Лабораторная работа «ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Цели:

1. Изучить основные положения ДП
2. Освоить методы нахождения решения классов задач ДП

Контрольные вопросы

1. Для оптимизации каких процессов можно применять методы ДП? Приведите примеры.
2. Что называется управлением? Какой процесс называется управляемым? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным управлением?
4. На каких принципах основывается решение задач ДП? Сформулируйте их.
5. Перечислите этапы составления математической модели задач ДП.
6. Приведите примеры задач, решаемых методами ДП
7. Сформулируйте задачу нахождения кратчайшего пути. Укажите метод ее решения.
8. Сформулируйте задачу замены оборудования и укажите метод ее решения.
9. Сформулируйте задачу оптимального распределения ресурсов и укажите метод ее решения.
10. В чем заключается принцип оптимальности Беллмана.

Краткие теоретические сведения

В ряде экономических и производственных задач необходимо учитывать изменение моделируемого процесса во времени и влияние времени на критерий оптимальности. Для решения указанных задач используется метод динамического планирования (динамическое программирование). Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Преимущество такого подхода в том, что решение большой n-мерной задачи заменяется решением одномерных оптимизационных подзадач, что значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, имеющего универсальный метод решения (симплексный метод), в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является *метод рекуррентных соотношений,* основывающийся на *принципе оптимальности*, разработанном американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце. Т.о. управление на каждом шаге надо выбирать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом. В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги (этапы). Главным при разбиении задачи на этапы является оптимальность конечного результата. Природа каждого этапа, так же как и используемый при этом алгоритм, определяется конкретной оптимизационной задачей. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Экономические процессы часто расчленяются на отдельные шаги (этапы) естественным образом. Например, для процессов перспективного и текущего планирования естественным шагом будет интервал времени от года до дня включительно. При этом оптимальное решение для каждого шага используется в качестве исходных данных для следующего шага, что требует учета этих взаимосвязей.

Рассмотрим задачу, которая состоит из m шагов или этапов, например, планирование деятельности предприятия на несколько лет, поэтапное планирование инвестиций, управление производственными мощностями в течение длительного срока. Показатель эффективности задачи в целом обозначим через B, а показатели эффективности на отдельных шагах — через f_i, $i=\overline{1,m}$. Если B обладает свойством аддитивности, т.е.

$$B=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i), \tag{3.1}$$

то можно найти оптимальное решение задачи методом динамического программирования.

Таким образом, динамическое программирование — это метод оптимизации многошаговых или многоэтапных процессов, критерий эффективности которых обладает свойством (3.1). В задачах динамического программирования критерий эффективности называется выигрышем. Данные процессы управляемые, и от выбора управления зависит величина выигрыша.

Переменная x_i, от которой зависят выигрыш на i-м шаге и, следовательно, выигрыш в целом, называется шаговым управлением, $i=\overline{1,m}$.

Управлением процесса в целом (x) называется последовательность шаговых управлений $x=(x_1,x_2,...,x_m)$.

Оптимальное управление x^* — это значение управления x, при котором значение $B(x^*)$ является максимальным (или минимальным, если требуется уменьшить проигрыш)

$$B^*=B(x^*)=\max\left\{B(x)\right\},\ x\in X, \tag{3.2}$$

где X — область допустимых управлений.

Оптимальное управление x^* определяется последовательностью оптимальных шаговых управлений $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$.

При решении задачи динамического программирования на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если все шаги независимы друг от друга, то оптимальным шаговым управлением будет то управление, которое приносит максимальный выигрыш именно на данном шаге. Но, например, при покупке новой техники взамен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства. Поэтому прибыль от ее эксплуатации вначале может быть небольшой. Однако в следующие годы новая техника будет приносить большую прибыль. И наоборот, если руководитель примет решение оставить старую технику для получения прибыли в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. В многошаговых процессах все шаги зависят друг от друга, и, следовательно, управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

При определении количества средств, вкладываемых в предприятие в i-м году, необходимо знать, сколько средств осталось в наличии к этому году и какая прибыль получена в предыдущем ($i-1$)-м году. Таким образом, при выборе шагового управления необходимо учитывать: 1) возможные исходы предыдущего шага и 2) влияние управления на все оставшиеся до конца процесса шаги.

В задачах динамического программирования первый пункт учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и проводя для каждого из вариантов условную оптимизацию. Выполнение второго пункта обеспечивается тем, что в задачах динамического программирования условная оптимизация проводится от конца процесса к началу. Сперва оптимизируется последний m-й шаг, на котором не надо учитывать возможные воздействия выбранного управления x_m на все последующие шаги, так как эти шаги просто отсутствуют. Делая предположения об условиях окончания ($m-1$)-го шага, для каждого из них проводят условную оптимизацию m-го шага и определяют условное оптимальное управление x_m. Аналогично поступают для ($m-1$)-го шага, делая предположения об исходах окончания ($m-2$)-го шага и определяя условное оптимальное управление на ($m-1$)-м шаге, приносящее оптимальный выигрыш на двух последних шагах — ($m-1$)-м и m-м. Так же действуют на всех остальных шагах до первого. На первом шаге, как правило, не надо делать условных предположений, так как состояние системы перед первым шагом обычно известно.

