Anotações Teoria da Probilidade

Andrey França

February 7, 2017

Contents

1 Espaço Amostral

Remark
Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experiemento aleatório.

Exemplo. Um experimento jogar um *dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo. Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.
$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$.

1.1 Exercícios

Dar o Espaço Amostral para cada exercício abaixo:

Exemplo. Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE.
Sol. O espaço amostral é qualquer uma das letras da palavra. Portanto
$\Omega = \{P, R, O, B, I, L, D, A, E\}$

Exemplo. Três pessoas A, B, C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.
Sol. $\Omega = \{(CAB), (BCA), (ACB), (CBA), (BAC)\}$

2 Eventos

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamaremos de *evento* todo subconjunto de Ω. Em geral, indicamos um evento por uma letra maíuscula do alfabeto: A, B, C, D, ... X, Y, Z.

Exemplo. Um dado é lançado, e observa-se o número da face de cima. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos
A: Ocorrência de número ímpar. A $= \{1, 3, 5\}$
B: Ocorrência de número primo. B $= \{2, 3, 5$
C: Ocorrência de número menor que 4. C $= \{1, 2, 3\}$

Exemplo. Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a sequencia de caras e coroas.
A: ocorrência de cara no primeiro lançamento
A $= \{(K, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, C, K)\}$

Remark
Podemos, e devemos, realizar todas as operações de teoria dos conjuntos nos conjuntos formados pelos eventos. Isto é, união, intersecção, ou seja, existem eventos que acontecem se um OU outros ocorrerem, e se um E outro

ocorrerem.

2.1 Exercícios

E1 - Uma moeda e um dado são lançados. Seja
$\Omega = \{(K,1),(K,2),(K,3),(K,4),(K,5),(K,6)$
$(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\}$
Descreva os eventos:
a)A: ocorre cara,
b)B: ocorre número par,
Sol. TRIVIAL

3 Variável Aleatória

Definição. Consideremos um experimento e Ω o espaço amostral associado a esse experimento. *Uma função X, que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$,* é denominada variável aleatória (v.a.). Ou seja, variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

Exemplo. Considere três lançamentos independentes de uma moeda equilibrada. Seja C cara e K coroa. O espaço amostral deste experimento é S=(C,C,C); (C,C,K); (C,K,C); (K,C,C); (C,K,K); (K,C,K); (K,K,C); (K,K,K). Podemos definir a variável aleatória X: "número de caras obtidas nos três lançamentos". Por exemplo, temos que X((C,C,C)) = 3 e X((K,C,C))=2.

3.1 Função de Distribuição Cumulativa

Definição. A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X é uma função que a cada número real x associa o valor

$$F(x) = \mathbb{P}\,(X \leq x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A notação $\{X \leq x\}$ é usada para designar o conjunto $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, isto é, denota a imagem inversa do intervalo $(-\infty, x]$ pela variável aleatória X. Com isso, podemos observar que a função de distribuição acumulada F tem como domínio os números reais ($\mathbb{R}$) e imagem o intervalo $[0,1]$.

O conhecimento da função de distribuição acumulada é suficiente para entendermos o comportamento de uma variável aleatória. Mesmo que a variável assuma valores apenas num subconjunto dos reais, a função de distribuição é definida em toda a reta. Ela é chamada de função de distribuição acumulada, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a x.

4 Modelos Probabilísticos Discretos

4.1 Ensaios de Bernoulli

Cosidere um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentaticas independentes, isto é, ensaios nos quais o resultado de uma ensaio não depende dos ensaios anteriores e nem dos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados. Um deles que chamamos de sucesso(S) e outros que chamamos de fracasso (F). A probabilidade de ocorrer Sucesso é sempre p, e a probabilidade de ocorrer fracasso é sempre q = 1 - p.

Para um experimento que consiste na realização de n ensaios independentes de Bernoulli, o espaço amostral pode ser considerado como o conjunto de n-uplas, em que cada posição há um sucesso (S) ou uma falha (F).

