s1

XIV. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

---

s2

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном («плоском») случае

Пусть $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$;

G — <произвольная **...**> область в $\mathbb{R}^2$;

задана некоторая $\varphi(x,y) \in C(\partial G)$.

Требуется найти все (вещественнозначные) $\boxed{u(x,y) \in C^2(G) \bigcap C(\overline{G})}$, такие, что

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } G, \\ u\,|_{\partial G} = \varphi\,. \end{cases}}$$

< **...** «Классическое решение» **...** >

---

s3

< **...** Приложения **...** >

< **...** Подход комплексного анализа **...** >

< **...** Обобщения **...** >

Определение. Будем говорить, что функция $u(x,y)$ является гармонической в области G, если $u \in C^2(G)$ и $\Delta u = 0$ в G .

---

s4

1. Свойства гармонических функций двух переменных

$$\begin{array}{ccc} F(z) & \mapsto & \operatorname{Re} F \equiv u(x,y) \\ | & & | \\ \text{аналитическая в } G & & \text{гармоническая в } G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} u(x,y) & \overset{???}{\mapsto} & F(z) \\ | & & | \\ \text{произвольная} & & \text{аналитическая в } G \\ \text{гармоническая в } G & & \operatorname{Re} F(z) = u(x,y) \end{array}$$

---

s5

Теорема 14.1 (см. Q14.1). Пусть

G — **односвязная** область в $\mathbb{R}^2$;

$u(x,y)$ — гармоническая в G .

Тогда существует аналитическая в G функция $F(z)$, такая, что $\operatorname{Re} F(z) = u(x,y)$.

Замечание. < **...** Многосвязная область — см. Q14.2 **...** >

---

s6

Таким образом, **любую гармоническую функцию ЛОКАЛЬНО всегда можно рассматривать как** Re **(или** Im **) некоторой аналитической функции.**

---

s7

< **...** Бесконечная дифференцируемость гармонической функции (см. Q14.3) **...** >
< **...** Формула среднего значения (см. Q14.4), принципы максимума, минимума, максимума модуля (см. Q14.5) **...** >

Теорема 14.2 (см. Q14.6). Пусть

G — **ограниченная** область в $\mathbb{R}^2$;

$u(x,y)$ — гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$.

Тогда $\sup\limits_{G} |u(x,y)| = \sup\limits_{\partial G} |u(x,y)|$.

---

s8

Теорема 14.3 (см. Q14.7). Пусть G — **ограниченная** область в $\mathbb{R}^2$. Тогда классическое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в G единственно.

< **...** Неограниченная область (Q14.8) **...** >
< **...** Существование классического решения **...** >
< **...** Явный вид решения **...** >

---

s9

2. «Сохранение гармоничности» при отображениях, задаваемых аналитическими функциями

< **...** >

---

s10

Теорема 14.4. Пусть

$U(\xi,\eta)$ — гармоническая в $\mathcal{G}$;

$f(z) \equiv \xi(x,y) + i\,\eta(x,y)$ — аналитическая в G ;

$f(G) \subset \mathcal{G}$.

Тогда функция

$$u(x,y) := U(\xi(x,y), \eta(x,y)) \qquad (14.1)$$

— гармоническая в G.

Доказательство. < **...** >

---

s11

Замечание. Можно показать

(см., например, Свешников – Тихонов, гл. VII, § 1, п. 2),
что отображение, задаваемое функцией $f(z)$ и (14.1), будет сохранять гармоничность только в двух случаях:

(a) $f(z)$ — аналитическая в G ;
(b) $\overline{f(z)}$ — аналитическая в G .

