Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Отчет по лабораторной работе № 6 «Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона»

по курсу «Численные методы»

Выполнил:

Студент группы ИУ9-62Б

Караник А.А.

Проверила:

Домрачева А.Б.

2024 г.

Цель работы

Целью данной работы является реализация программы, осуществляющая решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона.

Постановка задачи

1) Решить систему нелинейных уравнений графически и принять полученное решение за начальное приближение
2) Решить систему методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0.01$

   Система:

$$\begin{cases} \cos(y + 0.5) - x = 2 \\ sinx - 2y = 1 \end{cases}$$

Теоретические сведения

Метод Ньютона является одним из самых распространенных методов решения системы нелинейных уравнений

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
$$\dots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

или в векторном виде $f(x) = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор неизвестных; $f = (f_1, \dots, f_n)$ – вектор-функция. Выбрав начальное приближение $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ к решению системы, следующие приближения в методе Ньютона строим по рекуррентной зависимости

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^k)]^{-1} f(x^k), k = 0,1,2 \dots$$

где $[f'(x^k)]^{-1}$ – матрица, обратная матрице Якоби $f'(x^k)$.

Приближение метода Ньютона удобно искать в два этапа. Вначале решаем систему линейных уравнений с матрицей $f'(x^k)$ – матрицей Якоби вектор-функции f:

$$f'(x^k)y = -f(x^k)$$

любым из способов решения СЛАУ, например методом Гаусса. Теперь $(k+1)$-е приближение x^{k+1} есть сумма k-го приближения и решения СЛАУ $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$x^{k+1} = x^k + y$$

Для решения системы нелинейных уравнений с заданной точностью ε необходимо сравнить ε с погрешностью k-го приближения

$$\|x^k - x^{k+1}\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i^k - x_i^{k-1}|$$

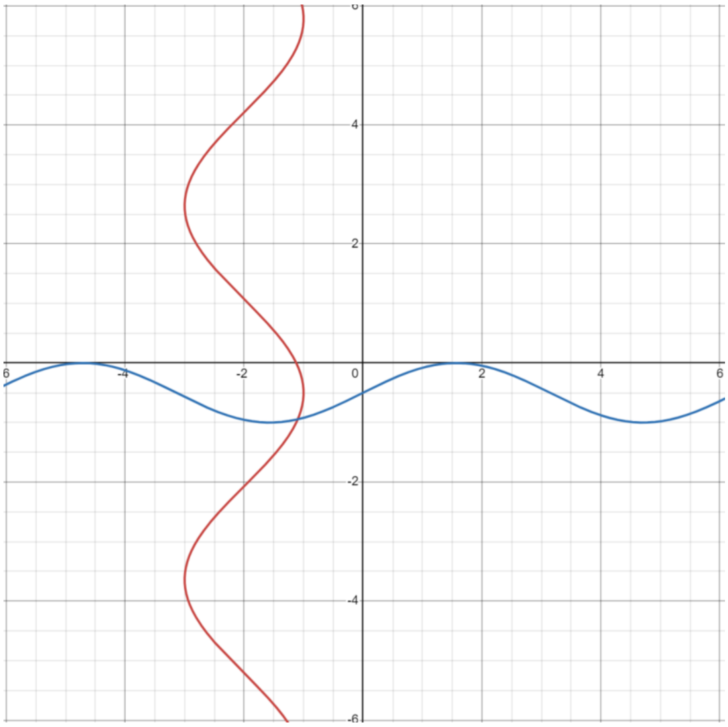
Метод Ньютона сходится, если все функции $f_i(x_1, \dots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным и начальное приближение x^0 находится достаточно близко к точному решению систему. Рецепта выбора начального приближения при $n > 1$ нет. Поэтому желательно оценить, хотя бы грубо, значение точного решения, например, решив систему графически.

Реализация

Исходный код программы:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def newton_system(F, J, x0, err=0.01):
    x = x0
    i = 0
    while True:
        delta_x = np.linalg.solve(J(x), -F(x))
        x = x + delta_x
        if np.linalg.norm(delta_x) < err:
            return x, i + 1
        i += 1
def F(x):
    return np.array([
        np.cos(x[1] + 0.5) - x[0] - 2,
        np.sin(x[0]) - 2 * x[1] - 1
    ])

def J(x):
    return np.array([
        [-1, -np.sin(x[1] + 0.5)],
        [np.cos(x[0]), -2]
    ])

x0 = np.array([-1, -1])

solution, number = newton_system(F, J, x0)

print("Solution:", solution)
print("Iterations:", number)
```

Тестирование



Вывод программы:

Solution: [-1.09739231 -0.94501079]

Iterations: 2

Вывод

В процессе выполнения лабораторной работы была разработана программа, осуществляющая решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона. Этот метод является более точным по сравнению с другими. Также система была решена графически.