

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $MAP/PN/1$

1 Математическая модель

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с бесконечным буфером. Заявки поступают в систему в MAP (Markovian Arrival Process)-потоке, который является ординарным аналогом $BMAP$ (Batch Markovian Arrival Process). Поступление заявок в этом потоке возможно только в моменты скачков некоторой неприводимой цепи Маркова $\nu_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$, которая называется управляющим процессом MAP -потока. Интенсивности переходов процесса $\nu_t, t \geq 0$, сопровождающиеся поступлением заявки (не сопровождающиеся поступлением заявок), задаются элементами матрицы D_1 (недиагональными элементами матрицы D_0). При этом матрица $D_0 + D_1$ является неприводимым инфинитезимальным генератором цепи Маркова $\nu_t, t \geq 0$. Вектор-строка θ стационарного распределения этой цепи является решением системы уравнений $\theta(D_0 + D_1) = 0, \theta e = 1$, где e – вектор-столбец, состоящий из единиц, 0 -вектор-строка, состоящая из нулей. Интенсивность λ поступления заявок в стационарном MAP -потоке имеет вид $\lambda = \theta D_1 e$. Коэффициент вариации c_{var} длины интервала между моментами поступления последовательных групп определяется формулой $c_{var}^2 = 2\lambda\theta(-D_0)^{-1}e - 1$. Коэффициент корреляции c_{cor} длин двух соседних интервалов вычисляется следующим образом: $c_{cor} = (\lambda\theta(-D_0)^{-1}D_1(-D_0)^{-1}e - 1)/c_{var}^2$. Более подробное описание $BMAP$ -потока можно найти в [1].

Время обслуживания заявки на приборе имеет PN (Phase type) распределение с неприводимым представлением (β, S) и управляющим процессом $m_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \dots, M, M + 1\}$, где состояние $M + 1$ является поглощающим. Это означает следующее. Время обслуживания интерпретируется как время, за которое цепь Маркова $m_t, t \geq 0$, достигнет поглощающего состояния $M + 1$. Переходы цепи $m_t, t \geq 0$, в пространстве состояний $\{1, \dots, M\}$ задаются субгенератором S , а интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $S_0 = -Se$. Когда обслуживание начинается, состояние процесса $m_t, t \geq 0$, выбирается в пространстве состояний $\{1, \dots, M\}$ на основании вероятностного вектора-строки β . Полагаем, что матрица $S + S_0\beta$ неприводима. Интенсивность обслуживания задается как $\mu = -(\beta S^{-1}e)^{-1}$, среднее время обслуживания $b_1 = \mu^{-1}$.

Дисциплина выбора из очереди на обслуживание FIFO.

Цель работы: вычислить стационарное распределение вероятностей состояний системы (векторы $p_i, i \geq 0$) и основные характеристики производительности. Построить графики зависимостей характеристик от параметров системы.

2 Цепь Маркова, описывающая функционирование системы

Пусть в момент t

- i_t - число заявок в системе, $i_t \geq 0$,
- m_t - состояние управляющего процесса РН - обслуживания на занятом приборе, $m_t = \overline{1, M}$;
- ν_t - состояние управляющего процесса входящего MAR потока, $\nu_t = \overline{0, W}$.

Процесс функционирования системы описывается неприводимой цепью Маркова ξ_t с пространством состояний

$$X = \{(i, \nu), i = 0, \nu = \overline{0, W}\} \cup \{(i, \nu, m), i \geq 1, \nu = \overline{0, W}, m = \overline{1, M}\}.$$

Далее будем предполагать, что состояния цепи $\xi_t, t \geq 0$, упорядочены в лексикографическом порядке. Обозначим через $Q_{i,j}$ матрицу интенсивностей переходов цепи из состояний, соответствующих значению i первой (счетной) компоненты в состояния, соответствующие значению j этой компоненты, $i, j \geq 0$.

Лемма 1. Рассматриваемая цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, является векторным процессом гибели и размножения (QBD). Инфинитезимальный генератор Q этой цепи имеет блочную трехдиагональную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots \\ Q_{1,0} & Q_1 & Q_2 & O & \dots \\ O & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots \\ O & O & Q_0 & Q_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где ненулевые блоки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_{0,0} &= D_0, & Q_{0,1} &= D_1, \\ Q_{1,0} &= I_{\bar{W}} \otimes S_0, \\ Q_0 &= I_{\bar{W}} \otimes S_0 \beta, & Q_1 &= D_0 \oplus S, & Q_2 &= D_1 \otimes I_M, \end{aligned}$$

где \otimes, \oplus - символы кронекерова произведения и суммы матриц соответственно (см. [2]), $\bar{W} = W + 1$.

Следствие 1. Цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, принадлежит классу квазиплицевых цепей с непрерывным временем (КТЦМ), см. [3].

Доказательство следует из вида генератора, заданного леммой 1, и определения КТЦМ, данного в [3].

