Интеграл типа Коши

Пусть

(a) $L \subset \mathbb{C}$ — кусочно-гладкая кривая[1] (не обязательно замкнутая) с выбранным направлением интегрирования;

(b) $f(z)$ — кусочно-непрерывная (не обязательно аналитическая или даже непрерывная) комплекснозначная функция, заданная на L.

Положим

$$g_n(z) := \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{1}$$

где $n = 0, 1, \dots$, и $z \notin L$. При любом таком z, как видно из (a) и (b), $g_n(z)$ представляет собой «обычный» (т.е. собственный) интеграл Римана.

Заметим, что $g_0(z)$ — интеграл типа Коши.

Теорема. Пусть выполнены условия (a) и (b). Тогда

$g_0(z)$ — аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus L$;
$\dfrac{d^n}{dz^n}\, g_0(z) = g_n(z)$.

Доказательство.

1. Достаточно доказать, что для любого $n = 0, 1, \dots$ производная $\dfrac{d}{dz}\, g_n(z)$ существует всюду в $\mathbb{C} \setminus L$, и что

$$\frac{d}{dz}\, g_n(z) = g_{n+1}(z).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что для любого фиксированного $z = z_0 \notin L$

$$I := \frac{g_n(z_0 + \Delta z) - g_n(z_0)}{\Delta z} - g_{n+1}(z_0) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0. \tag{2}$$

2. Из (1) видно, что

$$I = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_L f(\zeta)\mu(\zeta, \Delta z)\, d\zeta,$$

где

$$\mu(\zeta, \Delta z) := \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{(\zeta - z_0 - \Delta z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] - \frac{n+1}{(\zeta - z_0)^{n+2}}\,.$$

Но тогда

$$|I| \leqslant C_0 \sup_{\zeta \in L} |\mu(\zeta, \Delta z)|, \quad \text{где } C_0 = \frac{n!}{2\pi} \sup_{\zeta \in L} |f(\zeta)| \cdot \int\limits_L dl < \infty\,,$$

и (2) будет справедливо, если

$$\sup_{\zeta \in L} |\mu(\zeta, \Delta z)| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0\,. \tag{3}$$

> Вместо (3) докажем, что
>
> $$\sup_{\substack{\zeta \in L \\ |\Delta z| \leqslant \delta}} |\mu(\zeta, \Delta z)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0\,, \tag{4}$$
>
> поскольку в данном случае это сделать проще.

Очевидно, что (4) $\Rightarrow$ (3). Также справедливо (хотя и не существенно для доказательства данной теоремы), что (4) $\Leftarrow$ (3) — убедитесь в этом самостоятельно, исходя, например, из определения предела функции по Коши.

3. Пусть $w := \dfrac{\Delta z}{\zeta - z_0}$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$\mu(\zeta, \Delta z) = \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+2}}\left[\frac{1 - (1-w)^{n+1}}{w\,(1-w)^{n+1}} - n - 1\right].$$

---

[1] Здесь, как и всюду в лекционном курсе, под «кусочно-гладкой кривой» подразумевается множество вида $\{z :\ z = \xi(t) + i\,\eta(t),\ t \in\ [a,b] \subset \mathbb{R}\}$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — непрерывные функции, производные которых существуют всюду, за исключением, возможно, конечного числа точек, причем $\xi'(t)$ и $\eta'(t)$ кусочно-непрерывны и $(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 \neq 0$ всюду, где производные существуют — т.е. кусочно-гладкая кривая *конечной длины*.

Заметим теперь, что $d_0 := \inf\limits_{\zeta \in L} |\zeta - z_0| > 0$ (см., например, задания Q8.2 и Q8.3).
Так как из $|\Delta z| \leqslant \delta$ следует $|\Delta w| \leqslant \delta / d_0$, то (4) будет доказано, если только

$$(5) \qquad h(w) := \frac{1 - (1-w)^{n+1}}{w\,(1-w)^{n+1}} \to n+1 \quad \text{при} \quad w \to 0.$$

С помощью известной формулы для бинома Ньютона получим

$$h(w) = \frac{n + 1 - (n+1)n\,t/2 + \ldots + (-1)^{n+2}\,w^n}{(1-w)^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что справедливо (5), а вместе с ним и утверждение теоремы.