4.1.1 Exemplos de ensaios de Bernoulli

1) Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamamos o Sucesso de cara, e o fracasso de coroa. Em cada ensaio p = $\frac{1}{2}$ e Fracasso q = $\frac{1}{2}$

Neste exemplo sejam os eventos:

A_1: ocorre cara no 1 lançamento, P(A_1) = $\frac{1}{2}$
A_2: ocorre cara no 2 lançamento, P(A_2) = $\frac{1}{2}$.
$\vdots$
A_5: ocorre cara no 5 lançamento, P(A_5) = $\frac{1}{2}$.

Então o evento $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_5$ corresponde ao evento sair cara nos 5 lançamentos, que é $\{(K, K, K, K, K)\}$

Como os 5 eventos são independentes,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Vamos supor agora o evento de sair exatamente 1 cara, isto é

$$\{(K, C, C, C, C), (C, K, C, C, C), (C, C, K, C, C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)\}$$

Portanto a probabilidade é:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

Como podemos facilmente perceber isto é a permutação de 5 elementos com 4 repetidos.

Remark
Dizemos que um evento A independe de B se:

$$\text{P(A|B)} = \text{P(A)}$$

isto é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Se quisermos agora calcular a probabilidade de sair exatamente duas caras, teremos de calcular o números de quintuplas ordenadas, onde existem duas caras (K) e três coroas:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Obs: Aqui calculamos exatamente 5 ensaios de Bernoulli.

4.2 Distribuição Binomial

O que se conhece por Distribuição Binomial é justamente a generalização dos ensaios de Bernoulli. Vamos considerar uma sequencia de n ensaios de Bernoulli. Seja p a probabilidade de sucesso e q a probabilidade de fracasso.

Queremos calcular a *probabilidade de* P_k*, da ocorrência de exatamente K sucessos, nos n ensaios.*

O evento *Ocorrem K sucessos nos n ensaios* é formado por todas as enuplas ordenadas onde existem K sucessos(S) e n - K fracassos(F). O número de enuplas ordenadas nesta condição é:

$$P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

A probabilidade de cada enupla ordenada de K sucessos (S) e (n-K) Fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdots p}\cdot \underbrace{q \cdot q \cdots q} = p^K \cdot q^{n-K}$$

Logo, se cada enupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade de $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ enuplas desse tipo, a probabilidade P_K de exatamente K sucessos nos n ensaios será:

$$P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

Exemplo. Um urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observa sua cor e reposta na urna. O experiemento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como Sucesso o resultado "bola vermelha", e Fracasso o resultado "bola branca". Então:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, n = 5.$$

Estamos interessados na probabilidade P_3. Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3}(\frac{2}{5})^3(\frac{2}{5})^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{725}{3125} \Rightarrow P_3 = 0,2304$$

Exemplo. Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A ?

Em cada escolha de uma pessoa, consideremos os resultados:
Sucesso: a pessoa tem carro da marca A.
Fracasso: a pessoa não tem carro da marca A
Então p = 0,1, q = 0,9, n = 30
Estamos interessados em P_5. Temos:

$$P_5 = \binom{30}{5}(0,1)^5 \cdot (0,9)^{25} \simeq 0,102$$

4.2.1 Exercicios

Exercício. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente duas caras?

Solução. Vamos considerar que sair cara é Sucesso e sair coroa é Fracasso. Então temos que $p = 2$, $q = 4$ e $n = 6$, portanto:

$$P_k = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K} =$$
$$\binom{6}{2} \cdot (\frac{1}{2})^6 \cdot (\frac{1}{2})^4 =$$
$$\frac{6!}{2!4!} \cdot 0,15 \cdot 256 =$$
$$15 \cdot 0,15 \cdot 0,065 =$$
$$\underline{0,14}$$

4.3 Distrubuição de Poisson

Em muitas situações nos deparamos com a situação em que o número de ensaios n é grande ($n \to \infty$) e p é pequeno ($p \to 0$), no cálculo da função binomial, o que nos leva a algumas dificuldades, pois, como podemos analisar, para n muito grande e p pequeno, fica relativamente difícil calcularmos a probabilidade de k sucessos a partir do modelo binomial, isto é, utilizando a função de probabilidade

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}.$$

Observamos que podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \frac{n^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(np)^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k}$$

e, tomando $\lambda = np$, segue que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Se tomarmos o limite quando $n \to \infty$, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = e^{-\lambda}$$

para $k = 0, 1, \ldots$ e $e \approx 2,718$.
Assim temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Tal expressão é devida a Poisson e é muito utilizada para calcular probabilidades de ocorrências de defeitos ”raros” em sistemas e componentes.

