Основы трейсинга лучей

January 28, 2019

1 Описание луча в изотропной среде

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{\rho}_0 + \vec{e}t \tag{1}$$

Здесь$\vec{\rho}_0$ - радиус-ветор точки начала луча; $\vec{e}$ - вектор направления луча (для упрощения в дальнейшем будем считать, что $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$); t - параметр, определяющий длинну луча. Такая запись справедлива только для изотропных сред!

2 Пересесчение с плосокстью

Уравнение плосокости ($\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ - скалярное произведение):

$$(\vec{n}, (\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0$$

Здесь $\vec{n}$- вектор нормали к плоскости; $\vec{r}_0$- радиус вектор через который плоскость проходит. Что бы нати точку пересечения:

$$(\vec{n}, (\vec{\rho}_0 + \vec{e}t - \vec{r}_0)) = 0$$

$$(\vec{n}, \vec{e})\, t = (\vec{n}, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0)$$

$$t = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0)}{(\vec{n}, \vec{e})}$$

В том случае, если

$$\vec{\rho}_0 = [0, 0, 0]$$

$$\vec{r} = \vec{e}t \tag{2}$$

Имеем:

$$t = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{e})}$$

3 Преобразование координат

Двольно просто искать пересечение лучей с геометрическими объетами,находящимися в начале кординат. Например, для плосокости удобно сделать так, что бы вектор нормали к ней совпал с осью z. Сама плоскость проходит через оси Ox и Oy. Ось вращения сферических поверхностей так же должна совпадать с Oz, но есть нюанс связанный со знаком кривизны поверхности:

1)Если кривизна поверхности отрицательна, то координаты центра сверы в будут:$[0, 0, -R]$

2)Если кривизна поверхности положительна, то координаты центра сверы в будут:$[0, 0, R]$

Пускай собственный базис поверхности состоит из трёх векторов: $\vec{t}$ - тангент; $\vec{b}$ - битангент; $\vec{n}$ - нормаль, которая совпадает с осью Z.

В виде матриц это может быть записано следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Что бы задать поверхности ориентацию базис нужно умножить на матрицу поворота и сдвига.
Матрица поворота состоит иза произведения трёх матриц для поворота по отдельным осям:

$$M_{rot}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = M_{rot}^{x}\left(\alpha\right) M_{rot}^{y}\left(\beta\right) M_{rot}^{z}\left(\gamma\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\alpha\right) & -sin\left(\alpha\right) \\ 0 & sin\left(\alpha\right) & cos\left(\alpha\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\left(\beta\right) & 0 & sin\left(\beta\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\beta\right) & 0 & cos\left(\beta\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\left(\gamma\right) & -sin\left(\gamma\right) & 0 \\ sin\left(\gamma\right) & cos\left(\gamma\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оперировать будем четырёхмерными матрицами, поетому матрицу поворота модифицируем следующим образом:

$$M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \begin{bmatrix} M_{rot}\left(\alpha,\beta,\gamma\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Стоит отметить замечательное свойство такой матрицы:

$$M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)^{-1} = M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)^{T}$$

Выбор четырёхмерных матриц целесообразен тем, что мы можем записать матрицу сдвига в следующем виде:

$$M_{shift}\left(\vec{r}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r_x \\ 0 & 1 & 0 & r_y \\ 0 & 0 & 1 & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тем самым все преобразования над лучами мы сведём к матричным преобразованиям.
Вектора, которые будут подвергаться преобрахзованиям должны удовлетворять следующим условиям :
Если вектор задаёт положение в пространстве, то он имеет следующий вид:

$$\vec{r} = \left(r_x, r_y, r_z, 1\right);$$

Если вектор задаёт направление , то:

$$\vec{e} = \left(e_x, e_y, e_z, 0\right);$$

Лекго убедиться в том, что вектор направления инвариантен относительно сдвига.
Получается, что для произвольного аналитически заданного геометрического объека, который находится в точке $\vec{r}_0$и ориентирован углами (α, β, γ)точки пересечения лучей ищутся по следующему алгоритму:
1) Мы должны перейти собственную ситему координат объекта, преобразовав начала и напраления лучей:

$$\vec{r}' = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right] M_{shift}\left(\vec{r}\right) \left(\vec{r}, 0\right)^{T}$$

$$\vec{e}' = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right] M_{shift}\left(\vec{e}\right) \left(\vec{e}, 0\right)^{T}$$

Поворот инвареантен относительно сдвига, поэтому:

$$\vec{e}' = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right] \left(\vec{e}, 0\right)^{T}$$

Определить точки пересечения лучей с поверхностью. Параметрическая запись в этом случае очень удобна тем, что длина луча от начала до пересечения с поверхностью инвариантна относительно поворота и сдвига. Длина луча, как было указано ранее, является значением параметраt.

