

## Вариант 1

1. Является ли функция  $w = z^3$ 
  - (a) однозначной;
  - (b) аналитической;
  - (c) (\*) однолистной

в круге  $|z - i| < 1$  ?
2. Сформулируйте определение первообразной функции комплексной переменной.
3. Сформулируйте теорему единственности определения аналитической функции.
4. (\*) Пусть  $f(z) := \frac{1}{\sin z}$ . Существует ли последовательность  $z_n \rightarrow 0$ , такая, что  $f(z_n) \rightarrow 1$  ?
5. Вычислите интеграл  $\int_{L_{z_0 z_1}} |z| dz$ , где  $L_{z_0 z_1}$  — дуга окружности  $|z| = 1$ , лежащая в верхней полуплоскости;  $z_0 = 1, z_1 = -1$ .

## Вариант 2

1. Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ , и  $\zeta_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ , где  $r_0 > 0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ . Требуется найти  $\operatorname{Arg} \frac{1}{(-\zeta_0)^\alpha}$ .
2. (a) Сформулируйте определение интеграла типа Коши.  
(b) (\*) Является ли функция
 
$$f(z) = \int_{C^+} \frac{|\zeta|}{\zeta - z} d\zeta \quad (C — окружность |z| = 1),$$
 аналитической в круге  $|z| < 1$  ?
3. (\*) Сформулируйте и докажите II теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
4. Сформулируйте определение существенно особой точки  $z_0$  для
  - (a)  $z_0 \in \mathbb{C}$ ;
  - (b)  $z_0 = \infty$ .
5. Вычислите интеграл  $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$ .

## Вариант 3

- (\*) Верно ли следующее утверждение:  
« Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$ , причем  $f'(z) \neq 0$  всюду в  $D$ . Тогда  $f(z)$  однолистка в  $D$  » ?
- Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.
- Сформулируйте определения
  - поточечной сходимости функционального ряда;
  - равномерной сходимости функционального ряда.
- Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.
- Постройте конформное отображение сектора
 
$$G := \left\{ z : 0 < |z| < 2, -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6} \right\}$$
 на верхнюю полуплоскость.
- (\*) Имеет ли функция  $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^2}$  особые точки
  - в открытом круге  $|z| < 1$  ?
  - в замкнутом круге  $|z| \leq 1$  ?

## Вариант 4

- Пусть  $g(z)$  — некоторая аналитическая в точке  $z_0$  функция, причем  $g(z_0) \neq 0$ , и  $\varphi(z) := (z - z_0)g(z)$ . Покажите, что в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $w_0 = 0$  определена аналитическая функция  $z = \psi(w)$ , являющаяся обратной для  $w = \varphi(z)$ . Выразите значение  $\frac{d\psi}{dw}(0)$  через  $g(z)$ .
- Сформулируйте определение целой функции и приведите пример целой функции, не равной тождественно константе.
- Сформулируйте теорему Абеля для степенного ряда.
- (\*) На полной комплексной плоскости  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  укажите все особые точки функции  $\frac{\sin^2 z}{z^2}$  и определите их характер.
- Вычислите  $\operatorname{res} \left[ \sin \frac{1}{z}, 0 \right]$ .
- (\*) Считая доказанной теорему Коши для многосвязной области, выведите интегральную формулу Коши для значения аналитической функции в произвольной точке, не лежащей на контуре интегрирования.