Для этого состояния выбирают оптимальное шаговое управление, обеспечивающее оптимальный выигрыш на первом и всех последующих шагах. Это управление является безусловным оптимальным управлением на первом шаге и определяет оптимальное значение выигрыша и безусловные оптимальные управления на всех шагах. Ниже это будет пояснено на примерах.

Составление математической модели задачи динамического программирования

Дополнительно введем следующие условные обозначения:

s — состояние процесса;

S_i — множество возможных состояний процесса перед i-м шагом;

B_i — выигрыш с 1-го шага до конца процесса, $i=\overline{1,m}$. Можно определить следующие основные этапы составления математической модели задачи динамического программирования.

1. Разбиение задачи на шаги (этапы). Шаг не должен быть слишком мелким, чтобы не проводить лишних расчетов и не должен быть слишком большим, усложняющим процесс шаговой оптимизации.

2. Выбор переменных, характеризующих состояние s моделируемого процесса перед каждым шагом, и выявление налагаемых на них ограничений. В качестве таких переменных следует брать факторы, представляющие интерес для исследователя, например, годовую прибыль при планировании деятельности предприятия.

3. Определение множества шаговых управлений x_i, $i=\overline{1,m}$, и налагаемых на них ограничений, т.е. области допустимых управлений X .

4. Определение выигрыша

$$f_i(s, x_i), \tag{3.3}$$

который принесет на i-м шаге управление x_i, если система перед этим находилась в состоянии s.

5. Определение состояния s', в которое переходит система из состояния s под влиянием управления x_i:

$$s' = \phi_i(s, x_i), \tag{3.4}$$

где ϕ_i, — функция перехода на i-м шаге из состояния s в состояние s'.

6. Составление уравнения, определяющего условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния s моделируемого процесса

$$B_m(s) = \max_{x_m \in X}\left\{\phi_m(s, x_m)\right\}. \tag{3.5}$$

7. Составление основного функционального уравнения динамического программирования, определяющего условный оптимальный выигрыш для данного состояния s с i-го шага и до конца процесса через уже известный условный оптимальный выигрыш с ($i+1$)-го шага и до конца:

$$B_i(s) = \max_{x_m \in X}\left\{ f_i(s, x_i) + B_{i+1}(\phi_i(s, x_i))\right\}. \tag{3.6}$$

В уравнении (3.6) в уже известную функцию $B_{i+1}(s)$, характеризующую условный оптимальный выигрыш с ($i+1$)-го шага до конца процесса, вместо состояния s подставлено новое состояние $s' = \phi_i(s, x_i)$, в которое система переходит на i-м шаге под влиянием управления x_i.

Этапы решения задачи динамического программирования

После того, как математическая модель составлена, приступают к ее расчету. Укажем основные этапы решения задачи динамического программирования.

1. Определение множества возможных состояний S_m для последнего шага.

2. Проведение условной оптимизации для каждого состояния $s \in S_m$ на последнем m-м шаге по формуле (3.5) и определение условного оптимального управления $x(s)$, $s \in S_m$.

3. Определение множества возможных состояний S_i для i-го шага, $i = 2,3,...,m-1$.

4. Проведение условной оптимизации i-го шага, $i = 2,3,...,m-1$ для каждого состояния $s \in S_i$, по формуле (3.6) и определение условного оптимального управления $x_i(s)$, $s \in S_i$, $i = 2,3,...,m-1$.

5. Определение начального состояния системы s_1, оптимального выигрыша $B(s_1)$ и оптимального управления $x_1(s_1)$ по формуле (3.6) при $i = 1$. Это есть оптимальный выигрыш для всей задачи и $B^* = B_1(x_1^*)$.

6. Проведение безусловной оптимизации управления. Для проведения безусловной оптимизации необходимо найденное на первом шаге оптимальное управление $x_1^* = x_1(s_1)$ подставить в формулу (3.4) и определить следующее состояние системы $s_2 = \phi_2(s_1, x_1^*)$. Для измененного состояния найти оптимальное управление $x_2^* = x_2(s_2)$, подставить в формулу (3.4.) и т.д. Для i-го состояния s_i найти $s_{i+1} = \phi_{i+1}(s_i, x_i^*)$ и $x_{i+1}^* = x_{i+1}(s_{i+1})$ и т.д.

Выбор оптимальной стратегии замены оборудования как задача динамического программирования

В общем виде проблема ставится следующим образом: определить оптимальную стратегию использования оборудования в период времени длительностью m лет, причем прибыль за каждые i лет, $i = \overline{1,m}$, от использования оборудования возраста t лет должна быть максимальной.

