

Programação Dinâmica

Algoritmos e Estrutura de Dados - IF672

Andreywid Yago Lima de Souza <ayls>

João Victor Nascimento <jvsn2>

Mateus Freire <mfvd>

Programação Dinâmica

- Método Iterativo de solucionar problemas;
- Simplifica problemas complexos, transformando-os em subproblemas mais tratáveis
- Soluciona esses problemas mais simples primeiro, armazenando os valores numa tabela de resultados parciais;
- Troca o tempo de processamento por espaço do programa;
- Métodos
 - bottom-up: resolve todos os subproblemas;
 - top-down: resolve os subproblemas necessário;
- Alguns problemas: Fibonacci, menor caminho, knapsack;

Diferenças top-down, bottom-up

Top-down (memoization):

- Divide recursivamente o problema em subproblemas menores e guarda os valores na tabela de PD;
- Útil para problemas maiores e mais efetivo em guardar soluções de menos subproblemas;

Bottom-up (tabulação):

- Começa com o menor problema e gradualmente constrói a solução final, guardando seus valores na tabela de PD;
- Mais útil para problemas menores onde a solução ótima é mais facilmente encontrada a partir dos seus subproblemas

Exemplo: Fibonacci para um valor n

Na força bruta:

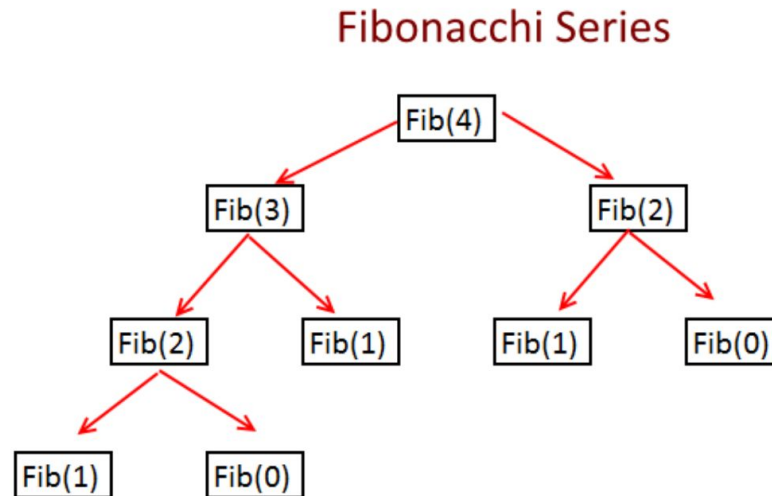
- $\text{fib}(0) = 0$ e $\text{fib}(1) = 1$;
- Para encontrar $\text{fib}(n)$, calcula todos os valores abaixo de n : onde $\text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$;

Com PD:

- Para cada $f(n)$ checa a tabela para os valores $f(n-1)$ e $f(n-2)$;
- Garante que cada valor na tabela vai ser calculado apenas 1 vez;

Exemplo: Fibonacci para um valor n

Com PD:



Fibonacci(N) = 0
= 1
= Fibonacci(N-1) + Fibonacci(N-2)

for n = 0
for n = 1
for n > 1

Algoritmos usados em PD:

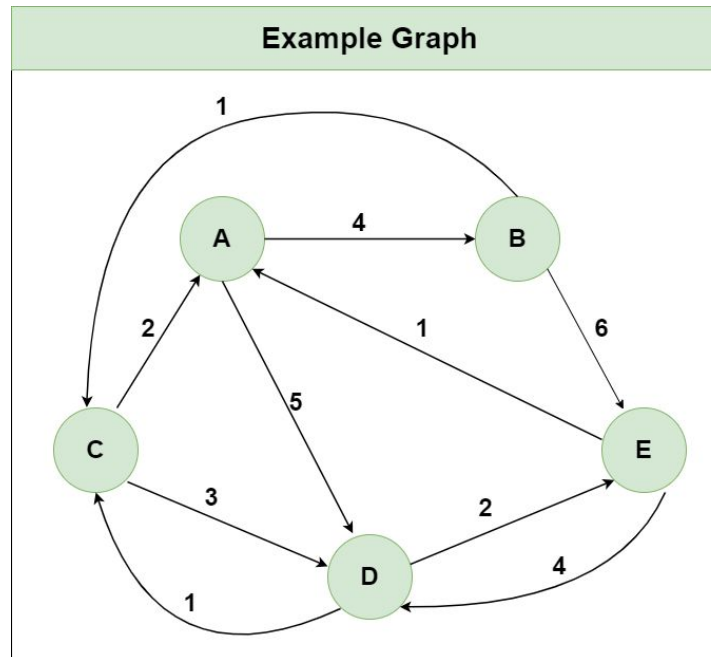
- **Floyd-Warshall:**
 - Usa PD para encontrar o menor caminho entre todos os pares de vértices de um grafo;
 - Funciona tanto para grafos dirigidos ou não dirigidos;
 - Usa a tabela de PD para guardar os valores entre os pares i.e. *Tabela[i][j] guarda o menor caminho entre os vértices i e j*

Algoritmos usados em PD:

- **Floyd-Warshall Algoritmo:**
 - Inicializa a matriz igual ao input da matriz de grafo;
 - Atualiza a matriz de solução considerando todos os vértices como intermediários no caminho;
 - Pega todos os vértices e atualiza todos os menores caminhos que incluem o vértice atual como intermediário no menor caminho;
 - Quando pegamos um vértice n , já consideramos todos os vértices $< n$ como intermediários
 - Para cada par tem dois possíveis casos:
 - n não é um vértice intermediário, e então $tab[i][j]$ continua igual;
 - atualizamos $tab[i][j]$ como $tab[i][n] + tab[n][j]$
se $tab[i][j] > tab[i][n] + tab[n][j]$

Algoritmos usados em PD:

- Exemplo de Floyd-Warshall:



Algoritmos usados em PD:

Passo 1:

Step1: Initializing Distance[][] using the Input Graph

	A	B	C	D	E
A	0	4	∞	5	∞
B	∞	0	1	∞	6
C	2	∞	0	3	∞
D	∞	∞	1	0	2
E	1	∞	∞	4	0

Exemplo - Floyd-Warshall

Step 2: Using Node A as the Intermediate node					
Distance[i][j] = min (Distance[i][j], Distance[i][A] + Distance[A][j])					
	A	B	C	D	E
A	0	4	∞	5	∞
B	∞	?	?	?	?
C	2	?	?	?	?
D	∞	?	?	?	?
E	1	?	?	?	?

→

	A	B	C	D	E
A	0	4	∞	5	∞
B	∞	0	1	∞	6
C	2	6	0	3	12
D	∞	∞	1	0	2
E	1	5	∞	4	0

Exemplo - Floyd-Warshall

Step 3: Using Node B as the Intermediate node

$$\text{Distance}[i][j] = \min (\text{Distance}[i][j], \text{Distance}[i][B] + \text{Distance}[B][j])$$

	A	B	C	D	E
A	?	4	?	?	?
B	∞	0	1	∞	6
C	?	6	?	?	?
D	?	∞	?	?	?
E	?	5	?	?	?

	A	B	C	D	E
A	0	4	5	5	10
B	∞	0	1	∞	6
C	2	6	0	3	12
D	∞	∞	1	0	2
E	1	5	6	4	0

Exemplo - Floyd-Warshall

Step 4: Using Node C as the Intermediate node

$$\text{Distance}[i][j] = \min (\text{Distance}[i][j], \text{Distance}[i][C] + \text{Distance}[C][j])$$

	A	B	C	D	E
A	?	?	5	?	?
B	?	?	1	?	?
C	2	6	0	3	12
D	?	?	1	?	?
E	?	?	6	?	?

