Rökstudd forritun

Rökfræði

Yfirlit

- Yrðingarökfræði
  - Yrðingar, sanngildi, rökvirkjar, sanntöflur, rökjöfnur, sannanir, rökstytting
- Umsagnarökfræði
  - Umsagnir, magnarar, rökjöfnur, faldaðir magnarar, sannanir, rökstytting

Yrðing: Fullyrðing sem er áreiðanlega annaðhvort sönn eða ósönn

- Dæmi (annaðhvort satt eða ósatt):
  - Tunglið er úr grænum osti
  - 2+2=4
  - 1+2=5
- Gagndæmi (hvorki satt né ósatt):
  - Lokaðu hurðinni!
  - Hvað er klukkan?
- Vafasamt (kannski órætt):
  - x+1=2
- Vafasamt (kannski bæði satt og ósatt):
  - Spuni þessarar rafeindar er upp

Yrðingasegðir

- Yrðingabreytur: p,q,r,s,…
- Yrðingin sem er ávallt sönn er táknuð með T eða 1 og yrðingin sem er ávallt ósönn er táknuð með F eða 0
- Samsettar yrðingar eru settar saman úr smærri yrðingum og rökvirkjum:
  - Neitun (negation) $\neg$
  - Og-un (conjunction) $\wedge$
  - Eð-un (disjunction) $\vee$
  - Afleiðing (implication) $\rightarrow$
  - Jafngildi (biconditional) $\leftrightarrow$

Neitun – ekki (negation)

- Sanntafla neitunar:

p	$\neg p$
0	1
1	0

- Dæmi: Ef p stendur fyrir „tunglið er úr grænum osti“ þá stendur $\neg p$ fyrir „það er ekki svo að tunglið sé úr grænum osti“, eða „tunglið er ekki úr grænum osti“.

Og-un, og (conjunction)

- Sanntafla og

p	q	$p \land q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Eð-un, eða (disjunction)

- Sanntafla eða

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tvíræðni „eða“ í mæltu og rituðu máli

- Ef skrifað er á matseðil „með þessum rétti fylgir súpa eða salat“, hvað þýðir það?
- Hvað ef skrifað er „með þessum rétti fylgir súpa og salat“?
- Sumir myndu skrifa „með þessum rétti fylgir súpa og salat en ekki bæði“, en það er ambögulegt og flestum myndi finnast „en ekki bæði“ óþarfi (nema kannski rökfræðingum)
- Sumir myndu skrifa hina merkinguna með „með þessum rétti fylgir súpa og/eða salat“ en það er verulega ambögulegt
- Í stærðfræði og rökfræði er merking „eða“ skýr og er samkvæmt sanntöflunni að framan
- Hin tegundin af „eða“ er kölluð „aðgreind eðun“ og hefur aðra sanntöflu en venjulegt „eða“
- Aðgreint „eða“ kallast „exclusive or“ á ensku, oft er sagt „xor“

Aðgreind eðun, xor

- Sanntafla

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Afleiðing, af því leiðir, ef … þá …

- Sanntafla

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Takið eftir að $p \rightarrow q$ er þá og því aðeins ósatt að p sé satt en q ósatt
- Sér í lagi er $p \rightarrow q$ satt alltaf þegar p er ósatt

$p \rightarrow q$ í mæltu máli og ritmáli

- ef p þá q
- p leiðir til q
- p leiðir af sér q
- **q ef p**
- **q hvenær sem p**
- p aðeins ef q
- **q er nauðsynlegt skilyrði fyrir p**
- p er nægjanlegt skilyrði fyrir q
- **Nægjanlegt skilyrði fyrir q er p**
- Nauðsynlegt skilyrði fyrir p er q

Ef … þá … og öfugt

- Á ensku: „and conversely“ eða jafnvel „and inversely“
- Tengd ensk hugtök: Converse, Contrapositive, Inverse
- Ef ég mæti þá er ég heill heilsu
- Og öfugt:
  - Ef ég er heill heilsu þá mæti ég (converse)
  - Ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu (inverse)
- Contrapositive: Ef ég er ekki heill heilsu þá mæti ég ekki
  - jafngilt upphaflegu yrðingunni

Ef … þá … og öfugt (framhald)

- Inverse: Ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu
  - converse er contrapositive af inverse
  - þau eru jafngild hvoru öðru en ekki jafngild upphaflegu yrðingunni
  - Íhugið þann sem mætir ekki (aldrei) en er (stundum) heill heilsu.
    - Uppfyllir hann skilyrðið „ef ég mæti þá er ég heill heilsu“? **JÁ**!
    - En hvað með skilyrðið „ef ég mæti ekki þá er ég ekki heill heilsu“? **Nei**.
- $p \rightarrow q$
  - Converse: $q \rightarrow p$
  - Inverse: $\neg p \rightarrow \neg q$
  - Contrapositive: $\neg q \rightarrow \neg p$

Jafngildi (biconditional)