Известны: $r(t)$ — выручка от реализации продукции, произведенной за год на оборудовании возраста t лет; $l(t)$ — годовые затраты, зависящие от возраста оборудования t; $c(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет; p — стоимость нового оборудования. Под возрастом оборудования понимается период эксплуатации оборудования после последней замены, выраженный в годах.

Для построения математической модели последовательно выполняются этапы, сформулированные ниже.

1. Определение числа шагов. Число шагов равно числу лет, в течение которых эксплуатируется оборудование.

2. Определение состояний системы. Состояние системы характеризуется возрастом оборудования t, $t=\overline{0,m}$.

3. Определение управлений. В начале i-го шага, $i=\overline{1,m}$, может быть выбрано одно из двух управлений: заменять или не заменять оборудование. Каждому варианту управления приписывается число

$$x_i=\begin{cases}0, \text{ если оборудование не заменяется;}\\ 1, \text{ если оборудование заменяется.}\end{cases} \tag{3.7}$$

4. Определение функции выигрыша на i-м шаге. Функция выигрыша на i-м шаге — это прибыль от использования оборудования к концу i-го года эксплуатации, $t=\overline{0,m}$, $i=\overline{1,m}$.

$$f_i(t)=\begin{cases}r(t)-l(t), \text{ если оборудование в начале i-го года}\\ \qquad\qquad \text{не заменяется;}\\ c(t)-p+r(0)-l(0), \text{ если оборудование заменяется.}\end{cases} \tag{3.8}$$

Таким образом, если оборудование не продается, то прибыль от его использования — это разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками. При замене оборудования прибыль составляет разность между остаточной стоимостью оборудования и стоимостью нового оборудования, к которой прибавляется разность между стоимостью продукции и эксплуатационными издержками для нового оборудования, возраст которого в начале i-го шага составляет 0 лет.

5. Определение функции изменения состояния:

$$\phi_i(t)=\begin{cases}t+1, \text{ если } x_i=0;\\ 1, \quad\ \text{ если } x_i=1.\end{cases} \tag{3.9}$$

6. Составление функционального уравнения для $i=m$:

$$B_m(t)=\max_{x_m\in\{0,1\}}\begin{cases}r(t)-l(t);\\ c(t)-p+r(0)-l(0).\end{cases} \tag{3.10}$$

7. Составление основного функционального уравнения:

$$B_i(t)=\max_{x_i\in\{0,1\}}\begin{cases}r(t)-l(t)+B_{i+1}(\mathrm{t}+1);\\ c(t)-p+r(0)-l(0)+B_{i+1}(1),\end{cases} \tag{3.11}$$

где $B_i(t)$ — прибыль от использования оборудования возраста t лет с i-го шага (с конца i-го года) до конца периода эксплуатации; $B_{i+1}(t+1)$ — прибыль от использования оборудования возраста $t+1$ год с ($i+1$)-го шага до конца периода эксплуатации.

Математическая модель задачи построена.

Пример. Определить оптимальную стратегию использования оборудования в период времени длительностью m лет, причем прибыль за каждые i лет, $i=\overline{1,m}$, от использования оборудования возраста t лет должна быть максимальной.

Известны: $r(t)$ — выручка от реализации продукции, произведенной за год на оборудовании возраста t лет; $l(t)$ — годовые затраты, зависящие от возраста оборудования t; $c(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет; p — стоимость нового оборудования. Под возрастом оборудования понимается период эксплуатации оборудования после последней замены, выраженный в годах.

$m=12$, $p=10$, $c(t)=0$, $r(t)-l(t)=f(t)$.

Значения $f(t)$ заданы в табл. 23.

Таблица 23

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение 1. Для данного примера функциональные уравнения будут иметь вид

$$B_m(t)=\max_{x_m\in\{0,1\}}\begin{cases} f(t);\\ -p+f(0).\end{cases}$$

$$B_i(t)=\max_{x_i\in\{0,1\}}\begin{cases} f(t)+B_{i+1}(\mathrm{t}+1);\\ -p+f(0)+B_{i+1}(1).\end{cases}$$

Для решения данной задачи заполняется табл. 24.

Поясним, как заполняется таблица для нескольких шагов.

1. Условная оптимизация начинается с последнего 12-го шага. Для $i=12$ рассматриваются возможные состояния системы $t=0,1,2,...,12$. Функциональное уравнение на 12-м шаге имеет вид:

$$B_{12}(t)=\max_{x_m\in\{0,1\}}\begin{cases} f(t);\\ -p+f(0).\end{cases}$$

1) $t=0$, $B_{12}(0)=\max\limits_{\{0,1\}}\left\{\begin{matrix}10\\ -10+10\end{matrix}\right\}=10,\quad x_{12}(0)=0.$

2) $t=1$, $B_{12}(1)=\max\limits_{\{0,1\}}\left\{\begin{matrix}9\\ -10+10\end{matrix}\right\}=9,\quad x_{12}(1)=0.$

