2\right)E_z=0.$$

Сделаем заимену вида:

$$E_z=\Phi\,(x)\,\Psi\,(y)$$

$$\frac{\partial^2\Phi\,(x)}{\partial x^2}\Psi\,(y)+\frac{\partial^2\Psi\,(y)}{\partial y^2}\Phi\,(x)-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial x}\frac{\partial\Phi\,(x)}{\partial x}\Psi\,(y)-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial y}\frac{\partial\Psi\,(y)}{\partial y}\Phi\,(x)+\left(k_0^2n^2-\gamma^2\right)\Phi\,(x)\,\Psi\,(y)=0.$$

Запишем производные в более компактном виде:

$$\Phi_{xx}\,(x)\,\Psi\,(y)+\Psi_{yy}\,(y)\,\Phi\,(x)-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial x}\Phi_x\,(x)\,\Psi\,(y)-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial y}\Psi_y\,(y)\,\Phi\,(x)+\left(k_0^2n^2-\gamma^2\right)\Phi\,(x)\,\Psi\,(y)=0.$$

Разделим вс на $E_z=\Phi\,(x)\,\Psi\,(y)$

$$\frac{\Phi_{xx}}{\Phi}+\frac{\Psi_{yy}}{\Psi}-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial x}\frac{\Phi_x}{\Phi}-\frac{\gamma^2}{(k_0^2n^2-\gamma^2)}\frac{\partial ln\,(n)}{\partial y}\frac{\Psi_y}{\Psi}+k_0^2n^2-\gamma^2=0.$$

Сгруппируем:

$$\frac{\Phi_{xx}}{\Phi}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n\,(x,y)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln\,(n\,(x,y))}{\partial x}\frac{\Phi_x}{\Phi}+\frac{\Psi_{yy}}{\Psi}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n\,(x,y)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln\,(n\,(x,y))}{\partial y}\frac{\Psi_y}{\Psi}+k_0^2n\,(x,y)^2-\gamma^2=0.$$

В таком виде задачу мы не решим, поэтому запишем зависимость строго от x для $\varepsilon\,(x)$ внутри слоя dy.

$$\frac{\Phi_{xx}}{\Phi}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln\,(n\,(x))}{\partial x}\frac{\Phi_x}{\Phi}+\frac{\Psi_{yy}}{\Psi}+k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2=0.$$

Оазделим переменные:

$$\frac{\Phi_{xx}}{\Phi}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln\,(n\,(x))}{\partial x}\frac{\Phi_x}{\Phi}+k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2=-\frac{\Psi_{yy}}{\Psi}=\beta^2.$$

Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\Phi_{xx}}{\Phi}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n(x)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln(n(x))}{\partial x}\frac{\Phi_x}{\Phi}+k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2-\beta^2=0\\ \frac{\Psi_{yy}}{\Psi}+\beta^2=0\end{cases}\quad\rightarrow$$

$$\begin{cases}\Phi_{xx}-\frac{\gamma^2}{\left(k_0^2n(x)^2-\gamma^2\right)}\frac{\partial ln(n(x))}{\partial x}\Phi_x+\left(k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2-\beta^2\right)\Phi=0\\ \Psi_{yy}+\beta^2\Psi=0\end{cases}$$

$$k_0^2n\,(x)^2-\gamma^2-\beta^2=k_x^2$$

$$\gamma^2=k_z^2$$

$$\beta^2=k_y^2$$

Иначе говоря:

$$k_0^2n\,(x)^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$$

$$\begin{cases}\Phi_{xx}-\frac{k_z^2}{\left(k_0^2n(x)^2-k_z^2\right)}\frac{\partial ln(n(x))}{\partial x}\Phi_x+k_x^2\,(x)\,\Phi=0\\ \Psi_{yy}+k_y^2\Psi=0\end{cases}\tag{22}$$

$$k_0^2 n\left(x\right)^2 - k_y^2 - k_z^2 = k_x^2$$

Обозначим сумму квадратов проекций волнового вектора $k_y^2 + k_z^2$ как:

$$k_y^2 + k_z^2 = k_k^2$$

Будем рассматривать слой dx в направление x, в котором уравнения 22 примут вид:

$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \left(k_0^2 n\left(x\right)^2 - k_k^2\right)\Phi = 0 \\ \Psi_{yy} + \left(k_k^2 - k_z^2\right)\Psi = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Последняя система уравнений описывает поле, которое находится в области: $[x, x+dx]\times[y, y+dy]$,где $n = \varepsilon\left(x, y\right) = const$. Ограничим область, где находится поле по x от 0 до a, и оазделим ее на $N = \frac{a-0}{dx}$ элементов. Сделаем следующую замену координат

$$x_i = idx,\ i = \overline{0, N-1}$$

$$k_x\left(x_i\right) = k_x^i$$

Тогда первое уравнение системы 23 примет вид:

$$\Phi_{xx} + \left(k_x^i\right)^2\Phi = 0 \tag{24}$$

Так как уравнение вида 24 рассматривается в областях размером dx, для которых εпостоянна, решение его можно записать в виде:

$$\Phi\left(x\right) = Asin\left(k_x x\right) + Bcos\left(k_x x\right) \tag{25}$$

Решение 25 будет описывть поле для всех возможных $\overline{idx : \left(i+1\right)dx}$. Граничные условия для полной области, где ищется решение можно записать в виде:

$$\Phi\left(a\right) = \Phi\left(0\right) = 0,$$

если границы области металлические и

$$\Phi_x\left(a\right) = \Phi_x\left(0\right) = 0,$$

если границы магнитные.

