

1 Почему модифицированный алгоритм Obuchi портит исходную карту меньше других

1. Исходные данные есть множество точек $V = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, на выходе мы хотим получить множество $\delta V = \{\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_n\}$ смещений исходных точек, в котором запрятался наш watermark. $p_i, \delta p_i \in \mathbb{R}^2$. Давайте включим воображение и на секундочку посчитаем, что исходными данными на самом деле является какая-то область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, скажем, выпуклая оболочка $\{p_i\}$. Теперь представим, что для встраивания watermark'а мы смещаем не только наши точки $\{p_i\}$, но всю область Ω . То есть, мы-то наивно полагали, что нам надо задать функцию $f_d : \{p_i\} \rightarrow \{\delta p_i\}$, а на самом деле нам надо задать функцию $f_c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Причем функция f_c есть не абы что, а PLIS f_d .
2. Для того, чтобы задать PLIS нам надо для начала задаться триангуляцией V . А какой именно триангуляцией? Ripra говорит нам, что реальные пацаны используют для подобных целей триангуляцию Делоне, так как для нее погрешность интерполяции минимальна. А что есть согласно Ripra погрешность интерполяции (roughness)? Барабанная дробь – энергия Дирихле

$$E_D(f_c) = \int_{\Omega} \|\nabla f_c\|^2 d\Omega.$$

3. Теперь у нас есть триангуляция \mathfrak{T} множества точек V и функция $f_c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Давайте определимся, чего же мы хотим от f_c . Можно, конечно, в качестве f_c взять функцию, переводящую наши данные в надпись "здесь был %username%", тогда мы всем сможем потом доказать, что это именно наши данные, но как-то многовато мы при этом информации потеряем. То есть, мы хотим минимизировать потерю информации, то есть некоторую функцию от f_c . Я утверждаю, что эта самая загадочная функция, которую мы хотим минимизировать есть, барабанная дробь, энергия Дирихле

$$E_D(f_c) = \int_{\Omega} \|\nabla f_c\|^2 d\Omega.$$

4. Давайте теперь вернемся с просторов непрерывных небес на нашу бренную дискретную землю. Итак, мы хотим минимизировать $E_D(f_c)$. Как выразить это в терминах f_d ? Мудрый Poithler утверждает, что $E_D(f_c)$ при заданной триангуляции \mathfrak{T} выражается как

$$\begin{aligned} E_D(f_c) &= \frac{1}{4} \sum_{(i,j,k) \in \mathfrak{T}} \text{ctg } \alpha_{ij} \|f_i - f_j\|^2 + \text{ctg } \alpha_{jk} \|f_j - f_k\|^2 + \text{ctg } \alpha_{ki} \|f_k - f_i\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in E(\mathfrak{T})} w_{ij} \|f_i - f_j\|^2, \text{ где } w_{ij} = \frac{1}{2} (\text{ctg } \alpha_{ij} + \text{ctg } \alpha_{ji}). \end{aligned} \quad (1)$$

Точнее утверждает он это про скалярно-значную функцию f , но я искренне надеюсь, что это без труда обобщается на векторно-значную.

Истинная мудрость проявленная Poithler'ом заключается в том, что он доказал формулу (1) в куда более общем случае. В случае же когда Ω есть выпуклая оболочка множества точек плоскости и f_c есть PLIS f_d по триангуляции \mathfrak{T} можно посчитать $E_D(f)$ по рабоче-крестьянски.

$$\begin{aligned} E_D(f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathfrak{T}} \int_T \|\nabla f|_T\|^2 dT; \quad T = \triangle ABC; \quad A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3); \\ f|_T &= f(x, y), f(A) = f_1, f(B) = f_2, f(C) = f_3; \quad \int_T \|\nabla f|_T\|^2 dT = \int_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

Перейдем к барицентрическим координатам u, v : $T = \left\{ (u, v) \mid (u, v) \in [0, 1]^2, u + v \leq 1 \right\}$.