---

s12

3. Свед́ение исходной задачи Дирихле к задаче в области $\mathcal{G}$

< **...** >

---

s13

$$(*)\ f\ : G \rightleftarrows \mathcal{G};\ \begin{cases} f(z) \text{ — аналитическая в } G \\ f^{-1}(\zeta) \text{ — аналитическая в } \mathcal{G} \end{cases}$$

$$(**)\ f\ : \overline{G} \rightleftarrows \overline{\mathcal{G}};\ \begin{cases} f(z) \in C(\overline{G}) \\ f^{-1}(\zeta) \in C(\overline{\mathcal{G}}) \end{cases}$$

$$(***)\ f\ : \partial G \rightleftarrows \partial \mathcal{G};\ \Phi(\xi,\eta) := \varphi(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

Замечание. (*) $\Longrightarrow$

$$\boxed{f'(z) \neq 0\ \ \forall z \in G} \qquad (14.2)$$

---

s14

< **...** Основная задача **...** >
< **...** Геометрические свойства отображений (*) **...** >

4. Понятие конформного отображения

a. < **...** Угол между кривыми в точке **...** >

---

s15

b. Пусть γ — некоторая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$
$z - z_0 \equiv \Delta z \neq 0$ — к.-л. вектор секущей γ .

Тогда $\dfrac{\Delta z}{|\Delta z|}$ — единичный вектор в направлении вектора секущей;

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\Delta z}{|\Delta z|} \equiv \tau \iff$ в точке z_0
$\exists$ касательная к γ и τ — «ее» единичный вектор. < **...** $\phi:\ \tau = e^{i\phi}$ **...** >

---

s16

c. Лемма 14.5 (см. Q2.6 и Q2.7). Пусть $w_n \underset{n\to\infty}{\to} w_0 \equiv a_0\, e^{i\,\beta_0}$, где $a_0 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$.
Тогда

$$\begin{cases} |w_n| \to a_0\,, \\ \dfrac{w_n}{|w_n|} \to e^{i\,\beta_0}. \end{cases}$$

< **...** $\arg w_n$ **...** >

s17

d. Пусть

$\gamma \subset G$ — кусочно-гладкая кривая, $z_0 \in \gamma$;
$\tau \equiv e^{i\phi}$ — вектор касательной в т. z_0 ;
$f : G \rightleftarrows \mathcal{G}$ удовлетворяет (*)
$\Gamma = f(\gamma)$, $\zeta_0 := f(z_0)$;
$f'(z_0) \equiv a_0\, e^{i\beta_0}$ ($a_0 \neq 0$ — см. (14.2)).

Тогда

$$\exists \lim_{\Gamma \ni \zeta \to \zeta_0} \frac{\Delta\zeta}{|\Delta\zeta|} = e^{i\beta_0}\tau\,, \qquad (14.3)$$

$$\exists \lim_{z \to z_0} \frac{|\Delta\zeta|}{|\Delta z|} = a_0\,. \qquad (14.4)$$

---

s18

< **... Доказательство ...** >
< **...** Геометрическая интерпретация: **сохранение углов** (14.3) и **постоянство растяжений** (14.4) в точке $z_0 \in G$ **...** >

Определение. Пусть G и $\mathcal{G}$ — области в $\mathbb{C}$. Отображение $f : G \to \mathcal{G}$ будем называть конформным, если оно взаимно-однозначно и в **каждой** точке $z_0 \in G$ обладает свойством сохранения углов и постоянства растяжений.

Замечания. < **...** a) граница; b) (14.4);
c) конформность отображения в точке **...** >

---

s19

Теорема 14.6. Если $f(z)$ удовлетворяет (*), то f задает конформное отображение $G \to \mathcal{G}$.
Доказательство — см. п. **d.**

Замечание. Утверждение, $\approx$ обратное Теореме 14.6 — см. Свешников – Тихонов, гл. 6, Теорема 6.2 < **...** (*) – (***) и конформность **...** >

---

s20

5. Некоторые свойства конформных отображений

a. Отображение, обратное конформному, и композиция двух конформных отображений конформны. < **...** (*) – (***) **...** >
b. Если G — односвязная область, а $\mathcal{G}$ — многосвязная, то не существует конформного отображения $G \to \mathcal{G}$.
c. Теорема Римана, принцип сохранения области, принцип соответствия границ.

---

s 21

Теорема 14.7 (Принцип соответствия границ). Пусть

(1) G и $\mathcal{G}$ — **ограниченные односвязные** области в $\mathbb{C}$;

(2) ∂G и $\partial\mathcal{G}$ — **кусочно-гладкие**;

(3) $f(z)$ — $\left\{\begin{array}{l} \text{аналитическая в } G, \\ \in C(\overline{G}); \end{array}\right.$;

(4) $f(z)$ задает отображение $\partial G \leftrightarrows \partial\mathcal{G}$, при котором сохраняется направление обхода.