3 Условие эргодичности

Теорема 1. Цепь Маркова ξ_t эргодична тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Здесь

$$\lambda = \theta D_1 \mathbf{e},$$

где θ —вектор-строка порядка \bar{W} , который находится как единственное решение СЛАУ

$$\theta(D_0 + D_1) = \mathbf{0}, \theta \mathbf{e} = 1,$$

$$\mu = -(\beta S^{-1} \mathbf{e})^{-1}.$$

4 Стационарное распределение

Предполагаем, что условие эргодичности, заданное теоремой 1 выполняется, что гарантирует, что в рассматриваемой системе не накапливается бесконечной очереди и существуют стационарные вероятности состояний системы, задаваемые как

$$p(0, \nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{i_t = 0, \nu_t = \nu\}, n = 0, 1, \nu = \overline{0, W};$$

$$p(i, \nu, m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{i_t = i, \nu_t = \nu, m_t = m\}, i \geq 1, n = 0, 1, \nu = \overline{0, W}, m = \overline{1, M}.$$

Упорядочим вероятности в лексикографическом порядке компонент и сформируем векторы этих вероятностей $\mathbf{p}_i, i \geq 0$.

Порядки этих векторов равны:

$$\mathbf{p}_i \sim \bar{W}(1 + M), i \geq 1.$$

Векторы стационарных вероятностей $\mathbf{p}_i, i \geq 0$, вычисляются по следующему алгоритму (см. [3]).

АЛГОРИТМ

- 1) Находим матрицу G как единственное минимальное неотрицательное решение уравнения

$$Q_0 + Q_1 G + Q_2 G^2 = O.$$

Замечание 1. Это матричное уравнение можно решать методом итераций

$$G^{(n+1)} = (-Q_1)^{-1}[Q_0 + Q_2(G^{(n)})^2],$$

где $G^{(0)} = I_{\bar{W}(1+M)}$. Останавливаемся, когда становится $\|G^{(n+1)} - G^{(n)}\| < \varepsilon_G$.

- 2) Находим матрицу G_0 из уравнения обратной рекурсии:

$$G_0 = -(Q_1 + Q_2 G)^{-1} Q_{1,0}.$$

3) Вычисляем матрицы $\bar{Q}_{i,j}$ по формулам

$$\bar{Q}_{i,i} = \begin{cases} Q_{0,0} + Q_{01}G_0, & i = 0, \\ Q_1 + Q_2G, & i \geq 1, \end{cases}$$

$$\bar{Q}_{i,i+1} = \begin{cases} Q_{0,1}, & i = 0, \\ Q_2, & i \geq 1. \end{cases}$$

4) Находим матрицы F_i из рекуррентных соотношений:

$$F_0 = I, F_i = F_{i-1}\bar{Q}_{i-1,i}(-\bar{Q}_{i,i})^{-1}, i \geq 1.$$

5) Вычисляем вектор \mathbf{p}_0 как единственное решение СЛАУ:

$$\mathbf{p}_0(-\bar{Q}_{0,0}) = 0, \mathbf{p}_0 \sum_{i=0}^{\infty} F_i \mathbf{e} = 1.$$

6) Вычисляем векторы \mathbf{p}_i по формулам $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 F_i, i \geq 0$.

Замечание. При выполнении шагов 3-6 как-то нужно выбрать значение i , при котором мы заканчиваем счет. Чтобы это сделать, мы должны понимать, что при возрастании i норма матриц F_i убывает. Нам надо, чтобы эта норма была очень малой. Поэтому в качестве предельного значения i , при котором мы заканчиваем счет, берем такое, при котором уже будет выполняться неравенство $\|F_i\| < \epsilon_F$.

Преимуществом этого алгоритма является отсутствие операции вычитания в рекурсиях. Все матрицы, фигурирующие в алгоритме, являются неотрицательными. Это обеспечивает устойчивость вычислений при компьютерной реализации алгоритма.

5 Характеристики производительности системы

Вычислив векторы стационарных вероятностей $\mathbf{p}_i, i \geq 1$, можно вычислить также различные характеристики производительности системы.

- Вероятность того, что в системе находится i заявок $p_i = \mathbf{p}_i \mathbf{e}, i \geq 0$.

- Среднее число заявок в системе $L = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i$.

- Вероятность того, что поступившая заявка застанет i заявок в системе

$$p_i^{(arrival)} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{p}_i D_1 \mathbf{e}.$$

- Среднее время пребывания

$$\bar{w} = - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i (\mathbf{e}_{\bar{W}} \otimes I_M) S^{-1} \mathbf{e}_M + L b_1.$$

6 Численные примеры

Исходные данные должны вводиться с экрана. К ним относятся:

1. W ;
2. Матрицы D_0, D_1 ;
3. Число M ;
4. Вектор-строка β , матрица S .
5. Точность ε_G .

Для отладки взять

1. $W = 1$;
2. $D_0 = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.
3. $M = 2$;
4. $\beta = (1, 0), S = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 30 & -30 \end{pmatrix}$.
5. $\varepsilon_G = 10^{-8}$.

Список литературы

- [1] Lucantoni D.M. (1991). New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics-Stochastic Models*. Vol. **7**, pp. 1-46.
- [2] Graham A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. Cichester: Ellis Horwood, 1981.
- [3] Klimenok V.I., Dudin A.N. (2006). Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory. *Queueing Systems*. Vol. **54**, pp. 245-259.