Definição. Uma variável aleatória discreta X segue a distribuição de Poisson com parâmetro λ, λ >0, se sua função de probabilidade for dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Utilizamos a notação $X \sim$ Poisson(λ) ou $X \sim$ Po(λ). O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade medida.

Remark
Uma área de oportunidadeé uma unidade contínua ou um intervalo de tempo, volume ou uma área tal que nela possa acontecermais de uma ocorrência de um evento. Exemplos:

- Defeitos na pintura de uma geladeira nova
- Número de falhas na rede em um determinado dia
- Número de pulgas no pêlo de um cachorro

A distribuição de Poisson é aplicada quando:

- Você estiver interessado em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em uma determinada área de oportunidades. A área de oportunidades é definida pelo tempo, extensão, área de superfície e assim sucessivamente.
- A probabilidade de que um evento específico ocorra em uma determinada área de oportunidades é a mesma para todas as áreas de oportunidades.
- O número de eventos que ocorrem em uma determinada área de oportunidades é independente do número de eventos que ocorrem em qualquer outra área de oportunidades.
- A probabilidade de que dois ou mais eventos venham a ocorrer em uma determinada área de oportunidades se arpoxima de zero à medida que a área de oportunidades se torna menor.

Exemplo. Suponha que, em média, 5 carros entrem em um estacionamento por minuto. Qual é a probabilidade de que em um dado minuto, 7 carros entrem?

Solução. Então, X = 7 e $\lambda = 5$

$$P(7) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} = \frac{e^{-7}\lambda^5}{7!} = 0,104$$

Portanto, há uma probabilidade de 10,4% de que 7 carros entrem no estacionamento em um dado minuto.

■

4.3.1 Exercicios

Exercício. Sabe-se que o número de acidentes de trabalho, por mês, em uma unidade de produção segue uma distribuição de Poisson, com uma média aritmética de 2,5 acidentes de trabalho por mês.

a) Qual é a probabilidade de que em um determinado mês nenhum acidente de trabalho venha a ocorrer?

b) De que pelo menos um acidente de trabalho venha a ocorrer?

Solução. a) Com $\lambda = 2{,}5$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^0}{0!} = \frac{1}{(2,71828)^{2,5}(1)} = 0,0821$$

A probabildade de que em um determinado mês nenhum acidente de trabalho ocorra é 0,0821, ou 8,21%.

b)

$$P(C \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0821 = 0,9179$$

A probabilidade de que em um determinado mês haverá pelo menos um acidente de trabalho é 0,9179, ou 91,79%.

Exercício. Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente?

Solução. X = número designado de sucessos = 2

λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 5

Então temos que:

$$P(2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} = \frac{e^{-5}5^2}{2!} = 0,084$$

Exercício. A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

b) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

Solução. a) X = número designado de sucessos = 3

λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 6

$$P(2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} = \frac{e^{-6}6^3}{3!} = 0,089$$

b) P(X $\leq$ 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)

Assim, P(X $\leq$ 3) = 0,00248 + 0,01488 + 0,04464 + 0,08928 = 0,15128

Exercício. Suponhamos que em uma indústria farmacêutica 0,001% de um determinado medicamento sai da linha de produção somente com o excipiente, ou seja, sem nenhum princípio ativo. Qual a probabilidade de que em uma amostra de 4 mil medicamentos mais de 2 deles esteja somente com o excipiente.

Solução. Vamos calcular esta probabilidade usando a aproximação de poisson, pois além de ser uma aproximação muito boa neste caso é bem mais fácil de ser calculada.

