Об асимптотических оценках

$$\int\limits_{-A_1}^{A_2} g(t)\, e^{-\lambda\, t^2}\, dt \qquad \text{и} \qquad \int\limits_a^b f(t)\, e^{\lambda\, S(t)}\, dt$$

Используемые ниже обозначения, а также номера формул, условий и утверждений, не содержащие индекса “A”, совпадают с использованными на лекции.

I. Доказательство Леммы 15.4

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма A.1. Пусть $A > 0$ и $p \geqslant 0$ — константы, и

$$K(\lambda) := \int\limits_0^A t^{\,p} e^{-\lambda\, t^2}\, dt\,.$$

Тогда для любого $\gamma > 0$

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}}\ \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\left[1 + o\left(\frac{1}{\lambda^{\gamma}}\right)\right] \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{A.1}$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$.

1. Сделав замену переменной $x = \lambda\, t^2$, получим

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}} \int\limits_0^{\lambda A^2} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-x}\, dx \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2\lambda^{(p+1)/2}}\left[\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) - \widetilde{K}(\lambda)\right], \tag{A.2}$$

где

$$\widetilde{K}(\lambda) := \int\limits_{\lambda A^2}^{\infty} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-x}\, dx\,. \tag{A.3}$$

$\widetilde{K}(\lambda)$ отличается от интеграла, задающего Γ-функцию, только значением нижнего предела. Так как в рассматриваемом случае $\lambda A^2 > 0$, то, как нетрудно видеть, $\widetilde{K}(\lambda)$ сходится при любом $p > -1$ и

$$0 < \widetilde{K}(\lambda) \leqslant \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{A.4}$$

2. Рассмотрим $\widetilde{K}(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

> Заметим, что подынтегральная функция в (A.3) неотрицательна и что при $x \geqslant \lambda A^2$
>
> $$e^{-x} \equiv e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \equiv e^{-\frac{\lambda A^2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Поэтому

$$\widetilde{K}(\lambda) \leqslant e^{-\frac{\lambda A^2}{2}} \int\limits_{\lambda A^2}^{\infty} x^{\frac{p+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = e^{-\frac{\lambda A^2}{2}}\, 2^{\frac{p+1}{2}}\, \widetilde{K}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Отсюда и из (A.4) следует оценка

$$|\widetilde{K}(\lambda)| \leqslant B\, e^{-\frac{\lambda A^2}{2}},$$

где B — константа, не зависящая от λ, и, таким образом, $\widetilde{K}(\lambda) = o\left(\dfrac{1}{\lambda^{\gamma}}\right)$ при $\lambda \to +\infty$. Вместе с (A.2) это приводит к (A.1).

Следствием Леммы A.1 является такое утверждение (убедитесь в этом самостоятельно):

Лемма A.2. Пусть A и p — те же, что в условии Леммы A.1, и $r(t) \in C([0, A])$ — функция, для которой имеет место оценка вида

$$|r(t)|\big|_{t\in[0,A]} \leqslant C\, t^{\,p} \tag{A.5}$$

с некоторым $C < \infty$. Тогда

$$\int\limits_0^A r(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt = O\left(\frac{1}{\lambda^{(p+1)/2}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty\,.$$

Лемма А.3. Пусть

$$g(t) \in C^{2n+2}([-A_1, A_2]) \quad \text{где} \quad 0 < A_{1,2} < \infty\,. \tag{A.6}$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$ имеет место оценка

$$J(\lambda) \;=\; \sum_{m=0}^{n} a_{2m}\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\lambda^{m+1/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right), \tag{A.7}$$

где

$$a_k := \left.\frac{d^k g(t)}{d\,t^k}\right|_{t=0}. \tag{A.8}$$

Доказательство. Положим

$$J^+(\lambda) := \int\limits_0^{A_2} g(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt\,, \qquad J^-(\lambda) := \int\limits_{-A_1}^{0} g(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt\,;$$

тогда

$$J(\lambda) = J^+(\lambda) + J^-(\lambda)\,. \tag{A.9}$$

1. Рассмотрим сначала $J^+(\lambda)$.

