17. Метод Лапласа

В этом разделе:

$$
\begin{aligned}
&a, b: \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\\
&\mathcal{M} := (a, b),\\
&\overline{\mathcal{M}} \text{ — замыкание } \mathcal{M},\\
&f(t), S(t) \in C(\overline{\mathcal{M}}),
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

и выполнены следующие условия:

$$\sup_{\mathcal{M}} S(t) = c_0 < \infty, \tag{17.2}$$

$$\exists!\ t_0 \in \mathcal{M}:\ S(t_0) = c_0, \tag{17.3}$$

$$\sup_{|t-t_0| \geqslant \delta} S(t) < c_0 \quad \text{для } \forall\, \delta > 0. \tag{17.4}$$

(17.2) — (17.4): < ... >

$$I(\lambda) := \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}} f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt \tag{17.5}$$

Мотивация: < ... $\lambda \to +\infty$ ... >

Замечания:

1. < ... $\mathbb{R}$ ... >

2. < ... в.г., несобственный ... >

3. < ... $t_0 \in \partial\mathcal{M}$ ... >

I. Сходимость $I(\lambda)$

< ... абсолютная сходимость ... >

Лемма 17.1. Пусть

$$I(\lambda) \text{ сходится **абсолютно** при некотором } \lambda_0. \tag{17.6}$$

Тогда он сходится, и притом **абсолютно,** при любом $\lambda > \lambda_0$.

< ... >

Доказательство. Выберем и зафиксируем какое-нибудь $\lambda_1 > \lambda_0$.

$$0 \leqslant e^{\lambda_1 S(t)} \equiv e^{(\lambda_1-\lambda_0)S(t)} e^{\lambda_0 S(t)} \leqslant \leqslant e^{(\lambda_1-\lambda_0)c_0} e^{\lambda_0 S(t)} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Longrightarrow |f(t)\, e^{\lambda_1 S(t)}| \leqslant \\
&\qquad \leqslant e^{(\lambda_1-\lambda_0)c_0} |f(t)\, e^{\lambda_0 S(t)}| \\
&\int\limits_{\overline{\mathcal{M}}} |f(t)\, e^{\lambda_0 S(t)}|\, dt \quad \text{сходится}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I(\lambda_1) = \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}} f(t)\, e^{\lambda_1 S(t)}\, dt$$

сходится абсолютно.

II. Принцип локализации

Обозначения:

$$\mathcal{M}(\delta) := \{t:\ t \in \mathcal{M},\ |t - t_0| < \delta\},$$

$$I_\delta(\lambda) := \int\limits_{\mathcal{M}(\delta)} f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt\,.$$

Теорема 17.2. Пусть выполнены условия (17.1) – (17.4), (17.6) и

$$f(t_0) \neq 0\,. \tag{17.7}$$

Тогда $\exists$ такое $\delta_0 > 0$, что для любого (**фиксированного**) $\delta \in (0, \delta_0]$ и любого $\gamma > 0$

$$I(\lambda) = I_\delta(\lambda)\left[1 + o\left(\frac{1}{\lambda^\gamma}\right)\right] \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{17.8}$$

< То есть какую бы малую δ – окрестность точки глобального максимума $S(t)$ мы ни выбрали, **относительная** ошибка при замене $I(\lambda)$ на $I_\delta(\lambda)$ стремится к нулю быстрее любой степени $\dfrac{1}{\lambda}$ при $\lambda \to +\infty$ > .

Доказательство (для

$$f(t_0) > 0 \tag{17.9}$$

в (17.7); для $f(t_0) < 0$ — как следствие).

Обозначения:

$I \equiv I(\lambda), \quad I_\delta \equiv I_\delta(\lambda);$

$D := \sup\limits_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}(\delta)} S(t) \quad (< c_0 \Leftarrow (17.4)).$

$$
\begin{aligned}
&\delta_0:\ f(t)|_{\mathcal{M}(\delta_0)} > 0\\
&\text{всюду далее } \delta \in (0, \delta_0)
\end{aligned}
\tag{17.10}
$$

(существование $\delta_0 \Longleftarrow$ (17.1) и (17.9)).

