Приложение к статье. Вывод формул.

1 Введение и основные обозначения

1.1 Основные обозначения

- $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел
- $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ – множество неотрицательных целых чисел
- $[a, b]$ – целочисленный отрезок $\{a, a+1, \ldots, b\}$
- $[0, n)$ – полуинтервал $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
- $|S|$ – мощность множества S
- P – многогранник в $\mathbb{R}^d$
- $P \cap \mathbb{Z}^d$ – множество целочисленных точек в P

2 Паттерн 1: Нижняя треугольная область

2.1 Формализация

Цикл с треугольной зависимостью:

for $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ **do**
    for $j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ **do**
        operation(i, j)
    end for
end for

Итерационное пространство:

$$P_{\text{lower}} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i < n, 0 \leq j < i\} \tag{1}$$

2.2 Геометрическая интерпретация

Это треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(n-1, 0)$, $(n-1, n-2)$. Важно заметить, что диагональ $j = i$ не включена в область (строгое неравенство $j < i$).

2.3 Подробный вывод формулы

Будем считать точки построчно. Для каждого фиксированного значения i от 0 до $n-1$, переменная j принимает значения от 0 до $i-1$.

Шаг 1: Определим количество точек для каждого i:

$$
\begin{aligned}
i = 0 &: j \in \emptyset \Rightarrow 0 \text{ точек} && (2)\\
i = 1 &: j \in \{0\} \Rightarrow 1 \text{ точка} && (3)\\
i = 2 &: j \in \{0, 1\} \Rightarrow 2 \text{ точки} && (4)\\
&\vdots && (5)\\
i = k &: j \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \Rightarrow k \text{ точек} && (6)\\
&\vdots && (7)\\
i = n-1 &: j \in \{0, 1, \ldots, n-2\} \Rightarrow (n-1) \text{ точек} && (8)
\end{aligned}
$$

Шаг 2: Суммируем по всем значениям i:

$$
C_{\text{lower}}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i = 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) \tag{9}
$$

Шаг 3: Применяем формулу суммы арифметической прогрессии.

$$
\begin{aligned}
C_{\text{lower}}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} i && (10)\\
&= \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} && (11)\\
&= \frac{(n-1)n}{2} && (12)\\
&= \frac{n^2 - n}{2} && (13)
\end{aligned}
$$

3 Паттерн 2: Верхняя треугольная область

3.1 Формализация

for $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ **do**
    for $j \in \{i, i+1, \ldots, n-1\}$ **do**
        operation(i, j)
    end for
end for

Итерационное пространство:

$$
P_{\text{upper}} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq i < n, i \leq j < n\} \tag{14}
$$

3.2 Подробный вывод

Для каждого i от 0 до $n-1$, переменная j принимает значения от i до $n-1$:

$$
\begin{aligned}
i = 0 &: j \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \Rightarrow n \text{ точек} && (15)\\
i = 1 &: j \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \Rightarrow (n-1) \text{ точек} && (16)\\
i = 2 &: j \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \Rightarrow (n-2) \text{ точек} && (17)\\
&\vdots && (18)\\
i = k &: j \in \{k, k+1, \ldots, n-1\} \Rightarrow (n-k) \text{ точек} && (19)\\
&\vdots && (20)\\
i = n-1 &: j \in \{n-1\} \Rightarrow 1 \text{ точка} && (21)
\end{aligned}
$$

Суммируем:

$$
\begin{aligned}
C_{\text{upper}}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) && (22)\\
&= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 && (23)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k && (24)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} && (25)
\end{aligned}
$$

4 Паттерн 3: Трапециевидная область

4.1 Формализация

Трапециевидные области возникают в stencil вычислениях и волновых алгоритмах:

```
for t ∈ {0, 1, ..., T − 1} do
    for i ∈ {max(0, t − k), ..., min(n, t + k + 1) − 1} do
        operation(t, i)
    end for
end for
```

где k – радиус stencil (полуширина "волны").