4 Пересечение луча со сферой

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}t \tag{3}$$

Сфера задана в виеде :

$$(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0, \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = R^2 \tag{4}$$

Что бы найти точку пересечения нам надо подставить 1 в 2:

$$(\vec{r}_0 + \vec{e}t - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 + \vec{e}t - \vec{\rho}_0) = R^2$$

Перезапишм это всё в виде от t:

$$(r_x + e_x t - \rho_x)^2 + (r_y + e_y t - \rho_y)^2 + (r_z + e_y t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$(r_x + e_x t - \rho_x)^2 + (r_y + e_y t - \rho_y)^2 + (r_z + e_y t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$r_x^2 + 2r_x (e_x t - \rho_x) + (e_x t - \rho_x)^2 + r_y^2 + 2r_y (e_y t - \rho_y) + (e_y t - \rho_y)^2 + r_z^2 + 2r_z (e_z t - \rho_z) + (e_z t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$r_x^2 + 2r_x e_x t - 2r_x \rho_x + e_x^2 t^2 - 2te_x \rho_x + \rho_x^2 + ...$$

$$+r_y^2 + 2r_y e_y t - 2r_y \rho_y + e_y^2 t^2 - 2te_y \rho_y + \rho_y^2 + ...$$

$$+r_z^2 + 2r_z e_z t - 2r_z \rho_z + e_z^2 t^2 - 2te_z \rho_z + \rho_z^2 = R^2$$

$$\left(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\right) t^2 + 2t (r_x e_x - e_x \rho_x + r_y e_y - e_y \rho_y + r_z e_z - e_z \rho_z) + (r_x - \rho_x)^2 + (r_y - \rho_y)^2 + (r_z - \rho_z)^2 = R^2$$

Последнее выражение можно записать компактно в виде:

$$(\vec{e}, \vec{e})\, t^2 + 2t (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) + (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2 =$$

В таком случае:

$$t_{1,2} = \frac{(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - (\vec{e}, \vec{e}) \left((\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2\right)}}{(\vec{e}, \vec{e})}$$

Так как:

$$(\vec{e}, \vec{e}) = 1$$

$$t_{1,2} = (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) + R^2}$$

Если сфера находится в центре

$$t_{1,2} = (\vec{r}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0, \vec{e})^2 - \left((\vec{r}_0, \vec{r}_0) - R^2\right)}$$

Луч пересечёт сферу только в случае

$$(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - \left((\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2\right) \geq 0$$

Если луч пересекает сферу, то для нормали в точках пересечения имеем два варианта:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,(t_{1,2}) - \vec{\rho}_0}{\|\vec{r}\,(t_{1,2}) - \vec{\rho}_0\|}$$

Если у нас выпуклая поверхность, то

$$(\vec{n}, \vec{e}) > 0$$

Если вогнутая, то

$$(\vec{n}, \vec{e}) < 0$$

5 Пересечения луча элипсойдом

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}t \tag{5}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + e_x t \\ y = y_0 + e_y t \\ z = z_0 + e_z t \end{cases}$$

Эдипс задан в виде:

$$\frac{(x-\rho_x)^2}{a^2} + \frac{(y-\rho_y)^2}{b^2} + \frac{(z-\rho_z)^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{(x_0 + e_x t - \rho_x)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + e_y t - \rho_y)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + e_z t - \rho_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0\left(e_x t - \rho_x\right) + \left(e_x t - \rho_x\right)^2}{a^2} + \frac{y_0^2 + 2y_0\left(e_y t - \rho_y\right) + \left(e_y t - \rho_y\right)^2}{b^2} + \frac{z_0^2 + 2z_0\left(e_z t - \rho_z\right) + \left(e_z t - \rho_z\right)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0 e_x t - 2x_0\rho_x + e_x^2 t^2 - 2e_x\rho_x t + \rho_x^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{y_0^2 + 2y_0 e_y t - 2y_0\rho_y + e_y^2 t^2 - 2e_y\rho_y t + \rho_y^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{z_0^2 + 2z_0 e_z t - 2z_0\rho_z + e_z^2 t^2 - 2e_z\rho_z t + \rho_z^2}{c^2} = 1$$

