STÆ412G Kennileg töluleg greining
Lokaverkefni

Andri Freyr Viðarsson

Birgir Hrafnkelsson
16. apríl 2020

1 Fyrri Hluti

Setning 2.6

Ástandstala $n \times n$ fylkis A er $\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

Setningin tengist tölulegum lausnum á línulegum jöfnuhneppum, í henni felst aðferð til að finna ástandstölu fylkis. Ástandstala fylkis er notuð til þess að meta tölulegan óstöðugleika fylkja en óstöðugleiki er oft orsök skekkju í útreikningum með tölulegum aðferðum.

Áður en setningin er sönnuð þarf að skilgreina nokkur hugtök sem koma fyrir í setningunni. Í sönnuninni er einunigs notast við skilgreiningu á fylkjastaðli og einfaldar reiknireglur úr línulegri algebru. Þar má helst nefna að fyrir fylki A og vigra x, y gildir almennt að $A(x-y) = Ax - Ay$ og $A^{-1}Ax = x$

Skilgreining 2.5

Ástandstala ferningsfylkis A, $\text{cond}(A)$ er hæsti mögulegi skekkjumögnunarþáttur kerfisins $Ax = b$, fyrir öll möguleg b. Þar sem skekkjumögnunarþáttur(e. error magnification factor) er skilgreindur sem:

$$e_b = \frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}}$$

Þar sem x_a er gefin nálgunarlausn fylkjajöfnunnar $Ax = b$.
Ath. að fylkjastaðallinn $\|\cdot\|_\infty$ er skilgreindur sem, $\|A\|_\infty$ = maximum absolute row sum.

Sönnun

Um fylkjastaðalinn $\|\cdot\|_\infty$ gildir $\|A\|_\infty = \max\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \quad x \in \mathbb{R}^n$, Þar sem $\|x\|_\infty = \max|x_i|, i = 1, ..., n$.
Því gildir:

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty \tag{1.1}$$

Notum að $Ax = b, \quad r = b - Ax_a, \quad r = Ax - Ax_a = A(x - x_a)$
A er andhverfanlegt fylki þar sem $Ax = b$ hefur alltaf lausn og því gildir:

$$A^{-1}r = A^{-1}A(x - x_a) = (x - x_a)$$

Sem afleiðing af (1.1) gildir því:

$$\|x - x_a\|_\infty = \left\|A^{-1}r\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

Og þar sem $b = Ax$ fæst einnig

$$\|b\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty$$

Saman gefa ójöfnurnar að ofan:

$$\frac{\|x - x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|A\|_\infty}{\|b\|_\infty} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|r\|_\infty$$

með tilfærslu fæst

$$\frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}} \leq \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

Höfum þannig sýnt að efra mark skekkjumögnunnarinnar er $\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

Sýnum næst að alltaf sé hægt að uppfylla jöfnuna í ójöfnunni sem skilgreinir efra mark skekkjumögnunnarinnar.
Út frá skilgreiningu á fylkjastaðlinum $\|\cdot\|_\infty$ getum við valið x og r þannig að:

$$\|A\|_\infty = \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{\|A^{-1}r\|_\infty}{\|r\|_\infty}.$$

Látum $x_a = x - A^{-1}r$, þá fæst $x - x_a = A^{-1}r$ og því gildir:

$$\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|A^{-1}r\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|A^{-1}\|_\infty\|r\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|A^{-1}\|_\infty\|r\|_\infty\|A\|_\infty}{\|Ax\|_\infty}.$$

Athugum að $Ax = b$ og því fæst með fyrri niðurstöðu að

$$\frac{\frac{\|x-x_a\|_\infty}{\|x\|_\infty}}{\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}} = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

fyrir nákvæmlega þetta val á x og r.

Höfum því sýnt að hágildi skekkjumögnunnar sé $\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$ og þannig má því skilgreina formúlu fyrir ástandstölu ferningsfylkisins A. $\square$

2 Seinni hluti

Dæmi 2

Skrifið niður aðferð Gauss-Newton fyrir línulegt jöfnuhneppi, það er, þegar

$$r_j(x_1, , x_n) = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})_j = 0$$

Hér er $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})_j$, j-ta stak vigursins $(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$

Lausn:

Gauss-Newton aðferðin fyrir ólínuleg jöfnuhneppi er eins og lýst er í eftirfarandi kóða
Setjum x^0 sem upphafsgildi
for $k = 0, 1, 2, ...$

$$A_k = Dr(x^k)$$

$$A_k^T A_k v^k = -A_k^T r(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + v^k$$

end
Athugum að þegar $r_j = (Ax - b)_j$ þá fæst að $A_k = Dr(x^k) = A$.
Því gildir $-A^T r(x^k) = -A^T(Ax^k - b) = -A^T Ax^k + A^T b \implies A^T A(v^k + x^k) = A^T b$.
Svo $v^k + x^k = (A^T A)^{-1} A^T b$ sem er least squares lausn fylkjajöfnunnar $Ax = b$
Í fyrstu ítrun fæst því að x^{k+1} gefur lausn jöfnuhneppisins, x^k breytist síðan ekkert eftir fyrstu ítrun svo lengi sem jönfuhneppið hafi lausn því að $r(x^k) = \mathbf{0}$ þar x^k er lausn $Ax = b$

Dæmi 5

Hvaða kosti hefur Endurbætt aðferð Euler's (Trapisuaðferðin) umfram aðferð Taylor's af stigi 2 þegar lausnir upphafsgildisverkefna eru nálgaðar?