Para usarmos a distribuição de Poisson primeiramente devemos encontrar o λ, o qual é dado por $\lambda = n \times p = 4000 \times 0,00001 = 0,04$. Assim

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{0,04^0 e^{-0,04}}{0!} - \frac{0,04^1 e^{-0,04}}{1!} \approx 1 - 0,999221 \approx 0,00078.$$

Assim a probabilidade de que existam mais de 2 medicamentos com apenas o excipiente é de 0,078

4.4 Distrubuição Geométrica

Geométrica (conta o número ensaios para se obter um sucesso.)

Definição. Seja X a variável aleatória que fornece o número de falhas até o primeiro sucesso. A variável X tem distribuição Geométrica com parâmetro p, $0 < p < 1$, se sua função de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}\,(X = j) = (1-p)^j p, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Usaremos a notação $X \sim$ Geo(p).

O evento $[X = j]$ ocorre se, e somente se, ocorrem somente falhas nos j primeiros ensaios e sucesso no $(j+1)$-ésimo ensaio.

Exemplo. Considere o experimento em que uma moeda viciada é lançada sucessivas vezes, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de coroas obtidos no experimento (ou seja, a quantidade de lançamentos anteriores a obtenção da primeira cara). Sabendo que a probabilidade de cara é de $0,4$, qual é a probabilidade de $\mathbb{P}(2 \leq X{<}4)$ e a probabilidade de $\mathbb{P}(X{>}1|X \leq 2)$.

Solução. Observamos que

$$\mathbb{P}(2 \leq X{<}4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0,6^2 \cdot 0,4 + 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,2304.$$

Vamos calcular agora $\mathbb{P}(X{>}1|X \leq 2)$.

$$\mathbb{P}(X{>}1|X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X{>}1 \cap X \leq 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)} = \frac{\mathbb{P}(X = 2)}{\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)} = \frac{0,144}{0,784} = 0,18367.$$

Exemplo. Um dado honesto é lançado sucessivas vezes até que apareça pela primeira vez a face 1. Seja X a variável aleatória que conta o número de ensaios até que corra o primeiro 1. Qual a probabilidade de obtermos 1 no terceiro lançamento.

Solução. Como o dado é honesto, a probabilidade de, em um lançamento, obtermos qualquer face é igual a $1/6$. Neste caso, a probabilidade de se obter a face 1 (sucesso) é $1/6$ e a probabilidade de se obter qualquer outra face (fracasso) é $5/6$. Podemos definir a variável aleatória

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se obtemos 1 no lançamento do dado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso, $Y \sim$ Bernoulli(1/6) e, se definirmos X como sendo a variável que representa o número de lançamentos até a obtenção do primeiro sucesso (aparecimento da face 1), temos que $X \sim$ Geo(1/6). Portanto, se estamos interessados no cálculo da probabilidade de obter 1 no terceiro lançamento, precisamos calcular $\mathbb{P}(X = 3)$, ou seja,

$$\mathbb{P}(X = 3) = (1-p)^2 p = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^3} \approx 0,09645.$$

Remark

A probabilidade de n tentativas serem necessárias para ocorrer um sucesso é:

$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{j-1} p$$

a probabilidade de serem necessários n insucessos antes do primeiro sucesso é:

$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{j} p$$

4.4.1 Exercicios

Exercício. Suponha que a probabilidade de um componente de computador ser defeituoso é de 0,2. Numa mesa de testes, uma batelada é posta à prova, um a um. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado.

Solução. Estamos interessados em encontrar a probabilidade de serem necessários 6 insucessos até o primeiro sucesso, no caso na sétima tentativa.

$$\mathbb{P}(7) = 0,2(1 - 0,2)^{7-1} = 0,0524$$

Exercício. André deve a Renata R \$130,00. Cada viagem de Renata à casa de André custa R\$50,00 e a probabilidade de André ser encontrado em casa é $\frac{1}{3}$. Se Renata encontrar André, conseguirá cobrar a dívida.

a) Qual a probabilidade de Renata ter de ir mais de 3 vezes à casa de André para conseguir cobrar a dívida?

b) Se na segunda vez em que Renata foi à casa de André ainda não o encontrou, qual a probabilidade de conseguir cobrar na 3a vez?

