Вопросы и задачи

Во всех заданиях подразумевается, что ответ должен быть обоснован. Так, например, в Q7.1 — Q7.3, Q8.5 и Q8.6 требуется не только указать множество S всех первообразных функции $f(z)$, но и доказать, что

(a) для любой принадлежащей S (если S непусто) функции $F(z)$ справедливо $F'(z) = f(z)$;

(b) для любой функции, не принадлежащей S, это равенство уже не верно.

В таких задачах, как Q5.1, Q7.4 или Q8.4 обоснованием ответа должно быть либо подробное доказательство утверждения (если утверждение верно), либо подробно рассмотренный контрпример (если утверждение неверно).

Q1. Комплексные числа и действия с ними

Q1.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, и $\zeta_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, где $r_0 > 0$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Требуется найти $\operatorname{Arg} \dfrac{1}{(-\zeta_0)^{\alpha}}$.

Замечание. В связи с **Q1.1** также см. лекцию «Метод перевала».

Q2. Последовательности комплексных чисел

Q2.1. Верно ли следующее утверждение:

« Пусть выбрано и зафиксировано некоторое $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, и область значений $\arg w$ определена условием

$$\arg w \in [\,\varphi_0,\, \varphi_0 + 2\pi\,) \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда для любого комплексного $w_0 \neq 0$ и любой последовательности $w_n \underset{n\to\infty}{\to} w_0$ выполнено $\arg w_n \underset{n\to\infty}{\to} \arg w_0$ » ?

Q2.2. Доказать следующее утверждение:

« Пусть $w_n \underset{n\to\infty}{\to} w_0 \equiv a_0\, e^{i\,\alpha_0}$, где $a_0 > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{cases} |w_n| \to a_0\,, \\ \dfrac{w_n}{|w_n|} \to e^{i\,\alpha_0} \end{cases}$$

при $n \to \infty$ ».

Замечание. В связи с **Q2.1** и **Q2.2** также см. лемму лекции «Конформные отображения».

Q3. Функции комплексной переменной

Q3.1. Какие равенства в следующей цепочке

$$e^{2\pi} = e^{2\pi i\cdot(-i)} = \left(e^{2\pi i}\right)^{-i} = (1)^{-i} = \left(e^{0}\right)^{-i} = e^{0\cdot(-i)} = e^{0} = 1$$

являются неверными и почему именно?

[■ = 1; ∅]

Q5. Дифференцируемость и аналитичность функций комплексной переменной

Q5.1. Как известно (см. формулировку теоремы 1.3 в книге А. Г. Свешникова и А. Н. Тихонова или теоремы 5.1 лекции), если в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ существует производная

функции $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, то в точке (x_0, y_0) существуют частные производные $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, $v_y(x_0, y_0)$. Верно ли, что при этом в точке (x_0, y_0) также существуют и дифференциалы функций u и v?
[■ = **0.5**; ∅]

Q5.2. Пусть $g(z)$ — некоторая аналитическая в точке z_0 функция, причем $g(z_0) \neq 0$, и $\varphi(z) := (z - z_0)g(z)$. Покажите, что в некоторой ε-окрестности точки $w_0 = 0$ определена аналитическая функция $z = \psi(w)$, являющаяся обратной для $w = \varphi(z)$. Выразите значение $\dfrac{d\psi}{dw}(0)$ через $g(z)$.

Замечание. В связи с **Q5.2** также см. лекцию «Метод перевала».

Q7. Теорема Коши

Q7.1. Пусть $G = \{z : 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q7.2. Пусть $G = \{z : z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q7.3. Пусть $G = \{z : 1 < |z| < 2\}$ и $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.
[■ = **0.5**; ∅]

Q7.4. Как известно, если G — область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \ \text{ для } \forall \text{ замкнутого контура } C \subset G, \tag{7.1}$$

то

$$\exists\, F(z): \ \ f(z) = F'(z) \ \ \forall\, z \in G. \tag{7.2}$$

Верно ли следующее утверждение:
«Пусть G — некоторая **(не обязательно односвязная)** область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и справедливо (7.2). Тогда справедливо и (7.1)»?
[■ = **1**; ∅]

Q7.5. Как известно, если G — **односвязная** область в $\mathbb{C}$, и $f(z)$ — аналитическая в G функция, то справедливо (7.2), причем для любой кусочно-гладкой кривой $L_{z_1 z_2} \subset G$, соединяющей точки z_1 и z_2, имеет место равенство

$$\int_{L_{z_1 z_2}} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1). \tag{7.3}$$

Верно ли следующее утверждение:
«Пусть G — некоторая **(не обязательно односвязная)** область в $\mathbb{C}$, $f(z) \in C(G)$ и справедливо (7.2). Тогда справедливо и (7.3)»?
[■ = **1**; ∅]

Q8. Интеграл Коши и принцип максимума модуля аналитической функции

Q8.1. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть $\mathcal{M}$ — (произвольное) множество в $\mathbb{C}$. Тогда его граница $\partial\mathcal{M}$ — замкнутое множество»?