Lausn:

Taylor aðferð af stigi 2:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{1}{2}h^2(f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)f(t_i, w_i))$$

Trapisuaðferð:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + h(f(t_i, w_i)))$$

Báðar aðferðirnar eru af stigi tvö og gefa því svipaða nákvæmni fyrir gefið verkefni. Trapisuaðferðin er þess eðlis að eina fallið sem þarf að skilgreina er $f(t, w)$, í hverju ítrunarskrefi er kallað í þetta fall fyrir nokkur mismunandi gildi á t og w. Í Taylor aðferðinni er fólgin auka vinna í því að reikna út hlutafleiðurnar f_t og f_y, það getur verið snúið og tekið lengri tíma og reikniafl án þess að skila nákvæmari niðurstöðu.

Dæmi 6

Sýnið að Runga-Kutta aðferpin í jöfnu (6.49) í kennslubókinni fyrir eitthvert $\neq 0$ sé nálgunaraðferð af stigi 2.

Lausn:

Höfum aðferðina:

$$w_{i+1} = w_i + h\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_i, w_i) + \frac{h}{2\alpha} f(t_i + \alpha h, w_i + \alpha h f(t_i, w_i))$$

Til þess að meta staðarskekkjuna þá gerum við ráð fyrir að $y_i = w_i$. Skrifum niður Taylor nálgun fyrir y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\delta f}{\delta t}(t_i, y_i) + \frac{\delta f}{\delta y}(t_i, y_i) f(t_i, y_i)\right) + \frac{h^3}{6} y'''(c). \tag{2.1}$$

Með $y_i = w_i$ og fyrsta stigs Taylor nálgun fæst:

$$w_{i+1} = y_i + h\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_i, y_i) + \frac{h}{2\alpha} f(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i)) \tag{2.2}$$

$$= y_i + hf(t_i, y_i) - \frac{h}{2\alpha} f(t_i, y_i) + \frac{h}{2\alpha} f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\frac{\delta f}{\delta t}(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f(t_i, y_i)\frac{\delta f}{\delta y}(t_i, y_i) + \alpha h O(h^2)$$

Svo með samanburði á (2.1) og (2.2) fæst

$$y_{i+1} - w_{i+1} = \frac{h^3}{6} f'''(c) - \alpha h O(h^2) = O(h^3)$$

Svo samkvæmt setningu 6.4 er aðferðin af stigi 2.

Dæmi 11

Leysa á fyrir $\mathbf{x}_k$ í jöfnuhneppinu $A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, k = 1, , K$, þ.e. leyst er fyrir K vigra, og vitað er að fylkið A er $n \times n$ fyrlki þar sem n er mjög stór tala og K er stór tala en A er ekki hornalínuríkjandi fylki. Mikilvægt er að útreikningar taki sem skemmstan tíma. Ef valið stendur á milli LU og Gauss-eyðingar hvorra aðferðina væri skynsamlegra að velja og hvers vegna?

Lausn:

Ef notað er Gauss-eyðingu til að leysa verkefnið þá tekur hver jafna $O(n^3)$. Ef LU þáttun fylkisins A er skilgreind þá tekur þáttunin sjálf $O(n^3)$, leysa má síðan hverja jöfnu með þáttuninni, til þess þarf bara framkvæma afturábak innsetningu. Það skref er $O(n^2)$ fyrir hverja jöfnu, nú er gert ráð fyrir að n sé mjög stór tala, í því tilfelli er vægi $O(n^2)$ því mjög lítið miðað við $O(n^3)$, þess vegna er mun æskilegra að nota LU þáttunina. Þar sem A er ekki hornalínuríkjandi er ekki víst að LU þáttunin sé skilgreind, því er best að nota annað afbrigði afð LU þáttun sem er $PA = LU$ þáttunin, en hún er skilgreind fyrir öll ferningsfylki og hefur tímaflækjuna $O(n^3)$.

Dæmi 13

Hægt er að nota hornaföll til að brúa samfellt fall á einhverju bili $[a, b]$. Gerum ráð fyrir að í hverjum punkti á bilinu $[a, b]$ megi brúa samfellda fallið $f(x)$ með fallinu

$$p(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} \{\alpha_i \cos(i2\pi x/c) + \beta_i \sin(i2\pi x/c)\}$$

þar sem $c = b - a$. Gerið ráð fyrir að $f(x)$ sé þekkt í punktunum $x_j = a + jhc$, þ.e., $y_j = f(x_j)$ er þekkt fyrir hvert j, þar sem $h = 1/(2M), j = 0, 1, , 2M$. Lýsið hvernig megi reikna stuðlana $x = (\alpha_0, \alpha_1, , \alpha_M, \beta_1, , \beta_M)^T$. Stillið upp fylkjum og vigrum eins og þarf.

Lausn:

Í þessu dæmi þarf á að meta Fourier stuðla með tölulegum aðferðum, til þess er notast við venjulegt least squares model.
Stillum upp $(2M + 1) \times (2M + 1)$ fylki X

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_0 2\pi/c) & \cos(2x_0 2\pi/c)\ldots & \cos(Mx_0 2\pi/c) & \sin(x_0 2\pi/c)\ldots & \sin(Mx_0 2\pi/c) \\ 1 & \cos(x_1 2\pi/c) & \cos(2x_1 2\pi/c)\ldots & \cos(Mx_1 2\pi/c) & \sin(x_1 2\pi/c)\ldots & \sin(Mx_2 1\pi/c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(x_{2M} 2\pi/c) & \cos(2x_{2M} 2\pi/c)\ldots & \cos(Mx_{2M} 2\pi/c) & \sin(x_{2M} 2\pi/c)\ldots & \sin(Mx_{2M} 2\pi/c) \end{bmatrix}$$

og vigri

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{2M} \end{bmatrix}$$

Leysum síðan fyrir stuðlana $\left(X^T X\right) \mathbf{x} = X^T \mathbf{y}$ og fáum minnstu kvaðrata lausnina $\mathbf{x} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \mathbf{y}$