Anotações Probabilidade e Estatística

Andrey Frana

January 23, 2017

1 Espaço Amostral

Remark
Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experiemento aleatório.

Exemplo. Um experimento jogar um *dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo. Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas. $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$.

1.1 Exercícios

Dar o Espaço Amostral para cada exercício abaixo:

E1 - Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE.
Sol. O espaço amostral é qualquer uma das letras da palavra. Portanto
$\Omega = \{P, R, O, B, I, L, D, A, E\}$

E2 - Três pessoas A, B, C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.
Sol. $\Omega = \{(CAB), (BCA), (ACB), (CBA), (BAC)\}$

2 Eventos

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamaremos de *evento* todo subconjunto de Ω. Em geral, indicamos um evento por uma letra maíuscula do alfabeto: A, B, C, D, ... X, Y, Z.

Exemplo. Um dado é lançado, e observa-se o número da face de cima. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos
A: Ocorrência de número ímpar. A = $\{1, 3, 5\}$
B: Ocorrência de número primo. B = $\{2, 3, 5$
C: Ocorrência de número menor que 4. C = $\{1, 2, 3\}$

Exemplo. Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a sequencia de caras e coroas.
A: ocorrência de cara no primeiro lançamento
A = $\{(K, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, C, K)\}$

Remark
Podemos, e devemos, realizar todas as operações de teoria dos conjuntos nos conjuntos formados pelos eventos. Isto é, união, intersecção, ou seja, existem eventos que acontecem se um OU outros ocorrerem, e se um E outro ocorrerem.

2.1 Exercícios

E1 - Uma moeda e um dado são lançados. Seja
$\Omega = \{(K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6)$
$(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\}$
Descreva os eventos:
a)A: ocorre cara,
b)B: ocorre número par,
Sol. TRIVIAL

3 Variável Aleatória

Consideremos um experimento e Ω o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função X, que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada variável aleatória (v.a.). Ou seja, variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

4 Modelos Probabilísticos Discretos

4.1 Ensaios de Bernoulli

Cosidere um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentaticas independentes, isto é, ensaios nos quais o resultado de uma ensaio não depende dos ensaios anteriores e nem dos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados. Um deles que chamamos de sucesso(S) e outros que chamamos de fracasso (F). A probabilidade de ocorrer Sucesso é sempre p, e a probabilidade de ocorrer fracasso é sempre q = 1 - p.

Para um experimento que consiste na realização de n ensaios independentes de Bernoulli, o espaço amostral pode ser considerado como o conjunto de n-uplas, em que cada posição há um sucesso (S) ou uma falha (F).

4.1.1 Exemplos de ensaios de Bernoulli

1) Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamamos o Sucesso de cara, e o fracasso de coroa. Em cada ensaio p = $\frac{1}{2}$ e Fracasso q = $\frac{1}{2}$

Neste exemplo sejam os eventos:
A_1: ocorre cara no 1 lançamento, P(A_1) = $\frac{1}{2}$
A_2: ocorre cara no 2 lançamento, P(A_2) = $\frac{1}{2}$.
$\vdots$
A_5: ocorre cara no 5 lançamento, P(A_5) = $\frac{1}{2}$.

Então o evento $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5$ corresponde ao evento sair cara nos 5 lançamentos, que é $\{(K,K,K,K,K)\}$

Como os 5 eventos são independentes,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Vamos supor agora o evento de sair exatamente 1 cara, isto é

$$\{(K,C,C,C,C),(C,K,C,C,C),(C,C,K,C,C),(C,C,C,K,C),(C,C,C,C,K)\}$$

Portanto a probabilidade é:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

Como podemos facilmente perceber isto é a permutação de 5 elementos com 4 repetidos.

Remark
Dizemos que um evento A independe de B se:

$$\mathrm{P(A|B) = P(A)}$$

isto é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Se quisermos agora calcular a probabilidade de sair exatamente duas caras, teremos de calcular o números de quintuplas ordenadas, onde existem duas caras (K) e três coroas:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Obs: Aqui calculamos exatamente 5 ensaios de Bernoulli.

4.2 Distribuição Binomial

O que se conhece por Distribuição Binomial é justamente a generalização dos ensaios de Bernoulli. Vamos considerar uma sequencia de n ensaios de Bernoulli. Seja p a probabilidade de sucesso e q a probabilidade de fracasso.

Queremos calcular a *probabilidade de* P_k*, da ocorrência de exatamente K sucessos, nos n ensaios.*

O evento *Ocorrem K sucessos nos n ensaios* é formado por todas as enuplas ordenadas onde existem K sucessos(S) e n - K fracassos(F). O número de enuplas ordenadas nesta condição é:

$$P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

A probabilidade de cada enupla ordenada de K sucessos (S) e (n-K) Fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdots p}\cdot\underbrace{q \cdot q \cdots q} = p^K \cdot q^{n-K}$$

Logo, se cada enupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade de $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ enuplas desse tipo, a probabilidade P_K de exatamente K sucessos nos n ensaios será:

$$P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

Exemplo. Um urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observa sua cor e reposta na urna. O experiemento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como Sucesso o resultado "bola vermelha", e Fracasso o resultado "bola branca". Então:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, n = 5.$$

Estamos interessados na probabilidade P_3. Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3}(\frac{2}{5})^3(\frac{2}{5})^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{725}{3125} \Rightarrow P_3 = 0,2304$$

Exemplo. Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A ?

Em cada escolha de uma pessoa, consideremos os resultados:
Sucesso: a pessoa tem carro da marca A.
Fracasso: a pessoa não tem carro da marca A
Então p = 0,1, q = 0,9, n = 30
Estamos interessados em P_5. Temos:

$$P_5 = \binom{30}{5}(0,1)^5 \cdot (0,9)^{25} \simeq 0,102$$

4.2.1 Exercicios

Exercício. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente duas caras?

Solução. Vamos considerar que sair cara é Sucesso e sair coroa é Fracasso. Então temos que $p = 2$, $q = 4$ e $n = 6$, portanto:

$$P_k = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K} =$$
$$\binom{6}{2} \cdot (\frac{1}{2})^6 \cdot (\frac{1}{2})^4 =$$
$$\frac{6!}{2!4!} \cdot 0,15 \cdot 256 =$$
$$15 \cdot 0,15 \cdot 0,065 =$$
$$\underline{0,14}$$