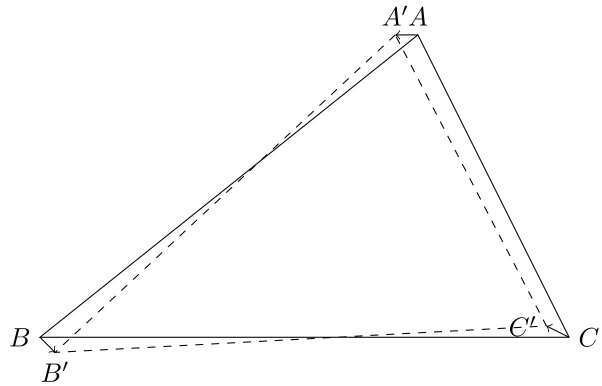
Оценка искажения углов

Пусть дано множество точек плоскости $V = \{v_i\}_{i=1}^n, v_i = (x_i, y_i)$, $\mathfrak{T}$ – триангуляция V, $f : V \to \mathbf{R}^2, V' = f(V)$. Оценим изменение углов между ребрами триангуляции $\mathfrak{T}$. Пусть $(\triangle T = ABC) \in \mathfrak{T}$.

Введем обозначения $f(A) = AA' = \vec{f_1}, f(B) = BB' = \vec{f_2}, f(C) = CC' = \vec{f_3}$. $\vec{f_2} - \vec{f_1} = \vec{g_3}, \vec{f_3} - \vec{f_2} = \vec{g_1}, \vec{f_1} - \vec{f_3} = \vec{g_2}$. $\vec{AB} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}$. $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma; \angle C'A'B' = \alpha', \angle A'B'C' = \beta', \angle B'C'A' = \gamma'$



$$\angle\alpha' = \angle(C+\vec{f_3})(A+\vec{f_1})(B+\vec{f_2}) = \angle(C+\vec{f_3}-\vec{f_1})A(B+\vec{f_2}-\vec{f_1}) = \angle(C-\vec{g_2})A(B+\vec{g_3}) = \alpha + \angle(-\vec{b}-\vec{g_2}, -\vec{b}) + \angle(\vec{c}+\vec{g_3}, \vec{c})$$

$$\sin(\alpha-\alpha') = \sin(\angle(\vec{b}, \vec{b}+\vec{g_2}) + \angle(\vec{c}, \vec{c}+\vec{g_3})) = \sin(\angle(\vec{b}, \vec{b}+\vec{g_2}))\cos(\angle(\vec{c}, \vec{c}+\vec{g_3})) + \sin(\angle(\vec{c}, \vec{c}+\vec{g_3}))\cos(\angle(\vec{b}, \vec{b}+\vec{g_2})) =$$
$$= \frac{1}{bc|\vec{b}+\vec{g_2}||\vec{c}+\vec{g_3}|}\left[(\vec{b}, \vec{b}+\vec{g_2})|[\vec{c}, \vec{c}+\vec{g_3}]| + (\vec{c}, \vec{c}+\vec{g_3})|[\vec{b}, \vec{b}+\vec{g_3}]|\right] \approx \frac{1}{b^2c^2}\left[(b^2+(\vec{b}, \vec{g_2}))|[\vec{c}, \vec{g_3}]| + (c^2+(\vec{c}, \vec{g_3}))|[\vec{b}, \vec{g_2}]|\right] =$$
$$= \frac{|[\vec{c}, \vec{g_3}]|}{c^2} + \frac{|[\vec{b}, \vec{g_2}]|}{b^2} + \frac{1}{b^2c^2}\left[(\vec{b}, \vec{g_2})|[\vec{c}, \vec{g_3}]| + (\vec{c}, \vec{g_3})|[\vec{b}, \vec{g_2}]|\right] =$$
$$= \frac{|[\vec{b}, \vec{g_2}]|}{b^2} + \frac{|[\vec{c}, \vec{g_3}]|}{c^2} + \frac{bcg_2g_3}{b^2c^2}\left[\sin(\angle(\vec{c}, \vec{g_3}))\cos(\angle(\vec{b}, \vec{g_2})) + \sin(\angle(\vec{b}, \vec{g_2}))\cos(\angle(\vec{c}, \vec{g_3}))\right] =$$
$$= \frac{|[\vec{b}, \vec{g_2}]|}{b^2} + \frac{|[\vec{c}, \vec{g_3}]|}{c^2} + \frac{g_2g_3}{bc}\sin\left(\angle(\vec{b}, \vec{g_2}) + \angle(\vec{c}, \vec{g_3})\right) \approx \frac{|[\vec{b}, \vec{g_2}]|}{b^2} + \frac{|[\vec{c}, \vec{g_3}]|}{c^2} \quad (1)$$

Примерные равенства верны в предположении, что $\max\left(|\vec{f_1}|, |\vec{f_2}|, |\vec{f_3}|\right) \ll \min\left(|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|\right)$. Пусть вектора $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ выражаются в виде $(f_1, f_1), (f_2, f_2), (f_3, f_3)$, соответсвенно

$$\vec{g_1} = \vec{f_3} - \vec{f_2} = (f_3 \ - \ f_2)(1,1), \vec{g_2} = \vec{f_1} - \vec{f_3} = (f_1 - f_3)(1,1), \vec{g_3} = \vec{f_2} - \vec{f_1} = (f_2 - f_1)(1,1),$$

тогда $\frac{|[\vec{a}, \vec{g_1}]|}{a^2} = \frac{\sin\angle(\vec{a}, (1,1))}{a}g_1 = k_1g_1$. Аналогично введем коэффициенты k_2, k_3. С их помощью мы можем записать формулу (**??**) следующим образом: $\sin(\alpha - \alpha') \approx k_2g_2 + k_3g_3$.