4.1 Решение вдоль оси x

Для начала рассчитаем значения констант на границах , для этого

$$\Phi\left(0\right) = Asin\left(k_x 0\right) + Bcos\left(k_x 0\right) \tag{26}$$

$$\Phi_x\left(0\right) = Ak_x cos\left(k_x 0\right) - Bk_x sin\left(k_x 0\right) \rightarrow$$

$$\Phi_x\left(0\right) = Ak_x cos\left(k_x 0\right) = Ak_x \rightarrow$$

$$A = \frac{\Phi_x\left(0\right)}{k_x} = \frac{\Phi_x\left(0\right)}{k_x}$$

Имеем следующие выражения длля констант:

$$\begin{cases} A = \frac{\Phi_x(0)}{k_x} \\ B = \Phi\left(0\right) \end{cases}$$

Для участка с номером i:

$$\begin{cases} A = \frac{\Phi_x^i}{k_x^i} \\ B = \Phi^i \end{cases},$$

решение для этого участка может быть записано в виде:

$$\Phi_i\left(x-x_i\right)=\frac{\Phi_x^i}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(x-x_i\right)\right)+\Phi^i cos\left(k_x^i\left(x-x_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial\Phi_i\left(x-x_i\right)}{\partial x}=\Phi_x^i cos\left(k_x^i\left(x-x_i\right)\right)-\Phi^i k_x^i sin\left(k_x^i\left(x-x_i\right)\right)$$

Принимая во внимание, что преобразование координат типа:

$$\eta=x-x_i$$

фактически переводит все область определения функции решения для i-ого участка в область $\eta\in\left[0;dx_{i+1}\right]$.Таким образом опишем значения функции решения для i сегмента на его границах:

$$\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)=\frac{\Phi_x^i}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)+\Phi^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)=\Phi^{i+1}\left(0\right)$$

$$\frac{\partial\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)}{\partial x}=\Phi_x^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)-\Phi^i k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)=\Phi_x^{i+1}\left(0\right)$$

Введём обозначения для правых и левых коэффициентов:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^i\left(x_i+0\right)\\ \Phi_x^i\left(x_i+0\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^i\left(0\right)\\ \Phi_x^i\left(0\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^i\left(x_{i+1}-0\right)\\ \Phi_x^i\left(x_{i+1}-0\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^i\left(d_{i+1}\right)\\ \Phi_x^i\left(d_{i+1}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]$$

Что-бы представить всё в векторно-матричном виде, сперва :

$$\begin{cases}\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)=\frac{\Phi_x^i}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)+\Phi^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\\ \frac{\partial\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)}{\partial x}=\Phi_x^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)-\Phi^i k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)=\Phi^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)+\frac{\Phi_x^i}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\\ \frac{\partial\Phi^i\left(dx_{i+1}\right)}{\partial x}=-\Phi^i k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)+\Phi_x^i cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\end{cases}$$

переходя к матричному виду:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & \frac{1}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\\ -k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]\tag{27}$$

Выражение 27 описывает способ выражения коэффциентов правых границ через левые. Можно, однако, выражать и наоборот:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & \frac{1}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\\ -k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]=P^i\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=P^i\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]\rightarrow\left[P^i\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[P^i\right]^{-1}P^i\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right],$$

окончательно:

$$\left[P^i\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]$$

$$\left[P^i\right]^{-1}=\left[\begin{array}{cc}cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & -\frac{1}{k_x^i}sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\\ k_x^i sin\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right) & cos\left(k_x^i\left(dx_{i+1}\right)\right)\end{array}\right]$$

Введём граничные условия для $x=0$ и $x=L_x$, соответственно левое и правое краевое условие:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(l)}\left(0\right)\\ \Phi_x^{1(l)}\left(0\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(l)}\\ \Phi_x^{1(l)}\end{array}\right],\quad\left[\begin{array}{c}\Phi^{N(l)}\left(L_x\right)\\ \Phi_x^{N(l)}\left(L_x\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\Phi^{N(l)}\\ \Phi_x^{N(l)}\end{array}\right]$$

В таком случае мы можем выразить правые и левые константы для любого сегмента dx_i:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\prod_{j=1}^{i}P^j\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(l)}\\ \Phi_x^{1(l)}\end{array}\right]\tag{28}$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]=\prod_{j=N}^{i+1}\left[P^j\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(r)}\\ \Phi_x^{1(r)}\end{array}\right] \tag{29}$$

В последней формуле перемножение матриц идёт в обратном порядке.

$$\prod_{j=N}^{i+1}\left[P^j\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(r)}\\ \Phi_x^{1(r)}\end{array}\right]=\prod_{j=1}^{i}P^j\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(l)}\\ \Phi_x^{1(l)}\end{array}\right]$$