- $\boldsymbol{p}$ er nauðsynlegt og nægjanlegt fyrir $\boldsymbol{q}$
- Ef $\boldsymbol{p}$ þá $\boldsymbol{q}$ og öfugt
- $\boldsymbol{p}$ eff $\boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{p}$ þá og því aðeins að $\boldsymbol{q}$
- „ég mæti þá og því aðeins að ég sé heill heilsu“
- „nauðsynlegt og nægjanlegt skilyrði fyrir því að ég mæti er að ég sé heill heilsu“
- $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
- $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$

Jafngildi - sanntafla

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Önnur algeng leið til að skilgreina tvíundarvirkja, sbr. margföldunartöflur

$p \leftrightarrow q$		q	
		0	1
p	0	1	0
	1	0	1

Sanntöflur samsettra yrðinga

- Ein súla fyrir hverja breytu
- Ein súla fyrir hverja aðgerð
- Niðurstöðusúlan er súla síðustu aðgerðar

Jafngildar yrðingar

- Hvernig komumst við að því hvort tvær yrðingar, p og q eru jafngildar, þ.e. $p \equiv q$? (Athugið að p og q geta hér verið samsettar með rökvirkjum svo sem $\rightarrow$ og $\wedge$ og $\neg$ o.s.frv.)

1. Búum til sanntöflur fyrir báðar yrðingarnar og athugum hvort útkomusúlan er eins í báðum
2. Notum þekkt jafngildi til að breyta annarri yrðingunni í hina
3. Athugum hvort samsetta yrðingin $p \leftrightarrow q$ er sísanna (tautology), til dæmis með aðferðum 1 og 2
4. Athugum, hvort í sínu lagi, hvort $p \rightarrow q$ og $q \rightarrow p$ (þetta er algengasta aðferðin og sú sem er minnst líkleg til að vera vandræðaleg)
5. …

Notkun sanntaflna til að sanna eða afsanna jafngildi

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Spurning: Hve margar raðir eru í sanntöflu með n breytum?

- Í hvert sinn sem breytu er bætt við tvöfaldast fjöldi raða
- Ef engin breyta er til staðar er aðeins ein röð, til dæmis yrðingarnar $1 < 2$ og $2 < 1$:

$1 < 2$
1

$2 < 1$
0

Forgangur aðgerða

Aðgerð (virki)	Forgangur
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Framhald - Yfirlit

- Uppfyllanlegar yrðingar, sísönnur og mótsagnir
- Rökfræðilegt jafngildi
  - Mikilvæg jafngildi
  - Sönnun jafngilda
- Staðalsnið (bæði oft notuð í rökrásum)
  - Eð-að staðalsnið
  - Og-að staðalsnið (notað í rökstyttingu)

Uppfyllanlegar kröfur, samræmanleiki (consistency, satisfiability)

- Yrðing sem hefur þann eiginleika að til eru gildi fyrir rökbreyturnar þannig að yrðingin sé sönn kallast uppfyllanleg, samræmanleg (consistent, satisfiable)
- Einstakur möguleiki á að gefa rökbreytunum gildi er oft kallaður **túlkun**
- Samræmanleg (uppfyllanleg) yrðing er því yrðing sem hefur túlkun sem gerir hana sanna
- Hver túlkun samsvarar einni röð í sanntöflunni
- Engar mótsagnir eru samræmanlegar, en allar aðrar yrðingar eru það
- Allar sísönnur eru því samræmanlegar

Mikilvæg jafngildi

Regla	Íslenskt nafn reglu	Enskt nafn reglu
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Víxlregla	Commutative
$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$	Tengiregla	Associative
$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Dreifiregla	Distributive
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Samsemdarregla	Idempotent
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \vee p \wedge q \equiv p$	Gleypiregla	Absorbtion
$p \vee \neg p \equiv 1$ $p \wedge \neg p \equiv 0$	Neitunarregla	Complementation
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgans regla	De Morgan
$\neg\neg p \equiv p$	Tvöföld neitun	Involution
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$		

Röksemdafærslur

- Algeng sönnunarverkefni eru
  - Sanna að $p \equiv q$ eða (næstum sama merking) $p \leftrightarrow q$
    - $p \equiv q$ þýðir „yrðingin p er jafngild yrðingunni q“
    - $p \leftrightarrow q$ þýðir „yrðingin $p \leftrightarrow q$ er sönn“
    - Ef önnur þessara fullyrðinga er sönn þá er hin sönn
    - $\equiv$ er ekki yrðingaaðgerð heldur svokallað metatákn
  - Sanna að $p \vdash q$ eða (næstum sama merking) $p \rightarrow q$
    - $p \vdash q$ þýðir „yrðingin p leiðir til yrðingarinnar q“
    - $p \rightarrow q$ þýðir „yrðingin $p \rightarrow q$ er sönn“
    - Ef önnur þessara fullyrðinga er sönn þá er hin sönn
    - $\vdash$ er ekki yrðingaaðgerð heldur svokallað metatákn

