I. Оценки $J(\lambda) := \int\limits_{-A_1}^{A_2} g(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt$

Лемма A17.1. Пусть $A > 0$ и $p \geqslant 0$ — константы, и

$$K(\lambda) := \int\limits_0^A t^p e^{-\lambda t^2}\, dt\,.$$

Тогда для любого $\gamma > 0$

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \left[1 + o\left(\frac{1}{\lambda^\gamma}\right)\right] \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{A17.1}$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$.

1. Сделав замену переменной $x = \lambda t^2$, получим

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}} \int\limits_0^{\lambda A^2} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-x}\, dx \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}} \left[\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) - \widetilde{K}(\lambda)\right], \tag{A17.2}$$

где

$$\widetilde{K}(\lambda) := \int\limits_{\lambda A^2}^{\infty} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-x}\, dx\,. \tag{A17.3}$$

$\widetilde{K}(\lambda)$ отличается от интеграла, задающего Γ-функцию, только значением нижнего предела. Если $\lambda > 0$, $A \geqslant 0$, то, как нетрудно видеть, $\widetilde{K}(\lambda)$ сходится при любом $p > -1$, и

$$0 < \widetilde{K}(\lambda) \leqslant \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{A17.4}$$

2. Рассмотрим $\widetilde{K}(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Заметим, что подынтегральная функция в (A17.3) неотрицательна и что при $x \geqslant \lambda A^2$

$$e^{-x} \equiv e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \equiv e^{-\frac{\lambda A^2}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$\widetilde{K}(\lambda) \leqslant e^{-\frac{\lambda A^2}{2}} \int\limits_{\lambda A^2}^{\infty} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = e^{-\frac{\lambda A^2}{2}}\, 2^{\frac{p+1}{2}}\, \widetilde{K}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Отсюда и из (A17.4) следует оценка

$$\left|\widetilde{K}(\lambda)\right| \leqslant B\, e^{-\frac{\lambda A^2}{2}},$$

где B — константа, не зависящая от λ, и, таким образом, $\widetilde{K}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^\gamma}\right)$ при $\lambda \to +\infty$. Вместе с (A17.2) это приводит к (A17.1).

Следствием Леммы A17.1 является (убедитесь в этом самостоятельно)

Лемма A17.2. Пусть A и p — те же, что в условии Леммы A17.1, и $r(t) \in C([0, A])$ — функция, для которой имеет место оценка вида

$$|r(t)|\Big|_{t\in[0,A]} \leqslant C\, t^p \tag{A17.5}$$

с каким-нибудь $C < \infty$. Тогда

$$\int\limits_0^A r(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt = O\left(\frac{1}{\lambda^{(p+1)/2}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty\,.$$

Лемма A17.3. Пусть

$$g(t) \in C^{2n+2}([-A_1, A_2]) \quad \text{где} \quad 0 < A_{1,2} < \infty\,. \qquad (A17.6)$$

Тогда

$$J(\lambda) = \sum_{m=0}^{n} a_{2m}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\lambda^{m+1/2}} + {} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty\,, \qquad (A17.7)$$

где

$$a_k := \left.\frac{d^k g(t)}{d\,t^k}\right|_{t=0}. \qquad (A17.8)$$

Доказательство. Положим

$$J^{+}(\lambda) := \int_0^{A_2} g(t)\,e^{-\lambda\,t^2}\,dt\,, \qquad J^{-}(\lambda) := \int_{-A_1}^{0} g(t)\,e^{-\lambda\,t^2}\,dt\,;$$

тогда

$$J(\lambda) = J^{+}(\lambda) + J^{-}(\lambda)\,. \qquad (A17.9)$$

1. Рассмотрим сначала $J^{+}(\lambda)$.

Из (A17.6) и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа или Коши следует (покажите это самостоятельно), что

$$g(t)|_{t\in[0,A_1]} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,t^k + r_{2n+2}(t)\,,$$

где a_k — те же, что в (A17.8), и $|r_{2n+2}(t)| \leqslant C\,t^{2n+2}$ для некоторого $C < \infty$. Применяя к каждому из слагаемых, входящих

в $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}$, лемму A17.1 с $\gamma = n{+}3/2$, а к $r_{2n+2}(t)$ — Лемму A17.2, получим

$$J^{+}(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\frac{1}{\lambda^{(k+1)/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right). \qquad (A17.10)$$

2. Заметим теперь, что

$$J^{-}(\lambda) = \int_0^{A_2} g(-t)\,e^{-\lambda\,t^2}\,dt$$

— интеграл в точности такого же вида, как $J^{+}(\lambda)$, но с подынтегральной функцией $g(-t)$. Поэтому представление для $J^{-}(\lambda)$ получается из (A17.10) заменой a_k на

$$\widetilde{a}_k = \left.\frac{d^k g(-t)}{d\,t^k}\right|_{t=0}.$$

При этом, как нетрудно проверить,

$$a_k = \widetilde{a}_k, \qquad \text{если } k \text{ четное,}$$
$$a_k = -\,\widetilde{a}_k, \quad \text{если } k \text{ четное,}$$

и из (A17.9) и (A17.10) следует (A17.7), (A17.8).

Замечание. Лемма 17.4W, сформулированная на лекции, представляет собой утверждение теоремы A17.3 в частном случае $n = 0$ — покажите это самостоятельно.