Из соображений непрерывности решени на границах раздела сегментов имеем:

$$\begin{cases}\Phi^{(r)i}(x)=\Phi^{(l)i+1}(x)\\ \frac{\partial\Phi^{(r)i}(x)}{\partial x}=\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}\end{cases}\quad\begin{cases}\Phi^{(r)i}(x)-\Phi^{(l)i+1}(x)=0\\ \frac{\partial\Phi^{(r)i}(x)}{\partial x}-\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}=0\end{cases} \tag{30}$$

$$-\Phi^{(r)i}(x)\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}+\Phi^{(l)i+1}(x)\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}=0$$

$$-\frac{\partial\Phi^{(r)i}(x)}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}+\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}=0$$

$$-\Phi^{(r)i}(x)\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}+\Phi^{(l)i+1}(x)\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}+\frac{\partial\Phi^{(r)i}(x)}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}-\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}=0$$

Система 30 может иметь решение только, если

$$\Phi^{(r)i}(x)\frac{\partial\Phi^{(l)i+1}(x)}{\partial x}-\Phi^{(l)i+1}(x)\frac{\partial\Phi^{(r)i}(x)}{\partial x}=0 \tag{31}$$

Все сомножетели, входящие в формулу 31 выражаются через соотношения 28 и 29.

Рассмотрим интеграл перекрытия. Для этог введём обозначения для решения уравнения 24 в виде:

$$h\left(a,\frac{b}{k},kc\right)=acos(kc)+\frac{b}{k}sin(kc) \tag{32}$$

$$acos(kc)+\frac{b}{k}sin(kc)=bcos(kc)-aksin(kc)=h(b,-ak,kc)$$

Выражение 32 должно удовлетворять условиям интегрирования и дифференцирования:

$$\int h\left(a,\frac{b}{k},kc\right)dc \;=\; -\frac{b}{k^2}cos(kc)+\frac{a}{k}sin(kc)=h\left(-\frac{b}{k^2},\frac{a}{k},kc\right) \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}h(a,b,ck)=h(b,-ak,c)\,. \tag{34}$$

Теперь мы можем записать,например, выражение 27 ввиде:

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}cos\left(k_x^i(dx_{i+1})\right) & \frac{1}{k_x^i}sin\left(k_x^i(dx_{i+1})\right)\\ -k_x^isin\left(k_x^i(dx_{i+1})\right) & cos\left(k_x^i(dx_{i+1})\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}h\left(\Phi^{i,(l)},\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i},k_x^idx_{i+1}\right)\\ h\left(\Phi_x^{i,(l)},-\Phi^{i,(l)}k_x^i,k_x^idx_{i+1}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\Phi^{i,(l)} & \frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\\ \Phi_x^{i,(l)} & -\Phi^{i,(l)}k_x^i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}cos\left(k_x^idx_{i+1}\right)\\ sin\left(k_x^idx_{i+1}\right)\end{array}\right]$$

Аналогично можно сделать и для коэффициентов слева

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]=\prod_{j=N}^{i+1}\left[P^j\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}\Phi^{1(r)}\\ \Phi_x^{1(r)}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}cos\left(k_x^i(dx_{i+1})\right) & -\frac{1}{k_x^i}sin\left(k_x^i(dx_{i+1})\right)\\ k_x^isin\left(k_x^i(dx_{i+1})\right) & cos\left(k_x^i(dx_{i+1})\right)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Phi^{i(r)}\\ \Phi_x^{i(r)}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}h\left(\Phi^{i,(r)},-\frac{\Phi_x^{i,(r)}}{k_x^i},k_x^idx_{i+1}\right)\\ h\left(\Phi_x^{i,(r)},\Phi^{i,(r)}k_x^i,k_x^idx_{i+1}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\Phi^{i,(r)} & \frac{\Phi_x^{i,(r)}}{k_x^i}\\ \Phi_x^{i,(r)} & -\Phi^{i,(r)}k_x^i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}cos\left(k_x^idx_{i+1}\right)\\ sin\left(k_x^idx_{i+1}\right)\end{array}\right]$$

4.2 Интеграл перекрытия

Вернёмся к функции 25: $\Phi\left(x\right)=Asin\left(k_xx\right)+Bcos\left(k_xx\right)$ и рассмотрим интеграл вида:

$$\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\Phi_1\left(x\right)\Phi_2\left(x\right)dx,$$

