s1

XV. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ИНТЕГРАЛОВ

---

s2

1. Метод Лапласа

В этом разделе:

$$a, b: \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,$$

$$f(t), S(t) \in C((a,b)), \tag{15.1}$$

$$\sup_{(a,b)} S(t) = c_0 < \infty, \tag{15.2}$$

$$\exists!\ t_0 \in (a,b): \ S(t_0) = c_0, \tag{15.3}$$

$$\sup_{|t-t_0| \geqslant \delta} S(t) < c_0 \quad \text{для } \forall\ \delta > 0. \tag{15.4}$$

(15.2) — (15.4): < **...** >

---

s3

$$\boxed{I(\lambda) := \int_a^b f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt} \tag{15.5}$$

Мотивация: < **...** $\lambda \to +\infty$ **...** >

Замечания:

< **...** $\mathbb{R}$ **...** > ;

< **...** в.г., несобственный **...** > ;

< **...** $t_0 \in (a,b)$ **...** > .

---

s4

Пример. $I(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt$, где $f(x) \in C(\mathbb{R})$ и $\sup_{\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$.

Как известно, «$\sqrt{\dfrac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda t^2} \xrightarrow{\lambda\to\infty} \delta(t)$» < **...** >

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, I(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} f(0) \iff \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, I(\lambda) = f(0) + o(1)$$

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, f(0) + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

---

s5

A. Сходимость $I(\lambda)$

< **...** абсолютная сходимость **...** >

Лемма 15.1. Пусть

$$I(\lambda) \text{ сходится } \textbf{абсолютно} \text{ при некотором } \lambda_0. \tag{15.6}$$

Тогда он сходится, и притом **абсолютно,** при любом $\lambda > \lambda_0$.

< **...** >

---

s6

Доказательство. Для любого $\lambda > \lambda_0$
$|e^{\lambda S(t)}| \equiv e^{(\lambda-\lambda_0)S(t)}e^{\lambda_0 S(t)} \leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)S(t_0)}e^{\lambda_0 S(t)} \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow |f(t)\, e^{\lambda S(t)}| \leqslant \\ \leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)S(t_0)}|f(t)\, e^{\lambda_0 S(t)}| \\ \int\limits_a^b |f(t)\, e^{\lambda_0 S(t)}|\, dt \quad \text{сходится} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I(\lambda) = \int\limits_a^b f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt \quad \text{сход. абсолютно.}$$

---

s7

B. «Принцип локализации»
Положим

$$\boxed{I_\delta(\lambda) := \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)\, e^{\lambda\, S(t)}\, dt\,.}$$

< **...** >

---

s8

Лемма 15.2. Пусть выполнены условия (15.1) – (15.4) и (15.6). Тогда для любого $\gamma > 0$

$$I(\lambda) - I_\delta(\lambda) = o\left(e^{\lambda\, S(t_0)}\, \frac{1}{\lambda^\gamma}\right) \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{15.7}$$

< **...** δ — **!!! сколь угодно** малое **...** >

Доказательство. Положим
$\mathcal{M}(\delta) := [a, b] \setminus (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$;
$D := \sup\limits_{\mathcal{M}(\delta)} S(t)$.

---

s9

При $t \in \mathcal{M}(\delta)$ (аналогично док. Леммы 5):

$|e^{\lambda S(t)}| \equiv e^{(\lambda-\lambda_0)S(t)}e^{\lambda_0 S(t)} \leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)D}e^{\lambda_0 S(t)} \Longrightarrow$

$$|I(\lambda) - I_\delta(\lambda)| \equiv \left|\int\limits_{\mathcal{M}(\delta)} f(t)e^{\lambda S(t)}\, dt\right| \leqslant \int\limits_{\mathcal{M}(\delta)} \Big|\ldots\Big|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)\, D} \int\limits_{\mathcal{M}(\delta)} |f(t)|e^{\lambda_0\, S(t)}\, dt \leqslant \ldots \int\limits_a^b \ldots dt \equiv$$

$$\equiv B_0 e^{\lambda D}, \quad \text{где} \quad B_0 := e^{-\lambda_0 D} \int\limits_a^b |f(t)|\, e^{\lambda_0\, S(t)}\, dt.$$

---

s10

Итак,

$$|I(\lambda) - I_\delta(\lambda)| \leqslant B_0 e^{\lambda D} \equiv B_0 e^{-\lambda(S(t_0)-D)}e^{\lambda c_0},$$

где B_0 не зависит от λ. Так как $S(t_0) > D$ (см. (15.4)), то отсюда следует (15.7).

s 11

C. Сведе́ние $I_\delta(\lambda)$ к более простому интегралу

$<$ **...** гладкость $f(t)$ и $S(t)$ **...** $>$

a. Дополнительно потребуем, чтобы $S(t)$ была **аналитической в точке** t_0, то есть $\exists\, d > 0:$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n \quad \text{при } |t-t_0| < d. \quad (15.8)$$

s 12

Замечание 1.

$$(15.8) \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad S(t) \in C^\infty((t_0-d, t_0+d)).$$

Замечание 2.