Таблица 24

t	$i=12$		$i=11$		$i=10$		$i=9$		$i=8$		$i=7$		$i=6$		$i=5$		$i=4$		$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	x_{12}	B_{12}	x_{11}	B_{11}	x_{10}	B_{10}	x_9	B_9	x_8	B_8	x_7	B_7	x_6	B_6	x_5	B_5	x_4	B_4	x_3	B_3	x_2	B_2	x_1	B_1
0	0	10	0	19	0	27	0	34	0	40	0	45	0	51	0	58	0	64	0	70	0	75	**0**	**82**
1	0	9	0	17	**0**	**24**	0	30	0	35	0	41	**0**	**48**	0	54	0	60	0	65	**0**	**72**	0	78
2	0	8	**0**	**15**	0	21	0	26	0	32	**0**	**39**	0	45	0	51	0	56	**0**	**63**	0	69	0	75
3	**0**	**7**	0	13	0	18	0	24	**0**	**31**	0	37	0	43	0/1	48	**0**	**55**	0	61	0	67	0	73
4	0	6	0	11	1	17	**1**	**24**	0/1	30	0	36	0/1	41	**1**	**48**	0/1	54	0/1	60	0	66	1	72
5	0	5	0/1	9	1	17	1	24	1	30	0/1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	0/1	65	1	72
6	0	4	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
7	0	3	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
8	0	2	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
9	0	1	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
10	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
11	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72
12	0/1	0	1	9	1	17	1	24	1	30	1	35	1	41	1	48	1	54	1	60	1	65	1	72

В левой колонке таблицы записываются возможные состояния системы $t=\overline{0,12}$, в верхней строке — номера шагов $i=\overline{1,12}$. Для каждого шага определяются условные оптимальные управления $x_i(t)$ и условный оптимальный выигрыш $B_i(t)$ с i-го шага и до конца для оборудования возраста t лет.

……………

10) $t=9$, $B_{12}(9)=\max\limits_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -10+10 \end{Bmatrix}=1,\quad x_{12}(9)=0.$

11) $t=10$, $B_{12}(10)=\max\limits_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10+10 \end{Bmatrix}=0,\quad x_{12}(10)=0,\ x_{12}(10)=1.$

12) $t=11$, $B_{12}(11)=\max\limits_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10+10 \end{Bmatrix}=0,\quad x_{12}(11)=0,\ x_{12}(11)=1.$

13) $t=12$, $B_{12}(12)=\max\limits_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10+10 \end{Bmatrix}=0,\quad x_{12}(12)=0,\ x_{12}(12)=1.$

Таким образом, на 12-м шаге оборудование возраста 0–9 лет заменять не надо. Оборудование возраста 10–12 лет можно заменить или продолжить его эксплуатацию, так как для t =10, 11, 12 имеется два условных оптимальных управления 1 и 0.

По результатам расчетов заполняются два столбца таблицы, соответствующие i =12.

2. Условная оптимизация 11-го шага.

Для i =11 рассматриваются все возможные состояния системы $t=0,1,2,...,12$. Функциональное уравнение на 11-м шаге имеет вид

$$B_{11}(t)=\max_{0,1}\begin{cases} f(t)+B_{12}(t+1); \\ -p+f(0)+B_{12}(1). \end{cases}$$

1) $t=0$,

$$B_{11}(0)=\max_{\{0,1\}}\begin{cases} f(0)+B_{12}(1) \\ -p+f(0)+B_{12}(1) \end{cases}=\max_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 10+9 \\ -10+10+9 \end{Bmatrix}=19,\quad x_{11}(0)=0.$$

2) $t=1$,

$$B_{11}(1)=\max_{\{0,1\}}\begin{cases} f(1)+B_{12}(2) \\ -p+f(0)+B_{12}(1) \end{cases}=\max_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 9+8 \\ -10+10+9 \end{Bmatrix}=17,\quad x_{11}(1)=0.$$

……………………

6) $t=5$,

$$B_{11}(5)=\max_{\{0,1\}}\begin{cases} f(5)+B_{12}(6) \\ -p+f(0)+B_{12}(1) \end{cases}=\max_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 5+4 \\ -10+10+9 \end{Bmatrix}=9,\quad x_{11}(5)=0,$$

$$x_{11}(5)=1.$$

7) $t=6$,

$$B_{11}(6)=\max_{\{0,1\}}\begin{cases} f(6)+B_{12}(7) \\ -p+f(0)+B_{12}(1) \end{cases}=\max_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 4+3 \\ -10+10+9 \end{Bmatrix}=9,\quad x_{11}(6)=1,$$

………………………

13) $t=12$,

$$B_{11}(12)=\max_{\{0,1\}}\begin{cases} f(12) \\ -p+f(0)+B_{12}(1)\end{cases}=\max_{\{0,1\}}\begin{Bmatrix} 0 \\ -10+10+9\end{Bmatrix}=9,\ x_{11}(12)=1.$$

Таким образом, на 11-м шаге не следует заменять оборудование возраста 0—4 года. Для оборудования возраста 5 лет возможны две стратегии использования: заменить или продолжать эксплуатировать.

