Задания вычислительного практикума

1 Решение нелинейных алгебраических уравнений

Исследуются корни нелинейных уравнений $f_\alpha(x) = 0$, $\alpha = 1, 2 \ldots 10$ в зависимости от параметра α. Порядок выполнения задания для каждого фиксированного значения α:

1. Используя доступные методы построить график функции $y = f_\alpha(x)$ (на бумаге или с помощью доступных программ-графопостроителей) и локализовать ВСЕ корни нелинейного уравнения. В результате будут получены отрезки локализации корней $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$, $r = 1, 2 \ldots R$, здесь R — количество корней уравнения. Если корней бесконечно-много, требуется найти *три корня, наименьших по модулю*. В отчете представить скриншот графика функции (или несколько скриншотов, если корни не поместились на одном графике).

2. На каждом отрезке $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ аналитически исследовать функции $f_\alpha(x)$: определить знаки функций в концах отрезков $f_\alpha(a_r^\alpha)$, $f_\alpha(b_r^\alpha)$; знаки первых и вторых производных $f'_\alpha(x)$, $f''_\alpha(x)$ на отрезках локализации. На каждом из отрезков построить эквивалентные функции $\varphi_{\alpha,(r)}(x)$. Для каждого из отрезков $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ вычислить константы: $M_{(r)}^\alpha \geqslant \max\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |f'_\alpha(x)|$, $0 < m_{(r)}^\alpha \leqslant \min\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |f'_\alpha(x)|$, $1 > q_{(r)}^\alpha \geqslant \max\limits_{x\in[a_r^\alpha, b_r^\alpha]} |\varphi'_{\alpha,(r)}(x)|$.

3. С помощь программы на языке Си для каждого из отрезков $[a_r^\alpha, b_r^\alpha]$ вычислить уточненные значения корней $\xi_r^* = x_{N+1}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$: $|\xi_r^* - \xi_r| < \varepsilon$. Использовать пять методов: половинного деления, секущих, простой итерации, Эткена, Ньютона. Начальные значения $x_0^{(r)}$ следует выбирать одинаковыми для всех методов: $x_0^{(r)} = a_r^\alpha$ или $x_0^{(r)} = b_r^\alpha$.

4. Сравнить методы по их способности приближенно вычислить корень ξ и по скорости сходимости к корню (т. е. число итераций). В отчете представить таблицу, в которой также указать значения невязки $f_\alpha(\xi^*)$ и параметров $M_{(r)}^\alpha$, $m_{(r)}^\alpha$, $q_{(r)}^\alpha$:

Корень ξ_r^*	Невязка $f_\alpha(\xi_r^*)$	$x_0^{(r)}$	Число итераций $N+1$					$M_{(r)}^\alpha$	$m_{(r)}^\alpha$	$q_{(r)}^\alpha$
			Половинное деление	Метод хорд	Простая итерация	Метод Эткена	Метод Ньютона			
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Номер варианта совпадает с номером студента в списке курса (в зачетной ведомости).

1	$\lvert x(x-\alpha)\rvert = \alpha \ln x$	2	$\lvert x^2-\alpha\rvert = e^{\alpha\lvert x\rvert}$	3	$\left\lvert x^2 - 2\alpha/x\right\rvert = e^{1-x^2}$
4	$\sqrt{(x-\alpha/2)(x-\alpha)} = \sin x$	5	$\lvert x-\alpha\rvert = \sin x + \lvert\sin x\rvert$	6	$x^4 \sin(x/\alpha) = 1$
7	$\alpha \sin\sqrt{1+2\sin x} = x^3$	8	$(1+\sin x)\sin x = \alpha + 3x - 5$	9	$\cos e^{\lvert\sin x\rvert} = \alpha x$

