

Anotações Teoria da Probabilidade

Andrey França

January 29, 2017

1 Espaço Amostral

Remark

Chamamos de espaço amostral, e indicamos por Ω , um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo. Um experimento jogar um *dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo. Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.
 $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$.

1.1 Exercícios

Dar o Espaço Amostral para cada exercício abaixo:

Exemplo. Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE.

Sol. O espaço amostral é qualquer uma das letras da palavra. Portanto
 $\Omega = \{P, R, O, B, I, L, D, A, E\}$

Exemplo. Três pessoas A, B, C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.

Sol. $\Omega = \{(CAB), (BCA), (ACB), (CBA), (BAC)\}$

2 Eventos

Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω . Chamaremos de *evento* todo subconjunto de Ω . Em geral, indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, D, ... X, Y, Z.

Exemplo. Um dado é lançado, e observa-se o número da face de cima. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos

A: Ocorrência de número ímpar. $A = \{1, 3, 5\}$

B: Ocorrência de número primo. $B = \{2, 3, 5\}$

C: Ocorrência de número menor que 4. $C = \{1, 2, 3\}$

Exemplo. Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

A: ocorrência de cara no primeiro lançamento

$A = \{(K, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, C, K)\}$

Remark

Podemos, e devemos, realizar todas as operações de teoria dos conjuntos nos conjuntos formados pelos eventos. Isto é, união, intersecção, ou seja, existem eventos que acontecem se um OU outros ocorrerem, e se um E outro ocorrerem.

2.1 Exercícios

E1 - Uma moeda e um dado são lançados. Seja

$\Omega = \{(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)$

$(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), \}$

Descreva os eventos:

a) A: ocorre cara,

b) B: ocorre número par,

Sol. TRIVIAL

3 Variável Aleatória

Consideremos um experimento e Ω o espaço amostral associado a esse experimento.

Uma função X , que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é denominada variável aleatória (v.a.). Ou seja, variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

4 Modelos Probabilísticos Discretos

4.1 Ensaios de Bernoulli

Cosidere um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais o resultado de uma ensaio não depende dos ensaios anteriores e nem dos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados. Um deles que chamamos de sucesso (S) e outros que chamamos de fracasso (F). A probabilidade de ocorrer Sucesso é sempre p , e a probabilidade de ocorrer fracasso é sempre $q = 1 - p$.

Para um experimento que consiste na realização de n ensaios independentes de Bernoulli, o espaço amostral pode ser considerado como o conjunto de n -uplas, em que cada posição há um sucesso (S) ou uma falha (F).

4.1.1 Exemplos de ensaios de Bernoulli

1) Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, onde dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamamos o Sucesso de cara, e o fracasso de coroa. Em cada ensaio $p = \frac{1}{2}$ e Fracasso $q = \frac{1}{2}$

Neste exemplo sejam os eventos:

A_1 : ocorre cara no 1 lançamento, $P(A_1) = \frac{1}{2}$

A_2 : ocorre cara no 2 lançamento, $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

\vdots

A_5 : ocorre cara no 5 lançamento, $P(A_5) = \frac{1}{2}$.

Então o evento $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5$ corresponde ao evento sair cara nos 5 lançamentos, que é $\{(K, K, K, K, K)\}$

Como os 5 eventos são independentes,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Vamos supor agora o evento de sair exatamente 1 cara, isto é

$\{(K, C, C, C, C), (C, K, C, C, C), (C, C, K, C, C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)\}$

Portanto a probabilidade é:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

Como podemos facilmente perceber isto é a permutação de 5 elementos com 4 repetidos.

Remark

Dizemos que um evento A independe de B se:

$$P(A|B) = P(A)$$

isto é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Se quisermos agora calcular a probabilidade de sair exatamente duas caras, teremos de calcular o número de quintuplas ordenadas, onde existem duas caras (K) e três coroas:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Obs: Aqui calculamos exatamente 5 ensaios de Bernoulli.

