Вопросы и задачи

Во всех заданиях подразумевается, что ответ должен быть обоснован. Так, например, в Q7.1 — Q7.3, Q8.5 и Q8.6 требуется не только указать множество S всех первообразных функции $f(z)$, но и доказать, что

(a) для любой принадлежащей S (если S непусто) функции F(z) справедливо $F'(z) = f(z)$;

(b) для любой функции, не принадлежащей S, это равенство уже не верно.

В таких задачах, как Q5.1, Q7.4 или Q8.4 обоснованием ответа должно быть либо подробное доказательство утверждения (если утверждение верно), либо подробно рассмотренный контрпример (если утверждение неверно).

Q3. Функции комплексной переменной

Q3.1. Какие равенства в следующей цепочке

$$e^{2\pi} = e^{2\pi i\cdot(-i)} = \left(e^{2\pi i}\right)^{-i} = (1)^{-i} = \left(e^{0}\right)^{-i} = e^{0\cdot(-i)} = e^{0} = 1$$

являются неверными и почему именно?
[■ = **1**; ∅]

Q5. Дифференцируемость и аналитичность функций комплексной переменной

Q5.1. Как известно из курса (см. формулировку теоремы 1.3 в книге А. Г. Свешникова и А. Н. Тихонова или теоремы 5.1 лекции), если в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ существует производная функции $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, то в точке (x_0,y_0) существуют частные производные $u_x(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0)$, $v_x(x_0,y_0)$, $v_y(x_0,y_0)$. Верно ли, что при этом в точке (x_0,y_0) также существуют и дифференциалы функций u и v?
[■ = **0.5**]

Q7. Теорема Коши

Q7.1. Пусть $G = \{z : 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q7.2. Пусть $G = \{z : z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q7.3. Пусть $G = \{z : 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.
[■ = **0.5**]

Q7.4. Как известно, если G — область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0 \text{ для } \forall \text{ замкнутого контура } C \subset G, \tag{7.1}$$

то

$$\exists\, F(z):\ \ f(z) = F'(z)\ \ \forall\, z \in G. \tag{7.2}$$

Верно ли следующее утверждение:
«Пусть G — некоторая **(не обязательно односвязная)**

область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и справедливо (7.2). Тогда справедливо и (7.1) »?
[■ $=$ **1;** ∅]

Q7.5. Как известно, если G — **односвязная** область в $\mathbb{C}$, и $f(z)$ — аналитическая в G функция, то справедливо (7.2), причем для любой кусочно-гладкой кривой $L_{z_1 z_2} \subset G$, соединяющей точки z_1 и z_2, имеет место равенство

$$\int_{L_{z_1 z_2}} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1). \tag{7.3}$$

Верно ли следующее утверждение:
« Пусть G — некоторая **(не обязательно односвязная)** область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и справедливо (7.2). Тогда справедливо и (7.3) »?
[■ $=$ **1;** ∅]

Q8. Интеграл Коши и принцип максимума модуля аналитической функции

Q8.1. Верно ли следующее утверждение:
« Пусть $\mathcal{M}$ — (произвольное) множество в $\mathbb{C}$. Тогда его граница $\partial\mathcal{M}$ — замкнутое множество»?
[■ $=$ **0.5;** ∅]

Q8.2. Доказать, что в $\mathbb{C}$ любая кусочно-гладкая кривая является замкнутым множеством.
[■ $=$ **0.5;** ∅]

Q8.3. Пусть $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2 \in \mathbb{C}$, причем

$\mathcal{M}_1$ — замкнутое,
$\mathcal{M}_2$ — замкнутое и ограниченное,

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing.$$

Доказать, что тогда $\operatorname{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) > 0$.
[■ $=$ **0.5;** ∅]

Q8.4. Верно ли следующее утверждение:
« Пусть

$$L := \{z : z = \xi(t) + i\,\eta(t),\ t \in [0,\infty); \quad \xi(t), \eta(t) \in C^\infty([0,\infty))\},$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое и ограниченное множество, и $L \cap \mathcal{M} = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(L, \mathcal{M}) > 0$ »?
[■ $=$ **0.5;** ∅]

В связи с **Q8.1** – **Q8.4** см. лемму 8.3 и ее следствие, сформулированные на лекции.

Q8.5. Пусть G — (произвольная) область в $\mathbb{C}$ и $f(z) = |z|^2$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q8.6. Пусть G — (произвольная) область в $\mathbb{C}$. Указать все функции $F(z)$, для которых $F'(z) = \operatorname{Re} z$ всюду в G.

Q8.7. Пусть $f(z)$ — **целая** функция, причем известно, что

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \leqslant 2, \\ f(i) = i. \end{cases}$$

Найти $f(1)$.