Solução. a) Estamos interessados em descobrir $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - (\mathbb{P}(0) + \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3))$.

4.5 Distribuição Hipergeométrica

Considere uma população com N objetos nos quais M são classificados como do tipo A e $N - M$ são classificados como do tipo B. Por exemplo, em um lote de

100 (N) peças temos 10 (M) peças defeituosas e 90 ($N-M$) peças conformes. Tomamos uma amostra ao acaso, sem reposição e não ordenada de n objetos. Seja X a variável aleatória que conta o número de objetos classificados como do tipo A na amostra. Então a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

sendo k inteiro e $\max\{0, n-(N-M)\} \leq k \leq \min\{M, n\}$.

Definição. Diremos que uma variável aleatória X tem distribuição hipergeométrica de parâmetros M, N e n se sua função de probabilidade for dada da maneira acima. Denotamos $X \sim$ Hgeo(M, N, n)

Exemplo. Seja X a variável aleatória que segue o modelo hipergeométrico com parâmetros $N=10$, $M=5$ e $n=4$. Determine a probabilidade $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Solução. Para calcular a probabilidade procurada precisamos.

$$\mathbb{P}(X \leq 1)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}+\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}=\frac{5}{210}+\frac{50}{210}\approx 0,2619.$$

Exemplo. Uma urna contém 10 bolas, das quais 6 são brancas e 4 pretas. Suponha que décimos retirar 5 bolas da urna qual a probabilidade de que das 5 bolas retiradas 3 sejam brancas?

Solução. Para este problema basta usarmos a distribuição hipergeométrica, com $M=6$, $k=3$, $N=10$ e $n=5$.

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}}=\frac{10}{21}.$$

5 Modelos Probabilisticos Contínuos

5.1 Distribuição Uniforme

Definição. Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observação. Dada uma função de probabilidade $f(x)$, temos que

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=1$$

Exemplo. A ocorrência de panes em qualquer ponto de uma rede telefônica de 7 km foi modelada por uma distribuição Uniforme no intervalo $[0, 7]$. Qual é a probabilidade de que uma pane venha a ocorrer nos primeiros 800 metros? E qual a probabilidade de que ocorra nos 3 km centrais da rede?

Solução. A função densidade da distribuição Uniforme é dada por $f(x) = \frac{1}{7}$ se $0 \leq x \leq 7$ e zero, caso contrário. Assim, a probabilidade de ocorrer pane nos primeiros 800 metros é

$$\mathbb{P}\left(X \leq 0,8\right) = \int_0^{0,8} f(x)dx = \frac{0,8-0}{7} = 0,1142.$$

e a probabilidade de ocorrer pane nos 3 km centrais da rede é

$$\mathbb{P}\left(2 \leq X \leq 5\right) = \int_2^5 f(x)dx = \mathbb{P}\left(X \leq 5\right) - \mathbb{P}\left(X \leq 2\right) = 5/7 - 2/7 \approx 0,4285.$$

5.1.1 Função Geradora de Momentos, Valor Esperado e Variância.

O valor esperado de uma variável aleatória X com distribuição uniforme é dado por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

5.1.2 Exercícios

Exercício. Várias linguagens de programação de computadores têm funções que geram números pseudo-aleatórios cuja distrubuição é basicamente uniforme. Se uma função desse tipo gera números entre 0 e 2, qual a probabilidade de um número gerado estar entre 1 e 1,5? Qual a média esperada e o respectivo desvio padrão ?

Solução. A função densidade da distribuição Uniforme é dada por $f(x) = \frac{1}{2}$ se $0 \leq x \leq 2$ e zero, caso contrário. Assim, a probabilidade de ocorrer pane nos primeiros 800 metros é:

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 1,5)$$

6 Processos Estocásticos