1 Почему модифицированный алгоритм Obuchi портит исходную карту меньше других

1. Исходные данные есть множество точек $V = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, на выходе мы хотим получить множество $\delta V = \{\delta p_1, \delta p_2, ...\delta p_n\}$ смещений исходных точек, в котором запрятался наш watermark. $p_i, \delta p_i \in \mathbb{R}^2$. Давайте включим воображение и на секундочку посчитаем, что исходными данными на самом деле является какая-то облать $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, скажем, выпуклая оболочка $\{p_i\}$. Теперь представим, что для встраивания watermark'а мы смещаем не только наши точки $\{p_i\}$, но всю область Ω. То есть, мы-то наивно полагали, что нам надо задать функцию $f_d : \{p_i\} \to \{\delta p_i\}$, а на самом деле нам надо задать функцию $f_c : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Причем функция f_c есть не абы что, а PLIS f_d.

2. Для того, чтобы задать PLIS нам нало для начала задаться триангуляцией V. А какой именно триангуляцией? Rippa говорит нам, что реальные пацаны используют для подобных целей триангуляцию Делоне, так как для нее погрешность интерполяции минимальна. А что есть согласно Rippa погрешность интерполяции (roughness)? Барабанная дробь – энергия Дирихле

$$E_D(f_c) = \int_\Omega ||\nabla f_c||^2 d\Omega.$$

3. Теперь у нас есть триангуляция $\mathfrak{T}$ множества точек V и функция $f_c : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Давайте определимся, чего же мы хотим от f_c. Можно, конечно, в качестве f_c взять функцию, переводящую наши данные в надпись "здесь был %username%", тогда мы всем сможем потом доказать, что это именно наши данные, но как-то многовато мы при этом информации потеряем. То есть, мы хотим минимизировать потерю информации, то есть некоторую функцию от f_c. Я утверждаю, что эта самая загадочная функция, которую мы хотим минимизировать есть, барабанная дробь, энергия Дирихле

$$E_D(f_c) = \int_\Omega ||\nabla f_c||^2 d\Omega.$$

4. Давайте теперь вернемся с просторов непрерывных небес на нашу бренную дискретныую землю. Итак, мы хотим минимизировать $E_D(f_c)$. Как выразить это в терминах f_d? Мудрый Poithler утвержает, что $E_D(f_c)$ при заданной триангуляции $\mathfrak{T}$ выражается как

$$E_D(f_c) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j,k)\in\mathfrak{T}} \operatorname{ctg}\alpha_{ij}||f_i - f_j||^2 + \operatorname{ctg}\alpha_{jk}||f_j - f_k||^2 + \operatorname{ctg}\alpha_{ki}||f_k - f_i||^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in E(\mathfrak{T})} w_{ij}||f_i - f_j||^2, \text{ где } w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha_{ij} + \operatorname{ctg}\alpha_{ji}\right). \quad (1)$$

   Точнее утверждает он это про скаляро-значную функцию f, но я искренне надеюсь, что это без труда обобщается на векторо-значную.

   Истинная мудрость проявленная Poithler'ом заключается в том, что он доказал формулу (1) в куда более общем случае. В случае же когда Ω есть выпуклая оболочка множества точек плоскости и f_c есть PLIS f_d по триангуляции $\mathfrak{T}$ можно посчитать $E_D(f)$ по рабоче-крестьянски.

$$E_D(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega ||\nabla f||^2 d\Omega = \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathfrak{T}} \int_T ||\nabla f|_T||^2 dT;\ T = \triangle ABC;\ A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3);$$
$$f|_T = f(x, y), f(A) = f_1, f(B) = f_2, f(C) = f_3; \int_T ||\nabla f|_T||^2 dT = \int_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

Перейдем к барицентрическим координатам u, v: $T = \left\{(u,v) \mid (u,v) \in [0,1]^2,\ u+v <= 1\right\}$.