$(15.8) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-t_0)^n$ сходится в круге

$$\omega_d(t_0) = \{z: \ |z-t_0| < d\},$$

и его сумма $S(z)$ — аналитическая в $\omega_d(t_0)$ функция.

s 13

b. Возвращаемся на действительную ось. Т.к. t_0 — точка глобального максимума $S(t)$ на (a, b) , и t_0 — внутренняя для (a, b), то t_0 — также и точка **локального** максимума $S(t)$. Поэтому $S'(t_0) = 0$ и $S''(t_0) < 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$S''(t_0) < 0. \qquad (15.9)$$

s 14

c. Тогда для коэффициентов ряда (15.8) получим

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = S(t_0), \\ c_1 = 0, \\ c_2 = \dfrac{1}{2} S''(t_0) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$S(z) = c_0 + c_2(z-t_0)^2 + ... \equiv$$

$$\equiv S(t_0) - (z-t_0)^2 h(z), \qquad (15.10)$$

где $h(z)$ — аналитическая в точке $z = t_0$ и

$$h(t_0) = -\frac{S''(t_0)}{2} \equiv \frac{|S''(t_0)|}{2} > 0. \qquad (15.11)$$

s 15

Тогда для любого $\delta < d$

$$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda\, S(t_0)} \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)\, e^{-\lambda (t-t_0)^2 h(t)}\, dt$$

d. Идея: рассмотрим функцию

$$\boxed{\tau = \varphi(t) := (t-t_0)\sqrt{h(t)}} \qquad (15.12)$$

< **...** > Если окажется, что

$$\left.\begin{array}{l} \varphi :\ [t_0-\delta, t_0+\delta] \leftrightarrows [-\varepsilon_1, \varepsilon_2] \\ \text{и обратная функция } \psi(\tau) \equiv \\ \equiv \varphi^{-1}(\tau) \in C^1([-\varepsilon_1, \varepsilon_2]) \end{array}\right\} \qquad (15.13)$$

---

s16

то $t = \psi(\tau)$ — замена переменной,
приводящая $I_\delta(\lambda)$ к виду

$$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda\, S(t_0)} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau \qquad (15.14)$$

---

s17

D. Вспомогательная лемма

< **...** гладкость $\psi(\tau)$; комплексный случай **...** >

Обозначения:

$\mathbb{R}^+ := \{x,\, x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^- := \{x,\, x \leqslant 0\}$.

Лемма 15.3. Пусть

функция $S(z)$ аналитична в точке $z = z_0$;

$S'(z_0) = 0$;

$S''(z_0) \notin \mathbb{R}^+$.

Тогда $S(z) = S(0) - \varphi^2(z)$, где

$$\left.\begin{array}{r} \varphi(z) \text{ — аналитическая в т. } z_0; \\ \varphi'(z_0) \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (15.15)$$

---

s18

Доказательство.

1. Аналогично (15.10) получим

$$S(z) = S(z_0) - (z-z_0)^2 h(z),$$

где $h(z)$ — аналитическая в точке z_0 и
$h(z_0) = -\dfrac{1}{2} S''(z_0) \notin \mathbb{R}^-$.

2. Пусть
$\sqrt{\zeta} := \sqrt{|\zeta|}\, e^{i\, \arg\zeta/2}$ $(\arg\zeta \in (-\pi, \pi))$.
Тогда $\sqrt{\zeta}$ — аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

3. Таким образом, $\sqrt{h(z)}$
(а следователшьно, и $\varphi(z) := (z-z_0)\sqrt{h(z)}$)
аналитичны в точке z_0; при этом
$\varphi'(z_0) = \sqrt{h(z_0)} \neq 0$.

---

s19

Следствие 1. Если выполнены условия
Леммы 15.3, то

(1) существуют область $G \ni z_0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\varphi(z)$ задает конформное отображение $G \rightleftarrows \omega_\varepsilon(0)$;

(2) существуют $\delta > 0$ и область $\mathcal{G} \ni 0$ такие, что $\varphi(z)$ задает конформное отображение $\omega_\delta(z_0) \rightleftarrows \mathcal{G} \ni 0$.