[■ = **0.5**; ∅]

Q8.2. Доказать, что в $\mathbb{C}$ любая кусочно-гладкая кривая является замкнутым множеством.
[■ = **0.5**; ∅]

Q8.3. Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathbb{C}$, причем

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_1 \text{ — замкнутое,}\\ &\mathcal{M}_2 \text{ — замкнутое и ограниченное,}\\ &\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing. \end{aligned}$$

Доказать, что тогда $\operatorname{dist}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) > 0$.
[■ = **0.5**; ∅]

Q8.4. Верно ли следующее утверждение:
« Пусть

$$L := \{z : z = \xi(t) + i\,\eta(t),\ t \in [0,\infty); \qquad \xi(t), \eta(t) \in C^\infty([0,\infty))\},$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{C}$ — замкнутое и ограниченное множество, и $L \cap \mathcal{M} = \varnothing$. Тогда $\operatorname{dist}(L, \mathcal{M}) > 0$ » ?
[■ = **0.5**; ∅]

В связи с **Q8.1** – **Q8.4** см. лемму 8.3 и ее следствие, сформулированные на лекции.

Q8.5. Пусть G — (произвольная) область в $\mathbb{C}$ и $f(z) = |z|^2$. Указать множество всех функций $F(z)$, для которых $F'(z) = f(z)$ всюду в G.

Q8.6. Пусть G — (произвольная) область в $\mathbb{C}$. Указать все функции $F(z)$, для которых $F'(z) = \operatorname{Re} z$ всюду в G.

Q8.7. Пусть $f(z)$ — **целая** функция, причем известно, что

$$\begin{cases} \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \leqslant 2,\\ f(i) = i. \end{cases}$$

Найти $f(1)$.

Q8.8. Указать множество всех **целых** функций $f(z)$, для которых

$$\begin{cases} f(0) = 0,\\ \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1. \end{cases}$$

Q8.9. Применúм ли принцип **минимума** модуля к функции $\sin z$ в круге $|z| < 1$?

Q8.10. Верно ли следующее утверждение:
« Если $f(z)$ — функция, аналитическая в области D, причем

$$\begin{aligned} &f(z) \in C(\overline{D}),\\ &f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in D,\\ &|f(z)| \equiv \text{const} \ \text{ на } \ \partial D, \end{aligned}$$

то $f(z) \equiv \text{const}$ в D » ?
[■ = **0.5**; ∅]

Q8.11. Является ли функция

$$f(z) = \int\limits_{C+} \frac{|\zeta|}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (C \text{ — окружность } |z| = 1),$$

аналитической в круге $|z| < 1$?

Q8.12. Верно ли следующее утверждение:
« Если $f(z)$ — функция, аналитическая в **ограниченной** области D, причем

$$\begin{aligned} &f(z) \in C(\overline{D}),\\ &f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in D,\\ &|f(z)| \equiv \text{const} \ \text{ на } \ \partial D, \end{aligned}$$

то $f(z) \equiv \text{const}$ в D » ?
[■ = **0.5**]

Q9. Комплексные числовые и функциональные ряды

Q9.1. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество в $\mathbb{C}$. Как известно (подробнее см., например, формулировку теоремы 9.2 лекции), если $a_n := \sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \ \forall n \geqslant 1$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходятся на $\mathcal{M}$ равномерно.

Верны ли следующие утверждения:

(a) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant 1$ »;

(b) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то существует такое n_0, что $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant n_0$ »;

(c) «Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на $\mathcal{M}$ равномерно, то существует такое n_0, что $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |u_n(z)| < \infty \quad \forall n \geqslant n_0$, и числовой ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ сходится»?

[■ = **0.5**]

Q9.2. Верно ли следующее утверждение:

«Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится на множестве $\mathcal{M}$ равномерно, $\sup\limits_{z\in\mathcal{M}} |g(z)| < \infty$, и $v_n(z) := g(z)u_n(z)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(z)$ также равномерно сходится на $\mathcal{M}$»?