4.2 Геометрический анализ

Область представляет собой трапецию (или усеченный ромб) в координатах (t, i). Разобьем ее на три части:

1. **Фаза роста** ($0 \le t < k$): Ширина растет линейно
2. **Фаза стабильности** ($k \le t < T - k$): Постоянная ширина $2k + 1$
3. **Фаза убывания** ($T - k \le t < T$): Ширина убывает линейно

4.3 Подробный вывод для случая $T = n$, $k < n/2$

Фаза 1: Рост ($t \in [0, k)$)

Для каждого t в этой фазе:

$$\text{Нижняя граница}: \max(0, t-k) = 0 \quad (\text{так как } t < k) \tag{26}$$
$$\text{Верхняя граница}: \min(n, t+k+1) = t+k+1 \quad (\text{так как } t+k+1 < n) \tag{27}$$

Количество точек при фиксированном t: $(t+k+1) - 0 = t+k+1$
Суммируем по всем t в фазе роста:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{t=0}^{k-1}(t+k+1) && (28)\\ &= \sum_{t=0}^{k-1} t + \sum_{t=0}^{k-1}(k+1) && (29)\\ &= \frac{(k-1)k}{2} + k(k+1) && (30)\\ &= \frac{k^2-k}{2} + k^2 + k && (31)\\ &= \frac{3k^2+k}{2} && (32) \end{aligned}$$

Фаза 2: Стабильность ($t \in [k, n-k)$)
В этой фазе для каждого t:

$$\text{Нижняя граница}: t-k \tag{33}$$
$$\text{Верхняя граница}: t+k+1 \tag{34}$$

Количество точек: $(t+k+1) - (t-k) = 2k+1$ (константа!)
Количество значений t в этой фазе: $(n-k) - k = n-2k$
Общее количество точек в фазе стабильности:

$$S_2 = (n-2k)(2k+1) \tag{35}$$

Фаза 3: Убывание ($t \in [n-k, n)$)
Эта фаза симметрична фазе роста. По соображениям симметрии:

$$S_3 = S_1 = \frac{3k^2+k}{2} \tag{36}$$

Общая формула:

$$\begin{aligned} C_{\text{trap}}(n,k) &= S_1 + S_2 + S_3 && (37)\\ &= \frac{3k^2+k}{2} + (n-2k)(2k+1) + \frac{3k^2+k}{2} && (38)\\ &= 3k^2 + k + (n-2k)(2k+1) && (39)\\ &= 3k^2 + k + n(2k+1) - 2k(2k+1) && (40)\\ &= 3k^2 + k + 2nk + n - 4k^2 - 2k && (41)\\ &= n(2k+1) - k^2 - k && (42)\\ &= n(2k+1) - k(k+1) && (43) \end{aligned}$$

5 Паттерн 4: Диагональная итерация

5.1 Формализация

Обход матрицы по диагоналям (важно для параллелизации с зависимостями):

for $\text{diag} \in \{0, 1, \ldots, n + m - 2\}$ **do**
  for $i \in \{\max(0, \text{diag} - m + 1), \ldots, \min(\text{diag} + 1, n) - 1\}$ **do**
    $j \leftarrow \text{diag} - i$
    $\text{operation}(i, j)$
  end for
end for

5.2 Анализ диагоналей

В прямоугольной матрице $n \times m$ диагонали имеют следующую структуру:

- Диагональ d содержит точки (i, j) такие, что $i + j = d$
- Всего диагоналей: $n + m - 1$ (от $(0, 0)$ до $(n - 1, m - 1)$)
- Длина диагонали зависит от ее положения

5.3 Подробный вывод для квадратной матрицы $n \times n$

Рассмотрим диагональ с номером d, где $d \in [0, 2n - 2]$.

Случай 1: $d \in [0, n - 1]$ (первая половина диагоналей)

При $d < n$: точки имеют вид $(i, d - i)$ где $i \in [0, d]$, всего $d + 1$ точка.

Случай 2: $d \in [n, 2n - 2]$ (вторая половина диагоналей)

При $d \geq n$: точки имеют вид $(i, d-i)$ где $i \in [d-n+1, n-1]$, всего $(n-1)-(d-n+1)+1 = 2n - d - 1$ точек.

Суммирование:

$$C_{\text{diag}}(n) = \sum_{d=0}^{n-1}(d + 1) + \sum_{d=n}^{2n-2}(2n - d - 1) \tag{44}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k \tag{45}$$

$$= \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{(n - 1)n}{2} \tag{46}$$

$$= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} \tag{47}$$

$$= n^2 \tag{48}$$

6 Паттерн 5: Параллелограмм со сдвигом

6.1 Формализация

Паттерн с ограниченным радиусом взаимодействия:

for $i \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ **do**
  for $j \in \{\max(0, i - k), \ldots, \min(n, i + k + 1) - 1\}$ **do**
    $\text{operation}(i, j)$

```
    end for
end for
```

6.2 Геометрическая интерпретация

Это полоса шириной $2k+1$, идущая вдоль главной диагонали матрицы. В отличие от ленточной матрицы (паттерн 6), здесь мы итерируем по строкам, а не по элементам матрицы.