Q8.8. Указать множество всех **целых** функций $f(z)$, для которых

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1. \end{cases}$$

Q8.9. Примени́м ли принцип **минимума** модуля к функции $\sin z$ в круге $|z| < 1$?

Q8.10. Верно ли следующее утверждение:
«Если $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, причем

$$f(z) \in C(\overline{D}),$$
$$f(z) \neq 0 \ \forall z \in D,$$
$$|f(z)| \equiv \mathrm{const} \ \text{ на } \ \partial D,$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в D»?
[■ **= 0.5**]

Q8.11. Является ли функция

$$f(z) = \int\limits_{C^+} \frac{|\zeta|}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (C \text{ — окружность } |z| = 1),$$

аналитической в круге $|z| < 1$?

Q9. Комплексные числовые и функциональные ряды

Q9.1. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество в $\mathbb{C}$. Как известно (подробнее см., например, формулировку теоремы 9.2 лекции), если $a_n := \sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \ \ \forall n \geqslant 1$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходятся на $\mathcal{M}$ равномерно.

Верны ли следующие утверждения:

(a) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant 1$ »;

(b) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то существует такое n_0, что $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant n_0$ »;

(c) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то существует такое n_0, что $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant n_0$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ сходится»?

[■ **= 0.5**]

Q9.2. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на множестве $\mathcal{M}$ равномерно, $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |g(z)| < \infty$, и $v_n(z) := g(z)u_n(z)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(z)$ также равномерно сходится на $\mathcal{M}$»?

Q10. Степенные ряды

Q10.1. Пусть

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{10.1}$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$,

$$S^{(m)}(z) := \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}\, c_n (z - z_0)^{n-m}$$

и

$$S^{(-m)}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+m)!}\, c_n (z - z_0)^{n+m}$$

— ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием $S(z)$, а $R^{(m)}$ и $R^{(-m)}$ — их радиусы сходимости. Известно, что $R^{(m)} \geqslant R$ и $R^{(-m)} \geqslant R$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

(a) Существует ли такой ряд (10.1), что $R^{(m)} > R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$?

(b) Существует ли такой ряд (10.1), что $R^{(-m)} > R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$?

Замечание 1. Если принять во внимание «исчезновение» членов (10.1) при дифференцировании (например, $S^{(m)}(z) \equiv 0$ в частном случае, когда $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} c_n(z-z_0)^n$ — полином), то возможность (a) может показаться не столь уж неправдоподобной. Аналогично, в качестве довода в пользу возможности (b) можно было бы рассматривать то, что, во-первых, существование разложения функции в степенной ряд обусловлено ее дифференцироуемостью, и во-вторых, из вещественного анализа известна общая закономерность повышения гладкости при переходе от функции к ее первообразной.

Замечание 2. Один из способов решения данной задачи состоит в использовании рассуждения, схема которого намечена, например, в книге А. Г. Свешникова и А. Н. Тихонова (см. Следствие 4 Теоремы 2.5). Если вы используете это или подобное рассуждение, то, пожалуйста, изложите его подробно, не ограничиваясь лишь схемой.

[■ = **0.5**]

Q10.2. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть

(a) радиус сходимости R ряда (10.1) конечен;

(b) на окружности $|z| = R$ существует такая точка z_1, что ряд $S(z_1)$ сходится.

Тогда во всем **замкнутом** круге $\overline{\omega_R(z_0)} = \{z : |z| \leqslant R\}$ ряд (10.1) также сходится»?

Q10.3. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть

(a) радиус сходимости R ряда (10.1) конечен;

(b) на окружности $|z| = R$ существует такая точка z_1, что ряд $S(z_1)$ сходится **абсолютно**.

Тогда во всем **замкнутом** круге $\overline{\omega_R(z_0)} = \{z : |z| \leqslant R\}$ ряд (10.1) также сходится, и при этом $S(z) \in C(\overline{\omega_R(z_0)})$»?

[■ = **0.5**]

Q10.4. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1,1)$, причем существует такая последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

(a) $\xi_k \neq 0$;

(b) $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$;

(c) $f(\xi_k) = 0 \ \forall k$.

Тогда $f(x) \equiv 0$ на $(-1,1)$»?

[■ = **0.5**]

Q10.5. Существует ли функция $f(z)$, одновременно удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $f(z)$ является аналитической в точке $z_0 = 0$;

(b) $\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$.

[■ = **0.5**]

Q10.6. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1,1)$.

Тогда $f(x)$ можно продолжить аналитически на некоторую область G комплексной плоскости, содержащую интервал действительной прямой $(-1, 1)$»?

[■ $= \mathbf{0.5}$]