Начиная с 6-го года оборудование следует заменять. По результатам расчетов заполняются два столбца таблицы, соответствующие i =11.

Аналогичным образом заполняются остальные десять столбцов таблицы. При расчетах $B_{i+1}(t)$ на каждом шаге значения $f(t)$ для каждого $t=\overline{0,12}$ берутся из таблицы исходных данных, приведенной в условии задачи, а значения $B_i(t)$ — из последнего, заполненного на предыдущем шаге столбца.

Этап условной оптимизации заканчивается после заполнения табл. 24.

Безусловная оптимизация начинается с первого шага.

Предположим, что на первом шаге i =1 имеется новое оборудование, возраст которого 0 лет.

Для $t=t_1=0$ оптимальный выигрыш составляет $B_1(0)=82$. Это значение соответствует максимальной прибыли от использования нового оборудования в течение 12 лет. $B^*=B_1(0)=82$. Выигрышу $B_1(0)=82$ соответствует безусловное оптимальное управление $x_1(0)=0$.

Для i =2 по формуле (3.9) $t_2=t_1+1=1$.

Безусловное оптимальное управление $x_2(1)=0$.

Для i =3 $t_3=t_2+1=2$.

Безусловное оптимальное управление $x_3(2)=0$. И далее соответственно

$i=4$ $t_4=t_3+1=3$ $x_4(3)=0$,	$i=9$ $t_9=t_8+1=4$ $x_9(4)=1$,
$i=5$ $t_5=t_4+1=4$ $x_5(4)=1$,	$i=10$ $t_{10}=1$ $x_{10}(1)=0$,
$i=6$ $t_6=1$ $x_6(1)=0$,	$i=11$ $t_{11}=t_{10}+1=2$ $x_{11}(2)=0$,
$i=7$ $t_7=t_6+1=2$ $x_7(2)=0$,	$i=12$ $t_{12}=t_{11}+1=3$ $x_{12}(3)=0$.
$i=8$ $t_8=t_7+1=3$ $x_8(3)=0$,	

Управления, составляющие оптимальную стратегию использования оборудования, выделены в табл. 24 полужирным шрифтом.

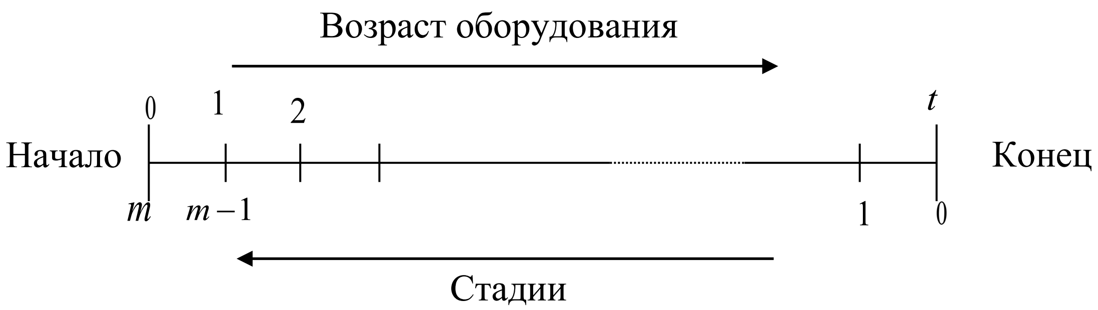
В рамках данной задачи оптимальная стратегия заключается в замене оборудования на 5-й и на 9-й год. Максимальная прибыль составляет $B_1(0)=82$. Аналогичным образом можно определить оптимальную стратегию использования оборудования любого возраста.

При решении задач данного типа может использоваться как метод обратной так и метод прямой прогонки. Рассмотрим решение предыдущей задачи, начиная решение с первого шага.

Решение 2. Рассмотрим период m лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования. $B_m(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся m лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Будем отсчитывать возраст оборудования в направлении течения процесса. Так,

$t=0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $m=1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $m=m$ — к началу процесса.



На каждом этапе m-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли. Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$B_m(t)=\max_{x_i\in\{0,1\}}\begin{cases} f(t)+B_{m-1}(\mathrm{t}+1); & \longrightarrow \text{Сохранение}\\ -p+f(0)+B_{m-1}(1). & \longrightarrow \text{Замена}\end{cases}$$

$$B_1(t)=\max_{x_m\in\{0,1\}}\begin{cases} f(t); & \longrightarrow \text{Сохранение}\\ -p+f(0). & \longrightarrow \text{Замена}\end{cases}$$

Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя — доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

Для $m=1$

$$B_1(0)=\max\begin{cases} f(0);\\ -p+f(0)\end{cases}=\max\begin{cases}10\\ -10+10\end{cases}=10,$$

$$B_1(1)=\max\begin{cases} f(1);\\ -p+f(0)\end{cases}=\max\begin{cases}9\\ -10+10\end{cases}=9,$$

……………………………………

$$B_1(12)=\max\begin{cases} f(12);\\ -p+f(0)\end{cases}=\max\begin{cases}0\\ -10+10\end{cases}=0,$$