4.2 Distribuição Binomial

O que se conhece por Distribuição Binomial é justamente a generalização dos ensaios de Bernoulli. Vamos considerar uma sequência de n ensaios de Bernoulli. Seja p a probabilidade de sucesso e q a probabilidade de fracasso.

Queremos calcular a *probabilidade de P_k , da ocorrência de exatamente K sucessos, nos n ensaios*.

O evento *Ocorrem K sucessos nos n ensaios* é formado por todas as enuplas ordenadas onde existem K sucessos(S) e $n - K$ fracassos(F). O número de enuplas ordenadas nesta condição é:

$$P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

A probabilidade de cada enupla ordenada de K sucessos (S) e $(n-K)$ Fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdots p}_K \cdot \underbrace{q \cdot q \cdots q}_{n-K} = p^K \cdot q^{n-K}$$

Logo, se cada enupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade de $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ enuplas desse tipo, a probabilidade P_K de exatamente K sucessos nos n ensaios será:

$$P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

Exemplo. Um urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observa sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como Sucesso o resultado "bola vermelha", e Fracasso o resultado "bola branca". Então:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, n = 5.$$

Estamos interessados na probabilidade P_3 . Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{725}{3125} \Rightarrow P_3 = 0,2304$$

Exemplo. Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A ?

Em cada escolha de uma pessoa, consideremos os resultados:

Sucesso: a pessoa tem carro da marca A.

Fracasso: a pessoa não tem carro da marca A

Então $p = 0,1$, $q = 0,9$, $n = 30$

Estamos interessados em P_5 . Temos:

$$P_5 = \binom{30}{5} (0,1)^5 \cdot (0,9)^{25} \simeq 0,102$$

4.2.1 Exercícios

Exercício. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente duas caras?

Solução. Vamos considerar que sair cara é Sucesso e sair coroa é Fracasso. Então temos que $p = 2$, $q = 4$ e $n = 6$, portanto:

$$\begin{aligned} P_k &= \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K} = \\ &= \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ &= \frac{6!}{2!4!} \cdot 0,15 \cdot 256 = \\ &= 15 \cdot 0,15 \cdot 0,065 = \\ &= \underline{0,14} \end{aligned}$$

4.3 Distribuição de Poisson

Em muitas situações nos deparamos com a situação em que o número de ensaios n é grande ($n \rightarrow \infty$) e p é pequeno ($p \rightarrow 0$), no cálculo da função binomial, o que nos leva a algumas dificuldades, pois, como podemos analisar, para n muito grande e p pequeno, fica relativamente difícil calcularmos a probabilidade de k sucessos a partir do modelo binomial, isto é, utilizando a função de probabilidade

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Observamos que podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \frac{n^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(np)^k}{n^k} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-k}$$

e, tomando $\lambda = np$, segue que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Se tomarmos o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

para $k = 0, 1, \dots$ e $e \approx 2,718$.

Assim temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Tal expressão é devida a Poisson e é muito utilizada para calcular probabilidades de ocorrências de defeitos "raros" em sistemas e componentes.

Definição. Uma variável aleatória discreta X segue a distribuição de Poisson com parâmetro λ , $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade for dada por

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Utilizamos a notação $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ou $X \sim \text{Po}(\lambda)$. O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade medida.

Remark

Uma área de oportunidade é uma unidade contínua ou um intervalo de tempo, volume ou uma área tal que nela possa acontecer mais de uma ocorrência de um evento. Exemplos:

- Defeitos na pintura de uma geladeira nova
- Número de falhas na rede em um determinado dia
- Número de pulgas no pêlo de um cachorro

A distribuição de Poisson é aplicada quando:

- Você estiver interessado em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em uma determinada área de oportunidades. A área de oportunidades é definida pelo tempo, extensão, área de superfície e assim sucessivamente.
- A probabilidade de que um evento específico ocorra em uma determinada área de oportunidades é a mesma para todas as áreas de oportunidades.
- O número de eventos que ocorrem em uma determinada área de oportunidades é independente do número de eventos que ocorrem em qualquer outra área de oportunidades.
- A probabilidade de que dois ou mais eventos venham a ocorrer em uma determinada área de oportunidades se aproxima de zero à medida que a área de oportunidades se torna menor.