Staðalsnið – normal forms

- Fyrir sérhverja yrðingu er hægt að finna jafngilda yrðingu á eð-uðu staðalsniði (disjunctive normal form) og jafngilda yrðingu á og-uðu staðalsniði (conjunctive normal form)
- Eð-að staðalsnið

$$(a_{11} \wedge a_{12} \wedge \cdots \wedge a_{1r_1}) \vee (a_{21} \wedge a_{22} \wedge \cdots \wedge a_{2r_2}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \wedge a_{n2} \wedge \cdots \wedge a_{nr_n})$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{r_n} a_{ij}$$

- Og-að staðalsnið

$$(b_{11} \vee b_{12} \vee \cdots \vee b_{1s_1}) \wedge (b_{21} \vee b_{22} \vee \cdots \vee b_{2s_2}) \wedge \cdots \wedge (b_{m1} \vee b_{m2} \vee \cdots \vee b_{ms_m})$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{s_m} b_{ij}$$

- Þar sem sérhvert a_{ij} og b_{ij} er á sniðinu p eða $\neg p$ fyrir einhverja yrðingarbreytu p

Staðalsnið - dæmi

- Yrðingin

$$p \leftrightarrow q$$

hefur eð-aða staðalsniðið

$$(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

Hún hefur og-aða staðalsniðið

$$(p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q)$$

Ritháttur - sértilfelli

- Athugið að

$$\bigvee_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\bigwedge_{i=1}^{0} c_i = 1$$

- Svipað eins og

$$\sum_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\prod_{i=1}^{0} c_i = 1$$

Staðalsnið - sértilfelli

- Og-að staðalsnið fyrir 0 og 1:

$$0 = \bigwedge_{i=1}^{1} 0 = \bigwedge_{i=1}^{1} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigwedge_{i=1}^{0} 0 = \bigwedge_{i=1}^{0} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

- Eð-að staðalsnið fyrir 0 og 1:

$$0 = \bigvee_{i=1}^{0} 1 = \bigvee_{i=1}^{0} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigvee_{i=1}^{1} 1 = \bigvee_{i=1}^{1} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

Rökstytting

- Notuð til að sanna $u \vdash v$ fyrir yrðingar eða fyrstu gráðu röksegðir u og v
- Breytum fyrst segðinni $u \wedge \neg v$ (neitunin af $u \rightarrow v$) á og-að staðalsnið
- Eftir það er aðeins ein röksemdafærsluregla notuð:
  - $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \rightarrow a \vee c$
  - a og c geta verið eð-un núll eða fleiri liða
  - Ef bæði a og c eru tóm þá er niðurstaða afleiðingarinnar 0 (eða F, ef það hljómar betur)
- Höldum áfram að framleiða afleiðingar þar til afleiðingin 0 fæst eða ekki er hægt að framleiða fleiri afleiðingar
- Afleiðingarnar eru allar klausur í og-aða staðalsniðinu af $u \wedge \neg v$
  - Athugið að klausurnar sem bætt er við í rökstyttingu breyta ekki merkingu heildarsegðarinnar, en gefa okkur vonandi innsýn í merkinguna, sérstaklega þegar við komumst að því að ein afleiðingin er 0

Umsagnareikningur, umsagnarökfræði, fyrstu gráðu rökfræði

- Viðbætur:
  - Breytur: x,y,z
  - Umsagnir: P(x), Q(x), M(x,y)
  - Magnarar
- Umsagnir eru almennari útgáfa af yrðingabreytum
  - Innihalda umsagnir og breytur
  - Í stað breytu má setja stak úr viðkomandi ***óðali***
  - Eða breytan getur verið bundin magnara

Umsagnir

- Fyrir gefið mengi (kallast óðal) getum við skilgreint umsagnir
- Til dæmis fyrir óðal allra lífvera getum við skilgreint
  - M(x) = x er maður
  - D(x) = x er dauðlegur
- Fyrir óðal allra rauntalna getum við skilgreint
  - N(x) = x er náttúrleg tala
  - Z(x) = x er heiltala
  - Q(x) = x er ræð tala
  - P(x) = x>0
- Óðalið er oft táknað með tákninu U

Magnarar – tilvistarmagnari ∃

- Til er dauðleg lífvera
  - $\exists x: D(x)$
  - $\exists x\ D(x)$
  - $\exists y: D(y)$
- Til er jákvæð tala
  - $\exists x: P(x)$
- Til er jákvæð heiltala
  - $\exists x: P(x) \land N(x)$

Magnarar – almagnari ∀

- Allar lífverur eru dauðlegar
  - $\forall x: D(x)$
- Allar tölur eru jákvæðar
  - $\forall x: P(x)$
  - $\forall y: P(y)$

