ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ"

На правах рукописи

ЕГОРОВА ЛЮДМИЛА ГЕННАДЬЕВНА

ПОВЕДЕНЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УЧАСТНИКОВ БИРЖИ

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, с.н.с.
Алескеров Ф.Т.

Москва – 2015

Содержание

Введение

Актуальность темы.

Математическое моделирование в финансовой сфере представляет большой научный и практический интерес, так как исследование экономических систем, таких как биржи, банки, страховые и инвестиционные компании, важны как для самих участников этих систем, так и для государства с точки зрения функционирования финансовой системы страны. Вопросами математического моделирования работы биржи, банков, страховых компаний в нашей стране занимались А.Н. Ширяев [22], С.К. Завриев [8], А.А. Лобанов [24], Шананин А.А. [15,16,17], Ерешко Ф.И. [6,7], Поспелов И.Г. [16,17, 18], С.Н. Смирнов [3,14], С.Р. Моисеев [11,12,13], и др.

Изучение указанных выше экономических систем является сложной задачей, поскольку они функционируют в условиях неопределенности, вызванной вероятностной природой протекающих в них процессов, большими размерами и сложностью самих систем, а также влиянием человеческого фактора. В каждой из этих систем человек как лицо, принимающее решение, оказывает влияние на динамику изменения параметров системы, но именно для биржи это влияние является существенным, определяющим реакцию системы на принимаемые решения, и, более того, поведение самой биржи во многом определяется именно поведением участников биржи, их индивидуальными и коллективными действиями.

В классической теории финансов принята математическая модель репрезентативного агента, являющегося рациональным и принимающего решения посредством максимизации своей полезности, при этом во всех моделях поиска стратегий оптимального инвестирования на бирже, начиная с классической работы Г. Марковица [76], предполагается, что трейдеру известен закон распределения будущей цены финансовых инструментов. Обе эти предпосылки – о рациональности трейдеров и о знании им закона распределения будущей цены актива – в реальной жизни далеко не всегда выполняются: существуют многочисленные свидетельства отклонения трейдеров от рационального поведения [23,30,42,43,81,93,111]. Исследования по анализу способностей трейдеров Д. Канемана [63], Б. Барбера и Т. Одина [28,29,85], Г. Пеникаса и С. Проскурина [89], П. Содерлинда [99], Б. Малкиеля [75] выявляют неспособность трейдеров и даже финансовых аналитиков принимать правильные инвестиционные решения и предсказывать изменение стоимостей финансовых инструментов.

Эти факты заставляют взглянуть на задачу трейдера с другой стороны – не строить сложные модели поиска оптимального инвестирования при различных (часто спорных и непроверенных) предположениях о законе распределения стоимостей ценных бумаг, а оценить методами математического моделирования, на что вообще может рассчитывать трейдер при торговле на бирже, на какие принципы принятия решений ему стоит ориентироваться и какие результаты в зависимости от выбранной линии поведения он может получить.

Кроме того, почти все модели рационального агента, оптимизирующего своё поведение, требуют неизменности закона распределения цен финансовых инструментов и устойчивых оценок его параметров, что невозможно в условиях наступления финансового кризиса. А поскольку кризис предоставляет заманчивые возможности заработать большие деньги, то появляются призывы[1] зарабатывать на таких потрясениях на рынке вместо традиционных стратегий инвестирования или спекуляций. Однако будет ли успешна такая стратегия или следование подобным призывам может быть фатальным?

---

[1] Taleb N. N. The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. – London: Penguin Books, 2008.

Поэтому математическое моделирование поведения инвесторов, предпринятое в диссертации, представляется актуальным.

Цели и задачи исследования. Целью исследования является разработка и анализ математических моделей поведения участников биржи в условиях стабильной экономической ситуации и при возможности наступления экономических и финансовых кризисов, а также создание программного комплекса для анализа поведения индивидуальных участников биржи.

Задачи диссертационного исследования:

а) построить и проанализировать математические модели поведения участников биржи в условиях стабильной экономической ситуации в зависимости от их способностей, имеющейся у них информации и принципов принятия ими решений по покупке и продаже финансовых инструментов,

б) построить и проанализировать математические модели поведения участников биржи при возможности наступления экономических и финансовых кризисов,

в) провести численные расчеты и оценки различных показателей финансовых результатов деятельности трейдера на основе имеющихся статистических данных о динамике изменения стоимостей конкретных финансовых инструментов и биржевых индексов,

г) разработать инструментарий, позволяющий количественно оценивать и анализировать поведение трейдеров на основе предложенных в исследовании математических моделей, описывающих это поведение.

Объектом исследования являются индивидуальные участники биржи (трейдеры), самостоятельно принимающие решения об участии в торгах.

Предметом исследования являются поведенческие аспекты деятельности трейдеров.

Методологическую основу исследования составляют методы теории принятия решений, оптимизации в условиях неопределенности, теории вероятностей и имитационного моделирования.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1) математически сформулированы и исследованы задачи поиска оптимальной стратегии инвестирования участника биржи с учетом способностей трейдера к верному определению направления изменения стоимостей финансовых инструментов. Эти задачи принятия решений в условиях неопределенности при различных предположениях трейдера о природе неопределенности будущего поведения стоимостей финансовых инструментов, составляющих портфель трейдера, сформулированы как задачи линейного программирования,

2) предложена модель поведения участника биржи при возможности наступления финансовых кризисов как системы массового обслуживания с двумя пуассоновскими потоками заявок и показано, что способность трейдера распознать появление кризиса практически не влияет на ожидаемый доход в сравнении со способностью трейдера правильно распознавать будущее состояние биржи в периоды стабильной экономической жизни,

3) предложены модели поведения участника биржи при возможности наступления финансовых кризисов, в которых учитываются его способности к обучению на своих действиях в виде модели с поощрением за верное определение регулярных событий и модели с обучением, доказаны теоремы об оценке математического ожидания суммарного выигрыша трейдера от торговли на фондовой бирже,

4) разработан комплекс программ для численного анализа различных показателей финансовых результатов деятельности трейдера,

который может быть использован в качестве элемента системы поддержки принятия решений трейдером на бирже.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке системы математических моделей поведения участников биржи, учитывающих их способности к анализу биржевой ситуации, в частности:

1) показано, как задача поиска оптимальной стратегии инвестирования трейдера в период стабильной экономики с учетом его способностей к верному определению направления изменения стоимостей финансовых инструментов сводится к решению задачи (или пары двойственных задач) линейного программирования при различных предположениях трейдера о будущей стоимости финансовых инструментов,

2) смоделировано поведение участника биржи при возможности наступления финансовых кризисов при помощи систем массового обслуживания с двумя пуассоновскими потоками заявок (в том числе при возможности трейдера обучаться на своих действиях) и показано, что способность трейдера распознать появление кризиса практически не влияет на ожидаемый доход в сравнении со его способностью верно определять состояние биржи в периоды стабильной экономики.

Практическая значимость исследования. Создан комплекс программ, позволяющих численно оценивать результаты торговли трейдером финансовым инструментом при известной его вероятности верного определения направления изменения стоимости данного финансового инструмента, который может быть использован для поддержки принятия решений трейдера на фондовом рынке и для исследования поведенческих аспектов функционирования биржи.

Достоверность и обоснованность полученных результатов опирается на строгость использованных математических моделей, обеспечивается доказательствами соответствующих теорем и подтверждается их соответствием реальным данным финансовых рынков.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. VI Московская международная конференция по исследованию операций ORM2010 (Москва, октябрь 2010г.),
2. International Conference on Operations Research OR 2011 (Цюрих, Швейцария, сентябрь 2011г.),
3. Семинар Исследовательского Центра Банка Финляндии BOFIT (Хельсинки, Финляндия, май 2011г.),
4. Международная Конференция ВШЭ – РЭШ по анализу общего равновесия (Москва, июнь 2011 г.),
5. 16th World Congress of International Economic Association (Пекин, Китай, июль 2011г.),
6. 87th Annual Conference Western Economic Association International (Сан-Франциско, США, июнь 2012г.),
7. 26th European Conference on Operational Research EURO XXVI (Рим, Италия, июль 2013г.),
8. 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (Барселона, Испания, июнь 2014г.),
9. Second International Conference on Information Technology and Quantitative Management ITQM 2014 (Москва, июнь 2014г.)
10. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, июнь 2014г.),
11. 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies (Барселона, Испания, июнь 2014г.),
12. Семинар по дискретной математике, оптимизации и принятию решений в университете Париж-1 Пантеон Сорбонна (Париж, Франция, декабрь 2014г.),
13. Общемосковский семинар «Математические методы анализа

решений в экономике, бизнесе и политике» (НИУ ВШЭ, Москва, декабрь 2014г.),

14. 3rd International Conference on Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences (Метц, Франция, май 2015г.).

Личный вклад.

1. Автор принимал участие в разработке системы математических моделей поведения участников биржи, учитывающих их способности к анализу биржевой ситуации в виде вероятности верно определить направление движения цены финансового инструмента в следующий момент времени. Автором лично разработаны модели выбора трейдером портфеля, состоящего из основных и производных ценных бумаг, при наличии у трейдера предположений о границах изменений будущих цен финансового инструмента,
2. Автор принимал участие в создании математических моделей, описывающие влияние возможности появления биржевых кризисов на задачу трейдера, на основе систем массового обслуживания. Автором лично разработаны и исследованы математические модели поведения участника биржи при возможности наступления финансовых кризисов, в которых учитывается его способность к обучению на своих действиях, а также моделей поведения трейдеров, в которых поощряются его правильные решения.
3. Автором лично разработан комплекс программ, позволяющих численно оценивать результаты торговли трейдером финансовым инструментом при известной его вероятности верного определения направления изменения стоимости данного финансового инструмента, и проведен численный анализ некоторых

наиболее важных стратегий трейдеров.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК:

1. Алескеров Ф. Т., Егорова Л. Г. Черные лебеди и биржа // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2010. – Т. 14, № 4. – С. 492-506.
2. Aleskerov F. T., Egorova L. G. Is it so bad that we cannot recognize black swans? // Economics Letters. – 2012. – Vol. 117, No. 3. – P. 563-565.
3. Егорова Л. Г. Эффективность торговых стратегий мелких трейдеров // Проблемы управления. – 2014. – № 5. – С. 34-41.
4. Egorova L. G. Effectiveness of Different Trading Strategies for Price-takers // Procedia Computer Science. Proceedings of the 2nd International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2014. National Research University Higher School of Economics (HSE) in Moscow (Russia) on June 3-5, 2014. – 2014. – Vol. 31. – P. 133-142.
5. Belenky A.S., Egorova L.G. An Approach to Forming and Managing a Portfolio of Financial Securities by Small and Medium Price-Taking Traders in a Stock Exchange // Advances in Intelligent Systems and Computing. Proceedings of the 3rd International Conference on Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences MCO 2015. – 2015. – Vol. 359. – P. 257-268.

а также:

6. Беленький А.С., Егорова Л.Г. Две модели принятия решений участником торгов на фондовой бирже по формированию и изменению своего инвестиционного портфеля / Препринты. М.:

Высшая школа экономики. Серия WP7 "Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике". 2015. No. 02. – 32с.

7. Egorova L. G. The Effectiveness of Different Trading Strategies For Price-Takers / Working papers by NRU Higher School of Economics. Series FE «Financial Economics». 2014. No. WP BRP 29/FE/2014. – 29с.
8. Egorova L. G. Распознавание биржевых процессов как пуассоновского потока событий двух типов: модели с поощрением и обучением / Препринты. М.: Высшая школа экономики. Серия WP7 «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике». 2011. No. 02. – 32с.
9. Aleskerov F. T., Egorova L. G. Так ли уж плохо, что мы не умеем распознавать черных лебедей? / Препринты. М.: Высшая школа экономики. Серия WP7 «Математические методы анализа решений в экономике, бизнесе и политике». 2010. No. 03. – 40с.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Объем диссертации составляет 184 страницы с 11 рисунками и 19 таблицами. Список литературы содержит 113 наименований.

Глава 1. Поведение участников биржи как объект математического моделирования

Предметом настоящей главы является проблема математического моделирования поведения участников биржи и обоснование целесообразности построения альтернативных классическому подходов к моделированию поведения биржевых игроков, позволяющих учитывать поведенческие особенности участников биржи и их способности к распознаванию тенденций изменения рыночной ситуации и принятию оптимальных инвестиционных решений.

В разделе 1.1 описывается проблема математического моделирования поведения биржевых игроков как во время стабильной экономической ситуации, так и в периоды финансовых кризисов. В разделе 1.2 предлагается краткий обзор работ, связанных с моделированием поведения участников биржи, охватывающий два основных направления исследований – моделирование поведения трейдера как выбора им финансовых инструментов для формирования своего инвестиционного портфеля, и изучение поведения трейдера как процесса принятия решений с точки зрения психологии. В частности, приведены работы, посвященные описанию выявленных фактов нерационального поведения трейдеров и их систематизации, и работы, посвященные анализу способностей участников биржи правильно предсказывать будущие стоимости финансовых инструментов и принимать рациональные и оптимальные инвестиционные решения на основе этих предсказаний. Эти исследования указывают на неспособность большинства частных трейдеров и даже финансовых аналитиков правильно предсказывать будущее состояние рынка и будущее поведение цен на финансовые инструменты. В разделе 1.3 приводится обоснование целесообразности предложенного в диссертационной работе подхода к математическому моделированию поведения трейдера.

1.1 О проблеме моделирования поведения участников биржи

Биржа как регулярно функционирующий организованный оптовый рынок однородных товаров рассматривается в многочисленных работах экономистов, которые исследуют особенности функционирования всех типов бирж – товарных, фондовых, валютных, универсальных, бирж труда. Хотя закономерности всех перечисленных бирж (кроме бирж труда) практически одинаковы, наибольший интерес для прикладной науки представляют фондовые биржи, что объясняется, прежде всего, наличием широкого круга людей и организаций, желающих инвестировать собственные средства в финансовые инструменты, а также зависимостью экономической политики государства и его финансовой безопасности от стабильного функционирования биржи. Этот интерес объясняет наибольшее число научных работ в исследовании именно фондовой биржи и в настоящей диссертационной работе изложение материала ведется для фондовой биржи и обращающихся на ней ценных бумаг. Однако идеи и методы, предложенные в работе, могут быть применимы к другим видам бирж (за исключением биржи труда ввиду специфики ее биржевого товара).

Изучение законов функционирования и закономерностей поведения фондовой биржи, например, с учетом поведения «быков» и «медведей», реакции биржи на обвал акций и образование «пузырей», поведения биржи в условиях кризисов представляет объективные трудности, поскольку фондовая биржа – это сложная система, в рамках которой взаимодействует большое число элементов с неявными взаимосвязями между ними. Это изучение осложняется еще и тем, что фондовая биржа функционирует в условиях неопределенности, а главное – существенно зависит от поведения ее участников (трейдеров). Поэтому исследование биржевых процессов именно с точки зрения участников биржевой игры и построение адекватных моделей их поведения должны прояснять природу указанных выше биржевых закономерностей и феноменов.

Сложность математического моделирования поведения биржевых игроков обусловлена:

1) необходимостью адекватного описания неопределенности, присущей поведению участников рынка;

2) необходимостью учета предположений о статистических закономерностях, которые трудно выявить, подтвердить и теоретически обосновать;

3) необходимостью учета огромного объема динамически меняющейся информации;

4) невозможностью использования прогнозов и предсказаний финансовых аналитиков (вследствие их частой ошибочности) при оценке параметров модели;

5) сложностью учета возможностей наступления кризисов;

6) сложностью описания механизмов влияния и учета разной степени влияния крупных и мелких участников на динамику биржевых показателей.

1.2 Краткий обзор работ в области математического моделирования поведения участников биржи

В работах по моделированию поведения участников биржи это поведение рассматривается, как правило, с двух точек зрения:

1) с точки зрения теории принятия решений для нахождения практических правил и методов выбора трейдером финансовых инструментов для формирования своего инвестиционного портфеля (т.е. что и в каком объеме купить/продать/держать) при выдвигаемых предположениях о свойствах рынка или самого трейдера – о рациональности трейдеров, владении ими информацией и т.п.,

2) либо с точки зрения психологии для изучения причин и особенностей человеческого поведения, анализа применимости используемых в моделях первого направления предположений (в частности, о рациональности человека), выявления аномалий и парадоксов поведения с точки зрения различных теорий поведения человека, в том числе и на финансовых рынках.

В рамках первого направления далее рассматриваются три крупных подраздела: 1) классические модели формирования оптимального инвестиционного портфеля (раздел 1.2.1), 2) модели динамики стоимостей различных финансовых инструментов и выявления законов распределения будущих стоимостей финансовых инструментов, оценка их параметров на основе статистических данных (раздел 1.2.2), 3) модели биржевых кризисов для учета влияния возможности их появления на стратегии участников биржи (раздел 1.2.3). Для этих работ указаны имеющиеся недостатки, ограничивающие их практическое применение и теоретическую значимость.

Работы второго направления связаны с общим направлением исследования процессов принятия решений человеком и рациональности осуществляемых им решений с точки зрения психологии, начатые Д.Канеманом и А.Тверски, а также описанием парадоксов выбора и фактов нерационального в классическом смысле поведения человека, в том числе и на фондовой бирже. В обзоре приведены работы (раздел 1.2.4), посвященные поведенческим финансам и описанию выявленных фактов нерационального поведения трейдеров и их систематизации, и работы (раздел 1.2.5), посвященные анализу способностей участников биржи правильно предсказывать будущие стоимости финансовых инструментов и принимать рациональные и оптимальные инвестиционные решения на основе этих предсказаний. Эти исследования указывают на неспособность большинства частных трейдеров и даже финансовых аналитиков правильно предсказывать будущее состояние рынка и будущее поведение цен на финансовые инструменты.

1.2.1. Моделирование выбора трейдером оптимального портфеля вложений

Основополагающей работой по портфельному анализу по праву является работа Г. Марковица [76], получившего за нее Нобелевскую премию в 1990 году.

Г. Марковиц рассматривает проблему формирования оптимального портфеля в рамках бюджетного ограничения при двух, вообще говоря, противоречивых критериях, одним из которых является прирост капитала и который максимизируется, а вторым является риск возможных убытков, связанный с нестабильностью рынка и колебаниями цен на финансовые инструменты, и который подлежит минимизации. Множеством допустимых решений в задаче двухкритериальной оптимизации является множество портфелей, т.е. комбинаций ценных бумаг.

Предположения модели Марковица:

1) первый критерий (прирост капитала) моделируется математическим ожиданием доходности портфеля, а второй критерий (риск вложений) моделируется дисперсией доходности портфеля (такой подход называется mean-variance);

2) трейдеру известны законы распределения доходностей для каждой из ценных бумаг, причем в классической модели Марковица предполагается нормальные законы распределения;

3) доли ценных бумаг в портфеле неотрицательны (т.е. короткие продажи акций запрещены).

Математически поставленная двухкритериальная задача решается методом последовательной оптимизации критериев, что приводит либо к решению задачи квадратичной оптимизации при линейных ограничениях:

$$\begin{cases} D(R) \to min \\ M(R) = m, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (1)$$

либо к решению задачи нелинейной оптимизации с линейным критерием:

$$\begin{cases} M(R) \to max \\ D(R) = d, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (2)$$

где x_i – доля ценной бумаги i в портфеле, $M(R), D(R)$ – математическое ожидание и дисперсия доходности портфеля. Отметим, что в [76] Марковиц решал первую задачу.

Идея подхода Марковица к решению задачи состоит в построении Парето-оптимальной границы множества достижимых значений критериев на плоскости в координатах «дисперсия $D(R) = \sigma^2$ – математическое ожидание портфеля $M(R) = m$» (Рис. 1) и отыскания на этой границе оптимального решения из решения вспомогательной задачи

$$a = \sigma^2 - \lambda m \to min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n},$$

что геометрически соответствует отысканию касательной к Парето-оптимальной границе, являющейся кривой, соединяющей точки E_1-E_2 (Рис. 1), где E_1 соответствует портфелю с наименьшей дисперсией из всех доступных портфелей, а E_2 соответствует портфелю с максимальной доходностью из всех доступных портфелей. В портфельном анализе парето-оптимальная граница называется также эффективным множеством.

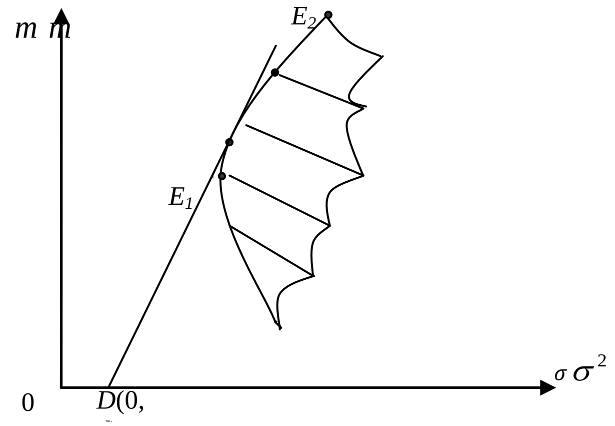

Рис. 1. Касательные к эффективному множеству

Вектор $X(\lambda) = (x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda))$, являющийся решением задачи (1), параметрически описывает все портфели из указанного Парето-оптимального множества при различных $\lambda \in [0, +\infty)$.

Марковицем было доказано, что функции $x_i(\lambda)$ являются кусочно-линейными. Значения λ, при которых производная хотя бы одной из функций $x_i(\lambda)$ терпит разрыв, называются угловыми, а соответствующие им портфели на Парето-оптимальной границе называются угловыми портфелями. Марковицем было также доказано, что угловые портфели обладают следующим свойством: участок эффективного множества между смежными угловыми портфелями описывается линейной комбинацией этих портфелей, поэтому нахождения всех угловых портфелей достаточно для определения всего эффективного множества.