10	$\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)=$ $=\alpha e^{x}$	11	$\cos\dfrac{1}{1+(1-e^{-\lvert x\rvert})^2}=$ $=\alpha-x$	12	$\sin\dfrac{1}{1+\left(\operatorname{arctg}e^{-x^2}\right)^2}=$ $=\alpha-x$
13	$e^{-\sin^2\frac{1}{1+x^2}}=-\operatorname{tg}(x/\alpha)$	14	$\ln(1+\cos^2 x)=\alpha e^{-x}$	15	$x+e^{-\frac{1}{1+x^2}}=\alpha-5$
16	$\ln\sqrt{1+x^2}=-\operatorname{ctg}(x/\alpha)$	17	$1+e^{-2x^2}=\alpha^2 e^{-2x}$	18	$\alpha^2 e^{2x}=1+\ln^2\sqrt{1+x^2}$
19	$\sin^2\ln\sqrt{1+\left(1-e^{-\lvert x\rvert}\right)^2}=$ $=-\alpha\ln x$	20	$(x^2-1)^2=x^{\alpha}$	21	$\pi^2 x-x^3+x^5=$ $=0.1\alpha^2\cos x$
22	$10x-0.5x^3+x^5=$ $=0.04\alpha^3 e^{-x^2}$	23	$x+x^3+x^7+x^9=$ $=0.3\alpha\operatorname{th}x$	24	$5x^2-0.1x^3+0.2x^4=$ $=0.1(\alpha+\operatorname{th}x)$
25	$\sum_{k=0}^{3}\dfrac{(\pi-k)^2}{k!}x^{2k+1}=$ $=0.1\alpha^2$	26	$\sum_{k=0}^{2}(-e)^k x^{4k+1}=$ $=0.07\alpha+0.3x$	27	$\sum_{k=0}^{2}\dfrac{k-1.9929}{k-0.99929}x^k=$ $=x^5\sqrt{0.1\alpha}-\alpha\ln\alpha$
28	$\sum\limits_{k=0}^{2}\dfrac{e^k}{k!}x^{4k+1}=0.098\alpha$	29	$\sum_{k=0}^{2}\left(1-\dfrac{3k}{\sqrt{2}}+k^2\right)\times$ $\times x^{3k+1}=0.1\alpha$	30	$\sum_{k=1}^{3}\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{k^2}{2}-2.0537\right)\times$ $\times x^{k^2}=\sqrt[4]{0.1\alpha}$
31	$\sum_{k=1}^{4}\dfrac{(\pi-k)^2}{k!}x^{2k}=$ $=1+0.859\alpha x$	32	$\sum_{k=0}^{2}\dfrac{(-2)^k}{2k+1}x^{4k+2}=$ $=1.41+0.1\alpha^2 x$	33	$\sum_{k=0}^{2}\dfrac{e^k}{2k+1}x^{2(2k+1)}=$ $=1+0.096\alpha^3 x$
34	$\sum_{k=1}^{4}\left(\left(\dfrac{k}{100}-1\right)x\right)^k=$ $=-0.101\alpha$	35	$\sum_{k=0}^{2}\dfrac{k^2-2.14k+1}{k+0.667}\times$ $\times x^{3k+2}=1+x/\alpha$	36	$\sum\limits_{k=0}^{2}\dfrac{6k-11.9937}{k^2-3k10^{-3}-0.9931}\times$ $\times x^k=1/x+x^5/\sqrt{\alpha}$

2 Решение нелинейных алгебраических систем

Исследуются пары корней системы нелинейных уравнений $f(x,y)=0$, $g(x,y)=$ $=0$. Порядок выполнения задания:

1. Построить на плоскости Oxy графики неявных функций $f(x,y)=0$, $g(x,y)=$ $=0$ (на бумаге или с помощью доступных программ-графопостроителей) и приближенно определить все точки пересечения графиков. В результате будут получены прямоугольники (сегменты) локализации пар корней $\vec{\xi}_r\equiv(\xi_r,\eta_r)\in$ $\in\Omega_r\equiv[ax_r,bx_r]\times[ay_r,by_r]$, $r=1,2\ldots R$, здесь R — количество пар корней системы уравнений. В отчете представить скриншот всех пересечений графиков функций (или несколько скриншотов, если точки пересечений не поместились на одном графике).