Forgangur magnara

- Magnarar hafa hærri forgang en rökaðgerðir
  - $\forall x: P(x) \land Q(x)$ hefur sömu merkingu og $(\forall x: P(x)) \land Q(x)$
    - Reyndar hefur hvorugt merkingu nema sem hluti stærri segðar vegna þess að x í $\mathrm{Q}(x)$ er ***óbundið*** og hefur ekkert gildi – hvorugt er lögleg umsagnasegð, ef við erum smámunasöm
  - $\forall x: \left(P(x) \land Q(x)\right)$ hefur aðra merkingu og er lögleg umsagnasegð

Löglegar og ólöglegar (með og án merkingar)

- Löglegar umsagnasegðir
  - $P(0)$
  - $\forall x: P(x)$
  - $\exists x: Q(x)$
  - $\forall x: \forall y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $\forall x, y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $R(1,2,3)$
- Ólöglegar umsagnasegðir
  - $P(x)$
  - $R(1,2, z)$

De Morgans reglur fyrir magnara

- Neitun tilvistar breytist í almögnun

$$\neg \exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

- Neitun alvistar breytist í tilvist

$$\neg \forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

Dæmi um sannanir – dæmi frá Lewis Carroll, höfundi Lísu í Undralandi

- Gefið er:
  - „Öll ljón eru grimm“
  - „Sum ljón drekka ekki kaffi“
- Viljum sanna:
  - „Sumar grimmar skepnur drekka ekki kaffi“
- Túlkun í umsagnareikningi:
  - Óðalið er allar skepnur eða allar lífverur
  - Táknum „x er ljón“ með $L(x)$
  - Táknum „x er grimm skepna“ með $G(x)$
  - Táknum „x drekkur kaffi“ með $K(x)$

Framhald sönnunar

- Forsendurnar eru þá
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \wedge \neg K(x))$
- Viljum sanna
  - $\exists x: (G(x) \wedge \neg K(x))$
- Notum rökstyttingu, setjum fyrst forsendur á Skolemiserað og-að staðalsnið
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$ verður $\forall x: (\neg L(x) \vee G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \wedge \neg K(x))$ verður $L(c) \wedge \neg K(c)$ þar sem c er Skolem-fasti sem stendur fyrir eitthvert ljón sem ekki drekkur kaffi

Framhald sönnunar

- Neitum síðan afleiðingunni sem við viljum sanna, því við ætlum að nota óbeina sönnun, einföldum og setjum á og-að staðalsnið
  - $\neg\exists x: (G(x) \land \neg K(x))$
    - Notum De Morgans fyrir magnara:
  - $\forall x: \neg(G(x) \land \neg K(x))$
    - De Morgans fyrir neitun og-unar
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor \neg\neg K(x)))$
    - Neitun neitunar styttist út
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor K(x))$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin
$$\forall x:$$
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin $\forall x$:
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin
$$\forall x:$$
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin
$$\forall x:$$
  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6
  - k_7: 0

Framhald sönnunar

- Við erum nú tilbúin í rökstyttingu, við höfum forsendur (klausur) k_1, k_2, k_3 og k_4, og utan um allt er almögnunin

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Beitum nú rökstyttingu á k_1 og k_2 með því að gefa x gildið c í k_1 og stytta
  - k_5: $G(c)$
    - Næst er rökstytting á k_4 og k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Næst rökstyttum við k_3 og k_6
  - k_7: 0 – Sem sagt: „Sumar grimmar skepnur drekka ekki kaffi“

Annað dæmi í svipuðum stíl

- Gefið er
  - „Allar skepnur sem drekka svaladrykki eru friðsamar“
  - „Svali er tegund af svaladrykk“
  - „Fyrir allar tegundir svaladrykkja eru til ljón sem drekka þann drykk“
- Viljum sanna
  - „Sum ljón eru friðsöm“
- Búum til líkan
  - $F(x)$ táknar „x er friðsöm skepna“
  - $D(x, y)$ táknar „x drekkur svaladrykk af tegund y“
  - $L(x)$ táknar „x er ljón“
  - $S(y)$ táknar „y er tegund svaladrykks“
- Óðalið getur til dæmis verið skepnur og vörumerki

Framhald

- Þá fáum við forsendur sönnunar
  - „Allar skepnur sem drekka svaladrykki eru friðsamar“
    - $\forall x, y: (S(y) \wedge D(x, y) \rightarrow F(x))$
  - „Svali er tegund af svaladrykk“
    - $S(Svali)$
  - „Fyrir allar tegundir svaladrykkja eru til ljón sem drekka þann drykk“
    - $\forall y: \left(S(y) \rightarrow \exists x: \left(L(x) \wedge D(x, y)\right)\right)$
- Bætum við neituninni af afleiðingunni
  - „Öll ljón eru ekki friðsöm“
    - $\forall x: L(x) \rightarrow \neg F(x)$