Выбор конкретного портфеля зависит от предпочтений трейдера по значениям ожидаемой доходности (m) и риску (σ^2), пара которых (σ^2, m) определяют точку на Парето-оптимальной границе.

Несмотря на кажущуюся простоту построения оптимального портфеля ценных бумаг по модели Марковица, самой модели присущи следующие недостатки:

1) использование в модели в качестве критериев математического ожидания и дисперсии применимо для нормального закона распределения доходностей ценных бумаг. Однако, как правило, на реальном рынке законы распределения доходности ценных бумаг не являются нормальными, следовательно, для отыскания оптимального портфеля требуется использование моментов более высоких порядков,

2) ожидаемая доходность и дисперсия ценных бумаг рассчитываются по статистическим данным прошлых периодов, поэтому для точности вычислений требуется использовать наблюдения, полученные при стабильном состоянии фондового рынка,

3) при большом числе рассматриваемых ценных бумаг построение Парето-оптимальной границы становится вычислительно трудоемким и затратным по времени, и часто решается с помощью приближенных методов.

Несмотря на математическую обоснованность модели Марковица, она, по-видимому, не получила широкого распространения в практике биржевой работы, в частности, в силу указанных недостатков. Тем не менее, работа Марковица стала основополагающей для теоретических исследований в области инвестировании на фондовых рынков. В частности, в работах используется аналогичная идея двухкритериальной оптимизации, но с другими критериями[2], например, среднее-полудисперсия (mean-semivariance) [77], среднее-абсолютное отклонение [68], а также пороговые меры риска – среднее-VaR [62], среднее-CVaR [92] или вероятность достижения заданного уровня до-

[2] описание указанных далее мер риска см. в Приложении П.1.2.

ходности-дисперсия [70]. Однако отмеченные выше недостатки модели Марковица присутствуют и в указанных работах.

Менее известен критерий повышенной надежности (Safety-first), разработанный А. Роем в 1952г. [95].

Рой исходил из того, что не все инвесторы ставят своей целью извлечение прибыли, и моделировал поведение «осторожного» инвестора, который формирует портфель так, чтобы минимизировать вероятность наступления «плохого» события, причем под «плохим» событием понимается снижение ожидаемого дохода $M(W)$ трейдера ниже некоторого порогового уровня d.

Идея подхода Роя состоит в следующем. Пусть m и σ – ожидаемый доход и стандартное отклонение дохода W трейдера к концу инвестиционного периода. Тогда можно оценить верхнюю границу вероятности «плохого» события с помощью неравенства Чебышева:

$$P(W \leq d) \leq \frac{\sigma^2}{(m-d)^2},$$

следовательно, минимизацию вероятности наступления «плохого» события можно заменить минимизаций ее верхней границы $\frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$ или максимизацией так называемого коэффициента повышенной надежности Safety-First Ratio $\frac{m-d}{\sigma}$. Геометрически оптимальный с точки зрения теории Роя портфель (т.е. портфель P с минимальной вероятностью снижения ожидаемого дохода ниже критического уровня d) соответствует точке на Парето-оптимальной границе множества доступных портфелей, имеющей наиболее крутой наклон прямой, проведенной из точки $D(0, d)$, находящейся на оси ординат.

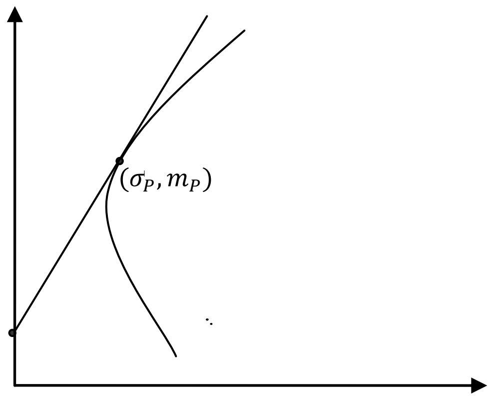

Рис. 2. Оптимальный портфель в теории Safety-first.

В теории Роя предполагается, что трейдер может по прошлой информации проанализировать поведение цен финансовых инструментов и оценить будущие стоимости $s_1, \dots, s_n$ и $\sigma_1, \dots., \sigma_n$ стандартные отклонения будущих цен n финансовых инструментов, обращающихся на бирже, а также коэффициенты корреляции $r_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, между всеми ценными бумагами.

Пусть трейдер обладает в начальный момент времени благосостоянием W_0 и приобретает ценные бумаги $i, i = \overline{1, n}$, в количестве x_i. Тогда $m = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ и $W_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Рой доказал, что при нормальном законе распределения будущих стоимостей ценных бумаг Парето-оптимальную граница является гиперболой, и вывел формулы для нахождения в случае нормального распределения самого «безопасного» портфеля

$$x_i = \frac{\lambda}{\sigma_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(p_j - \frac{d}{W_0}\right)}{\sigma_j} \frac{\rho_{ij}}{|R|}, i = \overline{1, n},$$

и соответствующей этому портфелю верхней границы вероятности снижения ожидаемого дохода трейдера ниже критического уровня d

$$P(W \le d) = \frac{|R|}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(p_i - \frac{d}{W_0}\right)}{\sigma_i} \rho_{ij} \frac{\left(p_j - \frac{d}{W_0}\right)}{\sigma_j}},$$

где $|R|$ – определитель матрицы коэффициентов корреляции $R = (\rho_{ij})$, λ – нормировочный коэффициент, определяемый из условия $W_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Недостатками этого подхода являются (также как и для подхода Марковица): 1) использование ожидаемых значений и стандартных отклонений стоимостей ценных бумаг, что оправданно лишь в случае нормального закона распределения, 2) необходимость оценивания ожидаемых значений и стандартных отклонений стоимостей ценных бумаг на основе исторических данных и, соответственно, необходимость в наличии стационарных рядов исторических цен для их оценки, 3) вычислительная сложность при использовании других (отличных от нормального) законов распределения стоимостей ценных бумаг. Кроме того, в подходе Safety-first никак не учитывается разная склонность к риску трейдеров, этот подход описывает поведение только «осторожных» инвесторов, ставящих своей целью защиту своих вложений, а не получение прибыли.

Идея Роя о минимизации риска возникновения «плохих» для инвестора ситуаций привели к возникновению концепции «стоимости под риском» (Value-at-Risk[3]) и др. пороговых мер риска, которые активно используются в настоящее время в риск-менеджменте. В развитие этой модели предложены ее модификации для динамической задачи управления портфелем [40, 99]; при условии, что цены моделируются случайным процессом с возможными скачками (jump-diffusion

[3] см. Приложение 1.2.

process) [112] или их законы распределения имеют «тяжелые хвосты» [87].

На основе описанных выше моделей управления финансовыми активами были предложены модели рыночного равновесия, например, модель ценообразования финансовых активов (Capital Asset Pricing Theory, CAPM) [98], предложенная У. Шарпом, Трейнером, Литнером и Моссином независимо друг от друга в 1960-х годах.

Предположения модели:

1) трейдеры рациональны и при составлении портфеля ориентируются на ожидаемые доходности и стандартные отклонения доходностей ценных бумаг (так же, как и в модели Марковица);

2) информация, доступная всем трейдерам, одинакова;

3) все трейдеры имеют один и тот же временной горизонт при планировании и одинаково оценивают ожидаемые доходности и стандартные отклонения по всем ценным бумагам;

4) предполагается отсутствие операциональных издержек и существование безрисковой процентной ставки r_f, по которой трейдер может взять в долг денежные средства и которая одинакова для всех трейдеров (в расчетах, как правило, используют ставку банковских вкладов или доходность долгосрочных облигаций Treasury Bills).

Идея подхода Шарпа состоит в том, что поскольку трейдеры абсолютно одинаково оценивают безрисковую ставку, ковариации, дисперсии и ожидаемые доходности каждого актива, то, следуя Марковицу, все они выбирают один и тот же портфель, который называется рыночным портфелем. Этот портфель состоит из всех ценных бумаг и доля каждой из них соответствует ее относительной рыночной стоимости.

Поскольку каждый трейдер обладает собственной функцией полезности, то он распределяет свой капитал между безрисковым активом и рыночным портфелем в такой пропорции, чтобы получить необходимый уровень риска и доходности. В силу одинаковости процентной ставки безрискового актива r_f для всех трейдеров (а также выбора всеми ими одного и того же рыночного портфеля) портфели, которые будут эффективны с точки зрения CAPM, должны находиться на одной линии в координатах риск-доходность, соединяющей точки $(0, r_f)$ и (σ_m, r_m), где r_m и σ_m – доходность и стандартное отклонение доходности рыночного портфеля. Эта линия называется рыночной линией (CML – Capital Market Line) и все портфели, не являющиеся комбинацией рыночного портфеля и безрискового актива в той или иной пропорции, будут находиться ниже рыночной линии и будут неэффективными (Рис. 3).

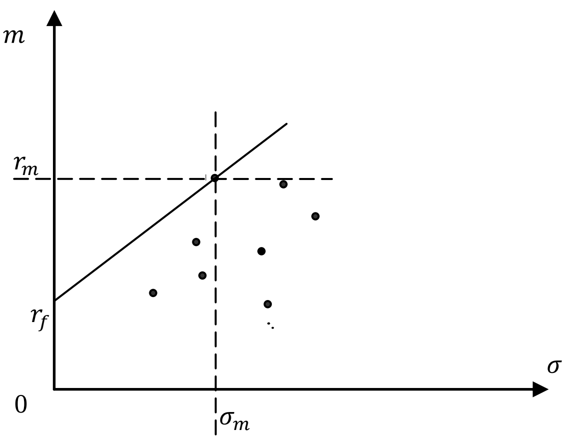

Рис. 3. Рыночная линия в модели CAPM

Уравнение рыночной линии выглядит следующим образом

$$M(r_p) = r_f + \frac{M(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_p,$$

где $M(r_p)$ и σ_p – математическое ожидание доходности и стандартное отклонение портфеля инвестора, $M(r_m)$ и σ_m^2 – математическое ожидание и стандартное отклонение доходности рыночного портфеля, r_f – безрисковая ставка доходности.

Шарп вывел для каждой ценной бумаги i зависимость ее доходности от показателей рыночного портфеля и ставки безрискового кредитования в виде

$$M(r_i) = r_f + \frac{M(r_m) - r_f}{\sigma_m^2}\sigma_{im} = r_f + \beta_i\big(M(r_m) - r_f\big),$$

где $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, r_i – доходность ценной бумаги i, σ_{im} – ковариация доходностей –ой ценной бумаги и рыночного портфеля. Таким образом, ожидаемая премия за риск $M(r_i) - r_f$ при вложении в ценную бумагу i пропорциональна среднему значению премии $M(r_m) - r_f$.

Так же Шарп предложил оценивать “меру чувствительности” актива i к изменениям на рынке бета-коэффициентом акции β_i, который определяет ее сонаправленность со всем рынком. Например, ценная бумага с коэффициентом $\beta = 1$ будет расти и падать в цене одновременно и в такой же степени, как и весь рынок, а доходность ценных бумаг с $\beta = 2$ растет и падает в том же направлении, но на вдвое большую величину, чем у всего рынка. Пользуясь этой моделью, можно определить факт недооценки или переоценки ценной бумаги по ее доходности и принять решение о включении ее в портфель инвестора. Добавление акций с $\beta > 1$ увеличивает -коэффициент всего портфеля и увеличивает риск вложений, и наоборот – включение в портфель ценных бумаг с $\beta < 1$ снижает риск.

Недостатки модели CAPM:

1) предпосылки о рациональности трейдеров, одинаковом владении информацией и одинаковой оценке доходности и риска ценных бумаг нереалистичны;

2) не учитываются многие факторы, влияющие на доходность ценных бумаг, рассматривается только зависимость от рыночного портфеля;

3) эмпирическая проверка модели показывает значительные отклонения между фактическими и расчетными данными и неустойчивость значений β во времени [33].

Несмотря на указанные недостатки, в практике модель Шарпа широко используется и значения показателя β для различных ценных бумаг рассчитываются на основе линейной регрессии $r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i$ по статистическим данным о месячной доходности ценных бумаг. В роли бенчмарка для определения r_m могут выступать значения фондовых индексов.

Еще один из классических подходов к составлению портфеля инвестиций – арбитражная теория расчетов (Arbitrage pricing theory, APT) [94], предложенная С. Россом.

Идея его подхода состоит в использовании многофакторной модели зависимости доходности ценной бумаги от различных факторов для прогноза будущей доходности:

$$r_i = a_i + b_{i1}F_1 + \cdots + b_{ik}F_k + \varepsilon_i.$$

Факторами F_j в модели APT могут быть значения фондового индекса (как показатель состояния финансового рынка), уровень процентных ставок, уровень инфляции, темпы роста ВВП, и др. Коэффициенты b_{ij} отражают чувствительность доходности финансового инструмента i к фактору F_j.

Росс рассматривает задачу трейдера о составлении портфеля $(x_1, \dots x_n)$, который не нуждается в дополнительных ресурсах трейдера, не чувствителен ни к какому фактору и имеет положительную доходность. Такой портфель, называется арбитражным (арбитраж – это получение безрисковой прибыли за счет операций с одинаковыми ценными бумагами, но с разной ценой):

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$b_{pj} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} = 0, j = \overline{1,k},$$

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i > 0,$$

где b_{pj} – чувствительность портфеля инвестора к фактору j, m_p – доходность портфеля, m_i – доходность -й ценной бумаги.

С помощью асимптотического анализа доказано, что при $n \to \infty$ путем составления арбитражного портфеля можно извлечь положительную прибыль при отсутствии риска и при нулевом начальном капитале. Отсюда следует, что (поскольку в условиях равновесного рынка арбитраж невозможен) возможность арбитража на рынке отсутствует, если выполняется следующее условие: при достаточно большом числе n активов, привлекаемых к созданию портфеля ценных бумаг, «большинство» их должно быть таково, чтобы между коэффициентами a_i, b_{i1}, …, b_{ik} должно быть выполнено «почти линейное» соотношение [22]

$$M(r_i) = a_i \approx \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{ij}.$$

Исходя из этого соотношения, Росс вывел формулу ожидаемой доходности ценной бумаги i

$$M(r_i) = r_f + b_{i1}(\delta_1 - r_f) + \cdots + b_{ik}(\delta_k - r_f),$$

где каждое δ_j равно ожидаемой доходности портфеля акций, который обладает чувствительностью b_{pj} к фактору j, равной единице, и чувствительностью к остальным факторам, равной нулю.

Недостатки модели APT:

1) выводы модели справедливы лишь в случае большого значения n, т.е. для очень больших рынков;

2) необходимость определения состава и количества факторов, влияющих на доходность ценной бумаги, для прогнозирования ее доходности (отсутствие значимых факторов и включение незначимых факторов в регрессию искажает полученные результаты).

1.2.2. Моделирование динамики стоимостей финансовых инструментов

Одной из ключевых проблем принятия решений трейдером о покупке или продаже ценной бумаги является проблема адекватной оценки поведения ее будущей стоимости (см. раздел 1.1). Знание закона распределения будущей стоимости как случайной величины необходимо для оценивания математического ожидания, а также дисперсии и других мер риска, используемых трейдерами в рамках моделей формирования оптимального портфеля. Для трейдеров, не использующих моделей оптимального инвестирования, а принимающих решения о покупке/продаже ценных бумаг на основе прогнозируемого им повышения/снижения их стоимости (такой подход характерен для трейдеров-спекулянтов или трейдеров-сторонников технического анализа), достаточно данных лишь о предполагаемом направлении изменения будущей стоимости ценной бумаги.

Методы регрессионного анализа. Для математического описания поведения будущей стоимости (или доходности) ценной бумаги широко используются методы регрессионного анализа. Например, как указано в разделе 1.2.1, в моделях CAPM и APT для оценивания параметров модели используются модели линейной регрессии вида $y = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \varepsilon$. Линейные регресионные модели используются также для исследования зависимости доходности ценной бумаги от ее дивидендной доходности (dividend yield ratio, отношение величины годового дивиденда на акцию к цене акции) [67], коэффициента «цена-прибыль» P/E (price-earnings ratio, финансовый показатель, равный отношению рыночной капитализации компании к её годовой прибыли) и коэффициента P/B (Price-to-book ratio, финансовый коэффициент, равный отношению текущей рыночной капитализации компании к её балансовой стоимости) [74], банковской процентной ставки и величины спреда (разность между лучшими ценами заявок на продажу и на покупку в один и тот же момент времени на какой-либо актив) [57].

Недостатками регрессионных моделей при их использовании для прогнозирования значений будущей стоимости / доходности ценных бумаг являются:

1) необходимость определения полного набора значимых переменных для обеспечения корректной интерпретации результатов (как известно [10], отсутствие значимой переменной приводит к смещению оценки коэффициентов при оставшихся переменных и некорректности -статистик и других показателей качества модели, а включение незначимых переменных увеличивает риск мультиколлинеарности, т.е. появлению линейной зависимости между факторами модели);

2) необходимость наличия значительного объема статистических данных для адекватной оценки параметров модели;

3) заведомая неадекватность модели в форме функциональной зависимости между объясняемыми и объясняющими переменными;

4) относительно невысокая точность получаемых прогнозов;

5) невозможность анализировать взаимосвязи между данными, доступными для обработки в форме конечных временных рядов.

Методы временных рядов. Последний недостаток регрессионных моделей является принципиальным, поскольку как показано в [82,83] практически для всех исследовавшихся временных рядов, описывающих макроэкономические показатели США, оказалось, что все регрессии, получаемые обычным методом наименьших квадратов по ним, являются кажущимися (spurious), т.е. согласно использованной модели зависимость между переменными присутствует, поскольку коэффициенты этих регрессий являются значимыми и нарушений предпосылок регрессионной модели нет, однако в действительности нет никакой зависимости между (объясняемыми и объясняющими) переменными.

По этой причине при описании макроэкономических показателей построение регрессий заменяется моделированием этих показателей в форме временных рядов специальной структуры. Однако простейшие модели такой структуры, например, модели авторегрессии (AR) вида $x_t = c + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + \varepsilon_t$, модели скользящего среднего (MA) вида $x_t = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}$, и общие модели авторегрессии-скользящего среднего (ARMA) вида $x_t = c + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$, как показано в [35], не являются адекватными описаниям финансовых рядов в силу нестационарности последних. Тем не менее, эти ряды можно превратить в стационарные путем перехода к рядам из разностей некоторого порядка d от исходного ряда, так что получившиеся ряды разностей будут описываться моделью ARMA. Такая модель называется интегрированной моделью авторегрессии (ARIMA) и в общем виде выглядит следующим образом: $\Delta^d x_t = c + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta^d x_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$. Эта модель широко используется для прогнозирования стоимостей различных финансовых инструментов [31, 60, 86].

Для моделирования такой особенности биржевых временных рядов, как чередование периодов небольшой волатильности с периодами высокой волатильности (называемой кластеризацией волатильности [47]) были предложены модели авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH) [47]. Все эти модели описывают изменения дисперсии σ_t^2 процесса $u_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2}$ либо в виде $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2$ (ARCH), либо $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$ (GARCH), и других обобщений модели ARCH. Значительное число других эконометрических моделей (а также процедур и тесты для проверки и оценивания коэффициентов в этих моделях, оценки качества модели, проверки выполнения предпосылок моделей и оценки качества прогнозов) приведены в [105].

Так же, как и модели регрессионного анализа, модели временных рядов обладают недостатками, к числу которых относится:

1) необходимость наличия значительного объема статистических данных для адекватной оценки параметров модели;

2) необходимость выбора адекватной структуры и вида модели (спецификации) временного ряда;

3) сложность непосредственной интерпретации полученных результатов;

4) трудность математического описания свойств рядов, описываемых моделями сложной структуры, условий их стационарности, методов оценки параметров;

5) значительные вычислительные трудности, связанные с оцениванием параметров моделей и проведением тестов для моделей сложной структуры.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). Другой способ описания динамики ценных бумаг связан в использованием стохастических дифференциальных уравнений, в которых изменения цены или доходности X_t биржевого товара моделируются в виде

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t,$$

где W_t – Винеровский процесс, являющийся непрерывным аналогом случайного блуждания. Случайный процесс X_t (описывающий изменение цены или доходности) можно моделировать с различными вариантами функций μ и σ. Например, для моделирования динамики процентной ставки при определении цены облигации используются следующие модели:

1) модель Мертона $dr_t = \alpha dt + \gamma dW_t$ [78] (одна из первых предложенных моделей);

2) модель Васичека $dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \gamma dW_t$ [110] отражает факт возвращения с течением времени процентной ставки к своему среднему уровню β со скоростью α;

3) модель Кокса, Ингерсола, Росса $dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \gamma(r_t)^{1/2}dW_t$ [40] учитывает зависимость волатильности $(\sigma(r_t, t) = \gamma(r_t)^{1/2})$ от значения процентной ставки r_t;

4) модель Чена [39] движения процентной ставки r_t, управляемой тремя источниками рыночных рисков

$$dr_t = (\alpha_t - r_t)dt + (\gamma_t r_t)^{1/2}dW_t, \tag{1.1}$$

$$d\alpha_t = (\alpha - \alpha_t)dt + (\alpha_t)^{1/2}dW_t^1,$$

$$d\gamma_t = (\gamma - \gamma_t)dt + (\gamma_t)^{1/2}dW_t^2,$$

в которой коэффициенты базовой модели (1.1) сами являются случайными процессами и описываются аналогичными стохастическими дифференциальными уравнениями.