Сгруппируем

$$\frac{e_x^2 t^2 + 2\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)t + \rho_x^2 - 2x_0\rho_x + x_0^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{e_y^2 t^2 + 2\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)t + \rho_y^2 - 2y_0\rho_y + y_0^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{e_z^2 t^2 + 2\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)t + \rho_z^2 - 2z_0\rho_z + z_0^2}{c^2} = 1$$

Ещё раз упростим:

$$\frac{e_x^2 t^2 + 2\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)t + \left(\rho_x - x_0\right)^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{e_y^2 t^2 + 2\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)t + \left(\rho_y - y_0\right)^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{e_z^2 t^2 + 2\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)t + \left(\rho_z - z_0\right)^2}{c^2} = 1$$

внесем параметр t:

$$\left(\frac{e_x^2}{a^2} + \frac{e_y^2}{b^2} + \frac{e_z^2}{c^2}\right)t^2 + 2t\left(\frac{\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)}{a^2} + \frac{\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)}{b^2} + \frac{\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)}{c^2}\right) + \frac{\left(\rho_x - x_0\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\rho_y - y_0\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\rho_z - z_0\right)^2}{c^2} = 1$$

Умножим всё на $(abc)^2$

$$\left((bc)^2 e_x^2 + (ac)^2 e_y^2 + (ab)^2 e_z^2\right)t^2 + ...$$

$$+2t\left((bc)^2(x_0e_x-e_x\rho_x)+(ac)^2(y_0e_y-e_y\rho_y)+(ab)^2(z_0e_z-e_z\rho_z)\right)+...$$

$$+(bc)^2(\rho_x-x_0)^2+(ac)^2(\rho_y-y_0)^2+(ab)^2(\rho_z-z_0)^2=(abc)^2$$

Введём диагональную матрицу:

$$M_{abc}=\begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$$

Тогда последнее выражение можно легко и компактно записать в следующем виде:

$$\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)t^2+2t\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)+\left(M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)-(abc)^2=0$$

Получили обычное квадратное уравнение для которого

$$D=4\left[\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)^2-\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)\left(\left(M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)-(abc)^2\right)\right]$$

$$t_{1,2}=\frac{-\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)\pm}{}...$$

$$\frac{\pm\sqrt{\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)^2-\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)\left(\left(M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T;M_{abc}\left(\vec{r}-\vec{\rho}_0\right)^T\right)-(abc)^2\right)}}{\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)}$$

6 Пересечения луча параболойдом

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{e}t \tag{7}$$

$$\begin{cases} x=x_0+e_xt \\ y=y_0+e_yt \\ z=z_0+e_zt \end{cases}$$

Параболоид задан в виде:

$$\frac{(x-\rho_x)^2}{a^2}\pm\frac{(y-\rho_y)^2}{b^2}+(z-\rho_z)=0 \tag{8}$$

Подставим запись луча в уравнение параболойда

$$\frac{(x_0+e_xt-\rho_x)^2}{a^2}\pm\frac{(y_0+e_yt-\rho_y)^2}{b^2}+(z_0+e_zt-\rho_z)=0$$

Раскроем скобки:

$$\frac{x_0^2+2x_0(e_xt-\rho_x)+(e_xt-\rho_x)^2}{a^2}\pm\frac{y_0^2+2y_0(e_yt-\rho_x)+(e_yt-\rho_y)^2}{b^2}+(z_0+e_zt-\rho_z)=0$$

$$\frac{x_0^2+2x_0e_xt-2x_0\rho_x+e_x^2t^2-2e_x\rho_xt+\rho_x^2}{a^2}\pm\frac{x_0^2+2y_0e_yt-2y_0\rho_y+e_y^2t^2-2e_y\rho_yt+\rho_y^2}{b^2}+(z_0+e_zt-\rho_z)=0$$