Тогда $f(z)$ задает конформное отображение $G \to \mathcal{G}$. < **...** >

---

s 22

6. Конформность отображений областей в $\overline{\mathbb{C}}$

Необходимо доопределить конформность в точке z_0 в случаях $z_0 = \infty$ или/и $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.
Идея: отобразить окрестность бесконечно удаленной точки на окрестность нуля (аналогично определению типов изолированной особой точки $z_0 = \infty$).

---

s 23

a. $z_0 = \infty,\quad f(\infty) \neq \infty$. Положим

$$f_1(w) := \left\{\begin{array}{ll} f\left(\dfrac{1}{w}\right), & w \neq 0\,; \\ f(\infty)\,, & w = 0\,. \end{array}\right.$$

Определение. Отображение $\zeta = f(z)$ будем называть конформным в точке $z_0 = \infty$, если отображение $\zeta = f_1(w)$ конформно в точке $w_0 = 0$.

---

s 24

b. $z_0 \neq \infty,\quad f(z_0) = \infty$. Положим

$$f_2(z) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{f(z)}\,, & z \neq z_0\,; \\ 0\,, & z = z_0\,. \end{array}\right.$$

Определение. < **...** >

c. $z_0 = \infty,\quad f(\infty) = \infty$. Положим

$$f_3(w) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{f(1/w)}\,, & w \neq 0\,; \\ 0\,, & w = 0\,. \end{array}\right.$$

Определение. < **...** >

---

s 25

Примеры.

$$f(z) = \frac{1}{z}\ :$$

$< \textbf{...}\ \ \mathbb{C}\ \ \textbf{...} >$;

$< \textbf{...}\ \ \overline{\mathbb{C}}\ \ \textbf{...} >$.

$$f(z) = az + b \quad (a \neq 0)\ :$$

$< \textbf{...}\ \ \mathbb{C}\ \ \textbf{...} >$;

$< \textbf{...}\ \ \overline{\mathbb{C}}\ \ \textbf{...} >$.

---

s 26

7. Отображения, задаваемые элементарными функциями

A. Дробно-линейная функция

Определение. Функцию вида

$$\zeta = f(z) := \frac{a + b\,z}{c + d\,z} \tag{14.5}$$

где

$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}, \quad ad \neq bc, \quad d \neq 0, \tag{14.6}$$

будем называть **дробно-линейной**, а соответствующее отображение — **дробно-линейным**.

---

s 27

Замечание. $<$ **...** смысл ограничений **...** $>$

(14.5) – (14.6) $\iff$

$$\boxed{f(z) = \frac{c_1}{z - z_0} + c_2, \text{ где } z_0,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{C},\ \ c_1 \neq 0}$$

$$\left(z_0 = -\frac{c}{d}\,,\ c_1 = \frac{ad - bc}{d^2}\,,\ c_2 = \frac{b}{d} \right).$$

Таким образом, дробно-линейное отображение — композиция трех отображений:

$$z \mapsto \zeta_1 = z - z_0,\ \ \zeta_1 \mapsto \zeta_2 = \frac{1}{\zeta_1},\ \ \zeta_2 \mapsto \zeta = c_1\zeta_2 + c_1$$

---

s 28

Теорема 14.8. Дробно-линейное отображение является конформным отображением $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, при котором точка $z = z_0$ переходит в $\zeta = \infty$, а точка $z = \infty$ — в $\zeta = c_2$.