---

s 20

Следствие 2. Пусть $\varphi(t)$ задана согласно (15.12). Тогда существует такое $\delta > 0$, что

$$\left.\begin{array}{l} \varphi:\ [t_0-\delta, t_0+\delta] \leftrightarrows [-\varepsilon_1, \varepsilon_2] \\ \text{и обратная функция } \psi(\tau) \equiv \\ \equiv \varphi^{-1}(\tau) \in C^\infty([-\varepsilon_1, \varepsilon_2]) \end{array}\right\}$$

При этом (15.11) $\Longrightarrow$

$$\psi'(0) = \frac{1}{\varphi(t_0)} = \frac{1}{\sqrt{h(t_0)}} = \sqrt{\frac{2}{|S''(t_0)|}} \qquad (15.16)$$

$<$ **...** см. (15.13) **...** $>$

---

s 21

Теорема 15.4. Пусть выполнены условия (15.1) – (15.3), (15.8) и (15.9). Тогда существует $\delta > 0$, при котором $I_\delta(\lambda)$ может быть представлен в виде

$$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau,$$

где $\psi(\tau) \in C^\infty([-\varepsilon_1, \varepsilon_2])$ — функция, обратная по отношению к (15.12).

$<$ **...** гладкость $f(\psi(\tau))\psi'(\tau)$ **...** $>$

---

s 22

E. Интеграл $J(\lambda)$ и его асимптотика

Рассмотрим $\displaystyle J(\lambda) := \int\limits_{-A_1}^{A_2} g(\tau)\, e^{-\lambda\,\tau^2}\, d\tau$.

Лемма 15.5. Пусть $g(\tau) \in C^{2n+2}([-A_1, A_2])$, где $0 < A_{1,2} < \infty$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$J(\lambda) = g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{\lambda^{m+1/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right),$$

$$\text{где} \quad b_m := \left.\frac{d^{2m} g(\tau)}{d\, t^{2m}}\right|_{\tau=0} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) .$$

Доказательство — см. `tfcv-exp.narod.ru`.

---

s 23

F. Асимптотика $I_\delta(\lambda)$ и $I(\lambda)$

$<$ **...** $g(\tau) = f(\psi(\tau))\psi'(\tau);\ \dfrac{d^{2m} g(\tau)}{d\, t^{2m}} = ?$ **...** $>$

Заметим, что для $g(t) \in C^2([-A_1, A_2])$ из Леммы 15.5 следует

$$J(\lambda) = g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \quad \text{при } \lambda \to +\infty$$

$$(15.16) \quad \Longrightarrow \quad g(0) = f(t_0)\sqrt{\frac{2}{|S''(t_0)|}}\ ;$$

тогда, если $f(t) \in C^2([t_0-\delta, t_0+\delta])$ $(\Rightarrow \ldots)$, то

---

s 24

$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \left[f(t_0)\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda\,|S''(t_0)|}} + O\left(\dfrac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right].$
при $\lambda \to +\infty$.

Теорема 15.6. Пусть выполнены условия (15.1) – (15.4), (15.6), (15.8), (15.9) и существует такое $\delta' > 0$, что

$$f(t) \in C^2((t_0-\delta', t_0+\delta'))$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$.

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \left[f(t_0)\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda\,|S''(t_0)|}} + O\left(\dfrac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right].$$

Доказательство. $<$ **...** $>$

$<$ **...** Обобщение — `tfcv-exp.narod.ru` **...** $>$

---

s 25

Замечание. Утверждение Теоремы 15.6 справедливо в случае комплекснозначной функции $f(t)$.

$<$ **...**

$f(t) = f_1(t) + i f_2(t);\ f_{1,2} \in C^2((t_0-\delta', t_0+\delta'))$

... $>$

---

s 26

2. Интегралы по кривым в $\mathbb{C}$

$$a, b: \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$$

A. Обобщение понятия кривой

В этом разделе будем рассматривать множества вида

$$L := \{z:\ z = z(t),\ t \in (a,b)\}.$$

где $z(t) \in C((a,b))$ — такая функция, что для $\forall$ конечного отрезка $[a_0, b_0] \subset (a,b)$ $\{z:\ z = z(t),\ t \in [a_0,b_0]\}$ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. $<$ **...** частные случаи **...** $>$

---

s 27

Кроме того, будем предполагать, что L не имеет точек самопересечения.

Следствия:

(1) $z'(t) \neq 0$ всюду, где $z'(t)\ \exists$;

(2) $\forall\ z_1 \in L \quad \exists!\, t_1 :\ z(t_1) = z_1$.