Группируем слогаемые:

$$\frac{e_x^2t^2+2(x_0e_x-e_x\rho_x)t+(x_0-\rho_x)^2}{a^2}\pm..$$

$$\pm\frac{e_y^2t^2+2(y_0e_y-e_y\rho_y)t+(y_0-\rho_y)^2}{b^2}+...$$

$$+\left(z_0 + e_z t - \rho_z\right) = 0$$

Умножим всё на $(ab)^2$

$$b^2 e_x^2 t^2 + 2b^2\left(x_0 e_x - e_x \rho_x\right) t + b^2\left(x_0 - \rho_x\right)^2 \pm ..$$

$$\pm a^2 e_y^2 t^2 \pm 2a^2\left(y_0 e_y - e_y \rho_y\right) t \pm a^2\left(y_0 - \rho_y\right)^2 + ...$$

$$+\left(z_0 + e_z t - \rho_z\right)(ab)^2 = 0$$

Ещё раз группируем:

$$\left(b^2 e_x^2 \pm a^2 e_y^2\right) t^2 + 2\left(b^2\left(x_0 e_x - e_x \rho_x\right) \pm a^2\left(y_0 e_y - e_y \rho_y\right) + (ab)^2 e_z\right) t + b^2\left(x_0 - \rho_x\right)^2 \pm a^2\left(y_0 - \rho_y\right)^2 + ...$$

$$+\left(z_0 (ab)^2 - (ab)^2 \rho_z\right) = 0$$

Для простоты введём подстановку:

$$A = \left(b^2 e_x^2 \pm a^2 e_y^2\right)$$

$$B = 2\left(b^2\left(x_0 e_x - e_x \rho_x\right) \pm a^2\left(y_0 e_y - e_y \rho_y\right) + (ab)^2 e_z\right)$$

$$C = b^2\left(x_0 - \rho_x\right)^2 \pm a^2\left(y_0 - \rho_y\right)^2 + \left(z_0 (ab)^2 - (ab)^2 \rho_z\right)$$

Учитывая, что $\rho = \{0, 0, 0\}$:

$$B = 2\left(b^2 x_0 e_x \pm a^2 y_0 e_y + (ab)^2 e_z\right)$$

$$C = b^2 x_0^2 \pm a^2 y_0^2 + z_0 (ab)^2$$

7 Поверхности второго порядка:

Общее уравнение таких поверхностей :

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Это квадратичная форма в которой можно отделить квадратичную часть от линейной следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x\left(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}\right) + ... \\ y\left(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}\right) + ... \\ z\left(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}\right) + ... \\ \left(a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}\right) \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + xa_{14} + ... \\ a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz + ya_{24} + ... \\ a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2 + za_{34} + ... \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{44} = 0$$

Введйм обозначения:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{r}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \vec{B}$$

Тогда мы можем записать в общем виде уравнение поверхности:

$$\vec{r}^T A \vec{r} + \vec{B}\vec{r} + a_{44} = 0$$

Подставляя в качестве $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}t$ в последнее уравнение можно легко определить точку пересечения с поверхностью следуюущим образом:

$$(\vec{r}_0 + \vec{e}t)^T A (\vec{r}_0 + \vec{e}t) + \vec{B} (\vec{r}_0 + \vec{e}t) + a_{44} = 0$$

$$\left((\vec{r}_0 + \vec{e}t)^T ; A\vec{r}_0 + A\vec{e}t \right) + \left(\vec{B}, \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{B}, \vec{e} \right) t + a_{44} = 0$$

$$\left((\vec{r}_0 + \vec{e}t)^T ; A\vec{r}_0 \right) + \left((\vec{r}_0 + \vec{e}t)^T ; A\vec{e}t \right) + \left(\vec{B}, \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{B}, \vec{e} \right) t + a_{44} = 0$$

$$\left(\vec{r}_0^T, A\vec{r}_0 \right) + \left(\vec{e}^T, A\vec{r}_0 \right) t + \left(\vec{r}_0^T, A\vec{e} \right) t + \left(\vec{e}^T, A\vec{e} \right) t^2 + \left(\vec{B}, \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{B}, \vec{e} \right) t + a_{44} = 0$$

В результате получим квадратное уравнение относительно параметра t.

