

## Временные разложения уравнения Хопфа

Полуновский Андрей

МГТУ им. Баумана

почта: arap2009@yandex.ru

### Введение

Исследуется символьный подход к решению уравнения Хопфа, основанный на представлении решений уравнений математической физики в степенных рядах по временной переменной. Данным методом получены апериодические решения уравнения Хопфа, образованные в системе после появления ударной волны. В докладе сначала будет поставлена задача, решаемая степенными рядами, далее будет предоставлен алгоритм ее решения. В заключении будут рассмотрены результаты вычислительного эксперимента, основанного на данном методе.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Бюргерса-Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $\mu$  -вязкость (малая величина),  $u = u(x, t)$  - искомая функция. В случае  $\mu = 0$  уравнение (1) называется уравнением Хопфа. К уравнению (1) добавляются граничные и начальные условия. Для начала рассмотрим простейшие из них, периодические

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

и соответствующее начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) = \sum_n a_n \cdot \sin(n \cdot x).$$

Задача заключается в следующем: при заданном начальном условии  $u_0(x)$  получить решение  $u = u(x, t)$  уравнения (1) с граничными условиями (2) на достаточно большом отрезке времени  $t \in [0, T]$ . Уравнению Бюргерса-Хопфа посвящена огромная литература, и по большей части, про него уже все хорошо известно. Не смотря на это, данное уравнение активно используется для проверки разнообразных численных методов. Эта потребность связана с одной важной особенностью данного уравнения: при нулевой вязкости  $\mu = 0$  определенный класс решений уравнения (1) через небольшой промежуток времени теряют гладкость, и, более того, становятся разрывными. Такая ситуация значительно усложняет численный расчет данного уравнения, вследствие чего возникает приятная возможность проверить на простом примере какой-нибудь разработанный исследователем численный метод. В силу это мне будет очень важно проверить свой метод решения УРВЧП на этом примере.

Для начала возьмем самый простейший класс начальных условий  $u_0(x) = a_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \sin(2x) + a_3 \cdot \sin(3x)$ , однако уже с ним возникают вычислительные сложности. Итак, аналитическое решение (точнее его асимптотика) данного уравнения (1) известно (см. Рис. 14.1). При больших  $t$  решение быстро приобретает “скалообразный” характер, и далее под действием вязкости полностью угасает. Такая динамика решений характерна на наличие разрывных решений, или (что тоже самое) ударных волн при  $\mu = 0$ . Перейдем теперь непосредственно к методу решения данного уравнения.



Рис. 14.1. Асимптотический вид решения уравнения Бюргерса при начальном условии (14.5) и больших  $t$ . Кривая  $a$  изображает решение при конечном  $\mu$ , кривая  $b$  — при  $\mu \rightarrow 0$ .

## 2. Краткая информация о методе решения уравнения (1).

Решение уравнения (1) будем искать в виде степенного ряда по  $t$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \cdot t^n, \quad (3)$$

где первый член ряда и есть заданное нами начальное условие  $u_0(x)$ . Формально подставив формулу (3) в уравнение (1), получаем рекуррентное уравнение на коэффициенты ряда (3)

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \mu \frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^n u_{n-k}(x) \cdot \frac{\partial u_k(x)}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Зная рекуррентное уравнение (4) и начальное условие  $u_0(x)$  можно полностью получить решение (3). Однако к сожалению ряд (3) сходится не при всех  $t$ , а только при небольших  $t < R$ , где  $R$  — радиус сходимости. Точно радиус сходимости мне установить не удалось, однако теоретически и экспериментально было подтверждено, что он является функцией от коэффициента  $\mu$   $R = R(\mu)$ , причем чем меньше  $\mu$ , тем меньше  $R$ . (к примеру для значения  $\mu = 0.01$   $R \approx 0.002$ ). В силу локальной сходимости ряда (3), для получения решения при больших  $t$  применяется процедура аналитического продолжения.

Для ускорения вычислений коэффициентов  $u_n(x)$  по рекуррентной формуле (4) мы дополнительно ее немного изменим; по заданному классу начальных условий и по формуле (4) видно, что все коэффициенты  $u_n(x)$  будут иметь следующий вид

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{N(n)} a_j^n \cdot \sin(j \cdot x).$$

Из этого следует, что более правильным для адаптации под вычислительные ресурсы следует находить не функции  $u_n(x)$ , используя формулу (4) (в которой к тому же требуется выполнять символьное дифференцирование), а использовать ей эквивалентные формулы рекуррентных соотношений для нахождения коэффициентов  $a_j^n$

$$(n+1) \cdot a_j^{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left[ \sum_{m=1}^{N(n)} a_m^k \cdot ((m-j) \cdot a_{m-j}^{n-k} - (m+j) \cdot a_{m+j}^{n-k}) \right] - \mu \cdot j^2 \cdot a_j^n,$$

$$j = 1, \dots, N(n);$$

$$n = 0, \dots, ORDER\_SER.$$

( $ORDER\_SER$  - порядок многочлена по  $t$ ).

