СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ
(лабораторные работы)

Целью выполнения лабораторных работ является исследование существующих и разработка новых алгоритмов выделения собственных значений и собственных векторов.

Теоретические требования. Необходимо подготовить конспект, содержащий описание следующих численных методов:

степенной метод,
метод обратных итераций,
QR–разложение,
сингулярное разложение,
сходимость методов и методы ее улучшения.

Задание 1. Пусть матрица $\mathbf{A}\in \mathrm{M}_n$ (где M_n является множеством всех квадратных матриц, определенных на R^n) является персимметрической матрицей, т.е.

$$a_{ij}=a_{ji}=a_{n+1-i,n+1-j}$$

для всех $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$.
1) задайте матрицу $\mathbf{A}$ и, используя теорему Гершгорина, определите расположение собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$ (графически);
2) напишите функцию, позволяющую определить манимальное и максимальное собтсвенное значение персимметрической матрицы, и исследуйте сходимость предложенного решения;
3) пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

покажите, что если λ является минимальным собственным значением матрицы $\mathbf{A}$, то спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}-4\mathbf{I}$ можно выразить как $\rho(\mathbf{A}-4\mathbf{I})=|\lambda-4|$.

Задание 2. Решение теплового уравнения методом обратной подстановки связано с построением тридиагональной матрицы $(m-1)\times(m-1)$ вида

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & ... & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & ... & ... \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & -\alpha \\ 0 & ... & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix},\ \alpha\in(0,1).$$

1) определите собственные числа матрицы $\mathbf{A}$, используя QR–разложение; оцените точность вычисления, принимая во внимание, что точные значения собственных чисел

$$\lambda_i = 1 + 4\alpha\left(\sin\frac{\pi i}{2m}\right)^2 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m - 1;$$

2) численное решение теплового уравнения будет устойчивым, если $\rho\left(\mathbf{A}^{-1}\right) < 1$. Определите область устойчивости для произвольного m.