Q9.3. Пусть $S_1 \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_1$ и $S_2(z) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_2$ — числовые ряды, и $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_1 + c_2)$. Какое из утверждений (a) – (c) (см. ниже) справедливо, если

(1) S_1 и S_2 сходятся;
(2) S_1 сходится, а S_2 расходится;
(3) S_1 и S_2 расходятся;

(a) «S сходится»;
(b) «S расходится»;
(c) «S может как сходиться, так и расходиться».

Q9.4. Пусть $S_1(z) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1(z)$ и $S_2(z) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_2(z)$ — функциональные ряды, и $S(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} [u_1(z) + u_2(z)]$; $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}$ — области сходимости $S_1(z)$, $S_2(z)$ и $S(z)$ соответственно. Какое из следующих утверждений

(a) «всегда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$»;
(b) «всегда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$»;
(c) «всегда $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \setminus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$»;
(d) «ни одно из утверждений (a) – (c) не является верным в общем случае».

справедливо?

Q10. Степенные ряды

Q10.1. Пусть

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{10.1}$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$,

$$S^{(m)}(z) := \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}\, c_n (z - z_0)^{n-m}$$

и

$$S^{(-m)}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+m)!}\, c_n (z - z_0)^{n+m}$$

— ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием $S(z)$, а $R^{(m)}$ и $R^{(-m)}$ — их радиусы сходимости. Известно, что $R^{(m)} \geqslant R$ и $R^{(-m)} \geqslant R$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

(a) Существует ли такой ряд (10.1), что $R^{(m)} > R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$?

(b) Существует ли такой ряд (10.1), что $R^{(-m)} > R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$?

Замечание 1. Если принять во внимание «исчезновение» членов (10.1) при дифференцировании (например, $S^{(m)}(z) \equiv 0$ в частном случае, когда $S(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n (z - z_0)^n$ — полином), то возможность (a) может показаться не столь уж неправдоподобной. Аналогично, в качестве довода в пользу возможности (b) можно было бы рассматривать то, что, во-первых, существование разложения функции в степенной ряд обусловлено ее дифференцируемостью, и во-вторых, из вещественного анализа известна общая закономерность повышения гладкости при переходе от функции к ее первообразной.

Замечание 2. Один из способов решения данной задачи состоит в использовании рассуждения, схема которого намечена, например, в книге А. Г. Свешникова и А. Н. Тихонова (см. Следствие 4 Теоремы 2.5). Если вы используете это или подобное рассуждение, то, пожалуйста, изложите его подробно, не ограничиваясь лишь схемой.

[■ = **0.5**; $\varnothing$]

Q10.2. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть

(a) радиус сходимости R ряда (10.1) конечен;

(b) на окружности $|z| = R$ существует такая точка z_1, что ряд $S(z_1)$ сходится.

Тогда во всем **замкнутом** круге $\overline{\omega_R(z_0)} = \{z : |z| \leqslant R\}$ ряд (10.1) также сходится» ?

Q10.3. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть

(a) радиус сходимости R ряда (10.1) конечен;

(b) на окружности $|z| = R$ существует такая точка z_1, что ряд $S(z_1)$ сходится **абсолютно**.

Тогда во всем **замкнутом** круге $\overline{\omega_R(z_0)} = \{z : |z| \leqslant R\}$ ряд (10.1) также сходится, и при этом $S(z) \in C\big(\overline{\omega_R(z_0)}\big)$ » ?
[■ = **0.5**; $\varnothing$]

Q10.4. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1, 1)$, причем существует такая последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

(a) $\xi_k \neq 0$;

(b) $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$;

(c) $f(\xi_k) = 0 \;\; \forall\, k$.

Тогда $f(x) \equiv 0$ на $(-1, 1)$ » ?
[■ = **0.5**]

Q10.5. Верно ли следующее утверждение:
«Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая действительнозначная функция действительной переменной $x \in (-1, 1)$.

Тогда $f(x)$ можно продолжить аналитически на некоторую область G комплексной плоскости, содержащую интервал действительной прямой $(-1,1)$»?
[■ = **0.5**; $\varnothing$]

Q10.6. Существует ли функция $f(z)$, одновременно удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $f(z)$ является аналитической в точке $z_0 = 0$;
(b) $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots\right\}$.

[■ = **0.5**; $\varnothing$]

Q10.7. Имеет ли функция $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n^2}$ особые точки

(a) в открытом круге $|z| < 1$?
(b) в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$?