Функция  $N = N(n)$  возрастает линейно ( $N(n) = C(u_0) \cdot (n+1)$ ), вследствие чего количество гармоник для коэффициентов-функций  $u_n(x)$  с ростом  $n$  растет неограничено. В силу этого пришлось задавать максимальное значение ( $ORDER\_GARMONIC$ ) гармоник, входящих в каждый коэффициент  $u_n(x)$ .

### 3.Вычислительная часть.

Для решения поставленной задачи мною был написана программа Burgers\_equation. Там были выполнены соответствующие пометки. Кратко алгоритм следующий

- 1) Выбирается степень аппроксимирующего многочлена ряда (3), и максимальное количество гармоник, входящих в каждый коэффициент  $u_n(x)$ .
- 2) Далее вводится цикл, по которому высчитываются все коэффициенты  $a_j^n$  при заданном  $u_0(x)$ .
- 3) Осуществляется процедура аналитического продолжения: определяется кусочно-гладкая функция, представляющая собой набор сплайнов. Каждый сплайн определяется отрезком ряда Тейлора функции  $u(x, t)$  в точке  $t = n \cdot R$ , где для построения  $n$ -того сплайна за начальное условие берется функция  $u(x, n \cdot R)$ .
- 4) Проверка и графическое представление решения.

(При желании, можно будет воспользоваться данной программой Burgers\_equation. Для этого нужно написать мне на почту [apap2009@yandex.ru](mailto:apap2009@yandex.ru))

### 4.Случай нулевой вязкости.

Случай  $\mu = 0$  (Уравнение Хопфа) представляет основной интерес в данном вычислительном эксперименте. Именно при данном значении параметра  $\mu$  в уравнении (1) могут появляться ударные волны. В силу предельного перехода  $\mu \rightarrow 0$  решения уравнения Хопфа ( $\mu = 0$ ) можно получать путем решения уравнения (1) с ненулевой, но достаточно малой вязкостью  $\mu$ . Такой подход называется регуляризацией, а параметр  $\mu$  - параметром регуляризации. В нашем случае наиболее интересно решать задачу без регуляризации т.е. когда

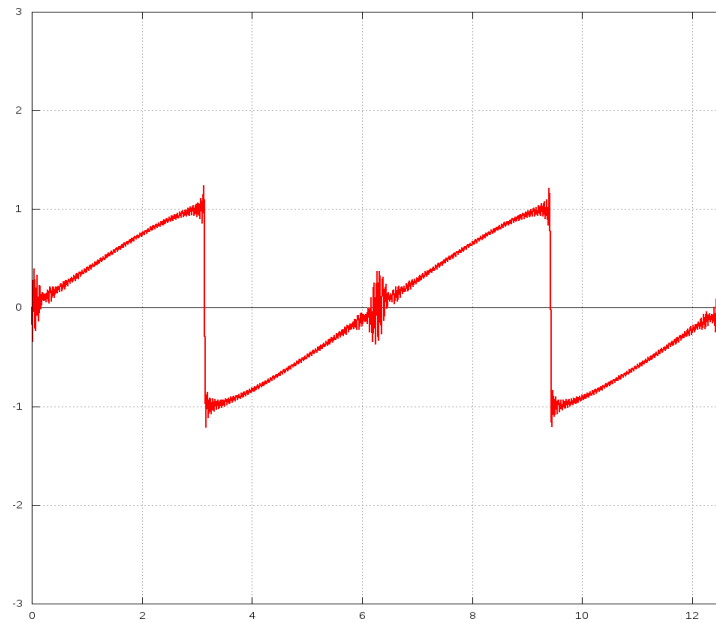
$\mu = 0$ . Именно в таком случае многие известные численные схемы теряют свою пригодность, см. статью [1].

