

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (лабораторные работы)

Целью выполнения лабораторных работ является исследование существующих и разработка новых алгоритмов решения систем линейных уравнений.

Теоретические требования. Необходимо подготовить конспект, содержащий описание следующих численных методов:

- 1) прямые методы (метод Гаусса, метод Гаусса-Жордана, метод LU-факторизации, метод LL^T -факторизации, метод LDL^T -факторизации);
- 2) устойчивость и точность прямых методов;
- 3) итерационные методы (метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя, метод последовательных релаксации, метод неполной факторизации);
- 4) устойчивость и точность итерационных методов;
- 5) конечно-итерационные методы (метод сопряженных градиентов, переобусловленный метод сопряженных градиентов);
- 6) точность и сходимость - обзор по методам;
- 7) плохо-обусловленные системы.

Практические требования. Решить задания и составить отчет.

Задание I. Разработать алгоритмы численного решения системы линейных уравнений (метод Гаусса, метод Гаусса-Жордана, метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя). Представить их реализацию в выбранном языке высшего уровня, оформляя каждый метод численного решения в виде функций. Проиллюстрировать работу функций на примере решения системы линейных уравнений (выбрать согласно варианту задания). Найти оценку абсолютной и относительной погрешности решения, принимая абсолютную погрешность свободных членов исходной системы $\varepsilon = 10^{-3}$. Оценить сходимость полученного численного решения.

Задание II. Разработать метод сопряженных градиентов и переобусловленный метод сопряженных градиентов. Сравнить на примере системы из задания I сходимость метода сопряженных градиентов и переобусловленного метода сопряженных градиентов.

Задание III. Матрица Гильберта $H^{(n)} \in M_n$ (где M_n является множеством всех квадратных матриц, определенных на \mathbb{R}^n), каждый элемент которой задан

$$h_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

является плохообусловленной. Используя точность до четвертого места после запятой, вычислите обратную матрицу H^{-1} для $n=3$, затем вычислите $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$.

Определите $\|H - \hat{H}\|_{\infty}$ и сделайте выводы.