Процессы Леви (см., например, [49,66,112]) также представляют собой описание динамики цены (или доходности) актива средствами стохастических дифференциальных уравнений. Эти процессы могут быть представлены суммой нескольких компонент: первая и вторая компонента, как и ранее, описывают трендовую составляющую динамики стоимости актива и колебания относительно нее, а третья моделирует изменения (скачки) стоимости актива как реакцию на какие-либо внешние (по отношению к бирже) события:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t,$$

где J_t – составной процесс Пуассона с интенсивностью потока внешних событий λ.

Недостатки методов, основанных на использовании СДУ. Помимо уже указанных недостатков, присущих регрессионнным моделям и моделям на основе временных рядов, модели в форме стохастических дифференциальных уравнений обладают следующими дополнительными недостатками:

1) сложность получения аналитического и приближенного решения для уравнений, адекватно описывающих реальные биржевые процессы, поскольку предположения, при которых выведены уравнения, сложно верифицируемы;

2) сложность математического аппарата для понимания и использования трейдерами;

3) сложность реализации решений в практической работе участников биржи.

Прочие методы. Наконец, для прогнозирования будущей стоимости ценных бумаг широко используются непараметрические методы [105], методы анализа данных и машинного обучения [48,104]. В частности, среди непараметрических методов значительную популярность в последнее время приобрели нейронные сети [47,80,84]. Хотя все указанные типы моделей имеют определенные достоинства, например, не накладывают ограничений на характер искомых зависимостей между переменными, извлекают из данных скрытые взаимосвязи и способны к обучению, этим моделям присущи те же недостатки, что и рассмотренным выше параметрическим моделям. Например, в случае нейронных сетей выбор топологии сети (количества слоев и нейронов) представляет значительные сложности, для обучения сети требуется обработка больших массивов информации, а главное – соответствие модели историческим данным не гарантирует высокой точности прогноза.

1.2.3. Моделирование биржевых кризисов

При моделировании кризисных явлений на фондовой бирже обычно различают два типа кризисов[4] – эндогенные (отражающие внутреннюю нестабильность экономической системы в целом) и экзогенные (вызванные внешними причинами, например, стихийными бедствиями, политическими потрясениями в стране или в мире, и т.п).

Моделирование биржевых кризисов на основе закона Пуассона. Для моделирования редких событий в теории страхования часто используются случайные величины, распределенные по закону Пуассона (закону редких событий) [9]. Этот же подход оказался применимым для математического описания закономерностей появления экзогенных кризисных явлений на фондовой бирже, причем, при описании указанных явлений используются как единичные, так и совокупности независимых пуассоновских процессов [36,51,61,73]. Такие идеи, как дефолт фирмы в страховой математике, имеют естественные прямые аналогии с кризисными явлениями на фондовой бирже. Действительно, идея о том, что дефолт может состояться по причине так называемых экзогенных шоков (вызванных региональными, отраслевыми,

[4] см. подробнее в Приложении П.1.5.

промышленными или мировыми шоками), созвучна идее возникновения биржевого кризиса, вызванного внешними событиями.

При этом и в том, и в другом случае наступление кризисных явлений можно моделировать одним либо несколькими независимыми пуассоновскими процессами, один из них отражает воздействие макроэкономического (или мирового) шока, другой отражает секторальные шоки в экономике, а остальные описывают индивидуальные шоки для каждой ценной бумаги [36].

Отметим, что при описании динамики стоимости финансовых инструментов с помощью процессов Леви скачкообразные изменения этой стоимости моделируется как пуассоновские потоки событий [49,66,112].

Моделирование биржевых кризисов на основе закона Хоукса (обобщение процесса Пуассона). Если текущая интенсивность какого-либо случайного процесса определяется произошедшими в прошлом событиями (экзогенными или эндогенными), то такие процессы называются self-exciting process или самовозбуждающимися процессами.

При этом, если функция интенсивности наступающих событий выражается в форме $\lambda(t) = \lambda_0(t) + \sum_{t_i<t} \sum_{j=1}^{P} \alpha_j e^{-\beta_j(t-t_i)}$, то соответствующие случайные процессы (являющиеся обобщением процесса Пуассона), называются процессами Хоукса [56]; такие процессы, например, используются при моделировании цен на финансовые активы [25,27]. В частности, в [27] стоимость финансового актива представляется в виде разности двух процессов Хоукса $p(t) = N^1(t) - N^2(t)$, один из которых моделирует поток заявок на покупку, а второй – на продажу соответствующего финансового актива; при этом интенсивность каждого из указанных двух потоков зависит от интенсивности второго. В [25] представлена модель динамики доход-

ностей активов с периодами кризисов и так называемым «заражением», т.е. ситуациями, когда событие на фондовой бирже одного региона (или страны) вызывает увеличение интенсивности наступления кризисного события как на указанной бирже, так и на фондовых биржах в других регионах.

Концепция «Черных лебедей» при моделировании биржевых кризисов. Кризисы экзогенной природы были образно названы Н.Н.Талебом в [103] «Черными лебедями»: «То, что мы будем называть Черным лебедем (с большой буквы!), – это событие, обладающее следующими тремя характеристиками. Во-первых, оно аномально, потому что ничто в прошлом его не предвещало. Во-вторых, оно обладает огромной силой воздействия. В-третьих, человеческая природа заставляет нас придумывать объяснения случившемуся после того, как оно случилось, делая событие, сначала воспринятое как сюрприз, объяснимым и предсказуемым» [103].

В книге [103] Талеб, являющийся основателем хедж-фонда «Empirica» и партнером фонда «Universa», описывает свой опыт по торговле на фондовой бирже в соответствии со стратегией ожидания «Черных лебедей». Его фонд скупал не акции и ценные бумаги, а опционы и фьючерсы на них, причем опционы с высоким страйком (цена, по которой будет реализован опцион) для опционов call и низким – для опционов put (так как чем ниже вероятность наступления какого-либо ценового события, тем дешевле сделать ставку на него). Таким образом, «Empirica» ждала возможности заработать огромные деньги единовременно с приходом кризиса (Черного Лебедя), несмотря на текущие каждодневные финансовые потери фонда, связанные с приобретением указанных опционов.

Эта концепция оказалась работоспособной дважды: заработать на «Черном Лебеде» Empirica смогла в 2000г., после чего вскоре компания была закрыта (по-видимому, из-за плохих финансовых результатов в последующие годы), аналогично Universa смогла реализовать свой шанс в 2008г. Однако следует подчеркнуть, что тем не менее никакого научного обоснования эта концепция не имеет; она является предметом анализа в главе 3.

Концепция моделирования специфических биржевых кризисов (финансовых пузырей). Как известно, финансовыми (спекулятивными) пузырями называются ситуации систематических отклонений рыночной цены актива или нескольких активов от фундаментальной, вызванные неадекватной (по каким-либо причинам) оценкой рыночной цены участниками биржевых торгов. Д. Сорнетт предложил эмпирическую модель выявления финансового пузыря на фондовом рынке как эндогенного кризиса и определения момента его исчезновения на основе лог-периодических степенных законов [101]:

$$p(t) \approx A + B(t_c - t)^{\beta} + C(t_c - t)^{\beta} \cos(\omega \ln(t_c - t) + \varphi),$$

где $p(t)$ – цена актива, t – текущее время, t_c – момент исчезновения пузыря, β, ω, φ – параметры, характеризующие динамику изменения стоимости актива.

Возникновение и исчезновение финансового пузыря Сорнетт образно назвал “Король-дракон”. В отличие от события “Черного Лебедя”, которое по определению не может быть предсказано, “Король-дракон” Сорнетта – это редкое масштабное событие, которое может быть предсказано. Эта модель позволила Сорнетту предсказать кризис 1998 года и крах интернет-компаний (dotcom crisis) в 2000г., однако предложенная им концепция ошибочно предсказала кризис в 2003-2004гг., что повлекло критику модели Сорнетта вследствие игнорирования ею внешних причин кризисов.

В отличие от эмпирического подхода Сорнетта, в ряде исследований предлагаются теоретические модели финансовых пузырей

[23, 32] и для их экспериментальной проверки предлагаются различного рода статистические тесты. В этих моделях предполагается, что рыночная стоимость ценной бумаги представляется как сумма случайных процессов $P_t = P_t^f + B_t$, где P_t^f – процесс, описывающий изменение фундаментальной цены, а B_t – процесс, отражающий отклонение от фундаментальной цены. Биржевой пузырь в момент t_k начинает формироваться, когда процесс B_t вместо случайного блуждания становится взрывным [32,58,90]. Например, в [32] случайный процесс B_t представляется в виде

$$B_{t+1} = \begin{cases} \pi^{-1}(1+R)B_t + \varepsilon_{t+1}, \text{с вероятностью } \pi \\ \varepsilon_{t+1}, \text{с вероятностью } 1-\pi \end{cases}$$

и для определения момента перехода t_k от случайного блуждания к взрывному (экспоненциальному) росту строятся различные статистические тесты, например, тесты типа Чоу для определения наличия структурного сдвига в указанной модели [58].

Моделирование биржевых кризисов на основе моделей эволюционной динамики. Еще один подход к моделированию эндогенных кризисов – это использование биологических (экологических) моделей динамики популяций, например, моделей вида «хищник-жертва» для объяснения динамики цен и наличия пузырей на рынке, рассматриваемом как экосистема. В рамках этого подхода хищниками и жертвами могут рассматриваться различные группы трейдеров, например, группы «быков» и «медведей» [79]. Также в качестве хищников могут рассматриваться высоко-квалифицированные трейдеры, а их потенциальными жертвами – менее квалифицированные трейдеры [37]. С помощью этих моделей удается описать динамику цен, волатильность рынка и предсказывать финансовые кризисы [37,79].

Модели экосистем используются также для описания кризиса как элемента бизнес-цикла на микроэкономическом уровне (т.е. на уровне отдельных фирм) [52]. В этом случае модель «хищник-жертва» описывает ситуацию, в которой производитель (фирма) постепенно наращивает контроль над производственным процессом в стабильной экономической ситуации и использует достигнутые результаты для повышения своего благосостояния за счет инвесторов (тем самым увеличивая агентские издержки). Этот процесс «опустошения» инвесторов продолжается до тех пор, пока оно не приведет фирму к кризису, что побуждает инвесторов усилить контроль за производителями и вновь приводит систему к стабильному росту.

Прочие подходы к моделированию биржевых кризисов. Существуют и постоянно появляются работы, усложняющие далее описанную выше концепцию моделирования биржевых кризисов на основе процессов Хоукса. Например, в [46] после появления события, моделируемого процессом Хоукса, появляются также так называемые «потомки» (descendants) этого события, что позволяет создавать и исследовать так называемые «ветвящиеся» структуры, состоящие из событий начальных (triggering events) и событий, появляющихся вслед за ними.

Модели regime-switching предсказывают кризисы на фондовом рынке как аномальные события в результате смены режима в соответствующей марковской цепи [55,59].

1.2.4. Поведенческие финансы

Развитие и активное применение математических методов в экономике в начале и середине XX века привели к появлению моделей репрезентативного агента, являющегося рациональным, имеющего доступ ко всей финансовой информации и умеющем ее интерпретировать верно, использующего теорию ожидаемой полезности при принятии решений в условиях неопределенности на финансовом рынке. Такие модели принятия решений трейдерами на фондовой бирже были описаны в параграфе 1.2.1. Однако вскоре были обнаружены факты, свидетельствующие о пробелах и недостатках предложенных теорий поведения трейдера, например, парадокс Алле, появление финансовых пузырей и биржевых паник, и т.п.

Г. Саймон [96] указывал на недостатки предположения о рациональности человека и ввел понятие ограниченной рациональности (bounded rationality), связанной с недостатком информации и времени для принятия решений, а также наличием когнитивных ошибок. Саймон предположил, что человек вследствие своей ограниченной рациональности не может решать большие и сложные оптимизационные задачи, требующие получения и обработки большого количества информации, и принимает решения, основываясь на некоторых эвристических правилах вместо нахождения решения посредством оптимизации. Саймон предложил концепцию принятия решений (satisficing choice), согласно которой человек выбирает те альтернативы, оценки (значения полезности) которых превышают некоторый пороговый уровень.

Д.Канеман и А.Тверски [63, 107, 108] описали эвристики (“правила большого пальца”, rule of thumb), присущие людям при принятии различных решений на основе ограниченной информации:

- эвристика репрезентативности – объект причисляется к группе объектов, если он обладает характерными признаками объектов этой группы,
- эвристика доступности – люди считают более вероятными те события, которые ему легче вспомнить или о которых он больше знает, например, те, которые чаще упоминаются в СМИ,
- эвристика якорения – люди склонны ориентироваться на некоторую точку отсчета при принятии решений.

На основе анализа многочисленных эмпирических наблюдений и психологических экспериментов, А.Тверски и Д.Канеман [64] создали в 1979г. теорию перспектив, в которой выбор человека в ситуации неопределенности моделируется не с помощью функции полезности фон Неймана-Моргенштерна, а с помощью функции ценности $v(\cdot)$, которая асимметрична относительно потерь и выигрышей и учитывает наличие точки отсчета (reference point), и весовой функции $\pi(\cdot)$, учитывающая искаженное восприятие человеком вероятностей реализации событий – люди переоценивают «малые» вероятности и, наоборот, недооценивают «средние» и «большие» вероятности (Рис. 4). Тогда индивидуум, принимающий решение, оценивает лотерею $(x, p; y, q)$, означающую получение x с вероятностью p и получение y с вероятностью q, при помощи своих весовой функции и функции ценности как значение $\pi(p)v(x) + \pi(q)v(y)$ и между различными лотереями выбирает ту, для которой соответствующее значение является наибольшим.

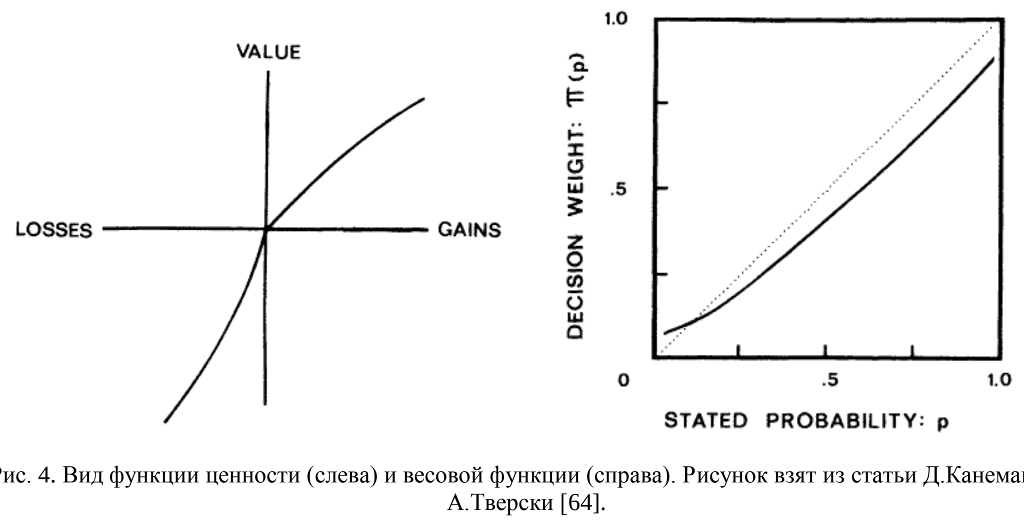

Рис. 4. Вид функции ценности (слева) и весовой функции (справа). Рисунок взят из статьи Д.Канемана и А.Тверски [64].

Впоследствии в 1992 году Д.Канеман и А.Тверски предложили кумулятивную теорию полезности [109], в которой была модифицирована весовая функция. Практического применения в задаче инвестирования на фондовом рынке теория Канемана и Тверски не нашла, поскольку построение функции ценности и весовой функции трейдера представляет собой весьма сложную задачу.

Применительно к задаче принятия решений на бирже исследователи, как правило, ограничиваются поиском фактов отклонения поведения трейдеров от рационального, а также анализом причин и источников ограниченной рациональности трейдеров [44, 49, 102], основными из которых являются:

1) нехватка времени для получения, обработки и анализа информации, необходимой для принятия инвестиционных решений. В частности, как указано в [29], частные инвесторы часто покупают «акции на слуху», т.е. такие, которые часто «мелькают» в новостях и широко известны. В [42] считают, что люди склонны больше доверять сегодняшней информации о состоянии рынка, нежели оценивать ситуацию с учетом предыстории, а также большое значение имеет доступность этой информации. Проведенные в [88] исследования дают основания утверждать, что если указанная информация не является закрытой, но весьма слабо освещена и доступна не всем игрокам, то рынок не отреагирует на нее ни ценами, ни объемами торгов финансовыми инструментами;

2) эмоциональные факторы, т.е. влияние таких эмоций, как страх, жадность и т.п., а также чрезмерная уверенность в своих действиях (overconfidence). Например, для анализа влияния эмоций трейдера на процесс принятия им решений в [71] использовались тесты на различные физиологические реакции тела (частота сердечных сокращений, пульс, кожная реакция проводимости) во время определенных рыночных событий (смена тренда, увеличение волатильности или объема торгов и др.) по сравнению с контрольными периодами стабильного рынка. Оказалось, что высокоопытные трейдеры оказались эмоционально малочувствительны к событиям на рынке ценных бу-

маг, в то время как малоопытные трейдеры более чувствительны к краткосрочным изменениям на рынке по сравнению с более опытными коллегами.

В [28,69] указано, что частные инвесторы слишком уверены (overconfident) в том, что они верно интерпретируют доступную информацию, что влечет за собой чрезмерно активное участие в торгах и большие потери трейдеров;

3) социальные факторы, т.е. влияние окружения на процесс принятия решений трейдеров и «склонность следовать за другими» (herding). Известно, что трейдеры, не имеющие ни специальных знаний, ни времени для принятия информированных решений, склонны к «имитации», т.е. копируют действия другого трейдера [93,105,111]. В качестве трейдеров (так называемых «гуру»), с которого эти трейдеры берут пример, выступают те, кого они считают более опытными, или удачливыми, или имеющими доступ к закрытой для других информации (инсайдерами). Интересно, что даже профессиональные трейдеры принимают во внимание решения других трейдеров, хотя склонность к следованию толпе у этой группы трейдеров значительно ниже, чем у менее опытных [111]. В [105] показано, что у трейдеров могут быть причины для имитации чужих решений, если это может быть выгодно для них, а в [93] при исследовании активности мелких трейдеров на рынке валютных фьючерсов был особо отмечен факт повторения мелкими спекулянтами действий крупных спекулянтов.

Стадное поведение инвесторов также анализируется в [45], в котором подобное поведение объясняется ожиданиями будущих прибылей, собственными побуждениями агентов (например, желанием менеджеров защитить свою репутацию) или же каскадной моделью, когда агент, даже имея негативную информацию относительно актива, но наблюдая за действиями других игроков, может изменить свое мнение и проигнорировать имеющуюся собственную информацию. Чрезмерное внимание к действиям соседей, даже если трейдер отслеживает и учитывает только действия успешных соседей, приводит, однако, к образованию спекулятивных пузырей и к обвалам на бирже [54].

В то же время персональные характеристики трейдеров, по-видимому, не имеют значения, в частности, попытки найти зависимость между успешностью работы трейдера и его персональными характеристиками (возраст, опыт работы трейдером, величина капитала, уровень образования и проч.) [72] или гендерной принадлежностью трейдера [89] не увенчались успехом. А выводы [38] о том, что доходность инвестиционных фондов, управляемых менеджерами со степенью PhD (а также имеющих публикации в топовых журналах по экономике и финансам) выше, чем у остальных фондов, следует считать спорными, поскольку они сделаны на основе регрессий с показателем R^2, не превышающим 1%. Спорность этих выводов иллюстрирует судьба хедж-фонда Long-Term Capital Management, потерпевшего крах в 1999г., несмотря на то, что практически половина его участников и партнеров имели ученые степени, в состав партнеров входили Р. Мертон и М. Шоулз, Нобелевские лауреаты по экономике.

1.2.5. Анализ способностей трейдеров и финансовых аналитиков к предсказанию поведения рынка и стоимостей ценных бумаг

В данном разделе приведены факты, иллюстрирующие способность (или неспособность) трейдеров и финансовых аналитиков к принятию успешных инвестиционных решений.

В [85] были проанализированы данные о сделках частных инвесторов одной из брокерских фирм за семилетний период по 10 тысячам брокерских счетов и показано, что в среднем акции, проданные трейдерами, имели большую доходность, чем купленные ими впоследствии. Кроме того, анализ сделок 66,5 тысяч брокерских счетов за пятилетний период [28] показал, что при доходности рыночного портфеля в 17,9% средняя доходность трейдеров составляет 16,4%, а среди активно торгующих трейдеров средняя доходность составляет лишь 11,4%. На этом основании авторами упомянутых работ сделан вывод о том, что трейдеры принимали неверные инвестиционные решения. В [96] описывается склонность как для профессионалов, так и для частных инвесторов продавать прибыльные ценные бумаги быстрее, чем убыточные (disposition effect), что невозможно для рационального инвестора.

Проведенный в [63] анализ прогнозов финансовых аналитиков показал, что у большинства аналитиков доля верных прогнозов не достигает 50%. В [89] оценивалась эффективность прогнозов аналитиков и экспертов российского рынка акций – лишь 56.8% экспертов были правы. Анализ прогнозов (Livingston Survey) экономистов, работающих в правительстве, банках, в области предпринимательства и в академической среде, который проводится с 1946 года Федеральным банком Филадельфии, показал, что профессиональные экономисты, по-видимому, в принципе не в состоянии предсказать поведение финансовых рынков [99].