$$\left(\vec{e}^T, A\vec{e} \right) t^2 + \left(\left(\vec{e}^T, A\vec{r}_0 \right) + \left(\vec{r}_0^T, A\vec{e} \right) + \left(\vec{B}, \vec{e} \right) \right) t + \left(\vec{B}, \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{r}_0^T, A\vec{r}_0 \right) + a_{44} = 0$$

Решим его относительно t

$$D = \left(\left(\vec{e}^T, A\vec{r}_0 \right) + \left(\vec{r}_0^T, A\vec{e} \right) + \left(\vec{B}, \vec{e} \right) \right)^2 - 4 \left(\vec{e}^T, A\vec{e} \right) \left(\left(\vec{B}, \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{r}_0^T, A\vec{r}_0 \right) + a_{44} \right)$$

Ну... тут вообще видно, что хрен мы там чего сократим, поэтому не буду ничо решать, я итак уже в таком виде всё запрограммировал.

8 Нормаль к поверхности второго порядка

В общем виде нормалью к поверхности, заданной неявно:

$$F(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{n}(\vec{r}) = \frac{dF(\vec{r})}{d\vec{r}} = \left\{ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \right\}$$

При дифференцировании, например, по x читаем, что y и z константы. Воспользуемся квадратичной формой

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{gathered}
= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + xa_{14} + ... \\
a_{21}yx + a_{22}y^2 + a_{23}yz + ya_{24} + ... \\
a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2 + za_{34} + ... \\
a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} =
\end{gathered}
$$

$$
F(x,y,z) = x^2a_{11} + y^2a_{22} + z^2a_{33} + xy(a_{12}+a_{21}) + xz(a_{13}+a_{31}) + x(a_{14}+a_{41}) + yz(a_{32}+a_{23}) + y(a_{42}+a_{24}) + z(a_{43}+a_{43}) + a_{44} = 0
$$

Продифференцируем полседнее выражение по x:

$$
\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 2xa_{11} + y(a_{12}+a_{21}) + z(a_{13}+a_{31}) + (a_{14}+a_{41}) \tag{9}
$$

Производная в матричном виде ($\frac{d}{dx}(UV) = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$):

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] + ...
$$

$$
+\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}\right] =
$$

$$
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + a_{11}x + a_{21}y + a_{13}z + a_{41} = 2xa_{11} + y(a_{12}+a_{21}) + z(a_{13}+a_{31}) + (a_{14}+a_{41})
$$

Получили формулу 9.
Аналогично для x и y:

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] + ...
$$

$$
+\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix}\right] =
$$

$$
= 2ya_{22} + x(a_{12}+a_{21}) + z(a_{23}+a_{32}) + (a_{24}+a_{42});
$$

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{bmatrix}\right] + ...
$$

$$
+\left[\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}\right] =
$$

$$
= 2za_{33} + x(a_{13}+a_{31}) + y(a_{23}+a_{32}) + (a_{34}+a_{43});
$$

Итого, вектором нормали (НЕ НОРМИРОВАННЫМ!) для поверхности втого порядка в точке $\vec{r}_0$будет:

$$
\vec{N}(\vec{r}_0) = \left\{\begin{array}{c} 2x_0a_{11} + y_0(a_{12}+a_{21}) + z_0(a_{13}+a_{31}) + (a_{14}+a_{41}) \\ 2y_0a_{22} + x_0(a_{12}+a_{21}) + z_0(a_{23}+a_{32}) + (a_{24}+a_{42}) \\ 2z_0a_{33} + x_0(a_{13}+a_{31}) + y_0(a_{23}+a_{32}) + (a_{34}+a_{43}) \end{array}\right\}
$$

Поледнее выражение можно записать компактнее, для этого введём обозначения:

$$A_{low} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}; A_{up} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда нормаль:

$$\vec{n}\left(\vec{r}_0\right) = \frac{A_{low}\left\{\vec{r}_0, 1\right\}^T + A_{up}\left\{\vec{r}_0, 1\right\}^T}{\left\|A_{low}\left\{\vec{r}_0, 1\right\}^T + A_{up}\left\{\vec{r}_0, 1\right\}^T\right\|}, \ \ \left\|\vec{n}\left(\vec{r}_0\right)\right\| = 1$$

Здесь $\left\{\vec{r}_0, 1\right\}^T$- четырёхмерный вектор - столбец, первые три компаненты которого являются координатами точки в которой мы ищем нормаль, а четвёртая единица.