Framhald

- Setjum á Skolemiserað og-að staðalsnið, með almagnara
  $$\forall x, y:$$
  - $S(y) \wedge D(x,y) \to F(x)$ verður (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \vee q$)
    - $\neg\big(S(y) \wedge D(x,y)\big) \vee F(x))$ og síðan (skv. De Morgan)
    - k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x))$
    - k_2: $S(Svali)$
      - k_2 er þegar komið á rétt snið
- $S(y) \to \exists x{:}\big(L(x) \wedge D(x,y)\big)$ verður (með Skolemiseringu, þar sem $j(y)$ er ljón sem drekkur y)
  - $S(y) \to \big(L(j(y)) \wedge D(j(y),y)\big)$ og síðan (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \vee q$)
  - $\neg S(y) \vee \big(L(j(y)\,) \wedge D(j(y),y)\big)$ og síðan (skv. dreifireglu)
  - $\big(\neg S(y) \vee L(j(y))\big) \wedge \big(\neg S(y) \vee D(j(y),y)\big)$ sem gefur tvær klausur
  - k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
  - k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- Neitunin af afleiðingunni, þ.e.
  $$L(x) \to \neg F(x)$$
  verður (skv. reglunni $p \to q \equiv \neg p \vee q$) ein klausa
  - k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D\big(j(y), y\big)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D\big(j(y), y\big)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F(j(Svali))$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F(j(Svali))$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F(j(Svali))$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}
- 0

Framhald

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Rökstyttum fyrst k_1 og k_2 (látum y vera $Svali$) og fáum
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
  - Síðan k_4 og k_6 (látum y vera $Svali$, x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
  - Síðan k_2 og k_7 og fáum
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
  - Síðan k_5 og k_8 (látum x vera $j(Svali)$) og fáum
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
  - Síðan k_3 og k_9 (látum y vera $Svali$)
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
  - Og loks k_2 og k_{10}
- k_{11}: 0
  - Sum ljón eru því friðsöm

Reasoned Programming

Logic

Overview

- Propositional logic
  - Propositions, truth value, logic operators, truth tables, logic equations, proofs, resolution
- Predicate logic
  - Predicates, quantifiers, logic equations, nested quantifiers, proofs, resolution

A proposition: a statement that is certainly either true or false

- Example (either true or false):
  - The moon is made of green cheese
  - 2+2=4
  - 1+2=5
- Counterexample (neither true nor false):
  - Close the door!
  - What time is it?
- Doubtful (perhaps indeterminate):
  - x+1=2
- Doubtful (perhaps both true and false):
  - The spin of this electron is up

Propositional expressions

- Propositional variables: p,q,r,s,…
- The proposition that is always true is denoted with T or 1 and the proposition that is always false is denoted with F or 0
- Combined propositions are composed of smaller propositions and logic operators:
  - Negation $\neg$
  - Conjunction (and) $\wedge$
  - Disjunction (or) $\vee$
  - Implication $\rightarrow$
  - Biconditional $\leftrightarrow$

Negation (not)

- Truth table for negation:

p	$\neg p$
0	1
1	0

- Example: if p stands for “the moon is made of green cheese“ then $\neg p$ stands for “it is not the case that the moon is made of green cheese“.

Conjunction (and)

- Truth table for and

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunction (or)

- Truth table for or

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exclusive or (xor)

- Truth table

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implication, implies, if … then …

- Truth table

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Notice that $p \to q$ is only false if p is true but q is false
- In particular $p \to q$ is true always when p is false

$p \to q$ in spoken and written language

- if p then q
- p implies q
- **$\boldsymbol{q}$ if $\boldsymbol{p}$**
- **$\boldsymbol{q}$ whenever $\boldsymbol{p}$**
- p only if q
- **$\boldsymbol{q}$ is a necessary condition for $\boldsymbol{p}$**
- p is a sufficient condition for q
- **A sufficient condition for $\boldsymbol{q}$ is $\boldsymbol{p}$**
- A necessary condition for p is q

If … then … and conversely

- Also “and inversely“
- Related concepts: Converse, Contrapositive, Inverse
- **If I show up then I am well**
- And converse:
  - If I am well then I will show up (converse)
  - If I don‘t show up then I am unwell (inverse)
- Contrapositive: **If I am not well then I will not show up**
  - Equivalent to the original psoposition

If … then … and conversely (continued)

- Inverse: If I don‘t show up then I am unwell
  - converse is the contrapositive of the inverse
  - They are equivalent to each other but not equivalent to the original proposition
  - Consider someone that never shows up and is sometimes well.
    - Does he fulfil the the condition “If I show up then I am well“? **YES**!
    - But what about the condition “If I don‘t show up then I am unwell “? **No**.
- $p \rightarrow q$
  - Converse: $q \rightarrow p$
  - Inverse: $\neg p \rightarrow \neg q$
  - Contrapositive: $\neg q \rightarrow \neg p$

Biconditional

- p is necessary and sufficient for q
- If p then q and converse
- p iff q
- p if and only if q
- “I will show up if and only if I am well“
- “A necessary and sufficient condition for me showing up is that I am well“
- $p \leftrightarrow q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Biconditional – truth table

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Another common way to define binary operators, similar to multiplication tables

$p \leftrightarrow q$		q	
		0	1
p	0	1	0
	1	0	1

Truth tables for combined expressions

- One column for each variable
- One column for each operator
- The result column is the column of the last operator

Equivalent propositions

- How do we determine whether two propositions, p and q are equivalent, i.e. $p \equiv q$? (Note that p and q can be combined with logical operators such as $\rightarrow$ and $\land$ and $\neg$ etc.)