Даже специализированные инвестиционные фонды, имеющие в штате большие команды аналитиков, использующие продвинутые методы анализа и изучения рынка ценных бумаг, не способны быть устойчиво успешными в своей финансовой деятельности. В [75] был проведен анализ финансовой деятельности хедж-фондов (т.е. инвестиционных фондов, подверженных более слабому государственному регулированию) за период 1994-2003гг. Было показано, что более половины из них не могут обеспечить доходность своих портфелей выше рыночной, что означает, что использование даже пассивной стратегии инвестирования «купи и держи» (buy and hold) принесло бы клиентам фонда больший доход, чем доход от вложения аналогичной суммы в хедж-фонд. Кроме того, в [75] подсчитали количество фондов, показавших результат выше среднего в течение двух последовательных лет. Доля таких устойчиво успешных второй год подряд фондов составляет примерно 50% каждый год. Например, из 18 фондов, обыгравших рынок в 1995 году, лишь 11 повторили результат в следующем 1996 году (61%), а для 788 успешных фондов в 2002 году доля повторивших положительный финансовый результат в 2003 году составляет только 40 % (312 фондов).

1.3. Обоснование целесообразности предложенных в диссертационной работе методов к анализу поведения участников биржевых торгов

Приведенный в предыдущем разделе краткий обзор существующих моделей и методов анализа поведения участников биржевых торгов показывает, что изучение поведения участников биржевых торгов должно охватывать две группы проблем: 1) краткосрочные стратегии проведения ежедневных биржевых операций, 2) стратегии долгосрочного инвестирования в финансовые инструменты.

Стратегии краткосрочных операций существенно зависят от знания трейдером существующих методов и моделей анализа фондовых рынков, от возможности воспользоваться ими для достижения поставленных инвестиционных целей и рациональности трейдеров, желания применять эти модели на практике. Интерес трейдера к указанным методам и моделям в значительной мере определяется их доступностью для понимания биржевыми игроками, не обладающими специальной математической подготовкой, а также от способности этих методов решать интересующие трейдера задачи, в частности, в условиях большой размерности задач и за приемлемое для него время. В то же время проведенный обзор показывает, что даже понимание существа подавляющего большинства средств анализа и прогнозирования динамики изменения стоимости финансовых инструментов либо требует специальной математической подготовки, либо привлечения консультантов, обладающих такой подготовкой.

Следовательно, существует потребность в создании новых математических моделей поведения трейдеров, учитывающих их способности к игре на бирже и их возможную нерациональность, для оценки ими своих шансов по достижению желаемых инвестиционных целей. К числу перспективных моделей, учитывающих неопределенность при принятии решения ЛПР и хорошо зарекомендовавших себя при исследовании сложных систем, относятся теоретико-игровые модели и модели, основанные на использовании элементов теории массового обслуживания, в которых удается сочетать вычисление параметров соответствующих моделей на основе доступных для измерения и анализа статистических данных с методами решения математических задач большой размерности, а также допускающие интерпретацию в биржевых терминах, естественную и понятную для любых участников биржевых торгов.

По этой причине создание новых математических моделей, которые удовлетворяли бы указанным требованиям и были бы доступны каждому трейдеру, а также экономистам, исследующим поведение участников биржевых торгов и не являющимися специалистами в области прикладной математики, является актуальной задачей научных исследований. Такой инструментарий предложен в диссертационной работе и описан в главе 2.

В то же время, даже наличие подобного рода инструментариев (понятных и простых в практическом использовании), по-видимому, не в состоянии гарантировать их использование каждым из участников биржевых торгов, и проведенный обзор показывает, что многие из них предпочитают полагаться на собственную интуицию при принятии решений об инвестировании средств в финансовые инструменты. Прежде всего, это относится к начинающим трейдерам, не имеющим достаточного опыта торгов на бирже и подвергающих свой капитал зачастую неоправданному риску. Для участников биржевых торгов, попадающих в эту категорию, представляется целесообразным создание методов, позволяющих прежде всего оценить способность конкретного индивидуума прогнозировать динамику изменения стоимостей интересующих его финансовых инструментов со степенью точности, обеспечивающей, по крайней мере, избежание потерь исходного капитала, выходящих за пределы приемлемых для него размеров. Соответствующие модели в виде комплекса программ разработаны в диссертационной работе и описаны в главе 4.

Хорошо известно, что некоторым участникам биржевых торгов сопутствует удача при следовании ими стратегиям, которые не поддаются строгой формализации и обоснованию. Более того, те из них, которым удается добиться существенного увеличения собственного капитала в результате использования такой стратегии, ставят под сомнение не только эффективность существующих моделей и методов анализа фондового рынка, но и потенциальную возможность их создания. В частности, в известной книге Н.Н.Талеба [103] читателю предлагается именно эта точка зрения: автор утверждает, что вообще математические модели, предложенные ведущими экономистами мира, лауреатами Нобелевской премии Полом Самуэльсоном и Кеннетом Эрроу, описывающие и обосновывающие количественные изменения финансовых показателей фондовых рынков и рациональность поведения на них экономических агентов, представляют собой не более чем математические упражнения с экономическими объектами, результаты которых бесконечно далеки от реальной жизни.

Автор ссылается на собственный опыт торговли на фондовом рынке, по существу являющийся не более чем проявлением везения конкретному человеку, и призывает читателей следовать этому опыту, тем самым считая свой опыт соизмеримым по значимости с выводами, полученными указанными ведущими экономистами мира. Поэтому в диссертационной работе глава 3 посвящена количественному анализу «гипотезы» Талеба и обоснована ее несостоятельность по крайней мере как долгосрочной стратегии.

Таким образом, представленные в диссертационной работе исследования направлены на решение актуальных задач, связанных с анализом поведения участников биржевых торгов, и их результаты могут рассматриваться как полезные для количественного анализа фондовых рынков, в известной мере заполняющие выявленные пробелы в части создания моделей и методов:

а) понятных для понимания и удобных для использования трейдерами, не обладающими математической подготовкой;

б) позволяющих достаточно достоверно оценивать способности к верному определению направления изменения стоимостей финансовых инструментов и, тем самым, способствовать предотвращению финансового краха участника биржевых торгов;

в) способных количественно оценить долгосрочные перспективы конкретных финансовых стратегий в соответствии с существующими экономическими теориями и обоснованность гипотез отдельных удачливых трейдеров, стремящихся представить свои гипотезы как теории, альтернативные существующим.

Такая структура работа согласуется с тем, что роль математических моделей биржи состоит в объяснении и выявлении экономических закономерностей работы биржи и, в частности, поведения участников биржевых торгов, в то время как задача прикладных исследований – создавать инструментарии, применение которых игроками, действующими на бирже, способно на эти законы влиять.

Заключение по Главе 1

В этой главе мы проанализировали основные математические модели оптимального инвестирования, а также модели и методы количественного оценивания динамики изменения финансовых показателей, указали их недостатки. Обзоры эмпирических исследований, связанных с поведением участников биржевых торгов, указывают на необходимость создания новых математических моделей для количественной оценки способности трейдеров верно определять направления изменения биржевых показателей (в частности, стоимостей финансовых инструментов).

Также отмечена необходимость создания моделей для оценки перспективности стратегий ожидания наступления кризисных явлений («Черных лебедей») на фондовой бирже в долгосрочной перспективе.

Глава 2. Моделирование поведения участников фондовой биржи в условиях стабильной экономической ситуации

Вторая глава посвящена моделированию поведения трейдера в условиях стабильной экономической ситуации в предположении, что трейдер может прогнозировать будущее состояние биржи с некоторой вероятностью. Раздел 2.1 посвящен исследованию способности участника верно определять направления изменения стоимости конкретных финансовых инструментов. В разделе 2.2 показано, что при наличии у трейдера предположений о законе распределения будущих цен на финансовые инструменты, по которым трейдер способен правильно предугадывать направления изменения будущих цен финансовых инструментов, задачу отыскания оптимальных стратегий инвестирования трейдера в финансовые инструменты можно сформулировать как задачу линейного программирования. В разделе 2.3 показано, что при отсутствии у трейдера предположений о законе распределения будущих цен финансовых инструментов можно оценить гарантированный выигрыш трейдера, рассматривая задачу отыскания оптимальных стратегий инвестирования трейдера как игру с природой, в которой природа как игрок предлагает трейдеру наиболее неблагоприятные для трейдера варианты изменения цен на включенные им в портфель финансовые инструменты. Для такой задачи описана структура игры и доказана теорема о возможности отыскания ее решения из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару. В разделе 2.4 описан способ учета в задаче трейдера производных финансовых инструментов – опционов и фьючерсов.

2.1 Исследование способности участника определять направления изменения стоимости конкретных финансовых инструментов

Способность трейдера предсказывать будущее поведение рынка или конкретных финансовых инструментов является ключевой характеристикой трейдера, которую мы рассматриваем.

Для выявления такой способности у трейдера можно воспользоваться, например, схемой Бернулли – провести серию испытаний, в каждом из которых определенное событие (в нашей задаче верное определение направления движения цены конкретного финансового инструмента в следующий момент времени) происходит в некоторой вероятностью p [9].

Для организации таких серий из n испытаний необходимо n раз предоставить трейдеру статистические данные в виде временных рядов стоимостей выбранного им финансового инструмента (длину ряда трейдер может выбрать самостоятельно исходя из собственной методики составления прогноза) и предложить ему спрогнозировать цену этого финансового инструмента на следующий момент. Затем необходимо сравнить его выбор с реальной стоимостью этого финансового инструмента на следующий момент. Доля успешно спрогнозированных трейдером будущих стоимостей этой ценной бумаги может служить оценкой вероятности трейдера верно определить направление изменения цены финансового инструмента.

Применение схемы Бернулли требует выполнения следующих условий:

1) каждое испытание имеет ровно два исхода,

2) испытания должны быть независимыми, т.е. вероятность того или иного исхода не зависит от того, какие исходы имели другие испытания,

3) вероятность успеха должна быть постоянной для всех испытаний.

Первое условие схемы Бернулли очевидным образом выполняется, т.к. в этих испытаниях трейдер может либо правильно, либо неправильно определить направление изменения стоимости ценной бумаги по сравнению с текущим значением. Для выполнения второго условия необходимо обеспечить одинаковые условия проведения испытаний, т.е. для принятия решений всегда предоставлять трейдеры временные ряды одинаковой длины и выбирать эти ряды из доступной совокупности статистических данных случайным образом.

Третье условие может не выполняться для трейдеров-новичков, которые учатся играть на бирже и накапливают опыт, позволяющий им все чаще успешно определять направление движения цен, поэтому трейдеру перед прохождением испытаний желательно иметь опыт торговли либо на реальной бирже, либо на учебных торгах, открывая демо-счета и заключая сделки на виртуальные средства (подобные услуги оказывают многие брокерские и инвестиционные компании).

При выполнении всех этих условий вероятность в серии из n опытов получить ровно m верно угаданных направлений будущих цен равна $P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, т.е. число верно угаданных направлений цен является случайной величиной, подчиняющейся биномиальному закону распределения [9].

Согласно теореме Бернулли (следствию из теоремы Чебышева для схемы Бернулли), при большом числе проведенных испытаний частота $\frac{m}{n}$ верно определенных трейдером направлений движения цен финансового инструмента сходится по вероятности к вероятности верного определения направления движения этой цены в отдельном испытании:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon_1\right) = 1.$$

Следовательно, в качестве оценки способности трейдера верно определять направление движения стоимостей ценных бумаг можно взять долю верных прогнозов трейдера в серии испытаний при достаточно большом числе этих испытаний.

Точность ε_1 оценки вероятности p трейдера верно определить направление изменения цены финансового инструмента зависит от числа проведенных испытаний n по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon_1\right) = \sum_{(p-\varepsilon_1)n\le m\le(p+\varepsilon_1)n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Результаты численных расчетов по оценке минимального числа испытаний n для достижения заданной точности ε_1 оценки параметра p с вероятностью $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon_1\right) \ge \varepsilon_2$ приведены в Табл. 1.

Табл. 1. Необходимое число испытаний $\boldsymbol{n}$ для достижения заданной точности оценки параметра $\boldsymbol{p}$

	$\varepsilon_1 = 0.1$		$\varepsilon_1 = 0.05$		$\varepsilon_1 = 0.01$	
p	$\varepsilon_2 = 0.9$	$\varepsilon_2 = 0.99$	$\varepsilon_2 = 0.9$	$\varepsilon_2 = 0.99$	$\varepsilon_2 = 0.9$	$\varepsilon_2 = 0.99$
0.1 и 0.9	10	43	64	204	2260	5805
0.2 и 0.8	32	92	142	394	4155	10512
0.3 и 0.7	42	127	193	533	5505	13805
0.4 и 0.6	51	141	235	604	6355	15755
0.5	51	151	241	632	6601	16401

Видно, что для получения оценки (с точностью $\varepsilon_2 = 0.99$) вероятности p с точностью до первого знака после запятой требуется не более 151 испытания, а для получения оценки с точностью до второго знака – не более 16401 испытаний. Очевидно, что проведение необходимого числа n испытаний и достижение точности $\varepsilon_2 = 0.99$ возможно при условии написания программного кода, имитирующего действия человека согласно выбранной им стратегии. Для трейдера, принимающего решения «по наитию», а не на основе какой-либо формализованной стратегии (проще говоря, пытающегося «угадать» будущее значение цены), проведение уже 632 испытаний может быть нелегкой задачей.

2.2 Задача поиска оптимальных стратегий инвестирования трейдеров в финансовые инструменты при наличии у трейдера предположений о законе распределения будущих цен финансовых инструментов

2.2.1. Обозначения и предположения

Для удобства изложения каждой ценной бумаге, обращающейся на фондовой бирже, присвоим номер из множества $N = \{1,2,\dots,n\}$, где $i \in N$ обозначает ценную бумагу, находящуюся в множестве N под номером i.

Пусть:

$t_0 < \dots < t < \ t+1 < t+2 < \cdots$ – моменты времени, в которые трейдер принимает решения об изменении своего инвестиционного портфеля;

m_t (от слова money) – некоторая сумма наличных средств (часть капитала), оставшаяся после формирования портфеля вложений;

W_t (от слова wealth) – капитал в виде наличных денег m_t и имеющихся в портфеле трейдера ценных бумаг в момент времени t;

$s_{i,t}$ (от слова spot) – это спот-цена или стоимость ценной бумаги i в момент времени t, т.е. цена, по которой продается ценная бумага в момент времени t на условиях немедленного совершения сделки;

$v_{i,t}$ (от слова volume) – это число единиц ценной бумаги i, приобретенных трейдером в момент времени по цене $s_{i,t}$.

Основные предположения о поведении трейдера в момент времени t:

1) трейдер обладает выявленными (по результатам испытаний, описанных в разделе 2.1) способностями по оценке биржевой ситуации, выраженными в виде известных ему вероятностей p_i верно определить направление изменения будущей стоимости финансового инструмента i в момент времени $t+1$, т.е. предсказывать будет ли она расти или снижаться в следующий момент времени $t+1$;

2) трейдер в момент времени t разделяет все множество ценных бумаг N на попарно непересекающиеся подмножества I_t^+, I_t^-, I_t^0, где

I_t^+ – множество ценных бумаг, относительно которых трейдер считает, что они вырастут в цене в момент времени $t+1$ и которые он собирается покупать в момент времени t;

I_t^- – множество ценных бумаг, относительно которых трейдер считает, что они снизятся в цене в момент времени $t+1$ и которые он собирается продавать в момент времени t;

I_t^0 – множество ценных бумаг, относительно которых трейдер считает, что они не изменятся в цене в момент времени $t+1$ (либо считает будущие изменения слишком незначительными, чтобы на них реагировать) и которые он не собирается ни продавать, ни покупать в момент времени t;

3) для покупки ценных бумаг из множеств I_t^+ трейдер может тратить наличные средства m_t и средства, вырученные от продажи в этот момент времени ценных бумаг из I_t^- (как из собственного портфеля, так и взятых взаймы, если такой кредит доступен трейдеру); аналогично, для продажи ценных бумаг $i \in I_t^-$ он может использовать собственные запасы в размере $v_{i,t}$, а также занимать у брокера, если это ему доступно;

4) трейдер не производит никаких действий с ценными бумагами из множества I_t^0.

Для упрощения записи математических моделей будем считать, что трейдер работает только с первичными ценными бумагами (акциями, облигациями и пр.) и не работает с производными ценными бумагами (опционами, фьючерсами и пр.), а также выставляет только рыночные заявки[5]. Включение в портфель производных ценных бумаг требует небольших изменений в задачах, описываемых далее, и будет описано в разделе 2.4.

2.2.2. Формулировка задачи отыскания оптимальной стратегии инвестирования трейдером.

В момент времени t трейдер обладает портфелем ценных бумаг в размере $v_{i,t}, i = \overline{1,n}$ и некоторым объемом наличных денег m_t, следовательно, его благосостояние на этот момент равно $W_t = \sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t} + m_t$. Задача трейдера состоит в выборе объемов покупки ценных бумаг $x_{i,t}^{+}$ из множества I_t^{+}, относительно которых трейдер ожидает увеличения их стоимости в момент $t+1$, объемов продажи $x_{i,t}^{-}$ ценных бумаг из текущего портфеля ценных бумаг из множества I_t^{-} и объемов продажи $z_{i,t}^{-}$ ценных бумаг из множества I_t^{-} в результате открытия короткой позиции[6].

Следовательно, благосостояние трейдера на момент $t+1$ составит:

$$W_{t+1} = \sum_{i \in I_t^0} v_{i,t} s_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^+} \left[v_{i,t} + x_{i,t}^{+}\right] s_{i,t+1} + \sum_{i \in I_t^-} \left[v_{i,t} - x_{i,t}^{-}\right] s_{i,t+1} +$$

$$+ \left(m_t - \sum_{i \in I_t^+} x_{i,t}^{+} s_{i,t} + \sum_{i \in I_t^-} x_{i,t}^{-} s_{i,t} + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^{-} \left[s_{i,t} - s_{i,t+1}\right] \right), \qquad (2.1)$$

где первые три слагаемых обозначают благосостояние трейдера в виде принадлежащих ему ценных бумаг, а последнее слагаемое равно сум-

---

[5] см. Приложение П.1.3.
[6] см. Приложение П.1.3.

ме средств, оставшихся после совершения всех сделок по купле/продаже ценных бумаг к моменту времени $t+1$, включая возврат заемных ценных бумаг.

Следовательно, прирост стоимости портфеля после совершения всех сделок составит

$$\Delta W_{t+1} = \sum_{i \in I_t^0} v_{i,t}(s_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i \in I_t^+} (v_{i,t} + x_{i,t}^+)(s_{i,t+1} - s_{i,t}) +$$

$$+ \sum_{i \in I_t^-} (v_{i,t} - x_{i,t}^-)(s_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^-(s_{i,t+1} - s_{i,t}), (2.2)$$

Здесь величины $v_{i,t}$, $s_{i,t}$, m_t, $i \in I_t^+, I_t^-$ являются известными действительными числами, а $s_{i,t+1}, i \in I_t^+, I_t^-$ является случайными величинами, законы распределения которых должны быть связаны с вероятностями p_i следующим образом:

Табл. 2. Закон распределения ценной бумаги из множества $\boldsymbol{I_t^+}$

$s_{i,t+1}, i \in I_t^+$	$s_{i,t+1} > s_{i,t}$	$s_{i,t+1} \leq s_{i,t}$
P	p_i	$1 - p_i$

для ценных бумаг из множества $i \in I_t^+$ и

Табл. 3. Закон распределения ценной бумаги из множества $\boldsymbol{I_t^+}$

$s_{i,t+1}, i \in I_t^-$	$s_{i,t+1} \geq s_{i,t}$	$s_{i,t+1} < s_{i,t}$
P	$1 - p_i$	p_i

для ценных бумаг из множества $i \in I_t^-$. Будем считать далее, что стоимости ценных бумаг $i, j \in N$ являются независимыми случайными величинами.

При этом трейдер должен учитывать ограничения следующего вида:

1) условия неотрицательности объемов покупок/продаж ценных бумаг:

$$x_{i,t}^+ \geq 0, i \in I_t^+,$$

$$x_{i,t}^{-} \geq 0, i \in I_t^{-},$$

$$z_{i,t} \geq 0, i \in I_t^{-};$$

2) объем продажи ценных бумаг в количестве $x_{i,t}^{-}$ из собственного портфеля ценных бумаг не может превышать имеющийся у него объем $v_{i,t}$:

$$x_{i,t}^{-} \leq v_{i,t}, i \in I_t^{-},$$

при этом мы предполагаем, что если трейдер планирует продать ценную бумагу i в количестве, превышающем имеющийся у него объем $v_{i,t}$, то он совершает дополнительно к продаже этого объема $v_{i,t}$ заем ценных бумаг в количестве $z_{i,t}$ для открытия короткой позиции;

3) ограничение по величине доступного заемного капитала при использовании маржинальных кредитов[7] с кредитным плечом $1{:}\,k_t$ при условии нехватки собственного капитала для покупки ценных бумаг или при открытии короткой позиции:

$$\sum_{i \in I_t^{+}} x_{i,t}^{+} s_{i,t} + \sum_{i \in I_t^{-}} z_{i,t}^{-} s_{i,t} - \left(m_t + \sum_{i \in I_t^{-}} x_{i,t}^{-} s_{i,t} \right) \leq k_t \left(m_t + \sum_{i=1}^{n} v_{i,t} s_{i,t} \right)$$

где первые два слагаемых в левой части означают затраты на осуществление сделок по купле/продаже ценных бумаг, третье слагаемое – имеющийся в наличии у трейдера в момент t капитал в виде собственных денежных средств m_t и средств, полученных от продажи собственных ценных бумаг из инвестиционного портфеля, в правой части – максимально доступный капитал с учетом заемных средств при доступном в момент t кредитном плече k_t ($k_t = 1$ означает отсутствие маржинального кредита и использование собственного капитала при осуществлении сделок).