здесь:

$$\begin{cases}\Phi_1\left(x\right)=Asin\left(k_x^1x\right)+Bcos\left(k_x^1x\right)\\ \Phi_2\left(x\right)=Csin\left(k_x^2x\right)+Dcos\left(k_x^2x\right)\end{cases}$$

$$\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\Phi_1\left(x\right)\Phi_2\left(x\right)dx=\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\left[Asin\left(k_x^1x\right)+Bcos\left(k_x^1x\right)\right]\left[Csin\left(k_x^2x\right)+Dcos\left(k_x^2x\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}ACsin\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)+ADsin\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)+CBcos\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)+DBcos\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)dx=$$

$$=\frac{AC}{\delta x}\int_0^{\delta x}sin\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)dx+\frac{AD}{\delta x}\int_0^{\delta x}sin\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)dx+\frac{CB}{\delta x}\int_0^{\delta x}cos\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)dx+\frac{DB}{\delta x}\int_0^{\delta x}cos\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)dx=$$

$$=\frac{AC}{\delta x}\left.\frac{k_x^2sin\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)+k_x^1cos\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}\right|_0^{\delta x}-\frac{AD}{\delta x}\left.\frac{k_x^2sin\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)+k_x^1cos\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}\right|_0^{\delta x}+...$$

$$\frac{CB}{\delta x}\left.\frac{k_x^1sin\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)+k_x^2cos\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}\right|+\frac{DB}{\delta x}\left.\frac{k_x^1sin\left(k_x^1x\right)cos\left(k_x^2x\right)-k_x^2cos\left(k_x^1x\right)sin\left(k_x^2x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}\right|_0^{\delta x}=$$

$$=\frac{AC}{\delta x}\frac{k_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)+k_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}-\frac{AD}{\delta x}\frac{k_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)+k_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^1}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+...$$

$$\frac{CB}{\delta x}\frac{k_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)+k_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+\frac{DB}{\delta x}\frac{k_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{AC}{\delta x}\frac{k_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+\frac{AC}{\delta x}\frac{k_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}-\frac{AD}{\delta x}\frac{k_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}-\frac{AD}{\delta x}\frac{k_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^1}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+\frac{AD}{\delta x}$$

$$\frac{CB}{\delta x}\frac{k_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+\frac{CB}{\delta x}\frac{k_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}-\frac{CB}{\delta x}\frac{k_x^2}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}+\frac{DB}{\delta x}\frac{k_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}-\frac{DB}{\delta x}\frac{k_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k\right.}{\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\delta x\left(\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2\right)}\left[ACk_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)+ACk_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)-ADk_x^2sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)-ADk_x^1cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(\right.\right.$$

$$CBk_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)+CBk_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-CBk_x^2+DBk_x^1sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)-DBk_x^2cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)\left.\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta x\left(\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2\right)}\left[\left(ACk_x^2+DBk_x^1\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)+\left(ACk_x^1-DBk_x^2\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)-...\right.$$

$$
-\left(ADk_x^2-CBk_x^1\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)-\left(ADk_x^1-CBk_x^2\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)+ADk_x^1-CBk_x^2]
$$

$$
\begin{cases} A=\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1} \\ B=\Phi^{1,(l)} \end{cases},\begin{cases} C=\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2} \\ D=\Phi^{2,(l)} \end{cases}.
$$

$$
\begin{cases}
\left(ACk_x^2+DBk_x^1\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)=\left(\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi_x^{2,(l)}+k_x^1\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)\\
\left(ACk_x^1-DBk_x^2\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)=\left(\Phi_x^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}-k_x^2\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)\\
-\left(ADk_x^2-CBk_x^1\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)=-\left(k_x^2\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi^{2,(l)}-k_x^1\Phi^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)\\
-\left(ADk_x^1-CBk_x^2\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)=-\left(\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}-\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(l)}\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi_x^{2,(l)}+k_x^1\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)\\
\left(\Phi_x^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}-k_x^2\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)\\
-\left(k_x^2\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi^{2,(l)}-k_x^1\Phi^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}\right)sin\left(k_x^1\delta x\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)\\
-\left(\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}-\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(l)}\right)cos\left(k_x^1\delta x\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)
\end{cases}
\tag{35}
$$

Рассмотрим слогаемые первой и третьей строк системы 35:

$$
sin\left(k_x^1\delta x\right)\left[\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi_x^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)+k_x^1\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi^{2,(l)}sin\left(k_x^2\delta x\right)+k_x^1\Phi^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}sin\left(k_x^2\delta x\right)\right]
$$

объединим первое с третьем а второе с четвёртым слогаемым:(тут ошибка, во второй скобке должен быть другой знак, надо проверить интеграл)

$$
sin\left(k_x^1\delta x\right)\left[\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\left(\Phi_x^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2\Phi^{2,(l)}sin\left(k_x^2\delta x\right)\right)+k_x^1\Phi^{1,(l)}\left(\Phi^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)+\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}sin\left(k_x^2\delta x\right)\right)\right]=...
$$

$$
\begin{cases}
\Phi_x^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2\Phi^{2,(l)}sin\left(k_x^2\delta x\right)=\Phi_x^{2,(r)}\\
\Phi^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)+\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}sin\left(k_x^2\delta x\right)=\Phi^{2,(r)}
\end{cases}
\quad ...
$$

$$
sin\left(k_x^1\delta x\right)\left[\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi_x^{2,(r)}-k_x^1\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(r)}\right]
$$