2. На каждом сегменте Ω_r определить константы q_r, μ_r: $1>q_r\geqslant\max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}_{\vec{\varphi}}(\vec{x})\right\|$, $\mu_r\geqslant\max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}_{\vec{f}}(\vec{x})\right\|\max\limits_{\vec{x}\in\Omega_r}\left\|\mathfrak{D}^{-1}_{\vec{f}}(\vec{x})\right\|$.

3. С помощь программы на языке Си для каждого из сегментов Ω_r вычислить уточненные значения пар корней $\vec{\xi}^*_r\equiv(\xi^*_r,\eta^*_r)=(x_{N+1},y_{N+1})$ с точностью

$\varepsilon = 10^{-4}$: $\|\vec{\xi}_r^* - \vec{\xi}_r\| < \varepsilon$. Использовать три метода: простой итерации, Зейделя, Ньютона. Начальные значения $x_0^{(r)}$, $y_0^{(r)}$ следует выбирать одинаковыми для всех методов: $(x_0^{(r)}, y_0^{(r)}) \in \Omega_r$.

4. Сравнить методы по их способности приближенно вычислить пары корней $\vec{\xi}_r$ и по скорости сходимости к корню (т. е. по числу итераций). В отчете представить таблицу, в которой также указать значения нормы невязки $\|\vec{f}_\alpha(\vec{\xi}_r^*\|$ и параметров q_r, μ_r:

Пара корей $\vec{\xi}_r^*$		Норма невязки $\|\vec{f}(\vec{\xi}_r^*)\|$	Начальный вектор		Число итераций $N+1$			q_r	μ_r
ξ_r^*	η_r^*		$x_0^{(r)}$	$y_0^{(r)}$	Простая итерация	Метод Зейделя	Метод Ньютона		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Номер варианта совпадает с номером студента в списке курса (в зачетной ведомости).

