s1

XVI. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

< **…** одностороннее **…** >

1. Некоторые свойства преобразования Фурье

---

s2

Формальные выражения:

$$\mathcal{F}\left[\varphi(t)\right](y) \equiv \mathcal{F}\left[\varphi\right](y) := \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,y\,t} \varphi(t)\,dt \quad (16.1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\Phi(t)\right](y) \equiv \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi\right](y) := \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\,y\,t}\, \Phi(t)\,dy \quad (16.2)$$

< **…** $\varphi(t)$ — в.г., комплекснозначная **…** >

---

s3

Теорема 16.1. Пусть $\varphi(t)$ —

(1) кусочно-гладкая < **…** > ;

(2) абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$.

Тогда интеграл $\mathcal{F}\left[\Phi\right](t)$ сходится в смысле главного значения к $\dfrac{\varphi(t+0)+\varphi(t-0)}{2}$.

< **…** V.p. **…** >

($\Longrightarrow$ в $\forall$ точках, где $\varphi(t)$ непрерывна — к $\varphi(t)$).

В этом смысле

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right]\right](t) = \varphi(t). \qquad (16.3)$$

---

s4

Замечание. Если $\Phi(y)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то утверждение Теоремы 16.1 будет верно с заменой $\mathcal{F} \rightleftarrows \mathcal{F}^{-1}$ < **…** >

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[\Phi\right]\right](y) = \Phi(y). \qquad (16.4)$$

---

s5

2. Определение преобразования Лапласа. Существование и аналитичность изображения

A. Класс функций (= «класс оригиналов»)

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0\,; \qquad (16.5)$$

$$f(t) \quad \text{кус.-непр. при } t \geqslant 0\,; \qquad (16.6)$$

$$\exists\ x,\, M < \infty:\ \ |f(t)| \leqslant M e^{xt}\,. \qquad (16.7)$$

< **…** $f(t)$ — в.г., комплекснозначная **…** >

< **…** (16.7): $f(t)$ — «функция с ограниченной степенью роста»; обобщение см. Св.–Т., гл. 8, § 1, п. 1, $\sim$ Лемма **…** >

s 6

Замечание. < ... >

$$f(t) \in A(a),\ x > a \implies \\ \implies e^{-xt} f(t) \text{ абс. инт. на } \mathbb{R} \qquad (16.8)$$

s 7

Пусть $\mathcal{X}$ — множество **всех** x, для каждого из которых (16.7) выполнено с каким-нибудь $M = M(x)$.
Число $a' := \inf \mathcal{X}$ будем называть показателем степени роста $f(t)$.

Пусть задано некоторое $a \in \mathbb{R}$. Множество **всех** функций, удовлетворяющих (16.5) – (16.7) и имеющих показатель степени роста $a' \leqslant a$, будем обозначать через $A(a)$.

s 8

Примеры (ф., $\in$ или $\notin$ классу оригиналов)

$$h(t); = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$t^\nu h(t) \quad (\nu \in \mathbb{R});$$

$$\frac{1}{1+t^\nu} h(t) \quad (\nu \in \mathbb{R});$$

$$e^{t^2} h(t); \quad e^{-t^2} h(t).$$

s 9

B. Формальное выражение для преобразования Лапласа

$$\boxed{F(p) := \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt} \qquad (*)$$

Эквивалентное определение:

$$\boxed{F(p) := \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}\left[e^{-xt} f(t)\right](y) \ \ (p = x + iy)} \qquad (16.9)$$

Обозначение: $f(t) \risingdotseq F(p)$
< ... также $\mathcal{L}[f(t)](p)$ ... >

s 10

C. Сходимость и аналитичность интеграла

Теорема 16.2. Пусть $f(t) \in A(a)$. Тогда для любого $a' > a$
в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a'$ интеграл $F(p)$ (*) сходится абсолютно и равномерно.

Замечание. Если $f(t) \in A(a)$, то интеграл (*) **может расходиться** при $p = a + iy$.
(Д.З. — привести пример).

s 11

Доказательство. Выберем $b \in (a, a')$. Для любого $x = \operatorname{Re} p \geqslant a'$

$$|e^{-pt} f(t)| = e^{-xt}|f(t)| \leqslant \\ \leqslant e^{-xt} M(b) e^{bt} \leqslant e^{-a't} M(b) e^{bt};$$

Т.к. $\int\limits_0^\infty e^{-(a'-b)t}\, dt$ сходится, то интеграл $F(p)$ сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a'$ ($\Longleftarrow$ мажорантный признак).