Для $m=2$

$$B_2(0)=\max\begin{cases} f(0)+B_1(1)\\ -p+f(0)+B_1(1)\end{cases}=\max\begin{cases}10+9\\ -10+10+9\end{cases}=19,$$

$$B_2(1)=\max\begin{cases} f(1)+B_1(2)\\ -p+f(0)+B_1(1)\end{cases}=\max\begin{cases}9+8\\ -10+10+9\end{cases}=17.$$

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $B_1(1)>B_2(2)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем (табл.). Можно не решать каждый раз уравнение, а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $B_4(t)$:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1),$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1),$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1),$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $B_4(t)$ прекращаем, так как $B_4(4) = 23 < B_3(1) = 24$.

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года.

Ответ. Для получения максимальной прибыли (82) от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования на 5-й и на 9-й год.

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	$N-1$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17*							
$f_4(t)$	34	30	26	24	24*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							
$f_8(t)$	58	54	51	48	48*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72*							

Задача выбора кратчайшего пути

На рисунке показаны возможные маршруты, проходящие через разные промежуточные пункты, расстояния нанесены над стрелками. Требуется найти кратчайший путь от пункта 1 к пункту 10. Перебор всех маршрутов возможен, но неэффективен, так как при увеличении размеров сети число маршрутов (в примере их 18) будет лавинообразно возрастать. Чтобы применить метод динамического программирования, разделим задачу на шаги, которые показаны вертикальными пунктирными линиями. Нумерация шагов выполнена от конца к началу (это обычный порядок для метода динамического программирования), поскольку последующий расчет будет выполняться в таком же порядке. Выделение этапов основано на том, что каждый из них надо пройти, выбрав один из путей, соединяющий один из начальных пунктов этапа с одним из его конечных пунктов.

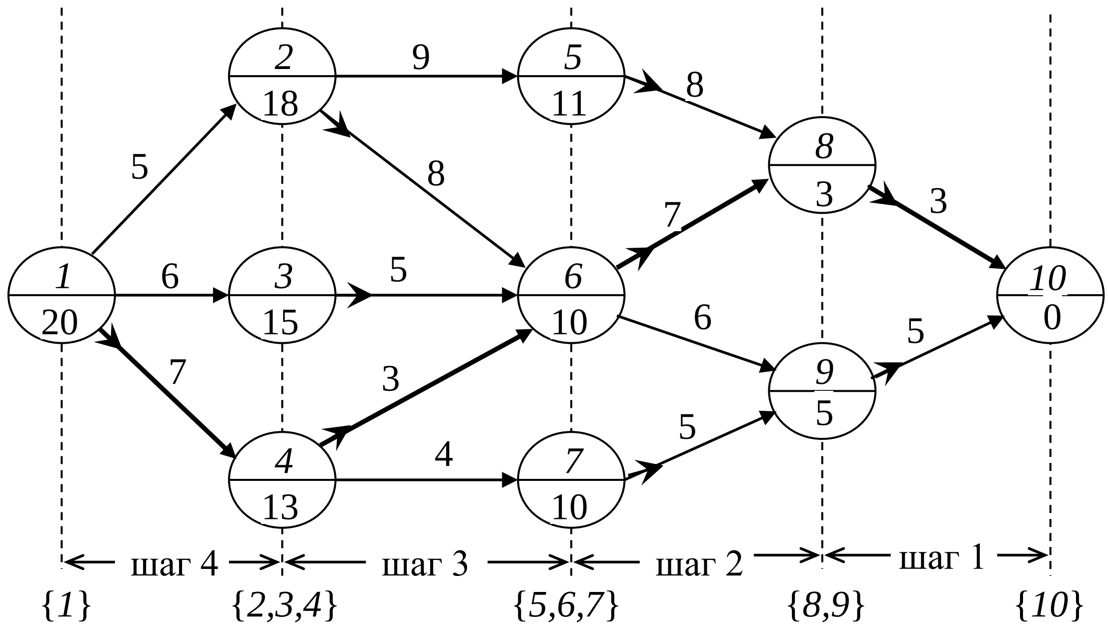


Рис. 6.1

При расчете удобно нижнюю половину круга, соответствующего пункту, использовать для записи расстояния, которое еще осталось пройти от текущего (промежуточного) пункта до конечного. Для *10*-го пункта это расстояние равно нулю. Расстояние, которое предстоит пройти на первом шаге, зависит от того, будет ли этот шаг начинаться из пункта *8* или *9*. Это пока неизвестно, но каждому из этих двух вариантов начального состояния для шага 1 соответствуют свои очевидные значения оставшихся расстояний, так же как и оптимальные направления дальнейшего движения. Расстояния записываются в круги для пунктов *8* и *9*, а направления (их называют условно-оптимальными) изображены короткими стрелками.