Q13. Ряд Лорана

Q13.1. Пусть
$S_1(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n}(z-z_0)^n$, $S_2(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1n}(z-z_0)^n$ и $S(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{1n}+c_{2n})(z-z_0)^n$ — ряды Лорана. Требуется ответить на вопрос задания **Q9.4**.

Q13.2. Пусть

$$S(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (13.1)$$

— некоторый ряд Лорана,

$$\widetilde{S}(z) := c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n z^n + c_{-n} z^{-n}) \,, \qquad (13.2)$$

— ряд, в котором $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ взяты из (13.1), а $\mathcal{M}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}$ — области сходимости $S(z)$ и $\widetilde{S}(z)$ соответственно. Через $\mathcal{M}'$ обозначим $\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$.

Существует ли такой набор коэффициентов $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, что

(a) $\mathcal{M}'$ содержит хотя бы какую-нибудь область G комплексной плоскости;
(b) функция $\widetilde{S}(z)$ аналитична в G?

Замечание. Соотношению сходимости $S(z)$ и $\widetilde{S}(z)$ аналогично соотношению между сходимостью интеграла I рода $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ в обычном смысле и в смысле главного значения. Поэтому закономерно задаться следующим вопросом: возможно ли использовать (13.2) вместо (13.1) для исследования аналитических свойств функций комплексной переменной в тех случаях, когда расходится ряд (13.1)? Минимальным условием для реализации такой возможности является выполнение (a) и (b).
[■ = **1**]

Q14. Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация

Q14.1. На полной комплексной плоскости $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ указать все особые точки функции

$$\sin^{-2}(1/z)$$

и определить их характер.

Q14.2. На полной комплексной плоскости $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ указать все особые точки функции

$$e^{\sin^{-1}(1/z)}$$

и определить их характер.
[■ $= \mathbf{0.5}$; ∅]

Q14.3. На полной комплексной плоскости $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ указать все особые точки функции $\dfrac{\sin^2 z}{z^2}$ и определить их характер.

Q14.4. На полной комплексной плоскости $\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ указать все особые точки функции $\dfrac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ и определить их характер.

Q14.5. Существует ли последовательность $z_n \to z_0$, такая, что $f(z_n) \to A$, если

(a) $f(z) = e^{1/z}, \ \ z_0 = 0, \ \ A = 2;$
(b) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}, \ \ z_0 = 0, \ \ A = 1.$

.

Q15. Теория вычетов и ее применение к вычислению определенных интегралов

Q15.1. Пусть z_0 — полюс порядка m_0 функции $f(z)$, и m — некоторое натуральное число. Положим

$$\widetilde{r} := \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Как известно, если

$$m = m_0 \,, \tag{15.1}$$

то

$$\widetilde{r} = \operatorname{res}[\, f(z), z_0 \,], \tag{15.2}$$

Будет ли (15.2) верно, если вместо (15.1) выполнено

a) $m < m_0$ (т.е. порядок полюса в (15.2) «недооценен»);
b) $m > m_0$ (т.е. порядок полюса в (15.2) «переоценен»)?

[■ $= \mathbf{0.5}$; ∅]

Q15.2. Пусть точка z_0 является нулем порядка m_1 функции $\varphi(z)$ и нулем порядка m_2 функции $\psi(z)$. Укажите **все** пары m_1 и m_2, для которых справедливо равенство

$$\operatorname{res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, z_0 \right] = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \,.$$

[■ $= \mathbf{0.5}$; ∅]

Q15.3. Рассмотрим интеграл

$$I := \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(\varphi + ia)\, d\varphi \,.$$

и следующее рассуждение, повторяющее обычную для действительного анализа схему вычисления определенных интегралов: «Так как

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + ia)}{\sin(\varphi + ia)}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d \sin(\varphi + ia)}{\sin(\varphi + ia)} =$$
$$= \int_0^{2\pi} d \ln(\sin(\varphi + ia)) = \ln(\sin(2\pi + ia)) - \ln(\sin(ia)),$$

то, учитывая равенство $\sin z = \sin(z+2\pi)$, справедливое для любых комплексных z, получаем $I = 0$ ».

В то же время, как следует из результата примера 15.2, рассмотренного на лекции[1], $I = -2\pi i$.

Требуется найти и исправить ошибку в приведенном рассуждении.