1. Construct truth tables for both propositions and check whether the result columns are the same in both
2. Use known equivalences to transform one of the propositions into the other
3. Check whether the combined proposition $p \leftrightarrow q$ is a tautology, for example using methods 1 and 2
4. Check separately whether $p \rightarrow q$ and $q \rightarrow p$ hold (this is the most common method and the one least likely to be troublesome)
5. …

Using truth tables to prove or disprove equivalence

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Question: How many rows are there in a truth table with n variables?

- Each time a variable is added the number of rows doubles
- If no variable is present then there is only one row, for example the propositions $1 < 2$ and $2 < 1$:

$1 < 2$
1

$2 < 1$
0

Operator precedence

Operator	Precedence
¬	1
∧	2
∨	3
→	4
↔	5

Continuing - Overview

- Satisfiable propositions, tautologies and contradictions
- Logical equivalences
  - Important equivalences
  - Proving equivalence
- Normal forms (both commonly used in logical circuits)
  - Disjunctive normal form
  - Conjunctive normal form (used in resolution)

Satisfiability, consistency

- A proposition that has the property that there exist assignments for the variables such that the proposition is true is said to be consistent, satisfiable
- A single possibility to assign values to the logical variables is often called an **interpretation**
- A consistent (satisfiable) proposition is therefore a proposition that has an interpretation that makes it true
- Each interpretation corresponds to a single row in the truth table
- No contradictions are satisfiable but all other propositions are
- All tautologies are therefore satisfiable

Important equivalences

Rule	Íslenskt nafn reglu	English name of rule
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Víxlregla	Commutative
$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$	Tengiregla	Associative
$p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Dreifiregla	Distributive
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Samsemdarregla	Idempotent
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \vee p \wedge q \equiv p$	Gleypiregla	Absorbtion
$p \vee \neg p \equiv 1$ $p \wedge \neg p \equiv 0$	Neitunarregla	Complementation
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	De Morgans regla	De Morgan
$\neg\neg p \equiv p$	Tvöföld neitun	Involution
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$		

Inferences

- Common proof tasks are
  - Prove that $p \equiv q$ or (almost the same) $p \leftrightarrow q$
    - $p \equiv q$ means “the proposition p is equivalent to the proposition q“
    - $p \leftrightarrow q$ means “the proposition $p \leftrightarrow q$ is true“
    - If one of these statements is true then the other one is true
    - $\equiv$ is not a logical operator but rather a metasymbol
  - Prove that $p \vdash q$ or (almost the same) $p \rightarrow q$
    - $p \vdash q$ means “the proposition p implies the proposition q“
    - $p \rightarrow q$ means “the proposition $p \rightarrow q$ is true“
    - If one of these statements is true then the other one is true
    - $\vdash$ is not a logical operator but rather a metasymbol

Normal forms

- For every proposition it is possible to find an equivalent proposition in disjunctive normal form and an equivalent proposition in conjunctive normal form
- Disjunctive normal form

$$(a_{11} \wedge a_{12} \wedge \cdots \wedge a_{1r_1}) \vee (a_{21} \wedge a_{22} \wedge \cdots \wedge a_{2r_2}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \wedge a_{n2} \wedge \cdots \wedge a_{nr_n})$$
$$= \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{r_n} a_{ij}$$

- Conjunctive normal form

$$(b_{11} \vee b_{12} \vee \cdots \vee b_{1s_1}) \wedge (b_{21} \vee b_{22} \vee \cdots \vee b_{2s_2}) \wedge \cdots \wedge (b_{m1} \vee b_{m2} \vee \cdots \vee b_{ms_m})$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{s_m} b_{ij}$$

- Where each a_{ij} and b_{ij} are of the form p or $\neg p$ for some logic variable p

Normal forms - example

- The proposition

$$p \leftrightarrow q$$

has the disjunctive normal form

$$(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

It has the conjunctive normal form

$$(p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q)$$

Notation – special cases

- Note that

$$\bigvee_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\bigwedge_{i=1}^{0} c_i = 1$$

- Similarly to

$$\sum_{i=1}^{0} c_i = 0$$

$$\prod_{i=1}^{0} c_i = 1$$

Normal forms – special cases

- Conjunctive normal forms for 0 and 1:

$$0 = \bigwedge_{i=1}^{1} 0 = \bigwedge_{i=1}^{1} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigwedge_{i=1}^{0} 0 = \bigwedge_{i=1}^{0} \bigvee_{j=1}^{0} p$$