На шаге 2 для пунктов *5* и *7* расчет отличается только тем, что оставшееся расстояние получается суммированием расстояния до следующего пункта с расстоянием от последнего до конечного пункта, которое уже известно. Для пункта *6* надо выбирать одно из двух возможных направлений, в пункт *8* (до конечного пункта останется 3+7=10), или в пункт *9* (останется 6+5=11). Выбираем кратчайший путь и показываем условно-оптимальное направление.

Оставшиеся два шага выполняются аналогично. Найдено не только кратчайшее расстояние до конечного пункта при заданной дорожной сети, но и условно-оптимальные направления для всех остальных пунктов, что делает очевидным выделение оптимального маршрута, если за начальный пункт принять любой из промежуточных. Достаточно двигаться от такого пункта по уже выделенным условно-оптимальным направлениям. На рисунке оптимальный маршрут от пункта *1* до пункта *10* выделен жирной линией.

Оптимальное распределение средств на расширение производства

Широкий класс составляют задачи, в которых речь идет о наиболее целесообразном распределении во времени тех или иных ресурсов (денежных средств, рабочей силы, сырья и т.п.). Рассмотрим пример задачи такого рода.

Группе предприятий выделяются дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x. Требуется так распределить между предприятиями имеющиеся средства c, чтобы общий прирост $B_n(c)$ выпуска продукции был максимальным.

В соответствии с вычислительной схемой динамического программирования рассмотрим сначала случай $n=1$, т. е. предположим, что все имеющиеся средства выделяются на реконструкцию и модернизацию одного предприятия. Обозначим через $B_1(x)$ максимально возможный прирост выпуска продукции на этом предприятии, соответствующий выделенной сумме x. Каждому значению x отвечает вполне определенное (единственное) значение $f_i(x)$ выпуска, поэтому можно записать, что $B_1(x)=\max(f_1(x))=f_1(x)$.

Пусть теперь $n=2$, т.е. средства распределяются между двумя предприятиями. Если второму предприятию выделена сумма x, то прирост продукции на нем составит $f_2(x)$. Оставшиеся другому предприятию средства $c-x$ в зависимости от величины x (а значит, и $c-x$) позволят увеличить прирост выпуска продукции до максимально возможного знаения $B_1(c-x)$. При этом условии общий прирост выпуска продукции на двух предприятиях

$$f_2(x)+B_1(c-x). \quad (1)$$

Оптимальному значению $B_2(c)$ прироста продукции при распределении суммы c между двумя предприятиями соответствует такое x, при котором сумма (1) максимальна. Это можно выразить записью

$$B_2(c)=\max_{0\le x\le c}\left(f_2(x)+B_1(c-x)\right)$$

Значение $B_3(c)$ можно вычислить, если известны значения $B_2(c)$, и т. д.

Функциональное уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи запишется в следующем виде:

$$B_n(c)=\max_{0\le x\le c}\left(f_n(x)+B_{n-1}(c-x)\right).$$

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на n предприятиях определяется как максимум суммы прироста выпуска на n-м предприятии и прироста выпуска на остальных $n-1$ предприятиях при условии, что оставшиеся после n-го предприятия средства распределяются между остальными предприятиями оптимально.

Имея функциональные уравнения и , можно последовательно найти сначала B_1, затем B_2, B_3,... и, наконец, B_{n-1} и B_n для различных значений распределяемой суммы средств.

Для отыскания оптимального распределения средств прежде всего находим величину $x_n^*(c)$ ассигнований n-му предприятию, которая позволяет достичь полученного нами максимального значения B_n прироста продукции. По величине оставшихся средств $c-x_n^*(c)$ и уже известному нам значению B_{n-1} устанавливаем $x_{n-1}^*(c)$ — величину ассигнований $n-1$-му предприятию и т.д. и, наконец, находим $x_2^*(c)$ и $x_1^*(c)$.

Пример. Пусть имеются четыре предприятия, между которыми распределяется 100 тыс. ден. ед. Значения $f_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы x приведены в табл. 10.8. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 10.8

Средства *c*, тыс. ден. ед.	Предприятие		
	№ 1	№ 2	№ 3
	Прирост выпуска продукции на предприятиях, $f_i(x)$, тыс. ден. ед.		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
20	10	12	11
40	31	26	36
60	42	36	45
80	62	54	60
100	76	78	77

Решение. В данной задаче $n=3$, $c=100$ тыс. ден. ед.

Рассмотрим выделение средств первому предприятию: $n=1$. В соответствии с формулой (10.7) в зависимости от начальной суммы c получаем с учетом табл. 10.8 значения $B_1(c)$, помещенные в табл. 10.9.

$x_1^*(c)$	0	20	40	60	80	100
$B_1(c)$	0	10	31	42	62	76

Предположим теперь, что средства вкладываются в два предприятия.

Тогда в соответствии с формулой (10.9)

$$B_2(c)=\max_{0\le x\le c}\left(f_2(x)+B_1(c-x)\right)$$

Очередная задача — найти значения функции (10.10) для всех допустимых комбинаций c и x. Для упрощения расчетов значения х будем принимать кратными 20 тыс. ден. ед. и для большей наглядности записи оформлять в виде таблиц. Каждому шагу будет соответствовать своя таблица. Рассматриваемому шагу соответствует табл.