1	$\begin{cases}\sin(x+1) - y = 1,\\ 2x + \cos y = 2;\end{cases}$	2	$\begin{cases}x^{2/3} + y^{2/3} = 4,\\ x^2 - 2y = 0,\end{cases}$ $(x > 0)$	3	$\begin{cases}\mathrm{tg}(xy + 0.2) = x^2,\\ x^2 + 2y^2 = 1;\end{cases}$
4	$\begin{cases}\sqrt{x+1} - y = 0,\\ x^2 + 2y^2 = 2y;\end{cases}$ $(x > 0)$	5	$\begin{cases}2x + \mathrm{tg}(xy) = 0,\\ (y^2 - 6)^2 + \ln x = 0;\end{cases}$	6	$\begin{cases}x\cos x - y = 0,\\ x^2 + y^2 - 1 = 0;\end{cases}$ $(x > 0)$
7	$\begin{cases}y\cos y - x = 0,\\ x^2 + y^2 - 1 = 0;\end{cases}$ $(y < 0)$	8	$\begin{cases}2x^2 + y^2 = 1,\\ x^{2/3} - y = 0;\end{cases}$ $(y > 0)$	9	$\begin{cases}0.6x + 7.5y + x^2 y = 0,\\ 6x + \cos y = 0;\end{cases}$
10	$\begin{cases}x^2 + 2y^2 = 1,\\ x + y^{2/3} = 0;\end{cases}$ $(y < 0)$	11	$\begin{cases}\sin(x + 0.8) + 2y = 1,\\ \cos(y + 0.6) + 0.6x = 0;\end{cases}$	12	$\begin{cases}\sin x - y = 0,\\ x^2 + y^2 = 1;\end{cases}$ $(x > 0)$
13	$\begin{cases}x - \cos y = 0,\\ x^2 + y^2 = 2;\end{cases}$ $(y > 0)$	14	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 2y,\\ e^{-x} - y = 0;\end{cases}$ $(x < 0)$	15	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 2x,\\ x - e^{-y} = 0;\end{cases}$ $(y > 0)$
16	$\begin{cases}x^{2/3} + y^{2/3} = 4,\\ 2x - y^2 = 0,\end{cases}$ $(y < 0)$	17	$\begin{cases}2x - x^2 - y^2 + 2y = 1,\\ \sqrt{x+1} = y, \quad (x > 0);\end{cases}$	18	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 2x,\\ \ln x - y = 0;\end{cases}$ $(y > 0)$
19	$\begin{cases}2x + x^2 + y^2 + 2y = -1,\\ \sqrt{x+1} = y + 1;\end{cases}$	20	$\begin{cases}x^{2/3} + y^{2/3} = 1,\\ x^2 + y^2 = 2x,\end{cases}$ $(y > 0)$	21	$\begin{cases}x\sin x = y,\\ x^2 + y^2 = 1,\end{cases}$ $(x > 0)$
22	$\begin{cases}\mathrm{tg}\, x - \cos(1.5y) = 0,\\ 2y^2 - x^2 + 4x = 3;\end{cases}$	23	$\begin{cases}x/(1 + x^2) = y,\\ x^2 + y^2 = 1,\end{cases}$ $(x > 0)$	24	$\begin{cases}x^{2/3} + y^{2/3} = 1,\\ x^2 + y^2 = 2y,\end{cases}$ $(x < 0)$
25	$\begin{cases}x = y\sin y,\\ x^2 + y^2 = 1,\end{cases}$ $(y < 0)$	26	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 2y, \quad (x > 0)\\ 1/2\ln(x + 1) = y,\end{cases}$	27	$\begin{cases}y/(1 + y^2) = x,\\ x^2 + y^2 = 1,\end{cases}$ $(y < 0)$
28	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 2x,\\ x = 2\ln(y + 1),\end{cases}$ $(y > 0)$	29	$\begin{cases}x^2 + y^2 = 1,\\ 2xe^{-x} = y,\end{cases}$ $(x > 0)$	30	$\begin{cases}(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\\ x^2 + y = 1, (x > 0, y > 0)\end{cases}$
31	$\begin{cases}x = 2ye^{-y}\\ x^2 + y^2 = 1,\end{cases}$ $(y < 0)$	32	$\begin{cases}(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\\ x + y^2 = 1, (x > 0, y < 0)\end{cases}$	33	$\begin{cases}\sin(x + y) - 1.5x = 0.1,\\ x^2 + y^2 = 1;\end{cases}$

Рекомендуемая литература

1. *Бахвалов Н. С.*, *Корнев А. А.*, *Чижонков Е. В.* Численные методы. Решения задач и упражнения. М.: Дрофа, 2009. 154 с. (Высшее образование: современный учебник). ISBN 978-5-358-03610-9.
2. *Волков Е. А.* Численные методы. 2-е изд. М.: Наука, 1987. 248 с.
3. *Демидович Б. П.*, *Марон И. А.* Основы вычислительной математики. 3-е изд. М.: Наука, 1966. 664 с.
4. *Демидович Б. П.*, *Марон И. А.*, *Шувалова Э. З.* Численные методы анализа / под ред. Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1967. 368 с.
5. *Дьяченко В. Ф.* Основные понятия вычислительной математики. М.: Наука, 1972. 120 с.
6. *Крылов В. И.*, *Бобков В. В.*, *Монастырный П. И.* Вычислительные методы, Т.1,2. М.: НАУКА, 1976.
7. *Ортега Д.*, *Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
8. *Формалев В. Ф.*, *Ревизников Д. Л.* Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
9. *Чижонков Е. В.* Численные методы. Курс лекций. М.: мех-мат, МГУ, 2012. 154 с.