Аналогично поступи со второй и четвйртой строкой системы (35)

$$
cos\left(k_x^1\delta x\right)\left(\left(\Phi_x^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}-k_x^2\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)sin\left(k_x^2\delta x\right)-\left(\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}-\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(l)}\right)cos\left(k_x^2\delta x\right)\right)=
$$

$$
=cos\left(k_x^1\delta x\right)\left(\Phi_x^{1,(l)}\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}sin\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}sin\left(k_x^2\delta x\right)-\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)+\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)\right)=
$$

$$
=cos\left(k_x^1\delta x\right)\left(\Phi_x^{1,(l)}\left(\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}sin\left(k_x^2\delta x\right)+\Phi^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)\right)+\Phi^{1,(l)}\left(\Phi_x^{2,(l)}cos\left(k_x^2\delta x\right)-k_x^2\Phi^{2,(l)}sin\left(k_x^2\delta x\right)\right)\right)=
$$

$$
cos\left(k_x^1\delta x\right)\left[\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(r)}+\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(r)}\right]
$$

Итого:

$$
\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\Phi_1\left(x\right)\Phi_2\left(x\right)dx=\frac{1}{\delta x\left(\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2\right)}\left(\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\Phi_x^{2,(r)}sin\left(k_x^1\delta x\right)-k_x^1\Phi^{1,(l)}\Phi^{2,(r)}sin\left(k_x^1\delta x\right)+\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(r)}cos\left(k_x^1\delta x\right)+\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(r)}c
$$

$$= \frac{1}{\delta x\left(\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2\right)}\left(\Phi_x^{2,(r)}\left(\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}sin\left(k_x^1\delta x\right)+\Phi^{1,(l)}cos\left(k_x^1\delta x\right)\right)-\Phi^{2,(r)}\left(k_x^1\Phi^{1,(l)}sin\left(k_x^1\delta x\right)-\Phi_x^{1,(l)}cos\left(k_x^1\delta x\right)\right)+\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}-\Phi^{}\right.$$

$$= \frac{1}{\delta x\left(\left(k_x^1\right)^2-\left(k_x^2\right)^2\right)}\left(\Phi_x^{2,(r)}\Phi^{1,(r)}-\Phi^{2,(r)}\Phi_x^{1,(r)}-\Phi^{1,(l)}\Phi_x^{2,(l)}+\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{2,(l)}\right)$$

Простой интеграл перекрытия, небходимый для нормирования всей функции решения на единицу. Этот интеграл иеет следующий вид:

$$\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\Phi\left(x\right)^2dx=\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\left(Asin\left(k_xx\right)+Bcos\left(k_xx\right)\right)\left(Asin\left(k_xx\right)+Bcos\left(k_xx\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\left[A^2sin^2\left(k_xx\right)+2ABsin\left(k_xx\right)cos\left(k_xx\right)+B^2cos^2\left(k_xx\right)\right]dx=$$

Синус двойнгого угла:

$$2sin\left(k_xx\right)cos\left(k_xx\right)=sin\left(2k_xx\right)$$

$$=\frac{1}{\delta x}\left[A^2\int_0^{\delta x}sin^2\left(k_xx\right)dx+AB\int_0^{\delta x}sin\left(2k_xx\right)dx+B^2\int_0^{\delta x}cos^2\left(k_xx\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta x}\left[A^2\left[\frac{x}{2}-\frac{sin\left(2k_xx\right)}{4k_x}\right]_0^{\delta x}+AB\left[-\frac{cos\left(2k_xx\right)}{2k}\right]_0^{\delta x}+B^2\left[\frac{x}{2}+\frac{sin\left(2k_xx\right)}{4k_x}\right]_0^{\delta x}\right]. \tag{36}$$

Константы A, B равны соотвественно:

$$\begin{cases}A=\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\\ B=\Phi^{i,(l)}\end{cases},$$

тогда, подставляя их в формулу 35, имеем:

$$\frac{1}{\delta x}\int_0^{\delta x}\Phi\left(x\right)^2dx=\frac{1}{\delta x_i}\left[\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\left[\frac{x}{2}-\frac{sin\left(2k_x^ix\right)}{4k_x^i}\right]_0^{\delta x_i}+\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\Phi^{i,(l)}\left[-\frac{cos\left(2k_xx\right)}{2k}\right]_0^{\delta x_i}+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\left[\frac{x}{2}+\frac{sin\left(2k_x^ix\right)}{4k_x^i}\right]_0^{\delta x_i}\right]=$$

$$=\frac{1}{\delta x_i}\left[\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\left[\frac{\delta x_i}{2}-\frac{sin\left(2k_x^i\delta x_i\right)}{4k_x^i}\right]+\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\Phi^{i,(l)}\left[-\frac{cos\left(2k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}+\frac{1}{2k_x^i}\right]+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\left[\frac{\delta x_i}{2}+\frac{sin\left(2k_x^i\delta x_i\right)}{4k_x^i}\right]\right]$$

Упрощаем и группируем:

$$\frac{1}{\delta x_i}\left[\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}\left[1-cos\left(2k_x^i\delta x_i\right)\right]+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\frac{sin\left(2k_x^i\delta x_i\right)}{4k_x^i}-\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\frac{sin\left(2k_x^i\delta x_i\right)}{4k_x^i}+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right]=$$

$$\frac{1}{\delta x_i}\left[\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}\left[1-cos^2\left(k_x^i\delta x_i\right)+sin^2\left(k_x^i\delta x_i\right)\right]+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}-\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\right.\right.\right.$$

$$\frac{1}{\delta x_i}\left[\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}-\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}cos^2\left(k_x^i\delta x_i\right)+\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}sin^2\left(k_x^i\delta x_i\right)+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}-\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\right.}{2k_x^i}\right.$$