Указание. Представить $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\sin(\varphi+ia)}{\sin(\varphi+ia)}$ в виде

$$\int_{L_{\varphi_1\varphi_2}} \frac{1}{z}\, dz \equiv J(\varphi_1,\varphi_2),$$

где

$$L_{\varphi_1\varphi_2} = \{z : z = i\,(\alpha\cos\varphi - i\,\beta\sin\varphi),\ \varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]\},$$

$\alpha = \operatorname{sh} a$, $\beta = \operatorname{ch} a$. Построить кривую $L_{\varphi_1\varphi_2}$ на плоскости и проверить, выполнены ли для $J(\varphi_1,\varphi_2)$ условия применимости формулы Ньютона–Лейбница[2], в случаях $\varphi_2-\varphi_1 < 2\pi$ и $\varphi_2-\varphi_1 = 2\pi$, если в качестве первообразной для $1/z$ берется какая-либо из однозначных аналитических ветвей[3] $f_k(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$.

[■ = 0.5]

Q15.4. Вычислить

$$I = \int_0^{2\pi} [\operatorname{ctg}(\varphi + i\,a)]^p\, d\varphi,$$

где $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$, и $[\cdot]^p$ — однозначная ветвь степенной функции, заданная равенством

$$\zeta^p := |\zeta|^p e^{ip\arg\zeta}$$

при $\arg\zeta \in (-\pi,\pi]$.

[1] Также см. `http://tfcv-exp.narod.ru/the_rest.htm`.

[2] См., например, *Кравцов А. В., Майков А. Р.* Пособие к курсу теории функций комплексной переменной. — М: Физический факультет МГУ, 2007, с. 59.

[3] Там же, равенство (4.20) и пример 4.8 гл. I.

Q15.5. Вычислить

$$\int_{C+} \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\, dz, \quad \text{где} \quad C = \{z : |z| = 2\}.$$

Q16. Конформные отображения

Q16.1. Доказать следующее утверждение[4]:

« Пусть G — **односвязная** область на плоскости, и $u(x,y)$ — гармоническая в G функция. Тогда существует аналитическая в G функция $f(z)$, такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ ».

Указание. Убедиться, что функция $h(z) := u_x(x,y) - i\,u_y(x,y)$ является аналитической в G, и затем воспользоваться теоремой о существовании первообразной аналитической функции.

[■ = 0.5]

Q16.2. Останется ли справедливым утверждение из **Q16.1**, если отказаться от требования односвязности G?

[■ = 0.5]

Q16.3. Пусть

(a) G — (произвольная) область на плоскости;
(b) $u(x,y)$ — гармоническая в G функция;
(c) точка (x_0,y_0) содержится в G вместе с некоторой своей замкнутой окрестностью $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leqslant R$.

Тогда

$$u(x_0,y_0) := \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} u(x,y)\, dl\,, \tag{16.1}$$

где C_R — окружность $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R$.

[4] Лекция «Конформные отображения», Теорема 16.1.

Указание. Воспользоваться утверждением **Q16.1** и формулой среднего значения аналитической функции.

Q16.4. Доказать следующее утверждение:

« Пусть G — **ограниченная** область на плоскости, и $u(x,y) \not\equiv \text{const}$ — гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$ функция. Тогда

$$\inf_{\partial G} u(x,y) < u(x,y) < \sup_{\partial G} u(x,y)$$

для любой точки $(x,y) \in G$ ».

Указание. Воспользоваться (16.1) и схемой доказательства принципа максимума модуля аналитической функции[5].

[■ = **0.5**]

Q16.5. Для случая ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ доказать единственность решения $u \in C^2(G) \bigcap C(\overline{G})$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа[6].

Указание. Воспользоваться утверждением **Q16.4**.

[■ = **0.5**]

Q16.6. Существует ли конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$?

[■ = **1**; $\varnothing$]

Q16.7. Задана двусвязная область $G := \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - 5| > 4\}$. Требуется с помощью дробно-линейной функции построить конформное отображение G на какое-нибудь концентрическое кольцо $\mathcal{G}$ вида $\mathcal{G} := \{\zeta : 1 < |\zeta| < R\}$. Значение R при этом можно выбирать произвольно.

Указание. Воспользоваться свойством сохранения симметрии точек относительно окружности при дробно-линейном отображении.

[■ = **0.5**; $\varnothing$]

[5] Теорема 8.5 лекции «Формула Коши» или *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной, гл. I, § 6, п. 3.

[6] Лекция «Конформные отображения», (16.1) – (16.2).

Q16.8. Задана область $G := \{z : 0 < |z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha\}$ $(\alpha < 2\pi)$. Требуется построить конформное отображение G на верхнюю полуплоскость.