$$\begin{cases} x = x_1u + x_2v + (1-u-v)x_3 = (x_1-x_3)u + (x_2-x_3)v \\ y = y_1u + y_2v + (1-u-v)y_3 = (y_1-y_3)u + (y_2-y_3)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ y_1-y_3 & y_2-y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (x_1-x_3)(y_2-y_3) - (x_2-x_3)(y_2-y_3)$$

$$\Delta_u = (y_2-y_3)x - (x_2-x_3)y,\ \Delta_v = -(y_1-y_3)x + (x_1-x_3)y$$

$$u = \frac{\Delta_u}{\Delta},\ v = \frac{\Delta_v}{\Delta},\ dxdy = |\Delta| dudv$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(y_2-y_3),\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}(x_2-x_3);\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}(y_1-y_3),\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(x_1-x_3)$$

$$f(u,v) = f_1u + f_2v + f_3(1-u-v) = (f_1-f_3)u + (f_2-f_3)v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_1 - f_3,\ \frac{\partial f}{\partial v} = f_2 - f_3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(y_2-y_3)(f_1-f_3) - \frac{1}{\Delta}(y_1-y_3)(f_2-f_3) = \frac{1}{\Delta}\left[(y_2-y_3)(f_1-f_3) - (y_1-y_3)(f_2-f_3)\right].$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}(x_2-y_3)(f_1-f_3) + \frac{1}{\Delta}(x_1-x_3)(f_2-f_3) = \frac{1}{\Delta}\left[-(x_2-x_3)(f_1-f_3) + (x_1-x_3)(f_2-f_3)\right].$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{\Delta^2}[(f_1-f_3)^2[(y_2-y_3)^2 + (x_2-x_3)^2] + (f_2-f_3)^2[(y_1-y_3)^2 + (x_1-x_3)^2] - {} \\ - 2(f_1-f_3)(f_2-f_3)((y_2-y_3)(y_1-y_3) + (x_2-x_3)(x_1-x_3))]$$

Введем обозначения: $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Тогда предыдущую формулу можно записать следующим образом.

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{\Delta^2}\left[(f_1-f_3)^2a^2 + (f_2-f_3)^2b^2 - 2(f_1-f_3)(f_2-f_3)(\vec{a},\vec{b})\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[(f_1-f_3)^2a^2 + (f_2-f_3)^2b^2 - (f_1-f_3)(f_2-f_3)(a^2+b^2-c^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[a^2(f_1-f_3)^2 + b^2(f_2-f_3)^2 - (a^2+b^2-c^2)(f_1f_2 - f_3(f_1+f_2) + f_3^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta^2}\left[2a^2(f_1-f_3)^2 + 2b^2(f_2-f_3)^2 - (a^2+b^2-c^2)([2f_1f_2 - f_1^2 - f_2^2] + [f_1^2 - 2f_3f_1 + f_3^2] + [f_2^2 - 2f_3f_2 + f_3^2])\right] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta^2}\left[2a^2(f_1-f_3)^2 + 2b^2(f_2-f_3)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)\left(-(f_1-f_2)^2 + (f_1-f_3)^2 + (f_2-f_3)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta^2}\left[(a^2+b^2-c^2)(f_1-f_2)^2 + (a^2+c^2-b^2)(f_1-f_3)^2 + (b^2+c^2-a^2)(f_2-f_3)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[ab\cos(\gamma)(f_1-f_2)^2 + ac\cos(\beta)(f_1-f_3)^2 + bc\cos(\alpha)(f_2-f_3)^2\right] =$$

$$= \frac{2S(T)}{\Delta^2}\left[\cot(\gamma)(f_1-f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1-f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2-f_3)^2\right].$$

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} \frac{2S(T)}{\Delta^2} \left[\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2\right] |\Delta| dudv =$$

$$= \frac{2S(T)}{|\Delta|} \left[\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2\right] \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} dudv =$$

$$= \frac{S(T)}{|\Delta|} \left[\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2\right].$$

Осталось заметить, что $|\Delta| = 2S(T)$. Окончательно получаем

$$\int_T ||\nabla f||^2 dT = \frac{1}{2} \left[\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2\right]$$

$$E_D(f) = \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathfrak{T}} \left[\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2\right].$$

Рассмотрим функцию $\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial f_y}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial f_y}{\partial x} =$$
$$= \frac{1}{\Delta^2}([(y_2 - y_3)(f_{x1} - f_{x3}) - (y_1 - y_3)(f_{x2} - f_{x3})]\,[(x_1 - x_3)(f_{y2} - f_{y3}) - (x_2 - x_3)(f_{y1} - f_{y3})] -$$
$$- [(x_1 - x_3)(f_{x2} - f_{x3}) - (x_2 - x_3)(f_{x1} - x_{x3})]\,[(y_2 - y_3)(f_{y1} - f_{y3}) - (y_1 - y_3)(f_{y2} - f_{y3})])$$

Обозначим $f_{x1} - f_{x3} = g_{x1}$, $f_{x2} - f_{x3} = g_{x2}$, $f_{y1} - f_{y3} = g_{y1}$, $f_{y2} - f_{y3} = g_{y2}$; $x_1 - x_3 = a_x, y_1 - y_3 = a_y, x_2 - x_3 = b_x, y_2 - y_3 = b_y$. $\Delta = a_x b_y - a_y b_x$.