Замечание. $<$ **...** геом. свойства **...** $>$

---

s 29

Если при дробно-линейном отображении $f(\infty) \neq 0 \quad (\Leftrightarrow b \neq 0 \Leftrightarrow c_2 \neq 0)$, то $f(z)$ приводится к виду

$$\boxed{f(z) = \lambda\,\frac{z - z_{01}}{z - z_{02}}\,, \text{ где } \lambda \neq 0,\ \ z_{01} \neq z_{02}}$$

$$\left(\lambda=\frac{b}{d}\,,\ z_{01}=-\frac{a}{b}\,,\ z_{02}=-\frac{c}{d}\right).$$

При этом $\boxed{z_{01}\mapsto 0\,,\ z_{02}\mapsto\infty\,,\ \infty\mapsto\lambda}$;

если $f(\infty)=0$, то $<$ **...** $>$

---

s 30

a. Круговое свойство дробно-линейного отображения

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (14.7)$$

$$A,B,C,D\in\mathbb{R},\ \ A^2+B^2+C^2\neq 0 \qquad (14.8)$$

$<$ **...** $>$

---

s 31

До конца раздела XIV под **«окружностью»** будем понимать

– либо собственно окружность (= «окружность конечного радиуса»),

– либо прямую (= «окружность бесконечного радиуса», «окружность, проходящая через бесконечно удаленную точку»).

Теорема 14.9. При дробно-линейном отображении окружности переходят в окружности. $<$ **...** $>$

---

s 32

b. Сохранение точек, симметричных относительно окружности

(= сохранение симметрии точек относительно окружности)

- Точки $z_1,\,z_2\neq\infty$ $<$ **...** $>$

- Точки $z=z_0$ и $z=\infty$ будем считать симметричными относительно **любой** окружности с центром в точке z_0 .

---

s 33

Теорема 14.10. При дробно-линейном отображении точки, симметричные относительно окружности, переходят точки, симметричные относительно ее образа.

Доказательство —

— Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Т.6.11.

$<$ **...** Пример **...** $>$

---

s 34

c. О единственности дробно-линейного отображения

Теорема 16.8. Заданием соответствия трех точек $z_1,\,z_2,\,z_3\in\mathbb{C}$ трех точек $\zeta_1,\,\zeta_2,\,\zeta_3\in\mathbb{C}$ дробно-линейное отображение определяется однозначно.

Доказательство —
— Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Т.6.9.

---

s 35

B. Степенная функция

$$\zeta = f(z) := z^{\alpha} \ (\alpha > 0)$$

$$G := \left\{ z:\ z = \rho e^{i\varphi},\, \varphi \in \left(0, \min\left[2\pi, \frac{2\pi}{\alpha} \right] \right) \right\}$$

$$\zeta = \rho^{\alpha} e^{i\alpha\varphi} \text{ — главная ветвь}$$

(1) G — область однолистности;
(2) $f(z)$, $f^{-1}(z)$ — аналитические
($\Leftarrow$ в G $\exists\, f'(z) = \alpha z^{\alpha-1} \neq 0$).

Замечание. < **Граница** >

---

s 36

C. Функция Жуковского

$$\zeta = f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right).$$

$$G_1 := \{ z:\ 0 < |z| < 1 \},\ G_2 := \{ z:\ |z| > 1 \}.$$

(1) $G_{1,2}$ — области однолистности (т.к.
$f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 = \dfrac{1}{z_2}$ или $z_1 = z_2$);
(2) $f(z)$, $f^{-1}(z)$ — аналитические
($\Leftarrow$ **...**).

---

s 37

(3) (геометрические свойства)
Окружности $|z| = \rho_0 \neq 1$:
$z = \rho_0 e^{i\varphi} \implies \zeta = a \cos\varphi + i\, b \sin\varphi$,
где
$a := \dfrac{1}{2}\left(\rho_0 + \dfrac{1}{\rho_0} \right), \quad b := \dfrac{1}{2}\left(\rho_0 - \dfrac{1}{\rho_0} \right).$
($|z| = 1$ **...**) ($\varphi = \varphi_0$ **...**)

Замечание.
$\widetilde{G}_1 := \{ z:\ |z| < 1 \},\ \widetilde{G}_2 := \{ z:\ |z| > 1 \} \cup \{\infty\}.$

---

s 38

8. Примеры

< **...** Общая стратегия **...** >

Замечание 1. Решение, вообще говоря, не единственно.

Замечание 2. Обобщения на случай областей с разрезами.

Замечание 3. Принцип соответствия границ будем использовать и для неограниченных областей (см. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения).