Из (А.6) и формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа или Коши следует (покажите это самостоятельно), что

$$g(t)|_{t\in[0,A_1]} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, t^k + r_{2n+2}(t)\,,$$

где a_k — те же, что в (А.13), и $|r_{2n+2}(t)| \leqslant C\, t^{2n+2}$ для некоторого $C < \infty$. Применяя к каждому из слагаемых, входящих в $\sum_{k=0}^{2n+1}$, лемму А.1 с $\gamma = n + 3/2$, а к $r_{2n+2}(t)$ — Лемму А.2, получим

$$J^+(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{1}{\lambda^{(k+1)/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right). \tag{A.10}$$

2. Заметим теперь, что

$$J^-(\lambda) = \int\limits_0^{A_2} g(-t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt$$

— интеграл в точности такого же вида, как $J^+(\lambda)$, но с подынтегральной функцией $g(-t)$. Поэтому представление для $J^-(\lambda)$ получается из (А.10) заменой a_k на

$$\widetilde{a}_k \;=\; \left.\frac{d^k g(-t)}{d\,t^k}\right|_{t=0}.$$

При этом, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} a_k &= \widetilde{a}_k\,, && \text{если } k \text{ четное},\\ a_k &= -\,\widetilde{a}_k\,, && \text{если } k \text{ четное}, \end{aligned}$$

и из (А.9) и (А.10) следует (А.7), (А.13).

Утверждение Лемма 15.5, сформулированной на лекции, получается из утверждения Теоремы А.3, если положить $m = 2k$ и $b_m = a_{2k}$.

II. Обобщение Теоремы 15.6

1. Утверждение Лемма 15.5, взятое с $n = 0$, и утверждение Леммы 15.4 приводят к следующей оценке для интеграла $I(\lambda) := \int\limits_a^b f(t)\, e^{\lambda\, S(t)}\, dt$:

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \left[f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, |S''(t_0)|}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right] \qquad (A.11)$$

(подробнее — см. лекцию).

2. Равенство (A.11) дает лишь выражение для главного члена асимптотики $I(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ и оценку остаточного члена. На практике нередко бывает необходимо знать не только главный, но и следующие по порядку $\dfrac{1}{\lambda}$ члены. Такая необходимость возникает, например, если требуется найти асимптотику разности двух функций (или интегралов), у которых главные члены асимптотик совпадают. Если использовать Лемму 15.5 с произвольным $n = 0, 1, \ldots$, то нетрудно получить (сделайте это самостоятельно) следующий результат:

Теорема A.4. *Пусть выполнены условия* (15.1) – (15.4), (15.6), (15.8), (15.9) *и существует такое* $\delta' > 0$, *что*

$$f(t) \in C^{2n+2}((t_0 - \delta', t_0 + \delta')).$$

Тогда при $\lambda \to +\infty$ *имеет место оценка*

$$I(\lambda) = e^{\lambda S(t_0)} \left[\sum_{m=0}^{n} \frac{b_m}{\lambda^{m+1/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{n+3/2}}\right)\right] \qquad (A.12)$$

где

$$b_m := \frac{d^{2m}}{d\,t^{2m}} \left[f(\psi(t))\psi'(t) \right]\Big|_{t=0} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right), \qquad (A.13)$$

$\psi(t)$ — *функция, обратная по отношению к функции*

$$\varphi(t) := (t - t_0)\sqrt{\frac{S(t_0) - S(t)}{(t - t_0)^2}}\,.$$

3. Равенства (A.13) позволяют легко получить явное выражение для b_m только при $m = 0$. В самом деле, при $m \in \mathbb{N}$ коэффициенты a_{2m} будут выражаться через производные порядка выше первого функции $\psi(t)$. Сама же функция $\psi(t)$ была определена лишь как функция, **обратная** некоторой заданной явно.

Тем не менее, явные выражения для b_m через $f(t)$ и $S(t)$ все же можно получить, и они имеют вид

$$b_m = \frac{d^{2m}}{d\,t^{2m}} \left[f(t) \left(\frac{S(t_0) - S(t)}{(t - t_0)^2} \right)^{-m-1/2} \right] \Bigg|_{t=t_0} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right).$$

Интересно, что один из способов сделать это основан на использовании свойств интеграла Коши (см., например, *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды — М.: “Наука”; 1987, гл. II, § 1, п. 1.1).