[7] см. Приложение П.1.3.

Также трейдер может, например, учитывать условие существования некоторого порога α, относительно которого трейдер определяет критический момент остановки своей торговли на бирже $W_{i,t+1} \geq \alpha W_{i,t}$, т.е. трейдеру необходимо удерживать собственное благосостояние не ниже какого-то конкретного уровня $\alpha \in [0,1]$, в том числе при $\alpha = 1$ $W_{i,t+1} \geq W_{i,t}$.

2.2.3. Сведение задачи поиска оптимальной стратегии инвестирования трейдера к задаче линейного программирования.

Предположим далее, что трейдер, играющий на фондовой бирже, в момент времени t может выдвинуть предположения о законе распределения стоимостей ценных бумаг в момент времени $t+1$, или, как минимум, установить границы (пороги) изменений $s_{i,t+1}^{max}$ и $s_{i,t+1}^{min}$ стоимости ценных бумаг $i \in I_t^+, I_t^-$ в момент времени $t+1$.

Такие границы могут быть определены в техническом[8] анализе на основе прошлых наблюдений (так называемые уровни поддержки и уровни сопротивления) или в фундаментальном анализе при оценке фундаментальной (справедливой) стоимости ценной бумаги i. Трейдер может выставить стоп-заявки[9] по указанным границам для недопущения потерь по длинным позициям в случае падения стоимостей ценных бумаг ниже уровня s_{t+1}^{min} и по коротким позициям в случае роста цен выше уровня s_{t+1}^{max}, соответственно.

Такие неравенства могут быть также связаны с техническими условиями проведения торгов, например, с требованием приостановки биржевых торгов ценной бумагой в случае ее значительного отклонения (на 20%) от цены закрытия предыдущего торгового дня[10]. Таким

---

[8] см. Приложение П.1.2.
[9] см. Приложение П.1.3.
[10] Организатор торговли, оказывающий услуги по проведению организованных торгов ценными бумагами, приостанавливает организованные торги акциями

образом, если трейдер занимается дневной торговлей, он может рассчитывать, что в течение дня стоимость ценной бумаги будет в пределах $\left[0.8s_{i,t},;1.2s_{i,t}\right]$.

Если трейдер может оценить границы изменений, но не может сделать предположений о законе распределения будущей стоимости ценной бумаги в указанных им границах, то естественно использовать принцип индифферентности (принцип недостаточного основания), т.е. предположить равновероятность значений будущих цен в указанных им интервалах. Таким образом, трейдер считает, что изменение стоимости ценной бумаги i в сторону увеличения и изменение стоимости ценной бумаги i в сторону уменьшения по отношению к текущему значению $s_{i,t}$ являются непрерывными случайными величинами u и v, равномерно распределенными на промежутках $[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}]$ и $[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}]$, соответственно, с плотностями распределения

$$f_1(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_{i,t+1}^{max} - s_{i,t}}, при\ u \in \left[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}\right], \\ 0, при\ u \notin \left[s_{i,t}, s_{i,t+1}^{max}\right], \end{cases}$$

$$f_2(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_{i,t} - s_{i,t+1}^{min}}, при\ v \in \left[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}\right], \\ 0, при\ v \notin \left[s_{i,t+1}^{min}, s_{i,t}\right]. \end{cases}$$

Если трейдер прогнозирует для ценной бумаги i, что ее стоимость вырастет по сравнению с текущей стоимостью $s_{i,t+1} > s_{i,t}$, то

определенного выпуска, входящими в расчет индекса, изменение значения которого используется организатором торговли в целях приостановки организованных торгов, осуществляемые на основании безадресных заявок, при превышении или снижении на 20 процентов - в течение 10 минут подряд текущих цен акций, рассчитанных в течение данной торговой сессии, от цены закрытия акций предыдущего торгового дня (п. 1.15.1. Положения о деятельности по проведению организованных торгов N 437-П от 17.10.2014. http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_174191/)

математическое ожидание значения стоимости ценной бумаги вида i составит $Ms_{i,t+1} = \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$, а если, наоборот, прогнозирует снижение ее стоимости $s_{i,t+1} < s_{i,t}$, то математическое ожидание стоимости ценной бумаги i составит $Ms_{i,t+1} = \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$. Возможно также, что по ценной бумаге i трейдер не может высказать ни одного из указанных выше предположений, тогда естественно предполагать, что стоимость ценной бумаги i остается без изменения, т. е. $s_{i,t+1} = s_{i,t}$.

Если в момент времени t трейдер предполагает (с вероятностью p_i), что в момент $t+1$ стоимость ценной бумаги i возрастет, т.е. $i \in I_t^+$, то среднее значение стоимости этой ценной бумаги составит $\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$. Если же в момент t решение трейдера относительно этой ценной бумаги ошибочно, то естественно предположить, что возможны два события – стоимость ценной бумаги i в момент времени $t+1$ уменьшится либо стоимость ценной бумаги i в момент времени $t+1$ не изменится по сравнению с ее значением в момент времени t. Ясно, что эти два события несовместны, причем трейдер, следуя принципу индифферентности предполагает, что эти события равновозможны, а значит, каждое из них происходит с вероятностью $\frac{1-p_i}{2}$.

Следовательно, среднее значение стоимости ценной бумаги $i \in I_t^+$ в результате предположений трейдера представляет собой дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается следующей таблицей:

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^+$	$\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$	$\frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$s_{i,t}$
P	p_i	$\frac{1-p_i}{2}$	$\frac{1-p_i}{2}$

Если трейдер в момент времени t предполагает с вероятностью p_i, что в момент $t+1$ стоимость этой ценной бумаги уменьшится, т.е. $i \in I_t^-$, то рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, позволяют заключить, что эту ценную бумагу трейдер может рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается следующей таблицей:

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^-$	$\frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$	$s_{i,t}$
P	p_i	$\frac{1-p_i}{2}$	$\frac{1-p_i}{2}$

И для предположений трейдера о ценной бумаге i как о ценной бумаге из множества $i \in I_t^0$ аналогичные рассуждения позволяют рассматривать эту ценную бумагу как дискретную случайную величину, принимающую три значения, ряд распределения которой задается следующей таблицей:

$Ms_{i,t+1}, i \in I_t^0$	$s_{i,t}$	$\frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2}$	$\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}$
P	p_i	$\frac{1-p_i}{2}$	$\frac{1-p_i}{2}$

Следовательно, математические ожидания $Ms_{i,t+1}$ вычисляются по следующим формулам:

$$Ms_{i,t+1} = p_i \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} s_{i,t}, i \in I_t^+,$$

$$Ms_{i,t+1} = p_i \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2} + \frac{1-p_i}{2} s_{i,t}, i \in I_t^-,$$

$$Ms_{i,t+1} = p_i s_{i,t} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t+1}^{min} + s_{i,t}}{2} + \frac{1-p_i}{2} \frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}^{max}}{2}, i \in I_t^0.$$

Если же трейдер может выдвинуть какие-либо предположения о законе распределения будущих стоимостей ценных бумаг из множеств I_t^+, I_t^-, согласующихся с Табл. 2 и Табл. 3, то аналогично приведенным выше рассуждениям можно вычислить математические ожидания будущих стоимостей ценных бумаг $Ms_{i,t+1}$ из этих множеств.

Пусть, например, трейдер ищет оптимальную стратегию по изменению своего портфеля инвестиций в момент t, решая задачу максимизации математического ожидания приращения стоимости портфеля при наличии ограничений всех типов, причем порог $\alpha = 1/2$:

$$M[\Delta W_{t+1}] = \sum_{i\in I_t^0} v_{i,t}(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i\in I_t^+}(v_{i,t} + x_{i,t}^+)(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) +$$

$$+\sum_{i\in I_t^-}(v_{i,t} - x_{i,t}^-)(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^-(Ms_{i,t+1} - s_{i,t}) \to max$$

$$\sum_{i\in I_t^0} v_{i,t} Ms_{i,t+1} + \sum_{i\in I_t^+}\left[v_{i,t} + x_{i,t}^+\right] Ms_{i,t+1} + \sum_{i\in I_t^-}\left[v_{i,t} - x_{i,t}^-\right] Ms_{i,t+1} +$$

$$+\left(m_t - \sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+\, Ms_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^-\, s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^-\left[s_{i,t} - Ms_{i,t+1}\right]\right) \geq \alpha\left[\sum_{i=1}^{n} v_{i,t}s_{i,t} + m_t\right],$$

$$\sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+\, s_{i,t} + \sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^- s_{i,t} - \left(m_t + \sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^-\, s_{i,t}\right) \leq k_t\left(m_t + \sum_{i=1}^{n} v_{i,t}s_{i,t}\right), \quad (2.3)$$

$$x_{i,t}^- \leq v_{i,t}, i \in I_t^-,$$

$$x_{i,t}^+ \geq 0, i \in I_t^+,$$

$$x_{i,t}^- \geq 0, i \in I_t^-,$$

$$z_{i,t} \geq 0, i \in I_t^-,$$

Таким образом, задача (2.3) поиска оптимальной стратегии трейдера в момент времени t, т.е. оптимального перераспределения его портфеля вложений в момент времени t, при указанных предположениях сводится к задаче линейного программирования, решение которого можно легко найти с помощью любого современного математического программного обеспечения.

2.3 Оценка гарантированного выигрыша трейдера при отсутствии у него предположений о законе распределения будущих цен финансовых инструментов

Пусть теперь трейдер может выдвинуть лишь минимальные предположения о будущей ситуации на бирже, т.е. может указать множество I_t^+ ценных бумаг, стоимости которых (по его мнению) в момент времени $t+1$ вырастут по сравнению с текущей стоимостью в момент времени t, и множество I_t^- ценных бумаг, стоимости которых по его предположению в момент времени $t+1$ уменьшатся. С вероятностью p^+ трейдер верно определит, что ценные бумаги из множества I_t^+ вырастут в цене, с вероятностью $1-p^+$ – упадут, и, аналогично, с вероятностью p^- трейдер верно определит, что ценные бумаги из множества I_t^- снизятся в цене, с вероятностью $1-p^-$ – возрастут.

Если в портфеле трейдера есть ценные бумаги из множества $I_t^0 = N \backslash (I_t^+ \cup I_t^-)$, то их стоимость также может измениться к моменту времени $t+1$, и, поскольку у трейдера относительно этих ценных бумаг нет никаких предположений о значениях их стоимостей в момент времени $t+1$, естественно предположить, что с точки зрения трейдера увеличение и уменьшение значений стоимостей этих ценных бумаг равновероятны.

Пусть:

1. $x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0) \in X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор объемов покупок/продаж ценных бумаг из множества N в момент времени t,

где $x_t^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор объемов покупок ценных бумаг из множества I_t^+, $x_t^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор объемов продаж ценных бумаг из множества

I_t^-, $x_t^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор объемов возможных покупок/продаж ценных бумаг из множества I_t^0;

2. $y_{t+1} = (y_{t+1}^+, y_{t+1}^-, y_{t+1}^0) \in Y_t^+ \times Y_t^- \times Y_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор стоимостей единиц продаваемых и покупаемых ценных бумаг из множества N в момент времени $t+1$, если трейдер верно определил направление изменения значений стоимостей этих ценных бумаг,

где $y_{t+1}^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^+, по которой можно будет купить единицу ценной бумаги $i \in I_t^+$, если трейдер верно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью p^+), $y_{t+1}^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^-, по которой можно будет продать единицу ценной бумаги $i \in I_t^-$, если трейдер верно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью p^-), $y_{t+1}^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^0, по которым (с вероятностью 1/2) они окажутся доступными в момент $t+1$, если стоимость этих ценных бумаг вырастет в момент времени $t+1$;

3. $z_{t+1} = (z_{t+1}^+, z_{t+1}^-, z_{t+1}^0) \in Z_t^+ \times Z_t^- \times Z_t^0 \in R_+^{|I_t^+|+|I_t^-|+|I_t^0|}$ – вектор цен покупок/продаж ценных бумаг из множества N в момент времени $t+1$, если трейдер ошибся в своих прогнозах,

где $z_{t+1}^+ \in R_+^{|I_t^+|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^+, по которой можно будет купить единицу ценной бумаги $i \in I_t^+$, если трейдер неверно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью $1-p^+$), $z_{t+1}^- \in R_+^{|I_t^-|}$ – вектор стоимости ценных бумаг из множества I_t^-, по которой можно будет продать единицу ценной бумаги $i \in I_t^-$, если трейдер неверно определил направления изменений значений этих стоимостей (с вероятностью $1 - p^-$), $z_{t+1}^0 \in R_+^{|I_t^0|}$ – вектор стоимостей ценных бумаг из множества I_t^0, по которым (с вероятностью 1/2) они окажутся доступными в момент $t + 1$, если стоимость этих ценных бумаг снизится в момент времени $t + 1$.

В каждый момент времени t на переменные $x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0)$ накладываются ограничения, аналогичные ограничениям, описанным в предыдущем разделе 2.2, следовательно, X_t^+ (допустимое множество для x_t^+), X_t^- (допустимое множество для x_t^-) и X_t^0 (допустимое множество для x_t^0) являются выпуклыми многогранниками в пространстве $R^{|I_t^+|}$, $R^{|I_t^-|}$ и $R^{|I_t^0|}$, соответственно. Аналогично множества $Y_{t+1}^+, Y_{t+1}^-, Y_{t+1}^0$ и $Z_{t+1}^+, Z_{t+1}^-, Z_{t+1}^0$ (допустимые множества для $y_{t+1}^+, y_{t+1}^-, y_{t+1}^0$ и $z_{t+1}^+, z_{t+1}^-, z_{t+1}^0$, соответственно) являются выпуклыми многогранниками в силу неотрицательности и конечности цен финансовых инструментов.

Трейдер предполагает, что в каждый момент времени t направления изменения стоимостей ценных бумаг связаны внутри групп I_t^+ и I_t^- в том смысле, что все ценные бумаги из каждой группы меняются в одном направлении, т.е. либо все возрастают, либо все убывают, в то время как стоимости ценных бумаг из группы I_t^0 могут меняться разнонаправленно. С учетом этого предположения, взаимодействие трейдера с биржей в части разбиения им множества N на подмножества I_t^+, I_t^- и I_t^0 можно рассматривать как игру двух лиц – трейдера и биржи, в которой стратегией трейдера является выбор в момент t объемов продаваемых и покупаемых им ценных бумаг из множеств I_t^+ и I_t^- с намерением увеличить свой капитал в момент $t + 1$, в то время как стратегией биржи является «выбор» цен на единицы ценных бумаг из множества N. Эту игру можно рассматривать как игру с природой (биржей), в которой природа как игрок предлагает трейдеру наиболее неблагоприятные (для выбора трейдером множеств I_t^+, I_t^- и I_t^0) сочетания цен на финансовые инструменты в момент $t+1$ в виде векторов из выпуклых многогранников $Y_{t+1}^+, Y_{t+1}^-, Y_{t+1}^0$ и $Z_{t+1}^+, Z_{t+1}^-, Z_{t+1}^0$. Такая игра имеет определенную структуру, позволяющую отыскивать оптимальные стратегии игроков из решения задачи линейного программирования [4].

Теорема 1. В каждый момент времени t взаимодействие между трейдером и биржей может быть описано в форме антагонистической игры на выпуклых многогранниках несвязанных стратегий игроков $M_t = \{x_t \in R_+^n: B_t x_t \geq d_t)\}$ и $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n}: A_t w_{t+1} \geq b_t\}$ с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1}\rangle$,

где

$$D_t = \begin{pmatrix} D^{|I_t^+|}(p^+) & D^{|I_t^+|}(1-p^+) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{|I_t^-|}(p^-) & D^{|I_t^-|}(1-p^-) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0) \in M_t = X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0$,

$w_{t+1} = (w_{t+1}^+, w_{t+1}^-, w_{t+1}^0) \in \theta_{t+1} = \theta_{t+1}^+ \times \theta_{t+1}^- \times \theta_{t+1}^0$,

D_t – матрица размера $(|I_t^+| + |I_t^-| + |I_t^0|) \times 2(|I_t^+| + |I_t^-| + |I_t^0|)$,

$D^{|I|}(x)$ – диагональная матрица размера $|I|$, у которой все элементы главной диагонали равны x,

M_t – множество стратегий трейдера, $M_t = X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0$,

θ_{t+1} – множество стратегий фондовой биржи, $\theta_{t+1} = \theta_{t+1}^+ \times \theta_{t+1}^- \times \theta_{t+1}^0$,

$\theta_{t+1}^+ = Y_{t+1}^+ \times Z_{t+1}^+$, $\theta_{t+1}^- = Y_{t+1}^- \times Z_{t+1}^-$, $\theta_{t+1}^0 = Y_{t+1}^0 \times Z_{t+1}^0$ – выпуклые многогранники и $w_{t+1}^+ = (y_{t+1}^+, z_{t+1}^+) \in \theta_{t+1}^+$, $w_{t+1}^- = (y_{t+1}^-, z_{t+1}^-) \in \theta_{t+1}^-$, $w_{t+1}^0 = (y_{t+1}^0, z_{t+1}^0) \in \theta_{t+1}^0$ – векторы, и седловая точка этой игры может быть найдена из решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару:

$$\begin{cases} \langle b_t, h_t \rangle \to \max\limits_{(h_t, x_t)}, \\ h_t A_t \leq x_t D_t, \\ B_t x_t \geq d_t, \\ h_t, x_t \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle -d_t, u_{t+1} \rangle \to \min\limits_{(s_{t+1}, w_{t+1})}, \\ u_{t+1} B_t \leq -D_t w_{t+1}, \\ A_t w_{t+1} \geq b_t, \\ u_{t+1}, w_{t+1} \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим ценные бумаги, входящие во множество I_t^+ в момент t. Если трейдер правильно угадал направление изменения значений ценных бумаг из этого множества, то приобретая ценные бумаги в количествах, являющихся компонентами вектора x_t^+, цены на которые в момент $t+1$ будут определяться компонентами вектора y_{t+1}^+, трейдер рассчитывает увеличить свой суммарный капитал. При этом наилучшая стратегия для трейдера состоит в выборе таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+},$$

Если же трейдер не угадал бы направление изменения значений ценных бумаг из множества I_t^+, т.е. стоимости ценных бумаг из множества I_t^+ уменьшились бы в момент $t+1$, то наилучшей стратегией для трейдера являлся бы выбор таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+}.$$

Поскольку трейдер (правильно) верно определяет направление изменения ценных бумаг из множества I_t^+ с вероятностью p^+, то при выборе трейдером конкретных объемов x_t^+ покупаемых им в момент t видов ценных бумаг из множества I_t^+, результат этого выбора можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую значения $\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle$ и $\min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle$ с вероятностями p^+ и $1 - p^+$, соответственно. Ясно, что оптимальной стратегией трейдера будет выбор такого вектора $x_t^+ \in X_t^+$, который максимизирует математическое ожидание указанной дискретной случайной величины. Этот вектор находится из решения задачи:

$$p^+ \min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle + (1 - p^+) \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \to \max_{x_t^+ \in X_t^+}.$$

Нетрудно заметить, что справедливы равенства

$$\max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[p^+ \min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, y_{t+1}^+ \rangle + (1 - p^+) \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, z_{t+1}^+ \rangle \right] =$$

$$= \max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+)\, y_{t+1}^+ \rangle + \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(1 - p^+)\, z_{t+1}^+ \rangle \right],$$

а поскольку множества Y_{t+1}^+ и Z_{t+1}^+ не пересекаются, то справедливы равенства

$$\max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{y_{t+1}^+ \in Y_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+)\, y_{t+1}^+ \rangle + \min_{z_{t+1}^+ \in Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(1 - p^+)\, z_{t+1}^+ \rangle \right] =$$

$$\max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{(y_{t+1}^+, z_{t+1}^+) \in Y_{t+1}^+ \times Z_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{|I_t^+|}(p^+) D^{|I_t^+|}(1 - p^+)\, (y_{t+1}^+, z_{t+1}^+) \rangle \right] =$$

$$= \max_{x_t^+ \in X_t^+} \left[\min_{w_{t+1}^+ \in \theta_{t+1}^+} \langle x_t^+, D^{2|I_t^+|}(p^+, 1 - p^+)\, w_{t+1}^+ \rangle \right],$$

где $w_{t+1}^+ = (y_{t+1}^+, z_{t+1}^+), \theta_{t+1}^+ = Y_{t+1}^+ \times Z_{t+1}^+$,

$D^{2|I_t^+|}(p^+, 1 - p^+) = D^{|I_t^+|}(p^+) D^{|I_t^+|}(1 - p^+)$ и

$D^{|I_t^+|}(p^+)$ – диагональная матрица размера $|I_t^+| \times |I_t^+|$, у которой все элементы главной диагонали равны p^+,

$D^{|I_t^+|}(1 - p^+)$ – диагональная матрица размера $|I_t^+| \times |I_t^+|$, у которой все элементы главной диагонали равны $1 - p^+$,

$D^{2|I_t^+|}(p^+, 1 - p^+)$ – матрица размера $|I_t^+| \times 2|I_t^+|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^+|}(1 - p^+)$ к матрице $D^{|I_t^+|}(p^+)$ справа.