Для каждого значения (0, 20, 40, 60, 80, 100) начальной суммы c распределяемых средств в табл. предусмотрена отдельная строка, а для каждого возможного значения x (0, 20, 40, 60, 80, 100) распределяемой суммы — столбец. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям c и x. Такой, например, будет клетка, отвечающая строке $c=40$ и столбцу $x=80$, так как при наличии 40 тыс. ден. ед. естественно отпадает вариант, при котором одному из предприятий выделяется 80 тыс. ден. ед.

Для заполнения таблицы используем формулу $B_2(c)=\max_{0\le x\le c}\left(f_2(x)+B_1(c-x)\right)$.

Таблица

x / c	0	20	40	60	80	100	$B_2(c)$	$x_2^*(c)$

0	0+0						0	0
20	0+10	12+0					12	20
40	0+31	12+10	26+0				31	0
60	0+42	12+31	26+10	36+0			43	20
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0		62	0
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	78	100

В каждую клетку таблицы будем вписывать значение суммы $f_2(x)+B_1(c-x)$. Первое слагаемое берем из условий задачи (см. табл. 10.8), второе — из табл. 10.9. Так, например, при распределении начальной суммы $c=80$ тыс. ден. ед. одним из вариантов может быть следующий: второму предприятию выделяется 60 тыс. ден. ед. ($x=60$), тогда первому — 80 – 60 = 20 тыс. ден. ед. При таком распределении первоначальной суммы на втором предприятий будет обеспечен прирост продукции на сумму в 36 тыс. ден. ед. (см. табл. 10.8), на первом — 10 тыс. ден. ед. (см. табл. 10.9).

Общий прирост составит (36 + 10) тыс. ден. ед., что и записано в соответствующей клетке табл. 10.10. В двух последних столбцах таблицы проставлены максимальный по строке прирост продукции (в столбце $B_2(c)$) и соответствующая ему оптимальная сумма средств, выделенная второму предприятию (в столбце $x_2^*(c)$). Так, при начальной сумме $c=60$ тыс. ден. ед. максимальный прирост выпуска продукции составляет 43 тыс. ден. ед. (12 + 31), и это достигается выделением второму предприятию 20, а первому — 60 – 20 = 40 тыс. ден. ед. Расчет значений $B_3(c)$ приведен в табл. 10.11. Здесь использована формула, получающаяся из (10.9) при п = 3 :

$$B_3(c)=\max_{0\le x\le c}\left(f_3(x)+B_2(c-x)\right)$$

Первое слагаемое в табл. 10.11 взято из табл. 10.8, второе – из табл. 10.10.

x / c	0	20	40	60	80	100	$B_3(c)$	$x_3^*(c)$
0	0+0						0	0
20	0+12	11+0					12	20
40	0+31	11+12	36+0				36	40
60	0+43	1+31	36+12	45+0			48	40
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0		67	40
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0	79	40

Полученные данные запишем в виде сводной таблицы, составленной на основе расчетных таблиц, начиная с табл. 10.9.

Таблица 10.12

c	0	20	40	60	80	100
$B_1(c)$	0	10	**31**	42	62	76
$x_1^*(c)$	0	20	**40**	60	80	100
$B_2(c)$	0	12	31	**43**	62	78
$x_2^*(c)$	0	20	0	**20**	0	100
$B_3(c)$	0	12	36	48	67	**79**
$x_3^*(c)$	0	0	40	40	40	**40**

Табл. 10.12 содержит много ценной информации и позволяет единообразно

решать целый ряд задач.

Решением задачи при $n=3$, $c=100$ тыс. ден. ед. является следующее: наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать три предприятия при распределении между ними 100 тыс. ден. ед., составляет 79 тыс. ден. ед. ($B_3(100)=79$). При этом третьему предприятию должно быть выделено 40 тыс. ден.ед. ($x_3^*(100)$=40), а остальным двум – 100 – 40 = 60 тыс. ден. ед. Из той же таблицы видно, что оптимальное распределение оставшихся 60 тыс. ден. ед. между двумя предприятиями обеспечит общий прирост продукции на них на сумму 43 тыс. ден. ед. ($B_2(60)=43$) при условии, что второму предприятию будет выделено 20 тыс. ден. ед. ($x_2^*(60)=20$), а первому – 60 - 20 = 40 тыс. ден. ед.

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на трех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. ден. ед. составляет 79 тыс. ден. ед. и будет получен, если первому предприятию выделить 40 тыс. ден. ед., второму выделить 20 тыс. ден. ед., а третьему также 40 тыс. ден. ед.

Убедиться в оптимальности следующего распределения 80 тыс. ден. ед. между тремя предприятиями: $x_1^*=$ 40, $x_2^*=0$, $x_3^*=$40; при этом $B_3(80)=67$.