При ответах на любые вопросы I и II частей экзамена (за исключением тех вопросов, где требуется лишь сформулировать какое-либо определение или утверждение), необходимо полное обоснование, включающее и формулировки определений и результатов курса, используемых в рассуждениях.

I часть экзамена

(для тех студентов, которые ко дню экзамена набрали **менее 24 баллов** по результатам компьютерных тестирований и решения «бонусных» задач)

За полностью верный ответ на вопрос, помеченный звездочкой, засчитывается 7 баллов, без звездочки — 5 баллов. Если вопрос со звездочкой представляет собой часть другого вопроса, то баллы суммируются. Например, в Варианте I первый вопрос оценивается в 5 баллов, если даны верные ответы только на части (a) и (b), и в 12 баллов, если даны верные ответы на (a), (b) и (*); четвертый вопрос оценивается в 7 баллов, вопросы 2, 3 и 5 — в 5 баллов.

Для того, чтобы участвовать во второй части экзамена, необходимо набрать 24 балла (с учетом баллов, набранных до экзамена).

Вариант 1

1. Является ли функция $w = z^3$
   (a) однозначной;
   (b) аналитической

   в круге $G := z : |z - i| < 1$?
   (*) Является ли отображение $G \to f(G)$ конформным?
2. Сформулируйте определение первообразной функции комплексной переменной.
3. Сформулируйте теорему единственности определения аналитической функции.
4. **(*)** Пусть $f(z) := \dfrac{1}{\sin z}$. Существует ли последовательность $z_n \to 0$, такая, что $f(z_n) \to 1$?
5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{L_{z_0 z_1}} |z|\, dz$, где $L_{z_0 z_1}$ — дуга окружности $|z| = 1$, лежащая в верхней полуплоскости; $z_0 = 1$, $z_1 = -1$.

Вариант 2

1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, и $\zeta_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, где $r_0 > 0$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Требуется найти $\operatorname{Arg} \dfrac{1}{(-\zeta_0)^\alpha}$.
2. (a) Сформулируйте определение интеграла типа Коши.

   (b) **(*)** Является ли функция
   $$f(z) = \int\limits_{C+} \frac{|\zeta|}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (C \text{ — окружность } |z| = 1),$$
   аналитической в круге $|z| < 1$?
3. **(*)** Сформулируйте и докажите II теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
4. Сформулируйте определение существенно особой точки z_0 для
   (a) $z_0 \in \mathbb{C}$;
   (b) $z_0 = \infty$.
5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)\, dz$.

Вариант 3

1. **(*)** Верно ли следующее утверждение:
   « Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, причем
   $f'(z) \neq 0$ всюду в D. Тогда $f(z)$ однолистна в D » ?
2. Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.
3. Сформулируйте определения
   (a) поточечной сходимости функционального ряда;
   (b) равномерной сходимости функционального ряда.
4. Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.
5. Постройте конформное отображение сектора
   $$G := \left\{ z : \, 0 < |z| < 2, \, -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6} \right\}$$
   на верхнюю полуплоскость.
6. **(*)** Имеет ли функция $f(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^2}$ особые точки
   (a) в открытом круге $|z| < 1$?
   (b) в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$?

Вариант 4

1. Пусть $g(z)$ — некоторая аналитическая в точке z_0 функция, причем $g(z_0) \neq 0$, и $\varphi(z) := (z - z_0)g(z)$. Покажите, что в некоторой ε-окрестности точки $w_0 = 0$ определена аналитическая функция $z = \psi(w)$, являющаяся обратной для $w = \varphi(z)$. Выразите значение $\dfrac{d\psi}{dw}(0)$ через $g(z)$.
2. Сформулируйте определение целой функции и приведите пример целой функции, не равной тождественно константе.
3. Сформулируйте теорему Абеля для степенного ряда.
4. (*) На полной комплексной плоскости $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ укажите все особые точки функции $\dfrac{\sin^2 z}{z^2}$ и определите их характер.
5. Вычислите $\operatorname{res}\left[\sin\dfrac{1}{z}, 0\right]$.
6. (*) Считая доказанной теорему Коши для многосвязной области, выведите интегральную формулу Коши для значения аналитической функции в произвольной точке, не лежащей на контуре интегрирования.

II часть экзамена

Верные ответы на вопросы этой части экзамена оцениваются либо в 15, либо в 25 баллов. Каждый студент может получить один или два вопроса в зависимости от количества баллов, набранных до экзамена и/или на I части экзамена.

Вариант 1 [15]

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественнозначные функции. Верно ли следующее утверждение:

«Если всюду в области D **частные производные** u **и** v **существуют** и удовлетворяют условиям Коши-Римана, то функция $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ аналитична в D»?

Вариант 2 [15]

Сформулируйте и докажите теорему Сохоцкого – Вейерштрасса о поведении функции в окрестности существенно особой точки.

Вариант 3 [15]

Верно ли следующее утверждение:

«Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а $f(z)$ — аналитическая в G. Тогда функция $|f(x + iy)|$ — гармоническая в G»?

Вариант 4 [15]

Найдите главный член асимптотики интеграла

$$I(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \operatorname{ch}^2 t}\, dt$$

при $\lambda \to +\infty$ и получите оценку остаточного члена.

Вариант 5 [15]

Для каких действительных α справедлива оценка

$$\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\lambda \operatorname{ch}^2 t}\, dt = O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$?

Вариант 6 [25]

Верно ли следующее утверждение:

«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1, 1)$. Тогда $f(x)$ можно продолжить аналитически на некоторую область G комплексной плоскости, содержащую интервал действительной прямой $(-1, 1)$ » ?

Вариант 7 [25]

Сформулируйте и докажите [первую] теорему Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

Вариант 8 [25]

Вычислите

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} [1 + \operatorname{ctg}(\varphi + i\, a)]^p \, d\varphi,$$

где $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$, и $[\,\cdot\,]^p$ — однозначная ветвь степенной функции, заданная равенством $\zeta^p := |\zeta|^p e^{ip \arg \zeta}$ при $\arg \zeta \in (-\pi, \pi]$.

Вариант 9 [25]

Верно ли следующее утверждение:
«Пусть

(a) $F(p)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$;

(b) $\sup\limits_{\substack{\operatorname{Re} p > a \\ |p| > R}} |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$;

(c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|\, dy$ сходится для любого $x > a$.

Тогда существует функция $f(t) \in C(\mathbb{R})$, являющаяся оригиналом $F(p)$» ?