Лекции по математической статистике. 5 семестр. МОиАИС.

Якунцев Никита, Андрей Сотников, Никита Хатеев

4 ноября 2014 г.

Содержание

0.1 Лекция 1

Закон больших чисел

Под законом больших чисел в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к неслучайному результату. При большом количестве случайных величин средний результат их совокупного влияния может быть предсказан с высокой степенью определенности.

Под законом больших чисел в узком смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым постоянным.

Неравенство Маркова

Если случайная величина $X \geq 0$ и имеет конечное $M(x)$, то $\forall A > 0$ справедливо неравенство $P(X > A) \leq \frac{MX}{A}$

Доказательство для дискретной случайной величины:

$MX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ отбросим первые k слагаемых: $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i p_i \geq 0$; $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i p_i \leq MX$

заменим x_i на A :

$\sum\limits_{i=k+1}^{n} A_i p_i \leq MX \Rightarrow \sum\limits_{i=k+1}^{n} p_i \leq \frac{MX}{A} \Rightarrow P(X > A) \leq \frac{MX}{A}$

Следствие: $P(x \leq A) \geq 1 - \frac{MX}{A}$

Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины, имеющей конечной математическое ожидания и дисперсию справедливо, что $P(|X - MX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Доказательство:

$Y = (X - MX)^2; A = \varepsilon^2$ запишем неравенство Маркова $P((X - MX)^2 > \varepsilon) \leq \frac{M(X-MX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2} \Rightarrow$ извлекаем корень и получаем неравенство.

Следствие: $P(|X - MX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2 ... X_n$ независимые и имеют конечные дисперсии, ограниченные одной и той же константой C, то при неограниченном увеличении n среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому математических ожиданий.

$$\lim_{x \to \infty} P(|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{MX_1 + MX_2 + ... + MX_n}{n}| < \varepsilon) = 1; \forall \varepsilon > 0$$

$\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}$ сходится по вероятности.

Доказательство:

$X = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}; MX = \frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}$

$DX = \frac{1}{n^2}(DX_1 + DX_2 + ... + DX_n) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$

$P(|X - MX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$

$\lim\limits_{x \to \infty} P(|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$, т.к $1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 1$, то

$\lim\limits_{x \to \infty} P(|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}| < \varepsilon) = 1$

Следствия

1. Если все случайные величины X_i имеют одно и тоже математическое ожидание $NX_i = a$
   $\lim\limits_{x\to\infty} P(|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - a| < \varepsilon) = 1$

2. **Теорема Бернулли**
   Частость события в n повторных независимых испытаниях, в каждом из которых она может произойти с вероятностью P при неограниченном увеличении числа испытаний стремится к вероятности этого события
   Доказательство:
   $\lim\limits_{x\to\infty} P(|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}| < \varepsilon) = 1$
   $\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ - частость; $\frac{MX_1+MX_2+...+MX_n}{n}$ - вероятность
   $x_i = 1$, если событие проявилось в i-ом испытании
   $x_i = 0$, иначе
   Частость: $\frac{m}{n}$, где m- кол-во встречаний; n - общее кол-во