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{1}{\Delta^2}\left[(b_y g_{x1} - a_y g_{x2})(a_x g_{y2} - b_x g_{y1}) - (a_x g_{x2} - b_x g_{x1})(b_y g_{y1} - a_y g_{y2})\right] =$$
$$\frac{1}{\Delta^2}\left[b_y a_x(g_{x1}g_{y2} - g_{x2}g_{y1}) + a_y b_x(g_{x2}g_{y1} - g_{x1}g_{y2}) + b_y b_x(g_{x1}g_{y1} - g_{x1}g_{y1}) + a_y a_x(g_{x2}g_{y2} - g_{x2}g_{y2})\right] =$$
$$\frac{1}{\Delta^2}(a_x b_y - a_y b_x)(g_{x1}g_{y2} - g_{x2}g_{y1}) = \frac{1}{\Delta}\left[(f_{x1} - f_{x3})(f_{y2} - f_{y3}) - (f_{x2} - f_{x3})(f_{y1} - f_{y3})\right] =$$
$$\frac{1}{\Delta}\left[(f_{x1}f_{y2} - f_{x2}f_{y1}) + (f_{x3}f_{y1} - f_{x1}f_{y3}) + (f_{x2}f_{y3} - f_{x3}f_{y2})\right] = \frac{i}{2\Delta}\left[(f_1 f_2^* - f_1^* f_2) + (f_2 f_3^* - f_2^* f_3) + (f_3 f_1^* - f_3^* f_1)\right]$$

5. Обозначенному нами в пункте 3 критерию качества прекрасно удолетворяет $f_d = const$. Действительно, $\nabla f = 0 \Rightarrow E_D(f) = 0$, жаль только информации таким образом не закодируешь. А хотелось бы нам закодировать k бит. Obuchi предлагает следующее: выберем какие-нибудь линейно независимые k векторов $\left\{e^i\right\}_{i=1}^k$ и пусть $f_d = \sum_{i=1}^k m_i e^i$, где $m_i \in \{-1, 1\}$. Если e^i ортогональны, то из f_d однозначно восстанавливается watermark: $m_i = (f_d, e_i)$.

   Осталось выбрать $\left\{e^i\right\}_{i=1}^k$. Утверждается, что в смысле минимизации энергии Дирихле оптимальными будут собственные вектора графа триангуляции соответсвующие наименьшим k собственным числам. Для доказательства этого нам на помощь приходит Elisa Ross.

6. Пусть задан граф $G = (V, E, w), w : E \to \mathbb{R}$ и функция $\rho : V(G) \to \mathbb{R}^m$. Введем обозначения

$$w(e = (u, v)) = w_{uv},$$

$$n = |V|,$$

$$R = (\rho(v_1), \rho(v_2), ..., \rho(v_n)), \dim R = n \times m,$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{(u,v) \in E(G)} w_{uv} ||\rho(u) - \rho(v)||^2.$$

$$L, \dim L = n \times n, L_{uv} = \begin{cases} \sum_{(v,x)\in E(G)} w_{vx}, & u = v; \\ -w_{uv}, & u \sim v; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Заметим, что $\mathcal{E}(\rho) = tr(R^T LR)$. В предположении, что столбцы R линейно независимы и нормированы, $\min \mathcal{E}(\rho)$ достигается, когда R составлена из векторов, натянутых на собственные вектора L соответсвующие наименшьшим m собственным числам L.

7. Применим утверждение пункта 6. Пусть G – граф триангуляции, $V(G)$ – то же множество, что и в пункте 1, веса ребер w_{uv} мы берем те же, что и в пункте 4. $\rho(v) = \big((m_1 e^1)_v, (m_2 e^2)_v, ..., (m_k e^k)_v\big)$.

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{(u,v)\in E(G)} w_{uv}||\rho(u) - \rho(v)||^2 = \sum_{(u,v)\in E(G)} w_{uv} \sum_{i=1}^{k} \big((m_i e^i)_v - (m_i e^i)_u\big)^2 = \sum_{(u,v)\in E(G)} w_{uv}||f_d(u) - f_d(v)||^2 = E_D(f)$$

То есть, для минимизации энергии энергии Дирихле, надо взять $f_d = \sum_{i=1}^{k} m_i e^i$, где e^i – собственные вектора матрицы L определенной в пункте 6.