- Disjunctive normal form for 0 og 1:

$$0 = \bigvee_{i=1}^{0} 1 = \bigvee_{i=1}^{0} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

$$1 = \bigvee_{i=1}^{1} 1 = \bigvee_{i=1}^{1} \bigwedge_{j=1}^{0} p$$

Resolution

- Used to prove $u \vdash v$ for propositions and formulas in first order logic u and v
- First step is to transform the expression $u \wedge \neg v$ (the negation of $u \rightarrow v$) into conjunctive normal form
- After that there is only one logical inference rule used:
  - $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \rightarrow a \vee c$
  - a and c can be the disjunction of zero or more terms
  - If both a and c are empty then the consequence is 0 (or F, if you prefer)
- Continue producing consequences until we either produce 0 or we can not produce any new consequences
- The consequences are all clauses in the conjunctive normal form of $u \wedge \neg v$
  - Note that the clauses that get added during resolution do not change the meaning of the total expression, but hopefully provide insight into the meaning, especially when we conclude that one of the consequences is 0

Predicate calculus, predicate logic, first order logic

- Added features:
  - Variables: x,y,z
  - Predicates: P(x), Q(x), M(x,y)
  - Quantifiers
- Predicates are a more general version of logic variables
  - Contain predicates that give truth values and variables
  - We can replace a variable with a value from the ***domain*** in question
  - Or the variable can be bound to a quantifier

Predicates

- For a given set (called domain) we can define predicates
- For example for the domain of all living organisms we can define
  - M(x) = x is human
  - D(x) = x mortal
- For the domain of all real numbers we can define
  - N(x) = x is a natural number
  - Z(x) = x is an integer
  - Q(x) = x is a rational number
  - P(x) = $x>0$
- The domain is often denoted with the symbol U

Quantifiers – existential quantifier ∃

- There exists a mortal organism
  - $\exists x: D(x)$
  - $\exists x\ D(x)$
  - $\exists y: D(y)$
- There exists a positive number
  - $\exists x: P(x)$
- There exists a positive integer
  - $\exists x: P(x) \land N(x)$

Quantifiers – universal quantifier ∀

- All organisms are mortal
  - $\forall x: D(x)$
- All numbers are positive
  - $\forall x: P(x)$
  - $\forall y: P(y)$

Precedence of quantifiers

- Quantifiers have precedence over operators
  - $\forall x: P(x) \land Q(x)$ has the same meaning as $(\forall x: P(x)) \land Q(x)$
    - In fact neither has meaning except as a part of a larger expression because x in $\mathrm{Q}(x)$ is ***unbound*** and has no value – neither is a valid predicate logic expression, if we are nit-picking
  - $\forall x: \big(P(x) \land Q(x)\big)$ has another meaning and is a legal predicate logic expression

Legal and illegal (with and without meaning)

- Legal predicate logic expressions
  - $P(0)$
  - $\forall x: P(x)$
  - $\exists x: Q(x)$
  - $\forall x: \forall y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $\forall x, y: \exists z: R(x, y, z)$
  - $R(1,2,3)$
- Illegal predicate logic expressions
  - $P(x)$
  - $R(1,2, z)$

De Morgans rules for quantifiers

- The negation of existence changes to universal quantification

$$\neg \exists x: P(x) \equiv \forall x: \neg P(x)$$

- The negation of universality changes to existence

$$\neg \forall x: P(x) \equiv \exists x: \neg P(x)$$

Proof example – example from Lewis Carroll, the author of Alice in Wonderland

- Given is:
  - “All lions are fierce“
  - “Some lions don‘t drink coffee“
- Wish to prove:
  - “Some fierce creatures don‘t drink coffee“
- Interpretation in predicate calculus:
  - The domain is all animals or all living creatures
  - Denote “x is a lion“ with $L(x)$
  - Denote “x is a fierce animal “ with $G(x)$
  - Denote “x drinks coffee“ with $K(x)$

Continuing proof

- The premises are then
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \land \neg K(x))$
- Wish to prove
  - $\exists x: (G(x) \land \neg K(x))$
- We will use resolution, first transform the premises into Skolemized conjunctive normal form
  - $\forall x: (L(x) \rightarrow G(x))$ becomes $\forall x: (\neg L(x) \lor G(x))$
  - $\exists x: (L(x) \land \neg K(x))$ becomes $L(c) \land \neg K(c)$ where c is a Skolem-constant that stands for some lion that does not drink coffee

Continuing proof

- We then negate the conclusion we wish to prove because we intend to use an indirect proof. Simplify and put into conjunctive normal form
  - $\neg\exists x: (G(x) \land \neg K(x))$
    - Use De Morgans quantifiers:
  - $\forall x: \neg(G(x) \land \neg K(x))$
    - De Morgans for negation and conjunction
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor \neg\neg K(x)))$
    - Double negation cancels
  - $\forall x: (\neg G(x) \lor K(x))$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \lor G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \lor K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5
  - k_6: $K(c)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4:$\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5
  - k_6: $K(c)$