$<$ **...** различные параметризации L **...** $>$

---

s 28

A. Интеграл по кривой

Пусть $F(z) \in C((a,b))$ — комплекснозначная.

$$\int\limits_L F(z)\,dz := \int\limits_a^b F(z(t))z'(t)\,dt \equiv I \qquad (15.17)$$

$<$ **...** частные случаи; в.г., несобственный **...** $>$ Будем говорить, что $\int\limits_L F(z)\,dz$ сходится (либо сходится абсолютно), если I сходится (соотв., сходится абсолютно).

s 29

Далее в этом разделе:

$$f(z),\ S(z) \in C(L) \tag{15.18}$$

— комплекснозначные функции;

$$\boxed{I(\lambda) := \int\limits_L f(z)\, e^{\lambda\, S(z)}\, dz}$$

$$\widetilde{f}(t) := f(z(t))z'(t),$$

$$\widetilde{S}(t) := S(z(t)) = \widetilde{S}_1(t) + i\widetilde{S}_2(t),$$

s 30

$$I(\lambda) = \int\limits_a^b \widetilde{f}(t)\, e^{\lambda \widetilde{S}_1(t)} e^{i\lambda \widetilde{S}_2(t)}\, dt \tag{15.19}$$

B. Асимптотика $I(\lambda)$ в случае $\operatorname{Im} S(z) \equiv \mathrm{const}$

Идея: если $e^{i\lambda \widetilde{S}_2(t)} \equiv \mathrm{const}$, а $\widetilde{f}(t)$ и $\widetilde{S}_1(t)$ удовлетворяют условиям Теоремы 15.6, (см. замечание к Теореме), то асимптотику $I(\lambda)$ можно можно получить непосредственно с помощью метода Лапласа.

s 31

Для этого достаточно выполнения условий:

$$\operatorname{Im} S(z) \equiv \mathrm{const} \quad \text{на } L, \tag{15.20}$$

$$f(t),\ S(z) \in C(L), \tag{15.21}$$

$$\sup_L \operatorname{Re} S(z) = c_0 < \infty, \tag{15.22}$$

$$\exists!\ z_0 \in L : \ S(z_0) = c_0, \tag{15.23}$$

$$\sup_{L \setminus \omega_\delta(z_0)} \operatorname{Re} S(z) < \ c_0 \quad \text{для } \forall\ \delta > 0, \tag{15.24}$$

$$\exists\, \lambda_0 : \ I(\lambda_0) \ \text{сходится}, \tag{15.25}$$

s 32

$$z(t) \text{ — аналитическая в некоторой окрестности точки } t_0 : z(t_0) = z_0, \tag{15.26}$$

$$f(z),\ S(z) \text{ — аналитические в некоторой окрестности точки } z_0, \tag{15.27}$$

$$\left.\frac{d^2 \operatorname{Re} S(z(t))}{dt^2}\right|_{t=t_0} < 0. \tag{15.28}$$

$<$ **...** (15.26), (15.27); **аналит. кривая ...** $>$

(15.24): $\left.\dfrac{d^2 \operatorname{Re} S(z(t))}{dt^2}\right|_{t=t_0} = \left.\dfrac{d^2 S(z(t))}{dt^2}\right|_{t=t_0} =$

$=$ $<$ **... !!! Д. З. ...** $>$ $= S''(z_0)(z'(t_0))^2.$

Если условия (15.20) – (15.28) выполнены, то из (15.19) и Теоремы 15.6 получим (Д. З.):

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(z_0)} \left[f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|S''(z_0)|}}\, \frac{z'(t_0)}{|z'(t_0)|} + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right] \quad \text{при } \lambda \to +\infty\,. \quad (15.29)$$

< ... $\dfrac{z'(t_0)}{|z'(t_0)|}$ ... >

C. Асимптотика функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ при $x \to +\infty$

< ... Определения и инт. представления ... >

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, $L_0 = L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3$, где

L_1 — полупрямая $z = -\pi + i\,y$ $(y \geqslant 0)$,

L_2 — отрезок $z = x$ $(-\pi \leqslant x \leqslant 0)$,

L_3 — полупрямая $z = i\,y$ $(y \leqslant 0)$,

Тогда

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_L e^{-i\,x\,\sin\zeta + i\,\nu\,\zeta}\, d\zeta \quad (15.30)$$

< ... Д. З. — сходимость ... >

< ... $z = \zeta + \dfrac{\pi}{2}$; $L_0 \mapsto L$ ... >

$$H_\nu^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\pi} e^{-i\,\nu\,\pi} I(\lambda), \text{ где}$$

$$I(\lambda) = \int\limits_L f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz,$$

$$\boxed{f(z) = e^{-i\,\nu\,z}, \;\; S(z) = i\,\cos z}$$