9 Частные случаи поверхностей

9.1 Сфера

Для сферы, которая находится в начале координат, уравнение поверхности будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

9.2 Элипсод

Для элипсоида,находегося в начале координат, уравнение поверхности будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

9.3 Гиперболоид

Однополостный гиперболоид:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Двуполостный гиперболоид:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

9.4 Параболоид

Эллиптический параболоид

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Гиперболический параболоид

$$
\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0
$$

9.5 Конус

$$
\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0
$$

Или без учёта однородных координат:

$$
\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{c^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0
$$

10 Алгоритм трассировки луча на отражающей поверхности

При трассировке лучей через какую-либо поверхность необходимо сделать три шага:

1) Найти точки пересечения для падающих на поверхность лучей и отсеять те лучи, которые ее не пересекают.

2) Определеить геометрические и физические (например, нормаль и коэффициент преломления) свойства поверхности в точках, где ее пересекают лучи.

3) Создать новые лучи, колличество воторых равно количеству той части исходных лучей, которые пересекли поверхность Посчитать углы отклонения и установить для каждого луча в качестве r_0координаты точки пересечения с поверхностью.

Направление отражённого луча задаётся формулой:

$$\vec{e}' = \vec{e} - 2\left(\vec{e}, \vec{n}\right)\vec{n}$$

11 Алгоритм трассировки луча на преломляющей поверхности

Алгоритм аналогичен предудщему, с той лишь разницей, чо теперь направление луча будет задано формулой:

$$\vec{e}' = \vec{e} + \left(\sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{\left(\vec{e}, \vec{n}\right)^2} + 1} - 1\right)\left(\vec{e}, \vec{n}\right)\vec{n}$$

Здесь n_1-коэффициент преломления перед поверхностью,n_2-коэффициент преломления после поверхности,

12 Алгоритм трассировки на плосокой дифракционной решётке

Запишем уравнение ДР

$$sin\theta + sin\alpha = \frac{n\lambda}{d},$$

где θ-угол падения; α- угол дифракции, n - порядок дифракции, λ-длина волны, d - плотность штрихов. Пусть штрихи идут перпенидкулярно оси X, а нормалью к поверхности решётки является ось Z, тогда отклонение луча, связанное с дифракцией бдет происходить в плоскости XoZ. Выразим из уравнения ДР значения углов дифракции и падения через вектор направления падения луча. Луч:

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{e}_0 t + \vec{r}_0.$$

Чтобы определить угол между проецией луча на плоскостьXoZ и нормалью к поверхности ДР необходимо сперва найти проекцию:

$$\vec{e}_{0,Prj(XoZ)} = \vec{e}_0 - \vec{Y}\left(\vec{Y}, \vec{e}_0\right),$$

после,ввиду того,ч то все вектора единичной длинны, косинус угла между интересующими нас векторами м.б. записан в виде:

$$cos\theta = \left(\vec{Z}, \vec{e}_0 - \vec{Y}\left(\vec{Y}, \vec{e}_0\right)\right) = \left((0, \vec{0}, 1), (e_x, \vec{e}_y e_z) - (0, \vec{1}, 0)\left(e_y\right)\right) = e_z.$$

Последнее выражение вообще говоря очевидно хотябы из того, что вектор направления луча явлется совокуностью направляющих косинусов, что мы, собственно, и получили.

Теперь, нам нужно найти угл дфифракции и построить новый вектор направления, а для этого перепишим уравнение ДР, учтя последний вывод:

$$\sqrt{1 - e_z^2} + sin\alpha = \frac{n\lambda}{d},$$

$$\alpha = acos\left(\frac{n\lambda}{d} - \sqrt{1 - e_z^2}\right).$$

Очевидно, что одного только нового значения угла направления недостаточно, но так как в плоскости XoZ мы только отклоняем векор в нужном направлении, его длина не меняется. Длиной вектора является длина прокции $\vec{e}_0$на плоскость XoY, поэтому:

$$\left\|\vec{e}_{0,Prj(XoZ)}\right\| = \sqrt{\left(\vec{e}_0 - \vec{Y}\left(\vec{Y}, \vec{e}_0\right), \vec{e}_0 - \vec{Y}\left(\vec{Y}, \vec{e}_0\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{\left((e_x, \vec{e}_y e_z) - (0, \vec{1}, 0)\left(e_y\right), (e_x, \vec{e}_y e_z) - (0, \vec{1}, 0)\left(e_y\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{\left((e_x, \vec{0}, e_z), (e_x, \vec{0}, e_z)\right)} = \sqrt{e_x^2 + e_z^2} = \rho_{XoZ}.$$