### 5. Результаты вычислительного эксперимента.

Приведем следующие результаты решения уравнения Хопфа ( $\mu = 0$ ) изложенным выше методом

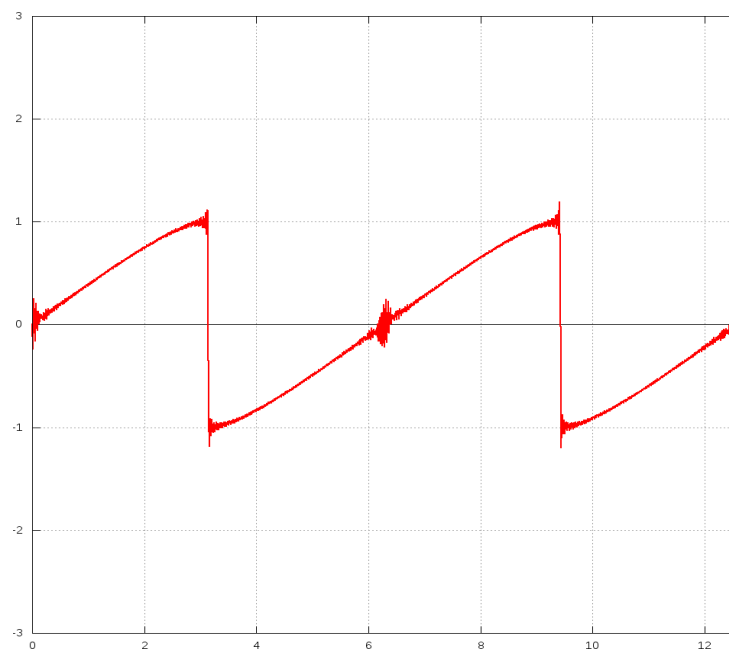
$ORDER\_GARMONIC = 130$

$ORDER\_SER = 30$



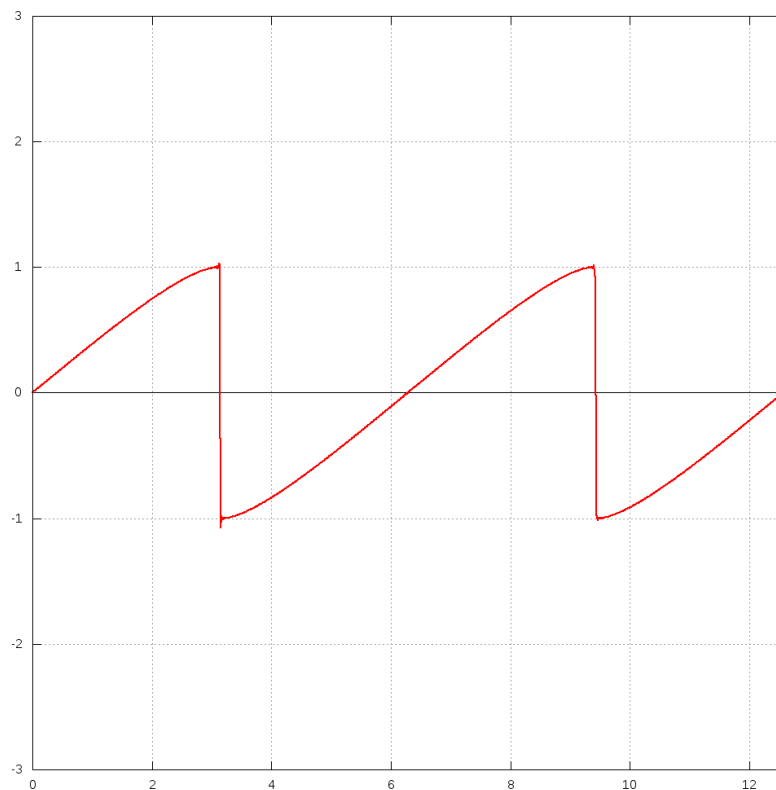
$ORDER\_GARMONIC = 180$

$ORDER\_SER = 6$



$$ORDER\_GARMONIC = 450$$

$$ORDER\_SER = 10$$



К сожалению график сходимости к точному решению приближений при увеличении чисел  $ORDER\_GARMONIC$  и  $ORDER\_SER$  не был построен, однако из эксперимента было выявлено, что для сходимости процесса требуются соблюдать следующие ограничения

$$ORDER\_GARMONIC < C_1 \cdot ORDER\_SER,$$

$$ORDER\_SER > C_2 \cdot ORDER\_GARMONIC,$$

где  $C_1 \approx 30$ ,  $C_2 \approx 1/20$ . Эти условия эквивалентны условию устойчивости и условию сходимости для известных численных схем. Однако в случае численных схем условие накладывается на шаг сетки, здесь же накладывается ограничения на порядки полиномов по переменной  $t$  и количества гармоник по переменной  $x$ .

## 6.Список литературы.

1. Д. С. Гужев, Н. Н. Калиткин. Уравнение Бюргерса - тест для численных методов // Матем. моделирование, 1995, том 7, номер 4, 99–127.
2. А. Б. Шабат, “О периодических решениях уравнения Хопфа”, *ТМФ*, **177**:2 (2013), 222–230; *Theoret. and Math. Phys.*, **177**:2 (2013), 1471–1478