Рассмортрим два следующих слогаемых из последнего выражения:

$$-\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}cos^2\left(k_x^i\delta x_i\right)-\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}=$$

$$-\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)\left[\Phi^{i,(l)}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)+\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}sin\left(k_x^i\delta x_i\right)\right]=-\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)\Phi^{i(r)}$$

Ещё пара слогаемых

$$\frac{\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}sin^2\left(k_x^i\delta x_i\right)+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\frac{cos\left(k_x^i\delta x_i\right)sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}=$$

$$=\frac{sin\left(k_x^i\delta x_i\right)}{2k_x^i}\Phi^{i,(l)}\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}sin\left(k_x^i\delta x_i\right)+\Phi^{i,(l)}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)\right)=\frac{\Phi^{i,(l)}}{2k_x^i}sin\left(k_x^i\delta x_i\right)\Phi^{i(r)}$$

Складываем:

$$-\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{2\left(k_x^i\right)^2}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)\Phi^{i(r)}+\frac{\Phi^{i,(l)}}{2k_x^i}sin\left(k_x^i\delta x_i\right)\Phi^{i(r)}=-\left[\Phi_x^{i,(l)}cos\left(k_x^i\delta x_i\right)-k_x^i\Phi^{i,(l)}sin\left(k_x^i\delta x_i\right)\right]\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\Phi^{i(r)}=\frac{-\Phi_x^{i(r)}\Phi^{i(r)}}{2\left(k_x^i\right)^2}$$

окончательно имеем выражение для интеграла:

$$\frac{1}{\delta x_i}\int_0^{\delta x_i}\Phi\left(x\right)^2dx=\frac{1}{\delta x_i}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\Phi_x^{i(r)}\Phi^{i(r)}\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right]$$

Для нормировки строки имеем:

$$I=\int_{x^1}^{x^{N+1}}\Phi^i\left(x\right)^2dx=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\Phi_x^{i(r)}\Phi^{i(r)}\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right]$$

Теперь, если мы хотим определить $\Phi^{1,(l)}$, то мы должны занулить $\Phi_x^{1,(l)}$и наоборот. После чего досточно решить уравнение вида:

$$1=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\Phi_x^{i(r)}\Phi^{i(r)}\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right].$$

Рассмотрим случай, когда требуется найти значение граничных констатн в случае электрических стенок, дя которых:

$$\vec{\Phi}^{1,l}=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$$

$$1=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\Phi_x^{i(r)}\Phi^{i(r)}\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right]$$

или:

$$1=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\Phi_x^{i+1(l)}\Phi^{i+1(l)}\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right].$$

Пусть N=2:

$$1=\frac{1}{2\left(k_x^1\right)^2}\left(\Phi_x^{1,(l)}\Phi^{1,(l)}-\Phi_x^{2(l)}\Phi^{2(l)}\right)+\frac{\delta x_1}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{1,(l)}}{k_x^1}\right)^2+\left(\Phi^{1,(l)}\right)^2\right)+.$$

$$+\frac{1}{2\left(k_x^2\right)^2}\left(\Phi_x^{2,(l)}\Phi^{2,(l)}-\Phi_x^{3(l)}\Phi^{3(l)}\right)+\frac{\delta x_2}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{2,(l)}}{k_x^2}\right)^2+\left(\Phi^{2,(l)}\right)^2\right)$$

$$M_i\begin{bmatrix}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi^{i,(l)}\\ \Phi_x^{i,(l)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_i\Phi^{i,(l)}+b_i\Phi_x^{i,(l)}\\ c_i\Phi^{i,(l)}+d_i\Phi_x^{i,(l)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi^{i,(r)}\\ \Phi_x^{i,(r)}\end{bmatrix}$$

$$1=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\left(a_i\Phi^{i,(l)}+b_i\Phi_x^{i,(l)}\right)\left(c_i\Phi^{i,(l)}+d_i\Phi_x^{i,(l)}\right)\right)+\frac{\delta x_i}{2}\left(\left(\frac{\Phi_x^{i,(l)}}{k_x^i}\right)^2+\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2\right)\right].$$

$$\left(\Phi_x^{i,(l)}\Phi^{i,(l)}-\left(a_i\Phi^{i,(l)}+b_i\Phi_x^{i,(l)}\right)\left(c_i\Phi^{i,(l)}+d_i\Phi_x^{i,(l)}\right)\right)=-\frac{1}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(a_ic_i\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2+\left(b_ic_i+a_id_i-1\right)\Phi^{i,(l)}\Phi_x^{i,(l)}+b_id_i\left(\Phi_x^{i,(l)}\right)^2\right)\rightarrow$$

$$1=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\delta x_i\left(k_x^i\right)^2-a_ic_i}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi^{i,(l)}\right)^2-\frac{b_ic_i+a_id_i-1}{2\left(k_x^i\right)^2}\Phi^{i,(l)}\Phi_x^{i,(l)}-\frac{b_id_i-\delta x_i}{2\left(k_x^i\right)^2}\left(\Phi_x^{i,(l)}\right)^2\right]$$

