II. Оценки $\quad I(\lambda) := \int\limits_a^b f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt$

Используемые ниже обозначения, а также номера формул, условий и утверждений, не содержащие индекса "A", совпадают с использованными на лекции.

1. Простое объединение леммы 17.1, теоремы 17.2 и теоремы 17.3 приводит к следующему утверждению:

Теорема A17.4. *Пусть выполнены условия* (17.1) – (17.4), (17.6), (17.13) *и* (17.14). *Тогда* $\exists\ \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 > 0$, *такие, что для любого* $\gamma > 0$ *при* $\lambda \to +\infty$ *справедлива оценка*

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau \cdot \left[\, 1 + o\left(\frac{1}{\lambda^\gamma}\right)\right],$$

где $\psi(\tau) \in C^\infty([-\varepsilon_1, \varepsilon_2])$ — *функция, обратная по отношению к*

$$\varphi(t) := (t - t_0)\sqrt{\frac{S(t_0) - S(t)}{(t - t_0)^2}}\,.$$

На лекции отсюда и из леммы 17.4W были получены лишь главный член асимптотики $I(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ и оценка остаточного члена (см. теорему 17.5W). На практике нередко бывает необходимо знать не только главный, но и следующие по порядку $\dfrac{1}{\lambda}$ члены. Примером может служить задача нахождения асимптотики разности двух функций, главные члены асимптотик которых совпадают.

2. Если вместо леммы 17.4W воспользоваться леммой A17.3[1], то нетрудно получить (сделайте это самостоятельно) следующий результат, дающий асимптотику любого порядка для $I(\lambda)$:

Теорема A17.5. *Пусть выполнены условия* (17.1) – (17.4), (17.6), (17.13), (17.14), *и*

$$f(t) \in C^{2n+2}(\,\overline{\mathcal{M}}\,).$$

Тогда

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \left[\sum_{m=0}^{n} a_{2m}\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\lambda^{m+1/2}} + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right)\right] \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty\,, \qquad \text{(A17.1)}$$

где

$$a_{2m} := \frac{d^{2m}}{d\, t^{2m}} \left[f(\psi(t))\psi'(t)\right]\Big|_{t=0}. \qquad \text{(A17.2)}$$

Замечание. Равенства (A17.2) позволяют легко получить явное выражение для a_{2m} только при $m = 0$. В самом деле, при $m \in \mathbb{N}$ коэффициенты a_{2m} будут выражаться через производные порядка выше первого функции $\psi(t)$. Сама же $\psi(t)$ была определена лишь как функция, **обратная** некоторой заданной явно (см. формулировку теоремы A17.4 выше).

Тем не менее, явные выражения для a_{2m} через $f(t)$ и $S(t)$ все же можно получить, и они имеют вид

$$a_{2m} = \frac{d^{2m}}{d\, t^{2m}} \left[f(t) \left(\frac{S(t_0) - S(t)}{(t - t_0)^2}\right)^{-m-1/2}\right]\Bigg|_{t=t_0}$$

Интересно, что один из способов сделать это основан на использовании свойств интеграла Коши (см., например, *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды — М.: "Наука"; 1987, гл. II, § 1, п. 1.1).

[1] См. `tfcv-exp.narod.ru/the_rest.htm`