1. Оценка $|I - I_\delta|$ сверху

Аналогично доказательству леммы 17.1

$$|I - I_\delta| \equiv \left| \int\limits_{\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}(\delta)} \ldots \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{(\lambda - \lambda_0)\,D} \int\limits_{\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}(\delta)} |f(t)| e^{\lambda_0\, S(t)}\, dt$$

$$\leqslant B_0 e^{\lambda D}, \quad (17.11)$$

где

$$B_0 := e^{-\lambda_0 D} \int\limits_{\overline{\mathcal{M}}} |f(t)|\, e^{\lambda_0\, S(t)}\, dt$$

2. Оценка I_δ снизу

Непрерывность $S(t)$ и $f(t)$ в точке $t_0 \Longrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, такое, что

$$\begin{cases} S(t)\big|_{\mathcal{M}(\delta_1)} \geqslant S(t_0) - \varepsilon \\ f(t)\big|_{\mathcal{M}(\delta_1)} \geqslant \dfrac{1}{2}\, f(t_0) \end{cases}$$

Выберем $\varepsilon = \dfrac{c_0 - D}{2}$ (> 0) .

Тогда, очевидно,

$$S(t)\big|_{\mathcal{M}(\delta_1)} \geqslant D + \varepsilon.$$

Поэтому

$$I_\delta \geqslant I_{\delta_1} \geqslant \frac{1}{2}\, f(t_0) \cdot 2\delta_1 e^{\lambda(D+\varepsilon)} =$$

$$\equiv B_1 e^{\lambda(D+\varepsilon)} > 0, \quad (17.12)$$

($B_1 > 0 \quad \Longleftarrow f(t_0) > 0$, см. (17.9)).

3. Итоги

Получили:

$$(17.11): \qquad |I - I_\delta| \leqslant B_0 e^{\lambda D}$$

$$(17.12): \qquad I_\delta \geqslant B_1 e^{\lambda(D+\varepsilon)} > 0$$

Таким образом,

$$\frac{|I - I_\delta|}{I_\delta} \leqslant B_2 e^{-\lambda\varepsilon};\ B_2 < \infty,\ \varepsilon > 0$$

Отсюда следует (17.8).

III. Сведение $I_\delta(\lambda)$ к более простому интегралу

< **...** гладкость $f(t)$ и $S(t)$ **...** >

1. Дополнительно потребуем, чтобы $S(t)$ была **аналитической в точке** t_0, то есть $\exists\, d > 0$:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n \quad \text{при } |t - t_0| < d. \qquad (17.13)$$

Замечание 1.

$(17.13) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad S(t) \in C^\infty((t_0 - d, t_0 + d)).$

Замечание 2.

$(17.13) \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - t_0)^n$ сходится в круге

$$\omega_d(t_0) = \{z : |z - t_0| < d\},$$

и его сумма $S(z)$ — аналитическая в $\omega_d(t_0)$ функция.

2. Возвращаемся на действительную ось.

Т.к. t_0 — точка глобального максимума $S(t)$ на $\mathcal{M}$, и t_0 — внутренняя для $\mathcal{M}$, то t_0 — также и точка **локального** максимума $S(t)$.

Поэтому (с учетом разложения (17.13))

$$\exists N \in \mathbb{N} : \begin{cases} S^{(n)}(t_0) = 0,\ n = 1, ..., 2N - 1 \\ S^{(2N)}(t_0) < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$S''(t_0) < 0. \qquad (17.14)$$

3. Тогда для коэффициентов ряда (17.13) получим

$$\left. \begin{aligned} & c_0 = S(t_0), \\ & c_1 = 0, \\ & c_2 = \frac{1}{2}\, S''(t_0) < 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$$

$$S(z) = c_0 + c_2 (z - t_0)^2 + \ldots \equiv$$

$$\equiv c_0 - (z - t_0)^2 h(z), \quad (17.15)$$

где $h(z)$ — аналитическая в точке $z = t_0$ и $h(t_0) = -c_2 > 0$.