	A	B	C	D	E
A	0	4	5	5	10
B	3	0	1	4	6
C	2	6	0	3	12
D	3	7	1	0	2
E	1	5	6	4	0

Exemplo - Floyd-Warshall

Step 5: Using Node D as the Intermediate node

$$\text{Distance}[i][j] = \min (\text{Distance}[i][j], \text{Distance}[i][D] + \text{Distance}[D][j])$$

	A	B	C	D	E
A	?	?	?	5	?
B	?	?	?	4	?
C	?	?	?	3	?
D	3	7	1	0	2
E	?	?	?	4	?

	A	B	C	D	E
A	0	4	5	5	7
B	3	0	1	4	6
C	2	6	0	3	5
D	3	7	1	0	2
E	1	5	5	4	0

Exemplo - Floyd-Warshall

Step 6: Using Node E as the Intermediate node

$$\text{Distance}[i][j] = \min (\text{Distance}[i][j], \text{Distance}[i][E] + \text{Distance}[E][j])$$

	A	B	C	D	E
A	?	?	?	?	7
B	?	?	?	?	6
C	?	?	?	?	5
D	?	?	?	?	2
E	1	5	5	4	0

	A	B	C	D	E
A	0	4	5	5	7
B	3	0	1	4	6
C	2	6	0	3	5
D	3	7	1	0	2
E	1	5	5	4	0

O problema do knapsack

- Suponhamos que tenhamos uma mochila de capacidade x , onde queremos preencher com itens de valor y , com o melhor valor;
 - Faz uma tabela com n° de colunas = $x+1$ e $y+1$ linhas;
 - Inicializa a matriz com $coluna[0] = 0$ e $linha[0] = 0$;
 - Faz o algoritmo linha por linha:
 - $solução[i][j] = solução[i-1][j-peso[i-1]] + valor[i-1]$
 - Se a solução $[i][j]$ não é o caso ótimo (maior), repete o valor da linha anterior;
 - Solução em $[x][y]$;

O problema do knapsack

- Suponhamos que tenhamos uma mochila de capacidade x , onde queremos preencher com itens de valor y , com o melhor valor;
 - $W = \{1, 2, 3\}$; $P = \{10, 15, 20\}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						

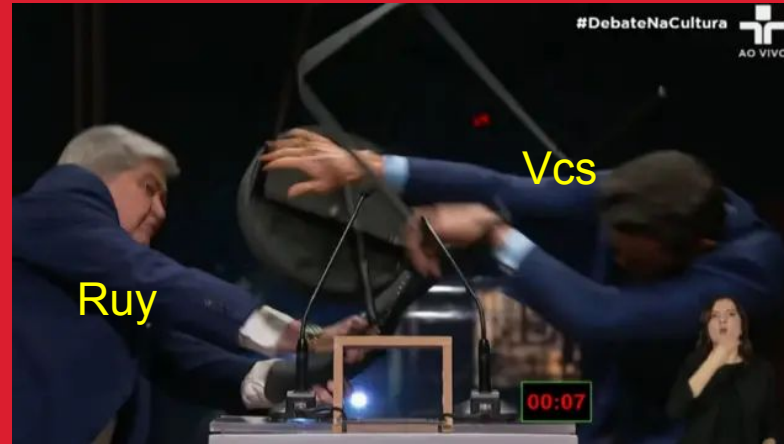
Praticando com Zé

- ✓ 5. {2,0 pt.} Considerando uma mochila com capacidade de 6 kg, e os itens (peso, valor): $i_1 = (2, 15)$, $i_2 = (3, 50)$, $i_3 = (2, 20)$, $i_4 = (3, 25)$, encontre o subconjunto de itens mais valioso que cabe na mochila. Só existe uma unidade de cada item e os itens são indivisíveis. Use programação dinâmica (*bottom-up*) e apresente a matriz construída na busca. A matriz tem tamanho $item + 1$ por $capacidade + 1$ e a primeira linha/coluna são preenchidas com 0.

Praticando com Zé

	p	v	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_1	2	15	0	0	15	15	15	15	15
i_2	3	50	0	0	15	50	50	65	65
i_3	2	20	0	0	20	30	50	70	70
i_4	3	25	0	0	20	50	50	70	75

Obrigado !!!



Estudem !!!