$$\begin{cases} x = x_1 u + x_2 v + (1 - u - v)x_3 = (x_1 - x_3)u + (x_2 - x_3)v \\ y = y_1 u + y_2 v + (1 - u - v)y_3 = (y_1 - y_3)u + (y_2 - y_3)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3) \\ \Delta_u &= (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y, \quad \Delta_v = -(y_1 - y_3)x + (x_1 - x_3)y \\ u &= \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad v = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad dx dy = |\Delta| du dv \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta}(y_2 - y_3), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}(x_2 - x_3); \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}(y_1 - y_3), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(x_1 - x_3) \\ f(u, v) &= f_1 u + f_2 v + f_3(1 - u - v) = (f_1 - f_3)u + (f_2 - f_3)v \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= f_1 - f_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_2 - f_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(y_2 - y_3)(f_1 - f_3) - \frac{1}{\Delta}(y_1 - y_3)(f_2 - f_3) = \\ &= \frac{1}{\Delta} [(y_2 - y_3)(f_1 - f_3) - (y_1 - y_3)(f_2 - f_3)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}(x_2 - x_3)(f_1 - f_3) + \frac{1}{\Delta}(x_1 - x_3)(f_2 - f_3) = \\ &= \frac{1}{\Delta} [-(x_2 - x_3)(f_1 - f_3) + (x_1 - x_3)(f_2 - f_3)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] &= \frac{1}{\Delta^2} [(f_1 - f_3)^2 [(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2] + (f_2 - f_3)^2 [(y_1 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2] - \\ &\quad - 2(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)((y_2 - y_3)(y_1 - y_3) + (x_2 - x_3)(x_1 - x_3))] \end{aligned}$$

Введем обозначения: $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Тогда предыдущую формулу можно записать следующим образом.

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] &= \frac{1}{\Delta^2} [(f_1 - f_3)^2 a^2 + (f_2 - f_3)^2 b^2 - 2(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)(\vec{a}, \vec{b})] = \\ &= \frac{1}{\Delta^2} [(f_1 - f_3)^2 a^2 + (f_2 - f_3)^2 b^2 - (f_1 - f_3)(f_2 - f_3)(a^2 + b^2 - c^2)] = \\ &= \frac{1}{\Delta^2} [a^2(f_1 - f_3)^2 + b^2(f_2 - f_3)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(f_1 f_2 - f_3(f_1 + f_2) + f_3^2)] = \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} [2a^2(f_1 - f_3)^2 + 2b^2(f_2 - f_3)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)([2f_1 f_2 - f_1^2 - f_2^2] + [f_1^2 - 2f_3 f_1 + f_3^2] + [f_2^2 - 2f_3 f_2 + f_3^2])] = \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} [2a^2(f_1 - f_3)^2 + 2b^2(f_2 - f_3)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)((f_1 - f_2)^2 + (f_1 - f_3)^2 + (f_2 - f_3)^2)] = \\ &= \frac{1}{2\Delta^2} [(a^2 + b^2 - c^2)(f_1 - f_2)^2 + (a^2 + c^2 - b^2)(f_1 - f_3)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(f_2 - f_3)^2] = \\ &= \frac{1}{\Delta^2} [ab \cos(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + ac \cos(\beta)(f_1 - f_3)^2 + bc \cos(\alpha)(f_2 - f_3)^2] = \\ &= \frac{2S(T)}{\Delta^2} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{2S(T)}{\Delta^2} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2] |\Delta| du dv = \\
&= \frac{2S(T)}{|\Delta|} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2] \int_0^1 \int_0^{1-u} du dv = \\
&= \frac{S(T)}{|\Delta|} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2].
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $|\Delta| = 2S(T)$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\int_T \|\nabla f\|^2 dT &= \frac{1}{2} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2] \\
E_D(f) &= \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathfrak{T}} [\cot(\gamma)(f_1 - f_2)^2 + \cot(\beta)(f_1 - f_3)^2 + \cot(\alpha)(f_2 - f_3)^2].
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $\frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial f_y}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial f_y}{\partial x} &= \\
&= \frac{1}{\Delta^2} [(y_2 - y_3)(f_{x1} - f_{x3}) - (y_1 - y_3)(f_{x2} - f_{x3})] [(x_1 - x_3)(f_{y2} - f_{y3}) - (x_2 - x_3)(f_{y1} - f_{y3})] - \\
&\quad - [(x_1 - x_3)(f_{x2} - f_{x3}) - (x_2 - x_3)(f_{x1} - f_{x3})] [(y_2 - y_3)(f_{y1} - f_{y3}) - (y_1 - y_3)(f_{y2} - f_{y3})]
\end{aligned}$$