---

s 12

Следствие Теоремы 16.2. Пусть выполнены условия Теоремы 16.2. Тогда для любого $a' > a$ ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_m^{m+1} e^{-pt} f(t)\, dt$$

сходится равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant a'$.

---

s 13

Доказательство. < **...** простейшее: использовать для ряда и для интеграла (*) критерий Коши равномерной сходимости ряда и интеграла + Т. 16.2 — Д.З **...** >

---

s 14

Лемма 16.3. Пусть $-\infty < c < d < \infty$, и $g(t)$ — кусочно-непрерывная (возможно, комплекснозначная) функция на $[c, d]$. Тогда функция

$$G(p) := \int\limits_c^d e^{-pt} g(t)\, dt$$

является целой.

Доказательство. < **...** >

---

s 15

Теорема 16.4. Пусть $f(t) \in A(a)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство.

$$F(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_m^{m+1} e^{-pt} f(t)\, dt$$

< **...** Т. Вейерштрасса **...** >

---

s16

3. Основные свойства преобразования Лапласа

(подробнее — Св. – Т., гл. 8, § 1, п. 3)

a. Линейность

b. «Формула сдвига»

$$f_\tau(t) := \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t-\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases}$$

c. $e^{-\lambda t} f(t)$

d. $f(\alpha t)$

---

s17

e. Если $f(t)$, $f'(t)$, ... , $f^{(n)}(t)$ принадлежат классу оригиналов (см. (16.5) – (16.7)), то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \equiv \equiv p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

---

s18

Доказательство.

$n = 1 : \quad \int\limits_0^d e^{-pt} f'(t)\, dt =$

$= e^{-pt} f(t)|_{t=0}^d - p \int\limits_0^d e^{-pt} f(t)\, dt$;

$|e^{-pt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)|$ — оцениваем сверху (аналогично доказательству Т. 16.2), затем $d \to \infty$ ... ; получим $f'(t) \risingdotseq p\, F(p) - f(0)$.

$n > 1$ — по индукции.

---

s19

f. $t^n f(t)$; $f \in A(a) \implies t^n f(t) \in A(a)$ (Д.З.)

$\dfrac{d}{dp} F(p) = -tF(p)$ (Д.З.)

$\implies \dfrac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n t^n F(p)$

g. Свертка и ее изображение

Пусть $f_1(t) \in A(a_1)$, $f_2(t) \in A(a_2)$, $f_{1,2}(t) \risingdotseq F_{1,2}(p)$ и

$(f_1 * f_2)(t) := \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$. Тогда

(1) $(f_1 * f_2)(t) \in A(a)$, где $a := \max[a_1, a_2]$;

(2) $(f_1 * f_2)(t) \risingdotseq F_1(p) F_2(p)$.

---

s20

< **...** коммутативность **...** >

< **...** доказательство; Б. – Ф., Т. 10.9, Т. 10.9’ **...** >

< **...** общее понятие свертки **...** >

---

h. Изображение произведения

Пусть $f_{1,2}(t) \in A(a_{1,2})$, $F_{1,2}(p)$ — их изображения. Тогда для любого $x > a_1 + a_2$

$$f_1(t)\, f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} F_1(p-q) F_2(q)\, dq.$$

---

4. Обращение преобразования Лапласа

< **...** изображение $\overset{???}{\longmapsto}$ оригинал ... MIN: $\operatorname{Re} p > a$ **...** >

Обозначение:

$$\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} G(p)\, dp := i \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} G(x+iy)\, dy \quad (16.10)$$

< **...** V.p. **...** >

A. Если известно, что оригинал $F(p)$ $\exists$

Теорема 16.5. Пусть

(1) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$ задана аналитическая функция $F(p)$;

(2) известно, что $F(p)$ является изображением некоторой **кусочно-гладкой** функции $f(t) \in A(a)$, причем в точках разрыва $f(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

Тогда для любого $x > a$ и любого $t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} e^{pt}\, F(p)\, dp} \qquad (16.11)$$

< **...** (16.11) — **ф. Меллина ...** >

Доказательство. (16.9) $\Longrightarrow$
$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} F(x+iy) = \mathcal{F}\left[e^{-xt} f(t)\right](y)$.
Из условий теоремы и (16.8) следует, что $\varphi(t) := e^{-xt} f(t)$ удовлетворяет всем условиям, при которых $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right]\right](t) = \varphi(t)$ (см. (16.3)).