Q16.9. Задана область $G := \{z : |z-1| > 1,\ |z-2| < 2\}$. Требуется построить конформное отображение G на верхнюю полуплоскость.

Q16.10. Является ли отображение $f : G \to f(G)$ конформным, если

(a) $G = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $f(z) = e^z$;

(b) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = |z|^2$;

(c) $G = \{z : 0 < |z| < 2\}$, $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

.

Q16.11. Пусть z_0 — точка комплексной плоскости, $\omega_\delta(z_0)$ — ее δ-окрестность, и $w = \varphi(z)$ — некоторая функция, задающая конформное отображение $\omega_\delta(z_0) \to \varphi(\omega_\delta(z_0))$. Верно ли следующее утверждение:

« Если $\gamma \in \omega_\delta(z_0)$ — **аналитическая** кривая, проходящая через точку z_0, то ее образом при отображении φ будет **аналитическая** кривая Γ, проходящая через точку $w_0 = \varphi(z_0)$ » ?

Q16.12. Пусть z_0 — точка комплексной плоскости, $\omega_\delta(z_0)$ — ее δ-окрестность, и $w = \varphi(z)$ — некоторая функция, задающая конформное отображение $\omega_\delta(z_0) \to \varphi(\omega_\delta(z_0))$. Верно ли следующее утверждение:

« Если $\Gamma \in \varphi(\omega_\delta(z_0))$ — **аналитическая** кривая, проходящая через точку $w_0 = \varphi(z_0)$, то ее прообразом при отображении φ является **аналитическая** кривая γ, проходящая через точку z_0 » ?

Q17. Метод Лапласа

Q17.1. Найти главный член асимптотики интеграла

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \operatorname{ch}^2 t}\, dt$$

при $\lambda \to +\infty$ и получить оценку остаточного члена.

Q17.2. Найти главный член асимптотики интеграла

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} \ln(t^2 + 2t + 2)\, dt$$

при $\lambda \to +\infty$ и получить оценку остаточного члена.

Q18. Метод перевала

Q18.1. Пусть

(a) функция $S(z)$ аналитична в точке $z = z_0$, причем $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$ и

$$h(z) := \frac{S(z_0) - S(z)}{(z - z_0)^2}\,;$$

(b) $\varphi(z) := (z - z_0)\sqrt{h(z)}$ (здесь $\sqrt{\zeta}$ — какая-либо однозначная ветвь функции $w = \sqrt{|\zeta|}\, e^{\,i\,(\operatorname{Arg}\zeta)/2}$, аналитическая в точке $h(z_0)$);

(c) $\gamma^* := \{\, z : z = z(t)\,\}$ — такая аналитическая кривая, что $z(0) = z_0$, $z'(0) \neq 0$, и

$$\varphi(\gamma^*) \subset \mathbb{R}.$$

Требуется показать, что

$$\frac{z'(0)}{|z'(0)|} = \pm\, e^{i\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \frac{\pi - \arg S''(z_0)}{2}\,.$$

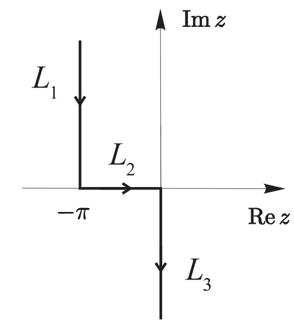
Указание. См. **Q5.2** и **Q1.1**.
[■ = **0.5**]

Q18.2. Пусть $\nu \in \mathbb{R}$, $L = L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3$, где

L_1 — полупрямая
$z = -\pi + i\,y\ (y \geqslant 0)$,

L_2 — отрезок
$z = x\ (-\pi \leqslant x \leqslant 0)$,

L_3 — полупрямая
$z = i\,y\ (y \leqslant 0)$,



и

$$(18.1) \qquad I(\lambda) := \int_L e^{-i\,\lambda\, \sin z\, +\, i\,\nu\, z}\, dz$$

(направление интегрирования указано на рисунке).

Требуется показать, что для $I(\lambda)$ существует перевальный контур, а затем получить главный член асимптотики $I(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ и оценку остаточного члена.
[■ = **0.5**]
Замечание. Как известно[7], функция Ханкеля первого рода $H_\nu^{(1)}(x)$ выражается через интеграл (18.1) следующим образом:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\, I(x)\,.$$

[7] См., например, *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. — М.: Изд. МГУ, 1993, гл. IV, § 5, п. 6.