Величина $E(T) = \sin^2(\alpha-\alpha') + \sin^2(\beta-\beta') + \sin^2(\gamma-\gamma')$, очевидно характеризует изменение углов $\triangle T$. Нехитрыми преобразованиями получаем

$$
\begin{gathered}
\sin^2(\alpha-\alpha')+\sin^2(\beta-\beta')+\sin^2(\gamma-\gamma')\approx(k_2g_2+k_3g_3)^2+(k_3g_3+k_1g_1)^2+(k_1g_1+k_2g_2)^2=\\
=(k_2(f_3-f_1)+k_3(f_1-f_2))^2+(k_3(f_1-f_2)+k_1(f_2-f_3))^2+(k_1(f_2-f_3)+k_2(f_3-f_1))^2=\\
=((k_3-k_2)f_1-k_3f_2+k_2f_3)^2+((k_1-k_3)f_2+k_3f_1-k_1f_3)^2+((k_2-k_1)f_3-k_2f_1+k_1f_2)^2=\\
=((k_3-k_2)^2+k_3^2+k_2^2)f_1^2+((k_1-k_3)^2+k_1^2+k_3^2)f_2^2+((k_2-k_1)^2+k_1^2+k_2^2)f_3^2+\\
+2((k_2-k_3)k_3+(k_1-k_3)k_3-k_1k_2)f_1f_2+2((k_3-k_1)k_1+(k_2-k_1)k_1-k_2k_3)f_2f_3+2((k_1-k_2)k_2+(k_3-k_2)k_2-k_3k_1)f_3f_1=\\
=2(k_2^2+k_3^2-k_2k_3)f_1^2+2(k_1^2+k_3^2-k_1k_3)f_2^2+2(k_1^2+k_2^2-k_1k_2)f_3^3-\\
-2(2k_3^2+k_1k_2-k_3(k_1+k_2))f_1f_2-2(2k_1^2+k_2k_3-k_1(k_2+k_3))f_2f_3-2(2k_2^2+k_3k_1-k_2(k_3+k_1))f_3f_1=\\
=2\left[k_3^2(f_1^2+f_2^2-2f_1f_2)+k_2^2(f_1^2+f_3^2-2f_1f_3)+k_1^2(f_2^2+f_3^2-2f_2f_3)\right]\\
-2\left[k_2k_3f_1^2+k_3k_1f_2^2+k_1k_2f_3^2-k_3(k_1+k_2)f_1f_2-k_2(k_1+k_3)f_1f_3-k_3(k_1+k_2)f_2f_3\right]=\\
=2\left[k_3^2(f_1-f_2)^2+k_2^2(f_3-f_1)^2+k_1^2(f_2-f_3)^2\right]-\\
-\left[k_2k_3(f_1^2+f_2^2-2f_1f_2)+k_2k_3(f_1^2+f_3^2-2f_1f_3)+k_1k_3(f_2^2+f_1^2-2f_2f_1)+k_1k_3(f_2^2+f_3^2-2f_2f_3)+\right.\\
\left.+k_1k_2(f_3^2+f_1^2-2f_3f_1)+k_1k_2(f_3^2+f_2^2-2f_3f_2)\right]+\left[k_1(k_2+k_3)f_1^2+k_2(k_1+k_3)f_2^2+k_3(k_1+k_2)f_3^2\right]=\\
=\left[(2k_3^2-k_3(k_2+k_1))(f_1-f_2)^2+(2k_2^2-k_2(k_1+k_3))(f_3-f_1)^2+(2k_1^2-k_1(k_2+k_3))(f_2-f_3)^2\right]+\\
+\left[k_1(k_2+k_3)f_1^2+k_2(k_1+k_3)f_2^2+k_3(k_1+k_2)f_3^2\right].
\end{gathered}
$$

Введем обозначения $l_{xy}(T=\triangle(x,y,z))=2*k_z^2-k_z(k_x+k_y), l_x(T=\triangle(x,y,z))=k_x(k_y+k_z)$.

Просуммируем $E(T)$ по всем треугольникам $T\in\mathfrak{T}$.

$$
E(\mathfrak{T},f)=\sum_{T\in\mathfrak{T}}\sin^2(\alpha-\alpha')+\sin^2(\beta-\beta')+\sin^2(\gamma-\gamma')=\sum_{(u,v)\in E(\mathfrak{T})}w_{uv}(f_u-f_v)^2+\sum_{v\in V(\mathfrak{T})}w_vf_v^2,
$$

где $w_{xy}=l_{xy}(\triangle(x,y,z_1))+l_{xy}(\triangle(x,y,z_2))$; $w_x=\sum_{(T=\triangle(x,y,z))\in\mathfrak{T}}l_x(T)$.

$$
E(\mathfrak{T},f)=f^TZf \text{ где, } Z_uv=\begin{cases} w_v+\sum_{(v,x)\in E(G)}w_{vx} & \text{if } u=v;\\ -w_{uv} & \text{if } u\sim v;\\ 0 & \text{otherwize;}\end{cases}\quad f=(f_1,f_2,\dots f_n)^T.
$$

Видно что, для $f=\alpha\sum_{i=1}^k p_ie_i$, где α – некоторое число, $p_i\in\{-1,1\}$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ – набор ортонормированных векторов в $\mathbb{R}^n$, минимум $E(\mathfrak{T},f)$ достигается при e_i равных собственным векторам Z, соответствующим k наименьшим собственным числам.