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Next we resolve on k_3 and k_6

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Next we resolve on k_3 and k_6
  - k_7: 0

Continuing proof

- We are now ready for resolution, we have premises (clauses) k_1, k_2, k_3 og k_4, and surrounding everything is the universal quantification

$$\forall x:$$

  - k_1: $\neg L(x) \vee G(x)$
  - k_2: $L(c)$
  - k_3: $\neg K(c)$
  - k_4: $\neg G(x) \vee K(x)$
    - Apply resolution to k_1 and k_2 by assigning to x the value c in k_1 and cancel $L(c)$ against $\neg L(c)$
  - k_5: $G(c)$
    - Next we resolve on k_4 and k_5
  - k_6: $K(c)$
    - Next we resolve on k_3 and k_6
  - k_7: 0 – Conclusion: “Some fierce creatures don‘t drink coffee“

Another example in similar style

- Given is
  - “All creatures that drink fruit drinks are peaceful“
  - “Svali is a type of fruit drink“
  - “For all types of fruit drink there are lions that drink it“
- Wish to prove
  - “Some lions are peaceful“
- Make a model
  - $F(x)$ means “x is a peaceful creature“
  - $D(x, y)$ means “x drinks a fruit drink of type y“
  - $L(x)$ means “x is a lion“
  - $S(y)$ means “y is a type of fruit drink“
- The domain can be, for example, all animals and drink types

Continuing

- Then we get the premises of the proof
  - "All creatures that drink fruit drinks are peaceful"
    - $\forall x, y: (S(y) \land D(x,y) \rightarrow F(x))$
  - "Svali is a type of fruit drink"
    - $S(Svali)$
  - "For all types of fruit drink there are lions that drink it"
    - $\forall y: \left(S(y) \rightarrow \exists x: \left(L(x) \land D(x,y)\right)\right)$
- Add the negation of the consequence
  - "All lions are not peaceful" (i.e. "no lions are peaceful")
    - $\forall x: L(x) \rightarrow \neg F(x)$

Continuing

- Put into Skolemized conjunctive normal form with universal quantifier

$$\forall x, y:$$

  - $S(y) \wedge D(x,y) \rightarrow F(x)$ becomes (according to rule $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$)
    - $\neg\big(S(y) \wedge D(x,y)\big) \vee F(x))$ and then (using De Morgan)
    - k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x))$
    - k_2: $S(Svali)$
      - k_2 is already in proper form
- $S(y) \rightarrow \exists x: \big(L(x) \wedge D(x,y)\big)$ becomes (with Skolemization, where $j(y)$ is a lion that drinks y)
  - $S(y) \rightarrow \big(L(j(y)) \wedge D(j(y),y)\big)$ and then (according to rule $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$)
  - $\neg S(y) \vee \big(L(j(y)\,) \wedge D(j(y),y)\big)$ and then (using distribution rule)
  - $\big(\neg S(y) \vee L(j(y))\big) \wedge \big(\neg S(y) \vee D(j(y),y)\big)$ which gives two clauses
  - k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
  - k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- The negation of the consequence, i.e.

$$L(x) \rightarrow \neg F(x)$$

  becomes (using rule $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$) one clause
  - k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \lor \neg D(x,y) \lor F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \lor L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \lor D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \lor \neg F(x)$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D\big(j(y), y\big)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D\big(j(y), y\big)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \lor \neg D(x,y) \lor F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \lor L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \lor D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \lor \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x,Svali) \lor F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \lor F(j(Svali))$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F\big(j(Svali)\big)$

Continuing

- Heildarklaususafnið í upphafi rökstyttingar verður því
- k_1: $\neg S(y) \lor \neg D(x, y) \lor F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \lor L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \lor D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \lor \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \lor F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \lor F(j(Svali))$
- k_8: $F(j(Svali))$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F(j(Svali))$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F(j(Svali))$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x,y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y),y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
- k_{10}: $\neg S(Svali)$

Continuing

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
- k_{10}: $\neg S(Svali)$

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L(j(y))$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

- Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F(j(Svali))$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
- 0

Continuing

- The total clause collection at the beginning becomes
- k_1: $\neg S(y) \vee \neg D(x, y) \vee F(x)$
- k_2: $S(Svali)$
- k_3: $\neg S(y) \vee L\big(j(y)\big)$
- k_4: $\neg S(y) \vee D(j(y), y)$
- k_5: $\neg L(x) \vee \neg F(x)$

  - Resolve first k_1 og k_2 (let y be $Svali$)
- k_6: $\neg D(x, Svali) \vee F(x)$
- k_7: $\neg S(Svali) \vee F(j(Svali))$
- k_8: $F\big(j(Svali)\big)$
- k_9: $\neg L(j(Svali))$
- k_{10}: $\neg S(Svali)$
- k_{11}: 0
  - Conclusion: some lions are peaceful