2. Рассмотрим виды ценных бумаг, образующих множество I_t^- в момент t. Если трейдер правильно определил направление изменения

стоимостей ценных бумаг из этого множества, то продавая ценные бумаги в количествах, являющихся компонентами вектора x_t^-, цены на которые в момент $t+1$ будут определяться компонентами вектора y_{t+1}^-, трейдер рассчитывает сохранить часть своего капитала за счет продажи по текущим ценам тех видов ценных бумаг, которые по мнению трейдера должны упасть в цене. При этом наилучшая стратегия для трейдера состоит в выборе таких объемов продаваемых видов ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{y_{t+1}^- \in Y_{t+1}^-} \langle x_t^-, y_{t+1}^- \rangle \to \max_{x_t^- \in X_t^-}.$$

Если же трейдер неверно определил бы направление изменений стоимостей ценных бумаг из множества I_t^-, т.е. стоимости ценных бумаг из множества I_t^- увеличатся в момент $t+1$, то наилучшей стратегией для трейдера являлся бы выбор таких объемов приобретаемых ценных бумаг, которые определяются из решения задачи

$$\min_{z_{t+1}^- \in Z_{t+1}^-} \langle x_t^-, z_{t+1}^- \rangle \to \max_{x_t^- \in X_t^-}.$$

Рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям, приведенным в п.1 настоящего доказательства, позволяют записать выражение для математического ожидания финансового результата выбора трейдером оптимальных объемов видов ценных бумаг из множества I_t^- в виде $\min_{q_{t+1}^- \in Q_{t+1}^-} \langle x_t^-, D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-)\, w_{t+1}^- \rangle$, которое (как и в случае бумаг из множества I_t^+), трейдер максимизирует за счет выбора вектора $x_t^- \in X_t^-$, т.е. решает задачу отыскания

$$\max_{x_t^- \in X_t^-} \left[\min_{q_{t+1}^- \in Q_{t+1}^-} \langle x_t^-, D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-)\, w_{t+1}^- \rangle \right],$$

где $w_{t+1}^- = (y_{t+1}^-, z_{t+1}^-), \theta_{t+1}^- = Y_{t+1}^- \times Z_{t+1}^-$,

$D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-) = D^{|I_t^-|}(p^-) D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ и

$D^{|I_t^-|}(p^-)$ – диагональная матрица размера $|I_t^-| \times |I_t^-|$, у которой все элементы главной диагонали равны p^-,

$D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ – диагональная матрица размера $|I_t^-|\times|I_t^-|$, у которой все элементы главной диагонали равны $1-p^-$,

$D^{2|I_t^-|}(p^-,1-p^-)$ – матрица размера $|I_t^-|\times 2|I_t^-|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^-|}(1-p^-)$ к матрице $D^{|I_t^-|}(p^-)$ справа.

3. Рассмотрим виды ценных бумаг, образующих множество I_t^0 в момент t (по которым трейдер не может определить направление изменения стоимостей). Поскольку стоимости ценных бумаг из множества I_t^0 в момент $t+1$ могут принимать любые значения (как больше текущих стоимостей $s_{i,t+1}$, так и меньше), то наилучшей стратегией для трейдера является выбор объемов ценных бумаг, которые определяются из решения задач

$$\min_{y_{t+1}^0\in Y_{t+1}^0}\langle x_t^0,y_{t+1}^0\rangle\to\max_{x_t^0\in X_t^0},$$

и

$$\min_{z_{t+1}^0\in Z_{t+1}^0}\langle x_t^0,z_{t+1}^0\rangle\to\max_{x_t^0\in X_t^0},$$

причем рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в п.1 и п.2 доказательства, позволяют записать выражение для математического ожидания финансового результата выбора трейдером оптимальных объемов ценных бумаг из множества I_t^0 в виде $\min_{w_{t+1}^0\in Q_{t+1}^0}\langle x_t^0,D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)w_{t+1}^0\rangle$, которое (как и в случае бумаг из множества I_t^+ и I_t^-), трейдер максимизирует за счет выбора вектора $x_t^0\in X_t^0$, т.е. решает задачу отыскания

$$\max_{x_t^0\in X_t^0}\left[\min_{w_{t+1}^0\in Q_{t+1}^0}\langle x_t^0,D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)w_{t+1}^0\rangle\right]$$

где $w_{t+1}^0=\ (y_{t+1}^0,z_{t+1}^0),\theta_{t+1}^0=Y_{t+1}^0\times Z_{t+1}^0$,

$D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=D^{|I_t^0|}(p^-)D^{|I_t^0|}(1-p^-)$ и

$D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ – диагональная матрица размера $|I_t^0| \times |I_t^0|$, у которой все элементы главной диагонали равны $\frac{1}{2}$,

$D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – матрица размера $|I_t^0| \times 2|I_t^0|$, образованная присоединением матрицы $D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ к матрице $D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right)$ справа.

4. Поскольку финансовые результаты выбора трейдером объемов ценных бумаг из множеств I_t^+, I_t^- и I_t^0 являются случайными величинами (поскольку трейдер верно определяет стоимости ценных бумаг в момент $t+1$ лишь с некоторыми вероятностями), то математическое ожидание суммарного финансового результата является суммой указанных выше трех математических ожиданий.

Пусть $x_t = (x_t^+, x_t^-, x_t^0)$ принадлежит выпуклому многограннику $M_t = X_t^+ \times X_t^- \times X_t^0$ и $w_{t+1} = (w_{t+1}^+, w_{t+1}^-, w_{t+1}^0)$ принадлежит выпуклому многограннику $\theta_{t+1} = \theta_{t+1}^+ \times \theta_{t+1}^- \times \theta_{t+1}^0$, а матрица D_t составлена следующим образом

$$D_t = \begin{pmatrix} D^{2|I_t^+|}(p^+, 1-p^+) & 0 & 0 \\ 0 & D^{2|I_t^-|}(p^-, 1-p^-) & 0 \\ 0 & 0 & D^{2|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D^{|I_t^+|}(p^+) & D^{|I_t^+|}(1-p^+) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^{|I_t^-|}(p^-) & D^{|I_t^-|}(1-p^-) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) & D^{|I_t^0|}\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

а выпуклые многогранники M_t и θ_{t+1} являются множествами допустимых решений некоторой совместной системы линейных неравенств, так что $M_t = \{x_t \in R_+^n : B_t x_t \geq d_t)\}$, $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n} : A_t w_{t+1} \geq b_t\}$.

Тогда при каждом выборе трейдером вектора x_t из множества X_t, математическое ожидание суммарного финансового результата от решения трейдера составит

$$\min_{w_{t+1} \in \theta_{t+1}} \langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle.$$

Естественно считать наилучшим решением такое, при котором достигается

$$\max_{x_t \in X_t} \left[\min_{w_{t+1} \in \theta_{t+1}} \langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle \right] \tag{2.4}$$

и значение этого максимина достигается в седловой точке игры двух лиц на выпуклых многогранниках M_t и θ_{t+1} с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle$.

Пусть

$$Q_t = \{(h_t, x_t) \geq 0 : h_t A_t \leq x_t D_t, B_t x_t \geq d_t\}$$

$$P_{t,t+1} = \{(u_{t+1}, w_{t+1}) \geq 0 : u_{t+1} B_t \leq -D_t w_{t+1}, A_t w_{t+1} \geq b_t\}.$$

Тогда оптимальные значения векторов $(x_t)^*$ и $(w_{t+1})^*$, образующие седловую точку функции (2.4) на $M_t \times \theta_{t+1}$ находятся как решения задач линейного программирования, образующих двойственную пару

$$\langle b_t, h_t \rangle \to \max_{(h_t, x_t) \in Q_t},$$

$$\langle -d_t, u_{t+1} \rangle \to \min_{(u_{t+1}, w_{t+1}) \in P_{t,t+1}}.$$

Если $((x_t)^*, (w_{t+1})^*)$ – решение пары задач линейного программирования, то значения векторов $(x_t^+)^*$, $(x_t^-)^*$ и $(x_t^0)^*$, где $(x_t)^* = ((x_t^+)^*, (x_t^-)^*, (x_t^0)^*)$, полностью определяются значениями компонент вектора $(x_t)^*$ [4]. Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> Если трейдер оценивает гарантированный выигрыш указанным способом при наличии в момент времени t некоторого портфеля ценных бумаг (т.е. имея ценные бумаги из множеств I_t^+, I_t^- и I_t^0 в объемах $v_t = (v_t^+, v_t^-, v_t^0) \in R_+^n$), то соответствующую игру

можно сформулировать как игру на выпуклых многогранниках $M_t = \{x_t \in R_+^n: B_t x_t \geq d_t)\}$ и $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^{2n}: A_t w_{t+1} \geq b_t\}$ с платежной функцией $\langle x_t, D_t w_{t+1}\rangle + \langle q_t, w_{t+1}\rangle$, где $q_t \in R_+^{2n}$ – некоторый фиксированный вектор, равный $q_t = (p^+ v_t^+, (1-p^+)\, v_t^+, p^- v_t^-, (1-p^-) v_t^-, \frac{1}{2} v_t^0, \frac{1}{2} v_t^0)$. Как показано в [4], седловая точка в такой игре находится из решения задач линейного программирования

$$\langle b_t, h_t\rangle \to \max_{(h_t, x_t) \in Q_t},$$

$$\langle -d_t, u_{t+1}\rangle + \langle q_t, w_{t+1}\rangle \to \min_{(s_{t+1}, w_{t+1}) \in P_{t,t+1}},$$

где $Q_t = \{(h_t, x_t) \geq 0: h_t A_t \leq q_t + x_t D_t, B_t x_t \geq d_t\}$, $P_{t,t+1} = \{(u_{t+1}, w_{t+1}) \geq 0: u_{t+1} B_t \leq -D_t w_{t+1}, A_t w_{t+1} \geq b_t\}$, образующих двойственную пару.

Пример 1.

Пусть на некоторой бирже торгуются две ценные бумаги $N = \{1,2\}$ стоимостью $s_{1,t} = 100$ и $s_{2,t} = 50$ в данный момент.

Пусть трейдер считает, что ценная бумага 1 вырастет в цене к моменту времени $t+1$, а ценная бумага 2, наоборот, упадет в цене к моменту времени $t+1$. Следовательно, $I_t^+ = \{1\}$, $I_t^- = \{2\}$ и $I_t^0 = \emptyset$. Трейдер оценил вероятности принятия им верных решений по каждой ценной бумаге и $p^+ = 0.6$, $p^- = 0.7$.

Пусть также у трейдера в момент времени t нет портфеля ценных бумаг ($v_1 = v_2 = 0$), есть начальный капитал в размере $m_t = 10000$ и брокер готов при необходимости предоставить в долг трейдеру ценные бумаги для открытия короткой позиции под залог капитала с кредитным плечом $k_t = 0.5$.

Допустимыми стратегиями трейдера являются векторы (x_1^+, x_2^-) объемов покупки ценной бумаги 1 и продажи ценной бумаги 2, удовлетворяющие следующим неравенствам:

1) условие неотрицательности объемов совершаемых сделок: $x_1^+ \geq 0, x_2^- \geq 0$;

2) условие открытия короткой позиции по ценной бумаге 2 на сумму, не превышающую доступный капитал с учетом кредитования: $s_{2,t}x_2^- \leq k_t m_t$;

3) условие покупки ценной бумаги 1 на сумму, не превышающую начальный капитал и средства, полученные при продаже заемных ценных бумаг: $s_{1,t}x_1^+ \leq s_{2,t}x_2^- + m_t$.

Следовательно, множество доступных стратегий $M_t = \{x_t \in R_+^2 : B_t x_t \geq d_t)\}$ задается с помощью матриц

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -s_{2,t} \\ -s_{1,t} & s_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -50 \\ -100 & 50 \end{pmatrix}, d_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_t m_t \\ -m_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5000 \\ -10000 \end{pmatrix}.$$

Стратегиями биржи являются векторы $w_{t+1} = (y_1^+, z_1^+, y_2^-, z_2^-)$ стоимостей ценных бумаг 1 и 2 в момент времени $t+1$, где y_1^+, y_2^- – стоимости ценных бумаг 1 и 2 в момент времени $t+1$, если трейдер верно определил направления изменения их стоимостей, и z_1^+, z_2^- – стоимости ценных бумаг 1 и 2 в момент времени $t+1$, если трейдер неверно определил направления изменения их стоимостей.

Пусть далее трейдер оценивает максимальные и минимальные ожидаемые им стоимости ценных бумаг 1 и 2 в момент времени $t+1$, соответственно, и $s_{1,t+1}^{max} = 115, s_{2,t+1}^{max} = 65$, $s_{1,t+1}^{min} = 75, s_{2,t+1}^{min} = 35$, и выставляет стоп-заявки по указанным границам для недопущения потерь в случае падения стоимостей ценных бумаг ниже уровня s_{t+1}^{min} и в случае роста цен выше уровня s_{t+1}^{max}, соответственно. Тогда множество допустимых стратегий биржи $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^4 : A_t w_{t+1} \geq b_t\}$ может быть описано с помощью неравенств

$$s_{1,t} \leq y_1^+ \leq s_{1,t+1}^{max},$$

$$s_{1,t+1}^{min} \leq z_1^+ \leq s_{1,t},$$

$$s_{2,t+1}^{min} \leq y_2^- \leq s_{2,t},$$

$$s_{2,t} \leq z_2^- \leq s_{2,t+1}^{max},$$

или в матричном виде с помощью

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b_t = \begin{pmatrix} s_{1,t} \\ -s_{1,t+1}^{max} \\ s_{1,t+1}^{min} \\ -s_{1,t} \\ s_{2,t+1}^{min} \\ -s_{2,t} \\ s_{2,t} \\ -s_{2,t+1}^{max} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -115 \\ 75 \\ -100 \\ 35 \\ -50 \\ 50 \\ -65 \end{pmatrix}.$$

Платежная функция для игры из теоремы 1 записывается в виде $\langle x_t, D_t w_{t+1} \rangle$, где

$$D_t = \begin{pmatrix} p^+ & 1-p^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^- & 1-p^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Тогда пара двойственных задач линейного программирования для нахождения решения такой игры записывается в виде

$$100h_1 - 115h_2 + 75h_3 - 100h_4 + 35h_5 - 50h_6 + 50h_7 - 65h_8 \to \max_{(h_t, x_t)},$$

$$h_1 - h_2 \leq 0.6x_1^+,$$

$$h_3 - h_4 \leq 0.4x_1^+,$$

$$h_5 - h_6 \leq 0.7x_2^-,$$

$$h_7 - h_8 \leq 0.3x_2^-, \tag{2.5}$$

$$-50x_2^- \geq -5000,$$

$$-100x_1^+ + 50x_2^- \geq -10000,$$

$$h_i \geq 0, i = \overline{1,8},$$

$$x_1^+ \geq 0, x_2^- \geq 0.$$

и

$$
\begin{gathered}
5000u_3 + 10000u_4 \to \min_{(u_{t+1}, w_{t+1})}, \\
u_1 - 100u_4 \le -0.6y_1^+ - 0.4z_1^+, \\
u_2 - 50u_3 + 50u_4 \le -0.7y_2^- - 0.3z_2^-, \\
100 \le y_1^+ \le 115, \\
75 \le z_1^+ \le 100, \\
50 \le y_2^- \le 65, \\
35 \le z_2^- \le 50, \\
u_i \ge 0, i = \overline{1,4}.
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

Решения задач линейного программирования (2.5) и (2.6) найдены с помощью программы[11], реализованной в среде Maple 7: $x_1^+ = 150, x_2^- = 100, h_1 = 90,\ h_2 = 0, h_3 = 60, h_4 = 0,\ h_5 = 70, h_6 = 0,$ $h_7 = 30, h_8 = 0$ для задачи 2.3, и $u_1 = 0,\ u_2 = 0, u_3 = 1.69, u_4 = 0.9, y_1^+ = 100, z_1^+ = 75, y_2^- = 35, z_2^- = 50$ для задачи 2.4. Таким образом, трейдеру нужно продать 100 единиц ценной бумаги 2 (взятых взаймы у брокера) и купить 150 единиц ценной бумаги 1.

Пример 2.

Пусть на некоторой бирже торгуются 6 ценных бумаг стоимостью 50,90,10,22,49 и 50 у.е. в данный момент.

Пусть трейдер считает, что ценные бумаги 1 и 2 вырастут в цене к моменту времени $t + 1$, ценные бумаги 3 и 4, наоборот, упадут в цене к моменту времени $t + 1$. Следовательно, $I_t^+ = \{1,2\}$, $I_t^- = \{3,4\}$ и $I_t^0 = \{5,6\}$. Трейдер оценил вероятности принятия им верных решений по каждой ценной бумаге и $p^+ = 0.56,\ p^- = 0.6$.

Пусть также у трейдера в момент времени t есть портфель ценных бумаг в объеме $v_1 = 10, v_2 = 30, v_3 = 50, v_4 = 0, v_5 = 4, v_6 = 12,$ есть наличные средства в размере $m_t = 1000$ и брокер готов при

[11] см. Приложение П.2.

необходимости предоставить в долг трейдеру ценные бумаги для открытия короткой позиции под залог капитала с кредитным плечом $k_t = 2$. Пусть также, как и в примере 1, трейдер оценивает максимальные и минимальные ожидаемые им стоимости ценных бумаг в момент времени $t + 1$:

	Номер ценной бумаги					
	1	2	3	4	5	6
Текущая стоимость	50	90	10	22	49	50
Минимальная прогнозируемая стоимость ценной бумаги на момент $t + 1$	40	75	8	18	42	30
Максимальная прогнозируемая стоимость ценной бумаги на момент $t + 1$	60	120	13	25	53	70

Если трейдер использует неравенства, аналогичные неравенствам из примера 1, для описания множества доступных ему стратегий $M_t = \{x_t \in R_+^2 : B_t x_t \geq d_t)\}$ и множества доступных стратегий биржи $\theta_{t+1} = \{w_{t+1} \in R_+^4 : A_t w_{t+1} \geq b_t\}$, то решения двойственных задач 1 и 2, построенных по данным примера 2, выглядят, соответственно,

$$x_1^+ = 60, x_2^+ = 0, x_3^- = 200, x_4^- = 0, x_5^0 = 0, x_6^0 = 0,$$

$$h_1 = 39.2, h_2 = 0, h_3 = 16.8, h_4 = 0, h_5 = 30.8, h_6 = 0, h_7 = 13.2,$$

$$h_8 = 0, h_9 = 150, h_{10} = 0, h_{11} = 0, h_{12} = 0, h_{13} = 100, h_{14} = 0$$

$$h_{15} = 0, h_{16} = 0, h_{17} = 2, h_{18} = 0, h_{19} = 6, h_{20} = 0, h_{21} = 0,$$

$$h_{22} = 0, h_{23} = 0, h_{24} = 0,$$

и

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0, u_6 = 0, u_7 = 2.552, u_8 = 1.352,$$

$$y_1^+ = 50, z_1^+ = 40, y_2^+ = 90, z_2^+ = 75, y_3^- = 8, z_3^- = 10,$$

$$\boldsymbol{y_4^- = 18, z_4^- = 25, y_5^0 = 49, z_5^0 = 42, y_6^0 = 50, z_6^0 = 30}.$$

Следовательно, оптимальная стратегия трейдера будет состоять в покупке 60 акций первой ценной бумаги и продаже 200 акций ценной бумаги 3.

Текст программы для Maple 7, реализующей решение пары двойственных задач линейного программирования из теоремы 2 для допустимых множеств стратегий игроков, аналогичных приведенным в примерах 1 и 2, приведен в Приложении П.2.

2.4. Учет торговли производными финансовыми инструментами в задаче поиска оптимальной стратегии инвестирования трейдера

В сформулированных в разделах 2.2 и 2.3 данной главы задачах отыскания наилучшего гарантированного результата трейдера и стратегий взаимодействия трейдера с биржей предполагалось, что портфель трейдера не содержит производных финансовых инструментов (фьючерсов и опционов[12]). Укажем теперь возможность учета торговли трейдером производными финансовыми инструментами в моделях главы 2. Реализация учета такой возможности приводит к решению математических задач той же самой структуры, что в задачах (2.3) и (2.4), рассмотренных в разделах 2.2 и 2.3, и отличающихся от них лишь учетом в формулировках задач математических соотношений, описывающих закономерности формирования рыночных цен на фьючерсы и опционы.

Трейдер, купивший в момент времени t $x_{j,t}$ фьючерсов стоимостью c_j на поставку в момент $t+1$ ценной бумаги (базового актива) в объеме по цене исполнения (страйку) $K_{j,t+1}$, получит доход в размере $W_j = x_{j,t}\left(s_{j,t+1} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right)$, если цена базового актива в момент времени $t+1$ превысит $K_{j,t+1} - c_{j,t}$, и, наоборот, убыток в размере $x_{j,t}\left(s_{j,t+1} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right)$, если цена опустится ниже $K_{j,t+1} - c_{j,t}$. Аналогично с фьючерсом на продажу: доход/убыток при покупке такого

[12] см. Приложение П.1.3.

фьючерса равны $W_j = x_{j,t}\left(K_{j,t+1} - s_{j,t+1} - c_{j,t}\right)$. До момента истечения фьючерса его можно продать как ценную бумагу стоимостью $c_{j,t}$.