Последний вывод опять же очевиден. Теперь не сложно выразить компаненты нового вектора направления в плоскокти XoZ :

$$\vec{e}_1 = \left(cos\alpha\rho_{XoZ}, 0, sin\alpha\rho_{XoZ}\right).$$

Последняя компанента м.б. выражена из условия единичной длины вктора:

$$\vec{e}_1 = \left(cos\alpha\rho_{XoZ}, \sqrt{1 - \left(sin\alpha\rho_{XoZ}\right)^2 - \left(cos\alpha\rho_{XoZ}\right)^2}, sin\alpha\rho_{XoZ}\right) =$$

$$\left(cos\alpha\rho_{XoZ}, \sqrt{1 - \left(\left(sin\alpha\right)^2 + \left(cos\alpha\right)^2\right)\rho_{XoZ}^2}, sin\alpha\rho_{XoZ}\right) =$$

$$= \left(cos\alpha\rho_{XoZ}, \sqrt{1 - \rho_{XoZ}^2}, sin\alpha\rho_{XoZ}\right) =$$

$$= \left(cos\alpha\rho_{XoZ}, e_y, sin\alpha\rho_{XoZ}\right).$$

13 Алгоритм трассировки на дифракционной решётке выполненой на поверхности второго порядка

Рассмотрим участок дифракционной решётки в точке перечечения луча

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{e}_0 t + \vec{r}_0$$

и поверхности:

$$\vec{r}^T M \vec{r} = 0.$$

Обозначим эту точку за $\vec{\rho}_0$. Пусть теперь изменение высоты поверхности наблюдается вдоль оси Oz, а штрихи нанесены вдоль оси oX.Будем рассматривать случай, когда расстояние между соседними штрихами на поверхности постоянно. в точке$\vec{\rho}_0$. Определим нормаль к поверхности.:

$$\vec{N}\left(\vec{\rho}_0\right).$$

Плоскость где будет проходить отклонение луча будет лежать на векторах$\vec{N}\left(\vec{\rho}_0\right)$ и $\vec{X}$. Для определения угла отклонения необходим ещё вектор:

$$\vec{N}_x = \vec{X} - \vec{N}\left(\vec{N}, \vec{X}\right),$$

и вектр перпендикулярный двум предыдущим (т.к. предыдущие вектора единичной длины, то они не нормируются):

$$\vec{N}_y = \left[\vec{N}\left(\vec{\rho}_0\right); \vec{N}_x\right].$$

Комбинируя последние три вектора в матрицу вида ($\vec{N}\left(\vec{\rho}_0\right) = \vec{N}_z$):

$$M_{tbn} = \left[\vec{N}_x, \vec{N}_y, \vec{N}_z\right],$$

получаем так называемую тангент-битаншент-нормаль матрицу, которая по сути является локальным базисом для поиска дфракционного отклонения. Поизк изменения луча практически ничем не отличается от изложенного в предудущем пункте, за исключением того, что для каждой точки пересечения луча и поверхности необходимо будет найти M_{tbn},после чего перевести направление падения луча в в пространстов M_{tbn}, т.е.:

$$\vec{e}_0' = M_{tbn}\vec{e}_0.$$

остальные действия идентичны предыдущему пункту.

14 Трассировка луча в анизотропной среде

Анизотропная среда предполагает зависимость для показателя преломления следующего вида:

$$n = n\left(\vec{r}\right).$$

Допустим, что среда у нас ограничена поверхностью второго порядка с матрицей A, тогда градиент этого выражения для поверхности, взятый в выбранной точке $\vec{r}_0$будет ненормированной нормалью

$$\vec{N} = \left(\vec{\nabla}, \left(\vec{r}_0^T A \vec{r}_0\right)\right).$$