При этом для любого $\delta < d$

$$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda\, c_0} \int\limits_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} f(t)\, e^{-\lambda (t - t_0)^2 h(t)}\, dt$$

4. Идея: рассмотрим функцию

$$\tau = \varphi(t) := (t - t_0)\sqrt{h(t)}. \quad (17.16)$$

Если окажется, что

(a) $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \leftrightarrows [-\varepsilon_1, \varepsilon_2]$;

(b) функция $\psi(\tau) \equiv \varphi^{-1}(\tau)$ — достаточно гладкая, то

$t = \psi(\tau)$ — замена переменной, приводящая $I_\delta(\lambda)$ к виду

$$I_\delta(\lambda) = e^{\lambda c_0} \int\limits_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\psi(\tau))\psi'(\tau)\, e^{-\lambda\tau^2}\, d\tau \tag{17.17}$$

5. Реализация идеи.

5.1. $\sqrt{\zeta} := \sqrt{|\zeta|}\, e^{i \arg\zeta}$; $\arg\zeta \in (-\pi, \pi)$ — аналитическая в G < ... >.

5.2. $\sqrt{h(z)}$:

$$\left.\begin{array}{r} G \ni \zeta_0 \equiv h(t_0) = -c_2 > 0 \\ \text{непрерывность } h(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $\exists\, d_1 :$ $h(\omega_{d_1}(t_0)) \subset G$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{h(z)}$ — аналитическая в $\omega_{d_1}(t_0)$

5.3. Но тогда $\varphi(z) = (z - t_0)\sqrt{h(z)}$ — аналитическая в $\omega_{d_1}(t_0)$.

Кроме того,

$$\varphi'(t_0) = \sqrt{h(t_0)} = \sqrt{-c_2} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ по теореме об обратной функции $\exists\, d_2$, такое, что:

(A) $w = \varphi(z)$ однолистна в $\omega_{d_2}(z_0)$;

(B) $\psi(w) := \varphi^{-1}(w)$ — аналитическая в $\varphi(\omega_{d_2}(z_0))$.

5.4. Так как $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, то из 5.3 следует, что при $\delta \in (0, d_2)$

(a) $\varphi :\ [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \leftrightarrows [-\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, где $-\varepsilon_1 = \varphi(t_0 - \delta)$, $\varepsilon_2 = \varphi(t_0 + \delta)$;

(b) функция $\psi(\tau) \equiv \varphi^{-1}(\tau)$ — аналитическая на отрезке $[-\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ (то есть во всех точках этого отрезка).

(Д.З. — детали 5.3 и 5.4)

Таким образом, доказана

Теорема 17.3. Пусть выполнены условия (17.1) – (17.3), (17.6), (17.13) и (17.14). Тогда существует $\delta > 0$, при котором $I_\delta(\lambda)$ может быть представлен в виде (17.17), где $\psi(\tau) \in C^\infty([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ — функция, обратная по отношению к (17.16).

IV. Интеграл $J(\lambda)$ и его асимптотика.

Рассмотрим

$$J(\lambda) := \int\limits_{-A_1}^{A_2} g(\tau)\, e^{-\lambda\,\tau^2}\, dt,$$

где $0 < A_1, A_2 < \infty$.

Лемма 17.4W. Пусть $g(t) \in C^2([-A_1, A_2])$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$J(\lambda) = g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right).$$

Теорема 17.5W. Пусть выполнены условия (17.1) – (17.4), (17.6), (17.7), (17.13), (17.14) и

$$f(t) \in C^2((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$$

для некоторого $\delta > 0$.

Тогда

$$I(\lambda) = e^{\lambda\, S(t_0)} \left[f(t_0)\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\, S''(t_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right]$$