Exemplo. Suponha que, em média, 5 carros entrem em um estacionamento por minuto. Qual é a probabilidade de que em um dado minuto, 7 carros entrem?

Solução. Então, $X = 7$ e $\lambda = 5$

$$P(7) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!} = \frac{e^{-5} 5^7}{7!} = 0,104$$

Portanto, há uma probabilidade de 10,4% de que 7 carros entrem no estacionamento em um dado minuto.

■

4.3.1 Exercícios

Exercício. Sabe-se que o número de acidentes de trabalho, por mês, em uma unidade de produção segue uma distribuição de Poisson, com uma média aritmética de 2,5 acidentes de trabalho por mês.

- Qual é a probabilidade de que em um determinado mês nenhum acidente de trabalho venha a ocorrer?
- De que pelo menos um acidente de trabalho venha a ocorrer?

Solução. a) Com $\lambda = 2,5$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2,5} (2,5)^0}{0!} = \frac{1}{(2,71828)^{2,5} (1)} = 0,0821$$

A probabilidade de que em um determinado mês nenhum acidente de trabalho ocorra é 0,0821, ou 8,21%.

b)

$$P(C \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0821 = 0,9179$$

A probabilidade de que em um determinado mês haverá pelo menos um acidente de trabalho é 0,9179, ou 91,79%.

Exercício. Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente?

Solução. X = número designado de sucessos = 2

λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 5 Então temos que:

$$P(2) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!} = \frac{e^{-5} 5^2}{2!} = 0,084$$

Exercício. A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba

- Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?
- Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

Solução. a) $X =$ número designado de sucessos $= 3$

$\lambda =$ o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) $= 6$

$$P(2) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!} = \frac{e^{-6} 6^3}{3!} = 0,089$$

b) $P(X \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

Assim, $P(X \leq 3) = 0,00248 + 0,01488 + 0,04464 + 0,08928 = 0,15128$

Exercício. Suponhamos que em uma indústria farmacêutica 0,001% de um determinado medicamento sai da linha de produção somente com o excipiente, ou seja, sem nenhum princípio ativo. Qual a probabilidade de que em uma amostra de 4 mil medicamentos mais de 2 deles esteja somente com o excipiente.

Solução. Vamos calcular esta probabilidade usando a aproximação de poisson, pois além de ser uma aproximação muito boa neste caso é bem mais fácil de ser calculada.

Para usarmos a distribuição de Poisson primeiramente devemos encontrar o λ , o qual é dado por $\lambda = n \times p = 4000 \times 0,00001 = 0,04$. Assim

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{0,04^0 e^{-0,04}}{0!} - \frac{0,04^1 e^{-0,04}}{1!} \approx 1 - 0,999221 \approx 0,00078.$$

Assim a probabilidade de que existam mais de 2 medicamentos com apenas o excipiente é de 0,078

4.4 Distribuição Geométrica

Geométrica (conta o número ensaios para se obter um sucesso.)

Definição. Seja X a variável aleatória que fornece o número de falhas até o primeiro sucesso. A variável X tem distribuição Geométrica com parâmetro p , $0 < p < 1$, se sua função de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = j) = (1 - p)^j p, \quad j = 0, 1, \dots$$

Usaremos a notação $X \sim \text{Geo}(p)$.

O evento $[X = j]$ ocorre se, e somente se, ocorrem somente falhas nos j primeiros ensaios e sucesso no $(j + 1)$ -ésimo ensaio.