---

s 26

Поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,F(x+iy)\right](t) = e^{-xt}f(t)$$

Кроме того, из (16.2) и (16.10) $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\,\infty}^{x+i\,\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \frac{e^{xt}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}^{-1}\left[F(x+iy)\right](t) \tag{16.12}$$

Из двух последних равенств следует формула Меллина (16.11).

---

s 27

B. Если о существовании оригинала $F(p)$ заранее ничего не известно

< ... >

---

s 28

Теорема 16.6. Пусть

(1) $F(p)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$;

(2) $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$ равномерно относительно $\arg p$;

(3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|\,dy$ сходится **для любого** $x > a$.

Тогда $\exists\ f(t) \in A(a) \bigcap C(\mathbb{R})$, являющаяся оригиналом $F(p)$.

---

s 29

Замечание 1. (2) $\Longleftrightarrow$

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} p > a \\ |p| > R}} |F(p)| \to 0 \quad \text{при } R \to \infty$$

Замечание 2. (3): $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|\,dy.$

Замечание 3. Гладкости (даже кусочной) $f(t)$ нам не обещают.

---

s 30

Доказательство.

Идея: Попытаться задать $f(t)$ с помощью формулы Меллина, а затем установить у $f(t)$ все свойства оригинала.

---

s 31

Реализация идеи

1. Для любого **фиксированного** $x > a$

интеграл $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$ сходится абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$ ($\Longleftarrow$ ...) и, следовательно, задает некоторую ф. $\widetilde{f}(t, x) \in C(\mathbb{R})$. При этом

$$|\widetilde{f}(t,x)| \leqslant \frac{e^{xt}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|\,dy \qquad (16.13)$$

---

s 32

2. $<$ **...** $\widetilde{f}(t, x_1) = \widetilde{f}(t, x_2)$ **...** $>$ $f(t).$

3. Итак, для $f(t) \in A(a)$:
$f(t) \in C(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ (16.6);
(16.13) $\Longrightarrow |f(t)| \leqslant M(x)\, e^{xt}$ (т.е. (16.7)).
Осталось доказать $f(t)|_{t<0} \equiv 0$.

---

s 33

$\theta := -t > 0;$ $\quad f(t) = \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-p\,\theta} F(p)\,dp$

$z := i(p-x)$ ($\Longleftrightarrow p = -\,i\,z + x$); при этом

$\operatorname{Re} p > x \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$

$$J_R := \int\limits_{C_R^-} e^{-p\,\theta} F(p)\,dp =$$

$$= -\,ie^{-x\,\theta} \int\limits_{\gamma_R^-} e^{iz\theta} F(-iz+x)\,dz$$

---

s 34

Оценка $|F(-iz+x)|$:
$|z| \geqslant R \quad \Longrightarrow$
$|p| = |-iz+x| \geqslant \big||z|-|x|\big| \geqslant \big|R-|x|\big|.$

Поэтому из (b) следует (см. Замечание 1) выполнение условий леммы Жордана для J_R
$\Longrightarrow \quad J_R \to 0$ при $R \to \infty$. $<$ **...** $>$

---

s 35

4. $<$ **...** $f(t) \risingdotseq F(p)$ — ??? **...** $>$
По определению (см. (16.9))

$$f(t) \risingdotseq \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left[e^{-xt} f(t)\right](p). \qquad (16.14)$$

Кроме того, построенная с помощью формулы Меллина $f(t)$ задается равенством (см. (16.12))

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{xt} \mathcal{F}^{-1}\left[F(x+iy)\right](t). \qquad (16.15)$$

Поскольку $\Phi(y) := F(x+iy)$ — бесконечно дифференцируемая ($\Longleftarrow$ аналитичность $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$) и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[\Phi\right]\right](y) = \Phi(y)$$

(см. (16.4)). Отсюда и из (16.14), (16.15) следует $f(t) \risingdotseq F(p)$.