6.3 Детальный вывод

Анализируем три случая в зависимости от положения строки i:

Случай 1: $i \in [0, k)$ (верхние строки)

$$\text{Диапазон } j : [0, i+k+1) \tag{49}$$
$$\text{Количество точек} : i+k+1 \tag{50}$$

Случай 2: $i \in [k, n-k)$ (средние строки)

$$\text{Диапазон } j : [i-k, i+k+1) \tag{51}$$
$$\text{Количество точек} : 2k+1 \tag{52}$$

Случай 3: $i \in [n-k, n)$ (нижние строки)

$$\text{Диапазон } j : [i-k, n) \tag{53}$$
$$\text{Количество точек} : n-(i-k) = n-i+k \tag{54}$$

Суммирование:

$$C_{\text{par}}(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1}(i+k+1) + \sum_{i=k}^{n-k-1}(2k+1) + \sum_{i=n-k}^{n-1}(n-i+k) \tag{55}$$

Первая сумма:

$$\sum_{i=0}^{k-1}(i+k+1) = \sum_{i=0}^{k-1} i + k(k+1) \tag{56}$$
$$= \frac{(k-1)k}{2} + k(k+1) \tag{57}$$
$$= \frac{3k^2+k}{2} \tag{58}$$

Третья сумма (по симметрии равна первой):

$$\sum_{i=n-k}^{n-1}(n-i+k) = \frac{3k^2+k}{2} \tag{59}$$

Итого:

$$C_{\text{par}}(n,k) = \frac{3k^2+k}{2} + (n-2k)(2k+1) + \frac{3k^2+k}{2} \tag{60}$$
$$= 3k^2 + k + n(2k+1) - 2k(2k+1) \tag{61}$$
$$= n(2k+1) - k(k+1) \tag{62}$$

7 Паттерн 6: Ленточная (полосовая) матрица

7.1 Формализация

Обработка только элементов вблизи главной диагонали:

```
1: for i ∈ {0, 1, ..., n − 1} do
2:     for j ∈ {max(0, i − b), ..., min(n, i + b + 1) − 1} do
3:         operation(i, j)
4:     end for
5: end for
```

где b – полуширина ленты (bandwidth).

7.2 Матричная интерпретация

В терминах матрицы, мы обрабатываем элементы A_{ij} такие, что $|i - j| \leq b$. Это соответствует главной диагонали и b диагоналям выше и ниже нее.

7.3 Подробный вывод

Структура аналогична параллелограмму, но теперь мы считаем элементы матрицы.

Анализ по строкам:

- Если $i < b$: обрабатываем элементы от $j = 0$ до $j = \min(i + b, n - 1)$
- Если $b \leq i < n - b$: обрабатываем элементы от $j = i - b$ до $j = i + b$
- Если $i \geq n - b$: обрабатываем элементы от $j = i - b$ до $j = n - 1$

Зона 1 ($i \in [0, b)$):

$$\text{Элементов в строке } i : \min(i + b + 1, n) \tag{63}$$

$$\text{При } i + b + 1 < n : i + b + 1 \tag{64}$$

Сумма:

$$\sum_{i=0}^{b-1}(i + b + 1) = \frac{b(b-1)}{2} + b(b + 1) = \frac{3b^2 + b}{2} \tag{65}$$

Зона 2 ($i \in [b, n - b)$):

$$\text{Элементов в строке} : 2b + 1 \tag{66}$$

$$\text{Количество строк} : n - 2b \tag{67}$$

$$\text{Всего элементов} : (n - 2b)(2b + 1) \tag{68}$$

Зона 3 ($i \in [n - b, n)$): По симметрии: $\frac{3b^2+b}{2}$

Упрощенная формула для случая $b < n/2$:

Заметим, что общее количество элементов можно вычислить как:

- Все элементы в полосе шириной $2b + 1$: $n(2b + 1)$
- Минус "срезанные углы"треугольной формы

Каждый срезанный угол – это треугольник с катетом b:

$$\text{Площадь угла} = \frac{b(b + 1)}{2} \tag{69}$$

Итого:

$$C_{\text{band}}(n, b) = n(2b + 1) - 2 \cdot \frac{b(b + 1)}{2} = n(2b + 1) - b(b + 1) \tag{70}$$

8 Сводная таблица результатов

№	Паттерн	Формула
1	Нижний треугольник	$\frac{n(n-1)}{2}$
2	Верхний треугольник	$\frac{n(n+1)}{2}$
3	Трапеция	$n(2k+1) - k(k+1)$
4	Диагональная итерация	n^2
5	Параллелограмм	$n(2k+1) - k(k+1)$
6	Ленточная матрица	$n(2b+1) - b(b+1)$

Таблица 1: Итоговые формулы