Трейдер, купивший в момент времени t $x_{k,t}$ опционов стоимостью $c_{k,t}$ на покупку в момент $t+1$ биржевого товара в объеме по цене $K_{k,t+1}$, получит доход в размере

$$W_j = x_{k,t}\left(\max\left\{\left(s_{k,t+1} - K_{k,t+1}\right); 0\right\} - c_{k,t}\right) =$$
$$= \begin{cases} x_{k,t}\left(s_{k,t+1} - K_{i,t+1} - c_{k,t}\right), \text{если } s_{k,t+1} \geq K_{k,t+1} \\ -x_{k,t}c_{k,t}, \text{иначе,} \end{cases},$$

поскольку если цена базового актива превысит страйк опциона $K_{k,t+1}$, то его выгодно предъявить к исполнению и получить $x_{k,t}\left(s_{k,t+1} - K_{k,t+1} - c_{k,t}\right)$ дохода, а если цена на базовый актив опустится ниже страйка и опцион станет невыгодно предъявлять к исполнению, то убыток составит $-x_{k,t}c_{k,t}$. Аналогично с опционом на продажу. До момента истечения опциона его также можно продать как ценную бумагу стоимостью $c_{k,t}$.

Для упрощения записи будем рассматривать далее только опционы и фьючерсы на покупку.

Введем следующие обозначения:

J_t^+, J_t^- – множество фьючерсов с датой истечения $t+1$, которые трейдер решил купить и продать в момент времени t соответственно (до момента истечения фьючерса его можно продать как ценную бумагу стоимостью $c_{j,t}$, поэтому если трейдер покупает/продает такой фьючерс, то мы учитываем его в множестве I_t^+/I_t^-);

K_t^+, K_t^- – множество опционов с датой истечения $t+1$, которые трейдер решил купить и продать в момент времени t соответственно (до момента истечения опциона его можно продать как ценную бумагу стоимостью $c_{j,t}$, поэтому если трейдер покупает/продает такой опцион, то мы учитываем его в множестве I_t^+/I_t^-);

p_j, p_k – вероятность того, что трейдер верно распределит соответствующие производные ценные бумаги по множествам J_t^+ и J_t^-, K_t^+ и K_t^-.

Тогда к приросту стоимости портфеля в формуле (2.2) добавятся два слагаемых и целевая функция трейдера примет вид:

$$\Delta W_{t+1} = \sum_{i \in I_t^0} v_{i,t}\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) + \sum_{i \in I_t^+} \left(v_{i,t} + x_{i,t}^+\right)\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) +$$

$$+ \sum_{i \in I_t^-} \left(v_{i,t} - x_{i,t}^-\right)\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) + \sum_{i \in I_t^-} z_{i,t}^-\left(s_{i,t+1} - s_{i,t}\right) +$$

$$+ \sum_{j \in J_t^+ \cup J_t^-} x_{j,t}\left(s_{j,t+1} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right) +$$

$$+ \sum_{k \in K_t^+ \cup K_t^-} x_{k,t}\left[\left(s_{k,t+1} - K_{k,t+1}\right) I_{k,t+1} - c_{k,t}\right] \to max, \quad (2.7)$$

где $I_{k,t+1}$ – индикаторная величина, отражающая получение или неполучение трейдером дохода от реализации опциона,

$$I_{k,t+1} = \begin{cases} 1, \text{если } s_{k,t+1} - K_{k,t+1} - c_{k,t} \geq 0 \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $s_{l,t+1}, l \in J_t^+, J_t^-, K_t^+, K_t^-$ и $I_{k,t+1}$ связаны с вероятностями p_j, p_k следующим образом:

$I_{k,t+1}$	1	0
P	p_i	$1 - p_i$

где

$$I_{k,t+1} = \begin{cases} 1, \text{если } s_{k,t+1} - K_{k,t+1} > 0 \text{ и опцион будет предъявлен к исполнению,} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$s_{l,t+1}, l \in J_t^+, K_t^+$	$s_{l,t+1} > s_{l,t}$	$s_{l,t+1} \leq s_{l,t}$
P	p_l	$1 - p_l$

и

$s_{l,t+1}, l \in J_t^-, K_t^-$	$s_{l,t+1} \geq s_{l,t}$	$s_{l,t+1} < s_{l,t}$
P	$1 - p_l$	p_l

Для фьючерсов и опцитонов трейдеру следует далее оценить границы изменения стоимости базового актива $\left[s_{j,t+1}^{min}, s_{j,t+1}^{max}\right]$ и $\left[s_{k,t+1}^{min}, s_{k,t+1}^{max}\right]$, соответственно, в которых, по его мнению, будут изменяться стоимости ценных бумаг $j \in J_t^+ \cup J_t^- \cup J_t^0$ и $k \in K_t^+ \cup K_t^- \cup K_t^0$, и оценить математическое ожидание будущей стоимости базового актива. Если считать, что трейдер не выдвигает дополнительных соображений, кроме вышеуказанных, относительно будущих стоимостей $s_{j,t+1}$ и $s_{k,t+1}$, то, аналогично подходу из параграфа 2.2, можно оценить математическое ожидание доходов трейдера от торговли производными финансовыми инструментами:

а) от покупки фьючерса из множества J_t^+ в виде

$$M[W_j] = p_j\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t} + s_{j,t+1}^{max}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) +$$
$$+\frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t+1}^{min} + s_{j,t}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) + \frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[s_{j,t} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right),$$

б) от покупки фьючерса из множества J_t^- в виде

$$M[W_j] = p_j\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t+1}^{min} + s_{j,t}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) +$$
$$+\frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t} + s_{j,t+1}^{max}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) + \frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[s_{j,t} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right),$$

в) от покупки фьючерса из множества J_t^0 в виде

$$M[W_j] = p_j\left(x_{j,t}\left[s_{j,t} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) +$$
$$+\frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t+1}^{min} + s_{j,t}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right) + \frac{1-p_j}{2}\left(x_{j,t}\left[\frac{s_{j,t} + s_{j,t+1}^{max}}{2} - K_{j,t+1} - c_{j,t}\right]\right).$$

Аналогично, для опционов финансовые результаты покупки опционов из множеств K_t^+, K_t^-, K_t^0 равны соответственно

а) $$M[W_k] = p_k\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t} + s_{k,t+1}^{max}}{2} - K_{k,t+1}\right] - c_{k,t}\right), -c_{k,t}\right)\right\} +$$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t+1}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t+1}^{min}+s_{k,t}}{2}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t+1}\max\left(\left(\left[s_{k,t}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\},$$

б) $M[W_k]=p_k\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t+1}^{min}+s_{k,t}}{2}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}+$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t}+s_{k,t+1}^{max}}{2}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[s_{k,t}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\},$$

в) $M[W_k]=p_k\left\{x_{k,t+1}\max\left(\left(\left[s_{k,t}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}+$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t+1}^{min}+s_{k,t}}{2}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1-p_k}{2}\left\{x_{k,t}\max\left(\left(\left[\frac{s_{k,t}+s_{k,t+1}^{max}}{2}-K_{k,t+1}\right]-c_{k,t}\right),-c_{k,t}\right)\right\}.$$

Далее трейдер формирует задачу поиска максимума математического ожидания функции (2.7) при ограничениях, аналогичных ограничениям задачи (2.3), в которой слагаемые из последних двух сумм находятся по вышеописанным формулам:

$$\Delta W_{t+1}=\sum_{i\in I_t^0} v_{i,t}\left(s_{i,t+1}-s_{i,t}\right)+\sum_{i\in I_t^+}\left(v_{i,t}+x_{i,t}^+\right)\left(s_{i,t+1}-s_{i,t}\right)+$$

$$+\sum_{i\in I_t^-}\left(v_{i,t}-x_{i,t}^-\right)\left(s_{i,t+1}-s_{i,t}\right)+\sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^-\left(s_{i,t+1}-s_{i,t}\right)+$$

$$+\sum_{j\in J_t^+\cup J_t^-\cup J_t^0} W_j+$$

$$+\sum_{k\in K_t^+\cup K_t^-\cup K_t^0} W_k\to max,$$

$$\sum_{i\in I_t^0} v_{i,t}Ms_{i,t+1}+\sum_{i\in I_t^+}\left[v_{i,t}+x_{i,t}^+\right]Ms_{i,t+1}+\sum_{i\in I_t^-}\left[v_{i,t}-x_{i,t}^-\right]Ms_{i,t+1}+$$

$$+\sum_{j\in J_t^+\cup J_t^-\cup J_t^0} W_j+\sum_{k\in K_t^+\cup K_t^-\cup K_t^0} W_k+$$

$$+\left(m_t-\sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+ s_{i,t}+\sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t}+\sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^-\left[s_{i,t}-Ms_{i,t+1}\right]-\sum_{j\in J_t^+\cup J_t^-\cup J_t^0} c_j\right.$$

$$\left.-\sum_{k\in K_t^+\cup K_t^-\cup K_t^0} c_k\right)\geq\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} v_{i,t}s_{i,t}+m_t\right],$$

$$\sum_{i\in I_t^+} x_{i,t}^+ s_{i,t}+\sum_{i\in I_t^-} z_{i,t}^- s_{i,t}+\sum_{j\in J_t^+\cup J_t^-\cup J_t^0} c_j+\sum_{k\in K_t^+\cup K_t^-\cup K_t^0} c_k-\left(m_t+\sum_{i\in I_t^-} x_{i,t}^- s_{i,t}\right)\leq$$

$$\leq k_t\left[m_t+\sum_{i=1}^{n} v_{i,t}s_{i,t}\right],$$

$$x_{i,t}^-\leq v_{i,t}, i\in I_t^-,$$

$$x_{i,t}^+\geq 0, i\in I_t^+,$$

$$x_{i,t}^-\geq 0, i\in I_t^-,$$

$$z_{i,t}^-\geq 0, i\in I_t^-,$$

$$x_{j,t}\geq 0, j\in J_t^+\cup J_t^-\cup J_t^0,$$

$$x_{k,t}\geq 0, k\in K_t^+\cup K_t^-\cup K_t^0.$$

Такая задача вновь является задачей линейного программирования.

Модифицируем теперь модель из раздела 2.3 для учета возможности включать в портфель фьючерсы $j\in J_t^+, J_t^-, J_t^0$ и опционы $k\in K_t^+, K_t^-, K_t^0$. Пусть $\left(v_{t+1}^f\right)^+\in R_+^{|J_t^+|}$ - вектор объемов закупаемых трейдером в момет времени t фьючерсов, $\left(y_{t+1}^f\right)^+\in R_+^{|J_t^+|}$ – вектор цен на эти фьючерсы в случае, если трейдер верно определил направление изменения их стоимостей в момент времени $t+1$ (с вероятностью p_f^+), $\left(z_{t+1}^f\right)^+\in R_+^{|J_t^+|}$ – вектор цен на эти фьючерсы в случае, если трейдер неверно определил направление изменения их стоимостей в момент времени $t+1$ (с вероятностью $1-p_f^+$). Аналогично модели из параграфа 2.3, допустимые множества для векторов $\left(v_{t+1}^f\right)^+ \in \left(V_{t+1}^f\right)^+$, $\left(y_{t+1}^f\right)^+ \in \left(Y_{t+1}^f\right)^+$, $(z)^+ \in \left(Z_{t+1}^f\right)^+$, являются многогранниками.

Далее, можем определить векторы $\left(y_{t+1}^f\right)^-$, $\left(z_{t+1}^f\right)^-$, $\left(y_{t+1}^f\right)^0$, $\left(z_{t+1}^f\right)^0$, а также векторы $\left(y_{t+1}^{op}\right)^+$, $\left(z_{t+1}^{op}\right)^+$, $\left(y_{t+1}^{op}\right)^-$, $\left(z_{t+1}^{op}\right)^-$, $\left(y_{t+1}^{op}\right)^0$, $\left(z_{t+1}^{op}\right)^0$ для опционов, для каждого из которых допустимое множетсво яляется многогранником в соответствующем пространстве.

При покупке фьючерсов из множества J_t^+ трейдер максимизирует математическое ожидание своего выигрыша, решая оптимизационную задачу

$$p_f^+ \min_{\left(y_{t+1}^f\right)^+ \in \left(Y_{t+1}^f\right)^+} \Big(\langle \left(v_{t+1}^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \rangle - \langle \left(K_{t+1}^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \rangle$$

$$- \langle \left(c_t^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \rangle \Big) +$$

$$+\left(1-p_f^+\right) \min_{\left(z_{t+1}^f\right)^+ \in \left(Z_{t+1}^f\right)^+} \Big(\langle \left(v_{t+1}^f\right)^+, \left(z_{t+1}^f\right)^+ \rangle - \langle \left(K_{t+1}^f\right)^+, \left(v_{t+1}^f\right)^+ \rangle$$

$$- \langle \left(c_t^f\right)^+, \left(z_{t+1}^f\right)^+ \rangle \Big) \to \max_{\left(v_{t+1}^f\right)^+ \in \left(V_{t+1}^f\right)^+},$$

где $\left(K_{t+1}^f\right)^+ = \left(\left(K_{1,t+1}^f\right)^+, \dots, \left(K_{|\mathrm{J}_\mathrm{t}^+|,t+1}^f\right)^+ \right) \in R_+^{|\mathrm{J}_\mathrm{t}^+|}$, $\left(c_t^f\right)^+ = \left(\left(c_{1,t}^f\right)^+, \dots, \left(c_{|\mathrm{J}_\mathrm{t}^+|,t}^f\right)^+ \right) \in R_+^{|\mathrm{J}_\mathrm{t}^+|}$.

Очевидно, что

$$\max_{\left(v_{t+1}^f\right)^+ \in \left(V_{t+1}^f\right)^+} \Bigg[p_f^+ \min_{\left(y_{t+1}^f\right)^+ \in \left(Y_{t+1}^f\right)^+} \Big\{ \langle \left(v_{t+1}^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \rangle - \langle \left(K_{t+1}^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \rangle -$$

$$- \left(c_t^f\right)^+, \left(y_{t+1}^f\right)^+ \Big\} + \left(1-p_f^+\right) \min_{\left(z_{t+1}^f\right)^+ \in \left(Z_{t+1}^f\right)^+} \Big\{ \left(v_{t+1}^f\right)^+, \left(z_{t+1}^f\right)^+$$

$$-\langle (K_{t+1}^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle - \langle (c_t^f)^+, (z_{t+1}^f)^+\rangle\Big] =$$

$$= \max_{(v_{t+1}^f)^+ \in (V_{t+1}^f)^+} \Bigg[\min_{(y_{t+1}^f)^+ \in (Y_{t+1}^f)^+} \Big\{ \langle (v_{t+1}^f)^+, H^{|J_t^+|}(p_f^+)(s_{t+1}^f)^+ \rangle$$

$$- p_f^+ \langle (K_{t+1}^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle - p_f^+ \langle (c_t^f)^+, (y_{t+1}^f)^+\rangle \Big\}$$

$$+ \min_{(u_{t+1}^f)^+ \in (U_{t+1}^f)^+} \Big\{ \langle (v_{t+1}^f)^+, H^{|J_t^+|}\big((1-p_f^+)\big)(u_{t+1}^f)^+\rangle$$

$$- (1-p_f^+)\langle (K_{t+1}^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle - (1-p_f^+)\langle (c_t^f)^+, (z_{t+1}^f)^+\rangle \Big\} \Bigg]$$

и, поскольку вектора $(н_{t+1}^f)^+$ из множества $(Y_{t+1}^f)^+$ и $(z_{t+1}^f)^+$ из множества $(Z_{t+1}^f)^+$ выбираются независимо друг от друга, то

$$\max_{(v_{t+1}^f)^+ \in (V_{t+1}^f)^+} \Bigg[\min_{(y_{t+1}^f)^+ \in (Y_{t+1}^f)^+} \Big\{ \langle (v_{t+1}^f)^+, H^{|J_t^+|}(p_f^+)(s_{t+1}^f)^+ \rangle$$

$$- p_f^+ \langle (K_{t+1}^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle - p_f^+ \langle (c_t^f)^+, (y_{t+1}^f)^+\rangle \Big\}$$

$$+ \min_{(u_{t+1}^f)^+ \in (U_{t+1}^f)^+} \Big\{ \langle (v_{t+1}^f)^+, H^{|J_t^+|}\big((1-p_f^+)\big)(u_{t+1}^f)^+\rangle$$

$$- (1-p_f^+)\langle (K_{t+1}^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle - (1-p_f^+)\langle (c_t^f)^+, (z_{t+1}^f)^+\rangle \Big\} \Bigg] =$$

$$= \max_{(v_{t+1}^f)^+ \in (V_{t+1}^f)^+} \Bigg[\min_{(w_{t+1}^f)^+ \in (\theta_{t+1}^f)^+} \langle (v_{t+1}^f)^+, H^{2|J_t^+|}(p_f^+, 1-p_f^+)(w_{t+1}^f)^+\rangle -$$

$$- \langle (K_{t+1}^f)^+ + (c_t^f)^+, (v_{t+1}^f)^+\rangle \Bigg],$$

где $(w_{t+1}^f)^+ = \big((y_{t+1}^f)^+, (z_{t+1}^f)^+\big), (\theta_{t+1}^f)^+ = (Y_{t+1}^f)^+ \times (Z_{t+1}^f)^+$, $H^{2|J_t^+|}(p_f^+, 1-p_f^+) = H^{|J_t^+|}(p_f^+)H^{|J_t^+|}(1-p_f^+)$.

Аналогично рассматривается оптимизационная задача трейдера при покупке фьючерсов из множества J_t^- и J_t^0

$$\min_{\left(w_{t+1}^{f}\right)^{-}\in\left(\theta_{t+1}^{f}\right)^{-}}\Big[\langle\left(v_{t+1}^{f}\right)^{-}, H^{2|J_t^{-}|}\left(p_f^{-}, 1-p_f^{-}\right)\left(w_{t+1}^{f}\right)^{-}\rangle$$

$$-\langle\left(K_{t+1}^{f}\right)^{-}+\left(c_t^{f}\right)^{-}, \left(v_{t+1}^{f}\right)^{-}\rangle\Big] \to \max_{\left(v_{t+1}^{f}\right)^{-}\in\left(V_{t+1}^{f}\right)^{-}},$$

и

$$\min_{\left(w_{t+1}^{f}\right)^{0}\in\left(\theta_{t+1}^{f}\right)^{0}}\left[\langle\left(v_{t+1}^{f}\right)^{0}, H^{2|J_t^{0}|}\left(1/2, 1/2\right)\left(w_{t+1}^{f}\right)^{0}\rangle\right.$$

$$\left.-\langle\left(K_{t+1}^{f}\right)^{0}+\left(c_t^{f}\right)^{0}, \left(v_{t+1}^{f}\right)^{0}\rangle\right] \to \max_{\left(v_{t+1}^{f}\right)^{0}\in\left(V_{t+1}^{f}\right)^{0}},$$

Пусть $v_{t+1}^{f} = \left(\left(v_{t+1}^{f}\right)^{+}, \left(v_{t+1}^{f}\right)^{-}, \left(v_{t+1}^{f}\right)^{0}\right) \in M_t^{f} = \left(V_{t+1}^{f}\right)^{+} \times \left(V_{t+1}^{f}\right)^{-} \times \left(V_{t+1}^{f}\right)^{0}$, $w_{t+1}^{f} = \left(\left(w_{t+1}^{f}\right)^{+}, \left(w_{t+1}^{f}\right)^{-}, \left(w_{t+1}^{f}\right)^{0}\right) \in \theta_t^{f} = \left(\theta_{t+1}^{f}\right)^{+} \times \left(\theta_{t+1}^{f}\right)^{-} \times \left(\theta_{t+1}^{f}\right)^{0}$, матрица D_t^{f} имеет вид

$$D_t^{f} = \begin{pmatrix} H^{2|J_t^{+}|}\left(p_f^{+}, 1-p_f^{+}\right) & 0 & 0 \\ 0 & H^{2|J_t^{-}|}\left(p_f^{-}, 1-p_f^{-}\right) & 0 \\ 0 & 0 & H^{2|J_t^{0}|}\left(1/2, 1/2\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда наилучшая стратегия трейдера при торговле фьючерсами состоит в выборе вектора v_{t+1}^{f}, при которром достигается максимум

$$\max_{v_{t+1}^{f}\in M_t^{f}}\left[\min_{w_{t+1}^{f}\in\theta_{t+1}^{f}}\langle v_{t+1}^{f}, D_t^{f} w_{t+1}^{f}\rangle - \langle K_{t+1}^{f}+c_t^{f}, v_{t+1}^{f}\rangle\right].$$

Аналогично, при торговле опционами наилучашя стратегия трейдера состоит в выборе вектора v_{t+1}^{op}, при котором достигается

$$\max_{v_{t+1}^{op}\in M_t^{op}}\left[\min_{w_{t+1}^{op}\in\theta_{t+1}^{op}}\langle v_{t+1}^{op}, D_t^{op} w_{t+1}^{op}\rangle - \langle K_{t+1}^{op}+c_t^{op}, v_{t+1}^{op}\rangle\right],$$

где вектора v_{t+1}^{op}, w_{t+1}^{op}, c_t^{op}, матрица D_t^{op}, и многогранники M_t^{op} и θ_{t+1}^{op} имеют тот же смысл. что и v_{t+1}^{f}, w_{t+1}^{f}, c_t^{f}, матрица D_t^{f}, и мноогогранники M_t^f и θ_{t+1}^f для фьючерсов.

