РАЗДЕЛЫ КУРСА

"ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ",

выносимые на экзамен на экспериментальном потоке в январе 2012 г.

1. Комплексные числа. Действия с комплексными числами. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства. Комплексное сопряжение. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Операции возведения в целую степень и извлечения корня, формулы Эйлера и Муавра. Примеры множеств на комплексной плоскости.

2. Последовательности комплексных чисел. Предел последовательности комплексных чисел. Критерий Коши. Понятие бесконечно удаленной точки. Расширенная [полная] комплексная плоскость.

3. Понятие функции комплексной переменной. Однозначные и однолистные функции. Обратные функции. Элементарные функции комплексной переменной: линейная и дробно-линейная функция, экспонента и логарифм, степень с произвольным показателем, функция Жуковского, тригонометрические и гиперболические функции.

4. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность и равномерная непрерывность.

5. Дифференцируемость функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические функции и их свойства. Соотношение между однократной непрерывной дифференцируемостью и бесконечной дифференцируемостью в комплексном анализе и в вещественном анализе.

6. Интеграл от функции комплексной переменной по кусочно-гладкой кривой на комплексной плоскости, его свойства, связь с криволинейными интегралами, сведение к интегралу по действительной переменной.

7. Интегральная теорема Коши. Неопределенный интеграл, первообразная, формула Ньютона – Лейбница.

8. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши. Формула среднего значения. Принцип максимума модуля аналитической функции.

9. Интеграл типа Коши и доказательство возможности его дифференцирования под знаком интеграла любое число раз. Доказательство бесконечной дифференцируемости аналитических функций. Теорема Морера. Теорема Лиувилля. Основная теорема [высшей] алгебры как следствие теоремы Лиувилля.

10. Комплексные числовые ряды. Понятия сходимости и абсолютной сходимости. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши и признак Вейерштрасса сходимости комплексного числового ряда.

11. Функциональные ряды, их поточечная и равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Мажорантный признак равномерной сходимости функционального ряда. Почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда. Теоремы

Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

12. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Формула Коши – Адамара для радиуса сходимости. Ряд Тейлора. Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора. Соотношение между бесконечной дифференцируемостью функции одной переменной и возможностью ее представления рядом Тейлора в комплексном анализе и в вещественном анализе.

13. Правильные и особые точки функции. Нули аналитической функции. Теорема о тождественном равенстве нулю аналитической функции в области, где функция имеет предельную точку нулей. Теорема единственности определения аналитической функции и ее следствия.

14. Понятие аналитического продолжения. Теорема о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда для аналитической функции. Аналитическое продолжение с действительной оси.

15. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения.

16. Изолированные особые точки однозначной аналитической функции. Их классификация по поведению функции и по ряду Лорана. Теоремы о поведении функции в окрестности устранимой особой точке и полюса. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса. Бесконечно удаленная точка как особая.

17. Понятие вычета. Основная теорема теории вычетов. Вычисление вычетов. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов. Лемма Жордана.

18. Логарифмический вычет функции и его использование для вычисления полного числа нулей и полюсов функции в области. Теорема Руше.

19. Гармонические функции на плоскости. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Доказательство того, что в односвязной области плоскости любая гармоническая функция является действительной частью некоторой аналитической функции. Бесконечная дифференцируемость гармонической функции. Сохранение гармоничности при преобразованиях плоских областей, задаваемых аналитическими функциями. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области плоскости; использование аналитических функций для ее решения.

20. Определение конформного отображения. Соотношение между аналитичностью функции комплексной переменной и конформностью отображения, которое она задает. Конформность отображения, обратного конформному, и отображения, получаемого композицией двух конформных. Принцип соответствия границ (без доказательства). Теорема Римана (без доказательства). Обобщение понятия конформного отображения на области расширенной [полной] комплексной плоскости.

21. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Дробно-линейная функция и ее круговое свойство. Свойство сохранения симметричных точек (без доказательства). Отображения, задаваемые степенной функцией, функцией Жуковского и экспонентой.

22. Нахождение асимптотик интегралов с помощью метода Лапласа. Свéдение задачи к построе-

нию асимптотики интеграла по сколь угодно малой окрестности точки глобального максимума показателя экспоненты [принцип локализации]; приведение этого интеграла к более простому виду с помощью замены переменной и получение асимптотических оценок. Обобщение метода на случай интегралов по кривым на комплексной плоскости. Инвариантность выражения для главного члена асимптотики по отношению к выбору параметризации исходной кривой. Получение главного члена и оценки остаточного члена асимптотики функции Ханкеля I рода. Понятие о методе перевала.

23. [Одностороннее] преобразование Лапласа. Класс оригиналов. Аналитические свойства изображений. Преобразование свертки и произведения (без доказательства), преобразование производной и другие свойства преобразования Лапласа. Формула Меллина и обоснование ее использования для восстановления оригинала по известному изображению. Теорема о достаточных условиях существования оригинала.

Литература:

1. *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного.
2. *Домрин А. В., Сергеев А. Г.* Лекции по комплексному анализу.
3. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.
4. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения.
5. *Кравцов А. В., Майков А. Р.* Пособие к курсу теории функций комплексной переменной.
6. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.
8. *Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций комплексного переменного.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций.
10. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного.
11. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной.
12. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплекс-ного переменного.
13. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды.
14. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.