EX15.2. Вычислить

$$I = \int_0^{2\pi} [\operatorname{ctg}(\varphi + i\,a)]^p \, d\varphi,$$

где $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$, и $[\,\cdot\,]^p$ — однозначная ветвь степенной функции, заданная равенством

$$\zeta^p := |\zeta|^p e^{ip\arg\zeta} \tag{1}$$

при

$$\arg\zeta \in [0, 2\pi). \tag{2}$$

► Полагая $z := e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, получим

$$\operatorname{ctg}(\varphi + i\,a) = \frac{\cos(\varphi + ia)}{\sin(\varphi + ia)} = i\,\frac{z\,e^{-a} + \frac{1}{z}\ e^{a}}{z\,e^{-a} - \frac{1}{z}\ e^{a}} = \\ = i\,\frac{z^2 + e^{2a}}{z^2 - e^{2a}} =: \zeta(z), \tag{3}$$

и

$$I = \frac{1}{i} \int_{C^+} \frac{1}{z}\,[\zeta(z)]^p \, dz,$$

где C — единичная окружность $|z| = 1$.

Рассмотрим подынтегральную функцию последнего интеграла в единичном круге

$$G := \{z : |z| < 1\}.$$

1. Заметим, что и числитель, и знаменатель дроби $\dfrac{z^2 + e^{2a}}{z^2 - e^{2a}}$ — целые функции; кроме того, $e^{2a}|_{a>0} > 1$, поэтому знаменатель не обращается в нуль при $|z| \leqslant 1$. Таким образом,

$$\zeta(z) : \begin{cases} \text{аналитична в} \ \ G, \\ \text{непрерывна в} \ \ \overline{G}. \end{cases}$$

2. Функция ζ^p аналитична (см. условие задачи) в области

$$\mathcal{G} := \{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$$

— плоскости с разрезом по неотрицательной вещественной полупрямой. Поэтому сложная функция $[\zeta(z)]^p$ будет аналитической в G и непрерывной в $\overline{G}$, если

$$\zeta(G) \subset \mathcal{G}. \tag{4}$$

3. Чтобы установить справедливость (4), рассмотрим функцию

$$g(z) := \frac{w + x_0}{w - x_0}$$

с произвольным $x_0 > 1$. Так как

$$g(w) = \frac{(w + x_0)\overline{(w - x_0)}}{|w - x_0|^2} = \frac{|w|^2 - x_0^2 - 2ix_0 \operatorname{Im} w}{|w - x_0|^2},$$

то

$$\operatorname{Re} g(w) < 0 \quad \text{при} \quad x_0 > 1, \ |w| \leqslant 1.$$

Поэтому при таких $x_0 \equiv e^{2a}$ функция $g(z^2)$ отображает единичный круг G в некоторое подмножество G' левой полуплоскости, а функция $\zeta(z) = i\,g(z^2)$ — в множество $i\,G'$, целиком лежащее в нижней полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Im}\zeta < 0\} \subset \mathcal{G}$. Тем самым, справедливо (4). Отсюда, как было отмечено ранее, следует, что

$$[\zeta(z)]^p : \begin{cases} \text{аналитична в} \ \ G, \\ \text{непрерывна в} \ \ \overline{G}. \end{cases} \tag{5}$$

4. Положим

$$f(z) := \frac{1}{z}\,[\zeta(z)]^p.$$

Как видно из (5), единственной особой точкой $f(z)$ в G может быть только $z = 0$; при этом $f(z) \in C(\overline{G} \setminus \{0\})$. Но тогда из основной теоремы теории вычетов следует, что

$$I = 2\pi \operatorname{res}[\,f(z), 0\,]. \tag{6}$$

5. Точка $z = 0$ — правильная для $[\zeta(z)]^p$ и нуль первого порядка для z, причем $\left.\dfrac{d}{dz}\, z\right|_{z=0} = 1$. Поэтому[1]

$$\mathrm{res}\,[\, f(z), 0\,] = [\zeta(0)]^p.$$

Из (3) получим $\zeta(0) = -i$, а из (1) и (2) — что $[\zeta(0)]^p = e^{3\pi i p/2}$. Таким образом, с учетом (6) $I = 2\pi\, e^{3\pi i p/2}$. ■

[1] См., например, равенство (5.9) в книге А. Г. Свешникова и А. Н. Тихонова «Теория функций комплексной переменной».