

7 гирек

Можно ли заказать набор из семи таких гирек, чтобы ими можно было взвесить любой слиток золота весом от 1 грамма до 1 килограмма? Слиток золота весит целое число грамм, гирьки можно класть на обе чаши весов.

Эту задачу мой младший брат решал на собеседовании в Abbyu.

Решение

Нужны гирьки весом 1г, 3г, 9г, и далее по степеням тройки до 729г. Этим набором гарантированно можно будет взвесить любой слиток до 1 кг.

Доказать этот факт можно несколькими способами. Чтобы вспомнить школьную математику, я приведу здесь доказательство методом математической индукции.

Докажем, что гирьками весом от 1, 3, 9,..., 3^n можно взвесить любой слиток весом от 1 до $(3^{(n+1)}-1)/2$ включительно.

Для $n=1$ утверждение очевидно. Имея гирьки 1г и 3г, можно взвесить 1, 2, 3 и 4 грамма (для 2г гирьки кладём на разные чаши, для 4г - на одну чашу).

Пусть у нас есть гирьки весом 1, 3,..., $3^{(n-1)}$, которыми мы можем взвесить любой слиток весом до $(3^n-1)/2$ включительно. В нашем распоряжении появляется новая гирька весом 3^n . Покажем, что с её помощью можно взвесить все слитки весом до $(3^{(n+1)}-1)/2$ включительно.

Слитки весом до $(3^n-1)/2$ мы уже умеем взвешивать по

предположению индукции.

Если слиток весит X грамм, больше $(3^n-1)/2$, но меньше 3^n , то на правую чашу мы помещаем гирьку 3^n , а оставшиеся гирьки размещаем так, как если бы мы взвешивали на правой чаше слиток весом (3^n-X) . Если $X > (3^n-1)/2$, то $3^n-X < 3^n - (3^n-1)/2 = (3^n-1)/2+1$, а т.к. X - целое, то $3^n-X \leq (3^n-1)/2$. Таким образом, по предположению индукции, мы всегда сможем выложить нужный остаток на левой чаше.

Если слиток весит ровно 3^n , то его взвешивание тривиально.

Если слиток весит Y грамм, больше 3^n , но не больше $(3^{(n+1)}-1)/2$, то на правую чашу мы помещаем гирьку 3^n , а оставшиеся размещаем так, как если бы мы взвешивали на левой чаше слиток весом $(Y-3^n)$. Т.к. $Y \leq (3^{(n+1)}-1)/2$, то $Y-3^n \leq (3^{(n+1)}-1)/2 - 3^n = (3^n-1)/2$. Следовательно, по предположению индукции, мы всегда сможем выложить нужный остаток на правой чаше.

Утверждение доказано.

Таким образом, имея гирьки весом 1г, 3г, 9г, 27г, 81г, 243г и 729г, мы сможем взвешивать слитки весом до 1093г включительно.