Exemplo. Considere o experimento em que uma moeda viciada é lançada sucessivas vezes, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de coroas obtidos no experimento (ou seja, a quantidade de lançamentos anteriores a obtenção da primeira cara). Sabendo que a probabilidade de cara é de 0,4, qual é a probabilidade de $\mathbb{P}(2 \leq X < 4)$ e a probabilidade de $\mathbb{P}(X > 1 | X \leq 2)$.

Solução. Observamos que

$$\mathbb{P}(2 \leq X < 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 0,6^2 \cdot 0,4 + 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,2304.$$

Vamos calcular agora $\mathbb{P}(X > 1 | X \leq 2)$.

$$\mathbb{P}(X > 1 | X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X > 1 \cap X \leq 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)} = \frac{\mathbb{P}(X = 2)}{\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)} = \frac{0,144}{0,784} = 0,18367.$$

Exemplo. Um dado honesto é lançado sucessivas vezes até que apareça pela primeira vez a face 1. Seja X a variável aleatória que conta o número de ensaios até que corra o primeiro 1. Qual a probabilidade de obtermos 1 no terceiro lançamento.

Solução. Como o dado é honesto, a probabilidade de, em um lançamento, obtermos qualquer face é igual a $1/6$. Neste caso, a probabilidade de se obter a face 1 (sucesso) é $1/6$ e a probabilidade de se obter qualquer outra face (fracasso) é $5/6$. Podemos definir a variável aleatória

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se obtemos 1 no lançamento do dado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso, $Y \sim \text{Bernoulli}(1/6)$ e, se definirmos X como sendo a variável que representa o número de lançamentos até a obtenção do primeiro sucesso (aparecimento da face 1), temos que $X \sim \text{Geo}(1/6)$. Portanto, se estamos interessados no cálculo da probabilidade de obter 1 no terceiro lançamento, precisamos calcular $\mathbb{P}(X = 3)$, ou seja,

$$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - p)^2 p = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^3} \approx 0,09645.$$

Remark

A probabilidade de n tentativas serem necessárias para ocorrer um sucesso é:

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

a probabilidade de serem necessários n insucessos antes do primeiro sucesso é:

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^n p$$

4.4.1 Exercícios

Exercício. Suponha que a probabilidade de um componente de computador ser defeituoso é de 0,2. Numa mesa de testes, uma batelada é posta à prova, um a um. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado.

Solução. Estamos interessados em encontrar a probabilidade de serem necessários 6 insucessos até o primeiro sucesso, no caso na sétima tentativa.

$$\mathbb{P}(7) = 0,2(1-0,2)^{7-1} = 0,0524$$

4.5 Distribuição Hipergeométrica

Considere uma população com N objetos nos quais M são classificados como do tipo A e $N - M$ são classificados como do tipo B . Por exemplo, em um lote de 100 (N) peças temos 10 (M) peças defeituosas e 90 ($N - M$) peças conformes. Tomamos uma amostra ao acaso, sem reposição e não ordenada de n objetos. Seja X a variável aleatória que conta o número de objetos classificados como do tipo A na amostra. Então a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

sendo k inteiro e $\max\{0, n - (N - M)\} \leq k \leq \min\{M, n\}$.

Definição. Diremos que uma variável aleatória X tem distribuição hipergeométrica de parâmetros M , N e n se sua função de probabilidade for dada da maneira acima. Denotamos $X \sim \text{Hgeo}(M, N, n)$

Exemplo. Seja X a variável aleatória que segue o modelo hipergeométrico com parâmetros $N = 10$, $M = 5$ e $n = 4$. Determine a probabilidade $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Solução. Para calcular a probabilidade procurada precisamos.

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{5}{1} \binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{210} + \frac{50}{210} \approx 0,2619.$$

Exemplo. Uma urna contém 10 bolas, das quais 6 são brancas e 4 pretas. Suponha que decimos retirar 5 bolas da urna qual a probabilidade de que das 5 bolas retiradas 3 sejam brancas?

Solução. Para este problema basta usarmos a distribuição hipergeométrica, com $M = 6$, $k = 3$, $N = 10$ e $n = 5$.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21}.$$