Обозначим $f_{x1} - f_{x3} = g_{x1}$, $f_{x2} - f_{x3} = g_{x2}$, $f_{y1} - f_{y3} = g_{y1}$, $f_{y2} - f_{y3} = g_{y2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial f_y}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta^2} \\
&= \frac{1}{\Delta^2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)g_{x1}g_{y2} + (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)g_{x2}g_{y1} - (x_1 - x_3)(y_1 - y_3)g_{x1}g_{y1} - (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)g_{x2}g_{y2}] - \\
&\quad - [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3)g_{x2}g_{y1} + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)g_{x1}g_{y2} - (x_1 - x_3)(y_1 - y_3)g_{x2}g_{y2} - (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)g_{x1}g_{y1}] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} (\Delta g_{x1}g_{y2} - \Delta g_{x2}g_{y1} - [(x_1 - x_3)(y_1 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)] (g_{x1}g_{y1} - g_{x2}g_{y2}))
\end{aligned}$$

5. Обозначенному нами в пункте 3 критерию качества прекрасно удовлетворяет $f_d = \text{const}$. Действительно, $\nabla f = 0 \Rightarrow E_D(f) = 0$, жаль только информации таким образом не закодируешь. А хотелось бы нам закодировать k бит. Обуси́ предлагает следующее: выберем какие-нибудь линейно независимые k векторов $\{e^i\}_{i=1}^k$ и пусть $f_d = \sum_{i=1}^k m_i e^i$, где $m_i \in \{-1, 1\}$. Если e^i ортогональны, то из f_d однозначно восстанавливается watermark: $m_i = (f_d, e_i)$.

Осталось выбрать $\{e^i\}_{i=1}^k$. Утверждается, что в смысле минимизации энергии Дирихле оптимальными будут собственные вектора графа триангуляции соответствующие наименьшим k собственным числам. Для доказательства этого нам на помощь приходит Elisa Ross.

6. Пусть задан граф $G = (V, E, w)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ и функция $\rho : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
w(e = (u, v)) &= w_{uv}, \\
n &= |V|, \\
R &= (\rho(v_1), \rho(v_2), \dots, \rho(v_n)), \dim R = n \times m, \\
\mathcal{E}(\rho) &= \sum_{(u, v) \in E(G)} w_{uv} \|\rho(u) - \rho(v)\|^2. \\
L, \dim L = n \times n, L_{uv} &= \begin{cases} \sum_{(v, x) \in E(G)} w_{vx}, & u = v; \\ -w_{uv}, & u \sim v; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{E}(\rho) = \text{tr}(R^T L R)$. В предположении, что столбцы R линейно независимы и нормированы, $\min \mathcal{E}(\rho)$ достигается, когда R составлена из векторов, натянутых на собственные вектора L соответствующие наименьшим m собственным числам L .

7. Применим утверждение пункта 6. Пусть G – граф триангуляции, $V(G)$ – то же множество, что и в пункте 1, веса ребер w_{uv} мы берем те же, что и в пункте 4. $\rho(v) = ((m_1 e^1)_v, (m_2 e^2)_v, \dots, (m_k e^k)_v)$.

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{(u,v) \in E(G)} w_{uv} \|\rho(u) - \rho(v)\|^2 = \sum_{(u,v) \in E(G)} w_{uv} \sum_{i=1}^k ((m_i e^i)_v - (m_i e^i)_u)^2 = \sum_{(u,v) \in E(G)} w_{uv} \|f_d(u) - f_d(v)\|^2 = E_D(f)$$

То есть, для минимизации энергии энергии Дирихле, надо взять $f_d = \sum_{i=1}^k m_i e^i$, где e^i – собственные вектора матрицы L определенной в пункте 6.