Вариант 1

Верно ли следующее утверждение:

«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1,1)$. Тогда $f(x)$ можно продолжить аналитически на некоторую область G комплексной плоскости, содержащую интервал действительной прямой $(-1,1)$ » ?

Вариант 2

Сформулируйте и докажите [первую] теорему Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

Вариант 3

Вычислите

$$I = \int_0^{2\pi} [\operatorname{tg}(\varphi + i\,a)]^p \, d\varphi,$$

где $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$, и $[\,\cdot\,]^p$ — однозначная ветвь степенной функции, заданная равенством $\zeta^p := |\zeta|^p e^{ip\arg\zeta}$ при $\arg\zeta \in [0, 2\pi)$.

Вариант 4

Верно ли следующее утверждение:

«Пусть

(a) $F(p)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a$;

(b) $\sup\limits_{\substack{\operatorname{Re} p > a \\ |p| > R}} |F(p)| \to 0$ при $R \to \infty$;

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|\, dy$ сходится для любого $x > a$.

Тогда существует функция $f(t) \in C(\mathbb{R})$, являющаяся оригиналом $F(p)$» ?

Вариант 5

Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, $L = L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3$, где

L_1 — полупрямая

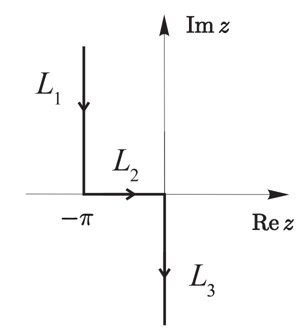
$z = -\pi + i\,y\ (y \geqslant 0)$,

L_2 — отрезок

$z = x\ (-\pi \leqslant x \leqslant 0)$,

L_3 — полупрямая

$z = i\,y\ (y \leqslant 0)$,



и

$$I(\lambda) := \int_L e^{-i\lambda \sin z + i\nu z}\, dz$$

(направление интегрирования указано на рисунке).

Требуется показать, что для $I(\lambda)$ существует перевальный контур, а затем получить главный член асимптотики $I(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ и оценку остаточного члена.

Для справки: формальное выражение для главного и остаточного членов асимптотики интеграла

$$I(\lambda) := \int\limits_{L_0} f(z)\, e^{\lambda\, S(z)}\, dz,$$

где $L_0 := \{z : z = z(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, имеет следующий вид:

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(z_0)} \left[f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}}\, \frac{z'(t_0)}{|z'(t_0)|} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right]$$