Варианты заданий

$$1. \begin{cases} 4.003x_1 + 0.207x_2 + 0.519x_3 + 0.281x_4 = 0.425; \\ 0.416x_1 + 3.273x_2 + 0.326x_3 + 0.375x_4 = 0.021; \\ 0.297x_1 + 0.351x_2 + 2.997x_3 + 0.429x_4 = 0.213; \\ 0.412x_1 + 0.194x_2 + 0.215x_3 + 3.628x_4 = 0.946 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2.591x_1 + 0.512x_2 + 0.128x_3 + 0.195x_4 = 0.159; \\ 0.203x_1 + 3.469x_2 + 0.572x_3 + 0.162x_4 = 0.280; \\ 0.256x_1 + 0.273x_2 + 2.994x_3 + 0.501x_4 = 0.134; \\ 0.381x_1 + 0.219x_2 + 0.176x_3 + 5.903x_4 = 0.864. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2.979x_1 + 0.427x_2 + 0.406x_3 + 0.348x_4 = 0.341; \\ 0.273x_1 + 3.951x_2 + 0.217x_3 + 0.327x_4 = 0.844; \\ 0.318x_1 + 0.197x_2 + 2.875x_3 + 0.166x_4 = 0.131; \\ 0.219x_1 + 0.231x_2 + 0.187x_3 + 3.276x_4 = 0.381. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3.738x_1 + 0.195x_2 + 0.275x_3 + 0.136x_4 = 0.815; \\ 0.519x_1 + 5.002x_2 + 0.405x_3 + 0.283x_4 = 0.191; \\ 0.306x_1 + 0.381x_2 + 4.812x_3 + 0.418x_4 = 0.423; \\ 0.272x_1 + 0.142x_2 + 0.314x_3 + 3.935x_4 = 0.352; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4.855x_1 + 1.239x_2 + 0.272x_3 + 0.258x_4 = 1.192; \\ 1.491x_1 + 4.954x_2 + 0.124x_3 + 0.236x_4 = 0.256; \\ 0.456x_1 + 0.285x_2 + 4.354x_3 + 0.254x_4 = 0.852; \\ 0.412x_1 + 0.335x_2 + 0.158x_3 + 2.874x_4 = 0.862; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5.401x_1 + 0.519x_2 + 0.364x_3 + 0.283x_4 = 0.243; \\ 0.295x_1 + 4.830x_2 + 0.421x_3 + 0.278x_4 = 0.231; \\ 0.524x_1 + 0.397x_2 + 4.723x_3 + 0.389x_4 = 0.721; \\ 0.503x_1 + 0.264x_2 + 0.248x_3 + 4.286x_4 = 0.220; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3.857x_1 + 0.239x_2 + 0.272x_3 + 0.258x_4 = 0.190; \\ 0.491x_1 + 3.941x_2 + 0.131x_3 + 0.178x_4 = 0.179; \\ 0.436x_1 + 0.281x_2 + 4.189x_3 + 0.416x_4 = 0.753; \\ 0.317x_1 + 0.229x_2 + 0.326x_3 + 2.971x_4 = 0.860; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4.238x_1 + 0.329x_2 + 0.256x_3 + 0.425x_4 = 0.560; \\ 0.249x_1 + 2.964x_2 + 0.351x_3 + 0.127x_4 = 0.380; \\ 0.365x_1 + 0.217x_2 + 2.897x_3 + 0.168x_4 = 0.778; \\ 0.178x_1 + 0.294x_2 + 0.432x_3 + 3.701x_4 = 0.749; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3.389x_1 + 0.273x_2 + 0.126x_3 + 0.418x_4 = 0.144; \\ 0.329x_1 + 2.796x_2 + 0.179x_3 + 0.278x_4 = 0.297; \\ 0.186x_1 + 0.275x_2 + 2.987x_3 + 0.316x_4 = 0.529; \\ 0.197x_1 + 0.219x_2 + 0.274x_3 + 3.127x_4 = 0.869; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2.958x_1 + 0.147x_2 + 0.354x_3 + 0.238x_4 = 0.651; \\ 0.127x_1 + 2.395x_2 + 0.256x_3 + 0.273x_4 = 0.898; \\ 0.403x_1 + 0.184x_2 + 3.815x_3 + 0.416x_4 = 0.595; \\ 0.259x_1 + 0.361x_2 + 0.281x_3 + 3.736x_4 = 0.389. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 4.503x_1 + 0.219x_2 + 0.527x_3 + 0.396x_4 = 0.553; \\ 0.259x_1 + 5.121x_2 + 0.423x_3 + 0.206x_4 = 0.358; \\ 0.413x_1 + 0.531x_2 + 4.317x_3 + 0.264x_4 = 0.565; \\ 0.327x_1 + 0.412x_2 + 0.203x_3 + 4.851x_4 = 0.436; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 5.103x_1 + 0.293x_2 + 0.336x_3 + 0.270x_4 = 0.745; \\ 0.179x_1 + 4.912x_2 + 0.394x_3 + 0.375x_4 = 0.381; \\ 0.189x_1 + 0.321x_2 + 2.875x_3 + 0.216x_4 = 0.480; \\ 0.317x_1 + 0.165x_2 + 0.386x_3 + 3.934x_4 = 0.552. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 5.554x_1 + 0.252x_2 + 0.496x_3 + 0.237x_4 = 0.442; \\ 0.580x_1 + 4.953x_2 + 0.467x_3 + 0.028x_4 = 0.464; \\ 0.319x_1 + 0.372x_2 + 8.935x_3 + 0.520x_4 = 0.979; \\ 0.043x_1 + 0.459x_2 + 0.319x_3 + 4.778x_4 = 0.126. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2.998x_1 + 0.209x_2 + 0.315x_3 + 0.281x_4 = 0.108; \\ 0.163x_1 + 3.237x_2 + 0.226x_3 + 0.307x_4 = 0.426; \\ 0.416x_1 + 0.175x_2 + 3.239x_3 + 0.159x_4 = 0.310; \\ 0.287x_1 + 0.196x_2 + 0.325x_3 + 4.062x_4 = 0.084. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 5.452x_1 + 0.401x_2 + 0.758x_3 + 0.123x_4 = 0.886; \\ 0.785x_1 + 2.654x_2 + 0.687x_3 + 0.203x_4 = 0.356; \\ 0.402x_1 + 0.244x_2 + 4.456x_3 + 0.552x_4 = 0.342; \\ 0.210x_1 + 0.514x_2 + 0.206x_3 + 4.568x_4 = 0.452. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2.923x_1 + 0.220x_2 + 0.159x_3 + 0.328x_4 = 0.605; \\ 0.363x_1 + 4.123x_2 + 0.268x_3 + 0.327x_4 = 0.496; \\ 0.169x_1 + 0.271x_2 + 3.906x_3 + 0.295x_4 = 0.590; \\ 0.241x_1 + 0.319x_2 + 0.257x_3 + 3.862x_4 = 0.896. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5.482x_1 + 0.358x_2 + 0.237x_3 + 0.409x_4 = 0.416; \\ 0.580x_1 + 4.953x_2 + 0.467x_3 + 0.028x_4 = 0.464; \\ 0.319x_1 + 0.372x_2 + 8.935x_3 + 0.520x_4 = 0.979; \\ 0.043x_1 + 0.459x_2 + 0.319x_3 + 4.778x_4 = 0.126. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3.738x_1 + 0.195x_2 + 0.275x_3 + 0.136x_4 = 0.815; \\ 0.519x_1 + 5.002x_2 + 0.405x_3 + 0.283x_4 = 0.191; \\ 0.306x_1 + 0.381x_2 + 4.812x_3 + 0.418x_4 = 0.423; \\ 0.272x_1 + 0.142x_2 + 0.314x_3 + 3.935x_4 = 0.352. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3.910x_1 + 0.129x_2 + 0.283x_3 + 0.107x_4 = 0.395; \\ 0.217x_1 + 4.691x_2 + 0.279x_3 + 0.237x_4 = 0.432; \\ 0.201x_1 + 0.372x_2 + 2.987x_3 + 0.421x_4 = 0.127; \\ 0.531x_1 + 0.196x_2 + 0.236x_3 + 5.032x_4 = 0.458. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 5.482x_1 + 0.617x_2 + 0.520x_3 + 0.401x_4 = 0.823; \\ 0.607x_1 + 4.195x_2 + 0.232x_3 + 0.570x_4 = 0.152; \\ 0.367x_1 + 0.576x_2 + 8.193x_3 + 0.582x_4 = 0.625; \\ 0.389x_1 + 0.356x_2 + 0.207x_3 + 5.772x_4 = 0.315. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3.345x_1 + 0.329x_2 + 0.365x_3 + 0.203x_4 = 0.305; \\ 0.125x_1 + 4.210x_2 + 0.402x_3 + 0.520x_4 = 0.283; \\ 0.314x_1 + 0.251x_2 + 4.531x_3 + 0.168x_4 = 0.680; \\ 0.197x_1 + 0.512x_2 + 0.302x_3 + 2.951x_4 = 0.293. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 4.247x_1 + 0.275x_2 + 0.397x_3 + 0.239x_4 = 0.721; \\ 0.466x_1 + 4.235x_2 + 0.264x_3 + 0.358x_4 = 0.339; \\ 0.204x_1 + 0.501x_2 + 3.721x_3 + 0.297x_4 = 0.050; \\ 0.326x_1 + 0.421x_2 + 0.254x_3 + 3.286x_4 = 0.486. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 3.476x_1 + 0.259x_2 + 0.376x_3 + 0.398x_4 = 0.871; \\ 0.425x_1 + 4.583x_2 + 0.417x_3 + 0.328x_4 = 0.739; \\ 0.252x_1 + 0.439x_2 + 3.972x_3 + 0.238x_4 = 0.644; \\ 0.265x_1 + 0.291x_2 + 0.424x_3 + 3.864x_4 = 0.581. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3.241x_1 + 0.197x_2 + 0.643x_3 + 0.236x_4 = 0.454; \\ 0.257x_1 + 3.853x_2 + 0.342x_3 + 0.427x_4 = 0.371; \\ 0.324x_1 + 0.317x_2 + 2.793x_3 + 0.238x_4 = 0.465; \\ 0.438x_1 + 0.326x_2 + 0.483x_3 + 4.229x_4 = 0.822. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 4.405x_1 + 0.472x_2 + 0.395x_3 + 0.253x_4 = 0.623; \\ 0.227x_1 + 2.957x_2 + 0.342x_3 + 0.327x_4 = 0.072; \\ 0.419x_1 + 0.341x_2 + 3.238x_3 + 0.394x_4 = 0.143; \\ 0.325x_1 + 0.326x_2 + 0.401x_3 + 4.273x_4 = 0.065. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2.974x_1 + 0.347x_2 + 0.439x_3 + 0.123x_4 = 0.381; \\ 0.242x_1 + 2.895x_2 + 0.412x_3 + 0.276x_4 = 0.721; \\ 0.249x_1 + 0.378x_2 + 3.791x_3 + 0.358x_4 = 0.514; \\ 0.387x_1 + 0.266x_2 + 0.431x_3 + 4.022x_4 = 0.795. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3.452x_1 + 0.458x_2 + 0.125x_3 + 0.236x_4 = 0.745; \\ 0.254x_1 + 2.458x_2 + 0.325x_3 + 0.126x_4 = 0.789; \\ 0.305x_1 + 0.125x_2 + 3.869x_3 + 0.458x_4 = 0.654; \\ 0.423x_1 + 0.452x_2 + 0.248x_3 + 3.896x_4 = 0.405. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2.979x_1 + 0.427x_2 + 0.406x_3 + 0.348x_4 = 0.341; \\ 0.273x_1 + 3.951x_2 + 0.217x_3 + 0.327x_4 = 0.844; \\ 0.318x_1 + 0.197x_2 + 2.875x_3 + 0.166x_4 = 0.131; \\ 0.219x_1 + 0.231x_2 + 0.187x_3 + 3.276x_4 = 0.381. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2.048x_1 + 0.172x_2 + 0.702x_3 + 0.226x_4 = 0.514; \\ 0.495x_1 + 4.093x_2 + 0.083x_3 + 0.390x_4 = 0.176; \\ 0.277x_1 + 0.368x_2 + 4.164x_3 + 0.535x_4 = 0.309; \\ 0.766x_1 + 0.646x_2 + 0.767x_3 + 5.960x_4 = 0.535. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2.389x_1 + 0.273x_2 + 0.126x_3 + 0.418x_4 = 0.144; \\ 0.329x_1 + 2.796x_2 + 0.179x_3 + 0.278x_4 = 0.297; \\ 0.186x_1 + 0.275x_2 + 2.987x_3 + 0.316x_4 = 0.529; \\ 0.197x_1 + 0.219x_2 + 0.274x_3 + 3.127x_4 = 0.869. \end{cases}$$