4.3 Решение вдоль оси y

Рассмотрим уравнение второе уравнение системы 23:

$$\Psi_{yy}+\left(k_k^2-k_z^2\right)\Psi=0$$

$$\Psi_{k,yy}^j+\left(\left(k_k^{(j)}\right)^2-k_z^2\right)^2\Psi_k^j=0. \tag{37}$$

В последнем уравнении Ψ_k^j - k-ая мода в строке с индексом j, которая соотвествует $\left(k_k^j\right)$так же как и $\Phi_k^j(x)$. Решением для уравнения 36 будет:

$$\Psi_k^j\left(x^j\right)=\frac{\Psi_{k,y}^{j(l)}}{k_y^j}sin\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)+\Psi_k^{j,(l)}cos\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)$$

Здесь:

$$k_y^j=\sqrt{\left(k_k^{(j)}\right)^2-k_z^2},$$

а так же по-аналогии с решением вдоль оси x:

$$\begin{bmatrix}\Psi_k^j\left(y_j+0\right)\\ \Psi_{k,y}^j\left(y_j+0\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_k^{j,(l)}\\ \Psi_{k,y}^{j,(l)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_k^j\left(y_{j+1}-0\right)\\ \Psi_{k,y}^j\left(y_{j+1}-0\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_k^{j,(r)}\\ \Psi_{k,y}^{j,(r)}\end{bmatrix}$$

Далее идёт момент, которого я не понимаю, но он следующий. Выражение вида 27 не выполняется, зато справедливы следующие выражения:

$$\begin{cases}\Psi_k^{j,(r)}=\Psi_k^{j+1,(l)}\\ \Psi_{ky}^{j,(r)}=\Psi_{ky}^{j+1,(l)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Psi_k^{j,(r)}=cos\left(k_y^j\left(dy^j\right)\right)\Psi_k^{j,(l)}+\frac{\Psi_{k,y}^{j,(l)}}{k_y^j}sin\left(k_y^j\left(dy^j\right)\right)\\ \Psi_k^{j,(l)}=cos\left(k_y^j\left(dy^j\right)\right)\Psi_k^{j,(r)}-\frac{\Psi_{k,y}^{j,(r)}}{k_y^j}sin\left(k_y^j\left(dy^j\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} k_y^j \frac{1}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(r)} - k_y^j \frac{cos\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(l)} = \Psi_{k,y}^{j,(l)} \\ k_y^j \frac{1}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(l)} - k_y^j \frac{cos\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(r)} = -\Psi_{k,y}^{j,(r)} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{k_y^j}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(r)} - \frac{k_y^j}{tan\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(l)} = \Psi_{k,y}^{j,(l)} \\ -\frac{k_y^j}{sin\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(l)} + \frac{k_y^j}{tan\left(k_y^j(y-y^j)\right)} \Psi_k^{j,(r)} = \Psi_{k,y}^{j,(r)} \end{cases} \tag{38}$$

принмая во внимание, что k_y^jзависит от набора величинk_k, где предполагается, что все они рассчитаны в предыдущем разделе и индекс $k = \overline{1:K}$,можно записать 37 в векторно-матринчном виде:

$$T^{(j)} = \frac{k_y^j}{tan\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)}, S^{(j)} = \frac{k_y^j}{sin\left(k_y^j\left(y-y^j\right)\right)}$$

-диагональные матрицы $T^{(j)}, S^{(j)} \in R^{K\times K}$, тогда можно переписать уравнения 37 в виде:

$$\begin{cases} S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} - T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \\ -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi}_y^{j,(r)} \end{cases} \tag{39}$$

Далее рассмотрим интеграл перекрытия:

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{x^{N+1} - x^1} \int_{x^1}^{x^{N+1}} f_1\left(x\right) f_2\left(x\right) dx$$

в котором в качестве функций $f_1\left(x\right)$ и $f_2\left(x\right)$ будут Φ^j и $\Phi^{j\pm1}$,взятые в k-ом и p-ом столбцах.

$$O_{kp}^{j,j\pm1} = \frac{1}{x^{N+1} - x^1} \int_{x^1}^{x^{N+1}} \Phi_k^j \Phi_p^{j'} dx \tag{40}$$

Ввиду ортогональности функций Φ^iи$\Phi^{i\pm1}$, занчение этого интеграла для разных k, p, принадлежащих $[1, N]$и $[1, N]$соответственно, является диагоняльной матрицей $O_{kp}^{i,j'}$.Эта матрица обладает свойством:

$$\left(O^{j,j'}\right)^T = O^{j',j}.$$

Стоит отметить, что ввиду нормировки функций Φ^iи$\Phi^{i\pm1}$,матрица :

$$O^{i,j'} O^{j',i} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Используя матрицу 40, можно представить решение для правой границы сегмента через левую, приняв за $j'j+1$:

$$\begin{cases} \vec{\Psi}^{j,(r)} = O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} \\ \vec{\Psi}_y^{j,(r)} = O^{j,j+1}\vec{\Psi}_y^{j+1,(l)} \end{cases} \tag{41}$$

Чтобы сшить решения для каждогй строки, мы должны удовлетворять условию:

$$\begin{cases} \vec{\Psi_y}^{j,(r)} = \vec{\Psi_y}^{j+1,(l)} \\ \vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi}^{j+1,(l)} \end{cases} \tag{42}$$

Распишем первую стоку системы, используя выражения:

$$\begin{cases} S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} - T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \\ -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi}_y^{j,(r)} \end{cases} , \tag{43}$$

Получим:

$$\vec{\Psi_y}^{j,(r)} = \vec{\Psi_y}^{j+1,(l)}$$

$$O^{j,j+1}\vec{\Psi}_y^{j+1,(l)} = -S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(r)} \tag{44}$$

В формулу 44 подставим выражения из формулы 43:

$$O^{j,j+1}\left(S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(r)} - T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)}\right) = -S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(r)}$$

Заменяем $\vec{\Psi}^{j+1,(r)}$на $O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)}$

$$O^{j,j+1}\left(S^{(j+1)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)} - T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)}\right) = -S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + T^{(j+1)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)}$$

Смеущаем индекс на 1

$$O^{j,j+1}\left(S^{(j+1)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)} - T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)}\right) = -S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + T^{(j+1)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)}$$

-
-
-
–
-
–
-
–
-

$$-S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} = S^{(j+1)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)} - T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j+1,(l)} \tag{45}$$

Сместим идексы:

$$-S^{(j-1)}\vec{\Psi}^{j-1,(l)} + T^{(j-1)}O^{j,j}\vec{\Psi}^{j,(l)} = S^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} - T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \tag{46}$$

$$-S^{(j-1)}\vec{\Psi}^{j-1,(l)} + T^{(j-1)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = S^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} - T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \tag{47}$$

$$\begin{cases} S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} - T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \\ -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi}_y^{j,(r)} \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi_y}^{j+1,(l)} \\ O^{j,j+1}\left(-T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(r)}\right) = \vec{\Psi}^{j+1,(l)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} = -T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + S^{(j)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)} \\ O^{j,j+1}\left(-T^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} + S^{(j+1)}\vec{\Psi}^{j+1,(r)}\right) = \vec{\Psi}^{j+1,(l)} \end{cases}$$

$$\left(T^{(j)}O^{j,j+1} + T^{(j+1)}\right)\vec{\Psi}^{j+1,(l)} - S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} = S^{(j)}O^{j,j+2}\vec{\Psi}^{j+2,(l)}$$

Подставляя в 39 формулы из 41 получим, для этого определим:

$$\begin{cases} -T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \\ -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(r)} = \vec{\Psi_y}^{j,(r)} \end{cases} \tag{49}$$

$$\begin{cases} -T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + S^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} = \vec{\Psi}_y^{j,(l)} \\ -S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} = O^{j,j+1}\vec{\Psi}_y^{j+1,(l)} \end{cases} \tag{50}$$

$$-T^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + S^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)} - S^{(j)}\vec{\Psi}^{j,(l)} + T^{(j)}O^{j,j+1}\vec{\Psi}^{j+1,(l)}$$

5 Приложение А

Раскроем все скобки для диэлектрической проницаемости:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{E};\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]\end{pmatrix}$$

Первая компонента:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]=-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial z}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

Вторая компонента:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]=-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y\partial z}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

Третья компонента:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)\right]=-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial z}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y\partial z}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial z}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y\partial z}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}E_z\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial z}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y\partial z}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}E_z+\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\end{pmatrix}=$$

В случае:$\varepsilon\left(x,y,z\right)=\varepsilon\left(x,y\right)=\varepsilon_x\left(x\right)\varepsilon_y\left(y\right)$:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{E};\vec{\nabla}ln\left(\varepsilon\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\\ \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}E_y\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial y}E_x+\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2}E_y+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)\\ \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\end{pmatrix}\tag{51}$$

Расскроем скобки для магнитной проницаемости:

$$\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);\left[\nabla;\vec{E}\right]\right]=\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial\mu}{\partial x}&\frac{\partial\mu}{\partial y}&\frac{\partial\mu}{\partial z}\\ \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial y}&\frac{\partial\mu}{\partial z}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial x}&\frac{\partial\mu}{\partial z}\\ \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial x}&\frac{\partial\mu}{\partial y}\\ \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\end{vmatrix}\right)=$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\vec{i}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right)+\right.$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right)\right) \tag{52}$$

$$\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);[\nabla;\vec{E}]\right]=\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \tag{53}$$

В случае:$\mu\left(x,y,z\right)=\mu\left(x,y\right)=\mu_x\left(x\right)\mu_y\left(y\right)$

$$\left[\vec{\nabla}ln\left(\mu\right);[\nabla;\vec{E}]\right]=$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(-\vec{i}\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\vec{j}\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+\vec{k}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)-\frac{\partial\mu}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right)\right)$$