Итак, пусть $x = \left(x_{t,} v_{t+1}^f, v_{t+1}^{op}\right)$, $D = \left(D_{t,}, D_t^f, D_t^{op}\right)$, $w = \left(w_{t+1}, w_{t+1}^f, w_{t+1}^{op}\right)$, и $K = \left(0, K_{t+1}^f, K_{t+1}^{op}\right)$. Тогда наилучшая стратегия трейдера, торгующего одновременно ценными бумагами, фьючерсами и опционами сводится к решению задачи

$$\max_{x \in X}\left[\min_{w \in \mathrm{W}}\langle x, Dw\rangle + \langle K, x\rangle + \langle \pi, w\rangle\right], \tag{2.8}$$

где $X = \{x \geq 0: Ax \geq b$ и $W = \{w \geq 0: Bw \geq d\}$ многогранники допустимых решений, $\pi = \left(q, 0_{t+1}^f, 0_{t+1}^{op}\right)$, 0_{t+1}^f и 0_{t+1}^{op} нулевые векторы, имеющие такую же размерность, что и векторы w_{t+1}^f и w_{t+1}^{op}, соответственно. Нахождение максимина в задаче (2.8), так же как и в задаче (2.4), сводится [4] к решению пары задач линейного программирования

$$\langle d, z\rangle + \langle K, x\rangle \to \max_{(z,x) \in Q'}$$

$$\langle -b, t\rangle + \langle \pi, w\rangle \to \max_{(t,w) \in P'},$$

где $Q' = \{(z, x) \geq 0: zB \leq \pi + xD, Ax \geq b\}$, $P' = \{(t, w) \geq 0: tB \leq -K - Dw, Bw \geq d\}$, образующих двойственную пару.

Заключение по Главе 2

Вторая глава посвящена моделированию поведения трейдера в предположении, что трейдер может прогнозировать будущее состояние биржи с некоторой вероятностью в условиях стабильной рыночной ситуации.

Были рассмотрены две наиболее общие ситуации: когда у трейдера есть некоторые предположения о значениях границ изменений будущих цен на финансовые инструменты, и когда трейдер может только определить направление изменения стоимости финансовых инструментов. Первый вариант более характерен для трейдеров, придерживающихся технического анализа и определяющих на графиках цен так называемые уровни сопротивления и уровни поддержки на основании анализа, например, паттернов цен или уровней Фибоначчи. Второй вариант более общий и может быть использован не только сторонниками технического анализа.

Задача отыскания оптимальных стратегий инвестирования трейдера в финансовые инструменты можно сформулировать либо как задачу линейного программирования для первого случая, либо как пару задач линейного программирования во втором случае. Задачи линейного программирования на данный момент решаются практически для сколь угодно большой размерности за малое время и данные модели могут быть использованы для расчета трейдером некоторого гарантирующего значения будущего благосостояния (в смысле минимально возможного уровня благосостояния) при указанных предположениях при стабильной рыночной ситуации.

Глава 3. Моделирование поведения участников фондовой биржи в условиях финансового кризиса

Необходимость моделирования поведения трейдеров при возможности наступления биржевого кризиса связана с тем, что во время кризиса стремительно меняется рыночная конъюнктура и модели поведения трейдера из главы 2, подходящие для стабильного рынка, не подходят для моделирования поведения в кризисный период. Вероятности того, что трейдер правильно угадает динамику стоимостей финансовых инструментов, в стабильный и кризисный периоды, естественно, отличаются.

Понятно, что во время биржевых кризисов большая часть трейдеров теряет деньги (а мелкие и средние трейдеры часто банкротятся и вовсе теряют полностью свои капиталы). Для таких трейдеров, вероятно, наиболее выигрышной стратегий было бы переждать периоды кризиса и не участвовать в биржевых торгах в этот период.

Для большинства трейдеров, не являющихся инсайдерами, момент начала краха, какими бы причинами он ни был вызван – экзогенными факторами, концом спекулятивного пузыря или нарастающими проблемами в экономике в период экономического или финансового кризиса – неизвестен. Соответственно, биржевой кризис является «Черным лебедем» Талеба, т.е. редким, непредсказуемым явлением с огромной силой воздействия. Поэтому мы будем рассматривать биржевые кризисы с позиции именно модели Талеба и проанализируем, является ли пропагандируемая им стратегия «ловли Черных лебедей» разумной.

В этой главе мы моделируем задачу трейдера по принятию решений на бирже при возможности наступления биржевых кризисов с помощью элементов теории массового обслуживания, представляя трейдера системой, обслуживающей два потока заявок, распределенных по закону Пуассона (закону редких событий). Выбор трейдера осуществляется на основе специальных деревьев решений.

Использование композиции двух пуассоновских потоков[13] обусловлено требованием редкости наступления биржевых кризисов. По оценке [23] экономические кризисы наступают примерно раз в 7 лет. Многие модели предсказания дефолта фирм [51,61,73], моделирующие наступление дефолта по причине экзогенных шоков, используют именно пуассоновские процессы или несколько пуассоновских процессов, один из которых отвечает за макроэкономический шок, второй – за секторальные шоки, а остальные описывают индивидуальные шоки для каждой фирмы.

3.1 Моделирование поведения трейдеров с учетом возможности наступления биржевых кризисов

Будем рассматривать работу трейдера, как некоторого устройства, на вход которого поступает поток сигналов о событиях из внешнего мира. Эти сигналы устройство должно «распознать» и за правильное «распознавание» оно получает вознаграждение, а за неправильное – штраф.

Пусть $t_0 = 0$ – начальный момент времени. В случайные моменты времени t_i на устройство поступают сигналы о событиях из внешнего мира. Известно, что поступающий на устройство поток сигналов состоит из двух потоков – потока сигналов о событиях типа Q (от слова *quiet*) и потока сигналов о событиях типа R (*rare*). Каждый из них

---

[13] Интересно отметить, что идея использования двух пуассоновских процессов для моделирования частого и редкого процессов была применена в [91] для оценки релевантности в задаче поиска текстов, где каждый текстовый документ представляется как смесь двух Пуассоновских распределений, одно из которых отвечает за распределение обычных слов, другое – за распределение «элитных» слов, т.е., тех, на которых лежит основная смысловая нагрузка в разрезе рассматриваемой тематики.

является простейшим, т. е. стационарным, ординарным и не имеет последействия. Интенсивность потока событий типа Q равна λ, интенсивность потока событий типа R равна μ, причем $\lambda \gg \mu$ (события типа Q происходят гораздо чаще событий типа R).

Задача устройства заключается в распознавании наступившего в момент времени t_i сигнала i. Если наступило событие Q и устройство его идентифицировало верно, то оно поощряется получением небольшого вознаграждения a; если же произошла ошибка, и событие Q было распознано как событие R, то устройство будет «оштрафовано» на величину b. Вероятности таких исходов известны и равны p_1 и $q_1 = 1 - p_1$, соответственно. Аналогично, для событий типа R, при правильной идентификации устройством наступившего события R выигрыш составляет величину c, причем $c \gg a$, а при неправильной – «проигрыш» составляет $-d$, и $d \gg b$. Вероятности этих исходов также известны и равны p_2 и $q_2 = 1 - p_2$, соответственно. После каждого наступившего события величина полученного выигрыша/проигрыша X_i прибавляется к предыдущей сумме (Рис. 1).

Сколько в среднем будет составлять сумма полученных за время $t > 0$ выигрышей?

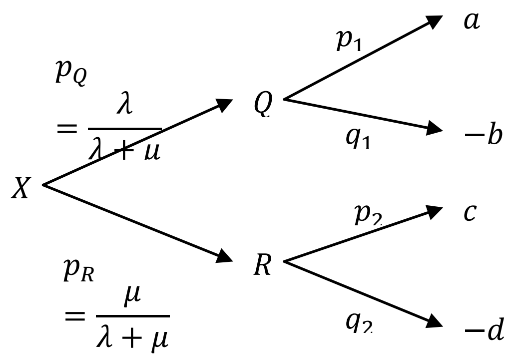

Рис. 1. Общая схема идентификации случайного события $\boldsymbol{X}$

Такая схема [illegible] де события Q и R отражают стабильную экономическую ситуацию и кризисы, соответственно. Событие i можно интерпретировать как некий сигнал, который поступает трейдеру на бирже о состоянии экономики, о котором он должен решить, что означает этот сигнал – что экономика находится в “нормальном режиме”, либо наступает кризис. Например, являются ли сведения о том, что снизились цены на нефть предвестником того, что экономика переживает спад, или это временное явление и на состояние экономики они не повлияют?

Величины a, b, c, d также имеют свое значение в такой интерпретации. Если наступило событие Q (экономика стабильна) и трейдер его правильно распознал, то он принимает «правильное» решение о покупке или продаже ценных бумаг (в том числе на основе подхода, указанного в главе 2), т.е. покупает ценные бумаги, которые вырастут в цене и продает те, которые снизятся в цене. Следовательно, он получает в результате своих действий небольшой доход, который мы обозначим как a. Если событие Q будет трейдером распознано неверно, то он примет неверное решение, пересматривая свой инвестиционный портфель (продаст ценные бумаги, стоимости которых затем увеличатся, и приобретет те ценные бумаги, стоимости которых, наоборот, снизятся), и понесет вследствие этого небольшие потери $-b$. Если же наступило событие R (кризис) и оно не было распознано им верно, то трейдер понесет потери, намного большие, чем в случае неверного распознавания события Q – сумму $-d \ll -b$. Если же он верно определит наступление кризиса, то сможет на этом неплохо заработать – в случае правильной идентификации R трейдер получает величину $c \gg a$. В реальной работе трейдера такие исходы соответствуют открытию длинных и коротких позиций [14]в период роста и спада.

---

[14] см. Приложение П.1.3.

Длинная позиция принесет трейдеру умеренный доход a и значительный убыток $-d$, когда рынок растет («регулярное» событие) и падает («кризис»), соответственно. С короткой позицией наоборот: в случае роста экономики трейдер немного потеряет (величина $-b$), но при сильном падении в кризис сможет заработать значительную сумму c.

Исходная модель содержит некоторые серьезные допущения – в частности, насчет вида процессов. Известно, что реальные потоки биржевых событий не являются простейшими. Это скорее кусочно-стационарные случайные процессы с неизвестными точками переключения. Стационарность реальных данных индекса S&P500 была проверена и, действительно, периоды кризиса и периоды спокойствия на рынке показывают стационарность своих временных рядов, однако говорить о стационарности ряда на длительном временном промежутке неверно. Осознавая такие недостатки нашей модели, будем считать ее первым шагом к изучению реальной работы биржи и основой для построения более изощренных моделей.

Случайная величина Z_t суммы всех полученных за время t выигрышей/проигрышей X_i является сложной пуассоновской величиной, так как число слагаемых в сумме $Z_t = \sum_{t_i<t} X_i$ является также случайной переменной и зависит от потока событий, полученных устройством.

Теорема 2. Ожидаемое значение Z_t равно

$$E[Z_t] = (\lambda(p_1 a - q_1 b) + \mu(p_2 c - q_2 d))t.$$

Доказательство теоремы 2.

Так как устройство не знает заранее, событие какого типа поступило в момент времени i, то платеж X_i, полученный после распознавания события – это случайная величина с дискретным законом распределения. Учитывая, что потоки -событий и R-событий простейшие (а следовательно, стационарные), и вероятности p_1 и p_2 не зависят от времени, все X_i распределены одинаково по закону распределения случайной величины X

$$\Pr\{X = x\} = \begin{cases} p_d, \text{if } x = -d, \\ p_b, \text{if } x = -b, \\ p_a, \text{if } x = a, \\ p_c, \text{if } x = c. \end{cases}$$

Потоки регулярных событий Q и кризисных -событий являются простейшими, т.е. стационарными, ординарными и не имеют последействия, следовательно, суперпозиция этих потоков есть также простейший поток с интенсивностью $\lambda + \mu$. Тогда вероятность того, что неизвестное событие на самом деле является регулярным событием Q, равна $p_Q = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ и вероятность того, что новое неизвестное событие является кризисом R, равна $p_R = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Определим теперь вероятности для случайной величины одной выплаты: p_d (вероятность того, что случайная величина X примет значение $-d$) равна вероятности того, что появилось кризисное событие R и оно не было верно идентифицировано устройством, т.е. $p_d = p_R q_2$. Аналогично можем найти другие вероятности.

Пусть $F_X(x)$ – функция распределения выплаты X. Общая сумма выплат, полученных за время t, равна

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_Z} X_i,$$

где все X_i – случайные величины выплат после одного события, имеющие один и тот же закон распределения случайной величины X, и N_Z – это число событий, произошедших в течении времени t, оно распределено по закону Пуассона с параметром $(\lambda + \mu)t$ (т.к. поток событий является простейшим с интенсивностью $\lambda + \mu$).

Такая сумма, состоящая из пуассоновского числа N_Z слагаемых, где N_Z и X_i независимы в совокупности, называется сложной пуассоновской случайной величиной. Её распределение задается парой $P((\lambda+\mu)t;\ F_Z(x))$, а явный вид функции распределения получается применением формулы полной вероятности с гипотезами $\{N_Z = m\}$

$$\begin{aligned} F_Z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P\{X_1 + \cdots + X_m \le x\} P\{N_Z = m\} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} F_X^{(m)}(x) \frac{((\lambda+\mu)t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где $P\{N_Z = m\} = P_m(t) = \frac{((\lambda+\mu)t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$, $F_X^{(m)}(x)$ – m-кратная свертка функции распределения $F_X(x)$, $F_X^{(m)} = F_X^{(m-1)} * F_X, F_X * F_X$ – закон распределения переменной $X_1 + X_2$ с вероятностями $P(X_1 + X_2 = s) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = x_k) P(X_2 = s - x_k)$.

Тогда математическое ожидание случайной величины Z_t равно

$$\begin{aligned} E[Z_t] = \sum_{j=0}^{\infty} E[Z_t | N_Z = j] P\{N_Z = j\} = E[X] \sum_{j=0}^{\infty} j P\{N_Z = j\} = E[X]\, E[N_Z] = \\ = \left(-q_2 \frac{d\mu}{\lambda+\mu} - q_1 \frac{b\lambda}{\lambda+\mu} + p_1 \frac{a\lambda}{\lambda+\mu} + p_2 \frac{c\mu}{\lambda+\mu}\right)(\lambda+\mu)t = \\ = (\lambda(p_1 a - q_1 b) + \mu(p_2 c - q_2 d))t. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть ожидаемые выигрыши игрока от каждого события известны. При каких условиях на q_1 и q_2 математическое ожидание $E(Z)$ будет неотрицательным при заданных остальных параметрах?

Учитывая, что q_1 и q_2 – вероятности неправильно распознать события типа Q и R, то надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} E(Z) = \left[\lambda\big((1-q_1)a - q_1 b\big) + \mu\big((1-q_2)c - q_2 d\big)\right]t \geq 0, \\ 0 \leq q_1 \leq 1, \\ 0 \leq q_2 \leq 1, \end{cases}$$

при условиях на параметры $a, b, c, d \geq 0, \lambda, \mu, t > 0, a + b > 0, c + d > 0$ (последние два неравенства означают, что одновременно a и b, c и d не могут равняться нулю – иначе задача вырождается).

Решением будет область значений q_1 и q_2, заданная следующим образом

$$\begin{cases} 0 \leq q_1 \leq \min\left\{1, \dfrac{\lambda a + \mu c}{\lambda(a+b)}\right\}, \\ 0 \leq q_2 \leq 1 \text{ при } 0 \leq q_1 \leq \min\left\{1, \dfrac{\lambda a - \mu d}{\lambda(a+b)}\right\}, \\ 0 \leq q_2 \leq -\dfrac{\lambda(a+b)}{\mu(c+d)} q_1 + \dfrac{\lambda a + \mu c}{\mu(c+d)} \text{ при} \max\left\{0, \dfrac{\lambda a - \mu d}{\lambda(a+b)}\right\} \leq q_1 \leq \min\left\{1, \dfrac{\lambda a + \mu c}{\lambda(a+b)}\right\}. \end{cases}$$

Пусть q_2 будет равно 1 (это означает, что трейдер вообще не может распознать кризис). Как часто трейдер может ошибаться в идентификации регулярных событий, чтобы иметь все же положительный или по крайней мере неотрицательный ожидаемый выигрыш $E(Z)$?

Если взять интенсивности равными $\lambda = 246, \mu = 4$ и значения выигрышей/проигрышей равными $a = 0.6, -b = -0.6, c = 2.8, -d = -2.9$, то ответом будет $q_1 = 0.46$. Назовем такое значение вероятности q_1, при котором трейдер имеет нулевой ожидаемый выигрыш при условии полной неспособности распознавания кризисов ($q_2 = 1$), критическим значением вероятности ошибиться в регулярных событиях Q.

3.2 Анализ поведения трейдеров с учетом возможности наступления биржевых кризисов – модели с обучением и поощрением

3.2.1 Модель с поощрением

Так как интенсивность регулярных событий Q намного больше интенсивности редких кризисных событий, то регулярные события часто появляются одно за другим и формируют последовательность таких «спокойных» событий. Предположим, что устройство может «обучаться» на таких последовательностях и получать выгоду за счет распознавания подобных периодов.

Если событие типа Q было распознано устройством правильно k раз подряд, то оно получит премию за распознавание события Q, равную $a + \varepsilon$ (вместо a в базовой модели).

Обозначим через A событие, состоящее в том, что трейдер верно распознал наступление события Q (см. Рис. 2). Накопление опыта моделируется функцией опыта S_i на -м шаге (при получении в момент времени t_i i-го сигнала), т.е случайной величиной, равной количеству подряд произошедших событий типа A к моменту времени t_i. Она строится следующим образом:

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} + 1, \text{если случилось } A, \\ 0, \text{если случилось } \overline{A} \text{ (не случилось } A), \end{cases} \qquad S_0 = 0.$$

Изобразим новую модель графически (Рис. 2).

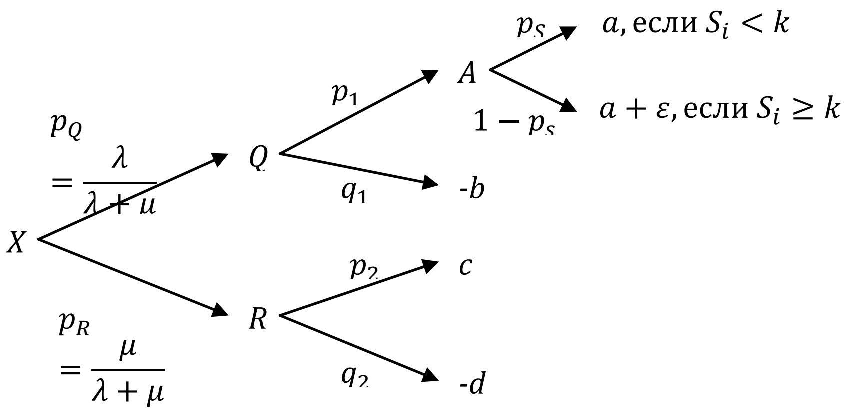

Рис. 2. Схема модели с поощрением

Теорема 3. Ожидаемое значение общего выигрыша в модели с поощрением равно

$$E(Z) = E\left(X^{(1)}\right)\cdot\left[\lambda_{N_Z}\cdot\frac{\Gamma\left(k-1,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)} + (k-1)\cdot\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right] +$$

$$+E\left(X^{(2)}\right)\cdot\left[\lambda_{N_Z}\cdot\left(1-\frac{\Gamma\left(k-1,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\cdot\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right] =$$

$$= E\left(X^{(1)}\right)\lambda_{N_Z} + \varepsilon p_a^{k+1}\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right] \quad (3.1)$$

где $\lambda_{N_Z} = (\lambda+\mu)t$ – интенсивность потока неизвестных событий (и Q, и R), $X_i^{(1)}$ и $X_i^{(2)}$ – случайные величины выигрыша в случаях $i < k$ и $i \geq k$, законы распределения которых равны, соответственно,

$$\Pr\left\{X_i^{(1)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1, \text{если } x = a, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

$$\Pr\left\{X_i^{(1)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1\left(1-\left(p_Q p_1\right)^k\right), \text{если } x = a, \\ \left(p_Q p_1\right)^{k+1}, \text{если } x = a+\varepsilon, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3. Пусть A – правильное распознание события типа Q, вероятность события A равна $p_a = p_Q p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} p_1$. Далее в зависимости от предыстории работы устройства (то есть от значения функции опыта S_i) выбирается величина выигрыша – либо a, либо $a + \varepsilon$.

Функция опыта S_i может принимать на -м шаге значения от 0 до i с определенными вероятностями. Например, вероятность S_i принять значение, равное i, равна $P\{S_i = i\} = p_a^i$, для остальных значений $k = 0,1,2, \dots, i-1$ вероятность равна $P\{S_i = k\} = p_a^k(1 - p_a)$.

Тогда $p_s = \Pr\{S_i < k\} = \begin{cases} 1, \text{если } i < k, \\ 1 - p_a^k, \text{если } i \geq k. \end{cases}$

Пусть X_i – случайная величина выигрыша на i –м шаге в модели с поощрением. Распределение X_i зависит от номера i: для $i < k$ вероятность получить значение $a + \varepsilon$ равна нулю, а для $i \geq k$ эта вероятность уже ненулевая. Тогда X_i принимает значения $-d, -b, a, a + \varepsilon, c$ с вероятностями

$$\Pr\{X_i = x\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1, \text{если } x = a \text{ и } i < k, \\ p_Q p_1 \left(1 - \left(p_Q p_1\right)^k\right), \text{если } x = a \text{ и } i \geq k, \\ 0, \text{если } x = a + \varepsilon \text{ и } i < k, \\ \left(p_Q p_1\right)^{k+1}, \text{если } x = a \text{ и } i \geq k, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

Для удобства вычислений мы разобьем нашу случайную величину выигрыша X_i на две составляющие: $X_i^{(1)}$ для случая $i < k$ и $X_i^{(2)}$ для случая $i \geq k$. Их законы распределения можно получить из закона распределения случайной величины X_i выбором соответствующих случаев:

$$\Pr\left\{X_i^{(1)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1, \text{если } x = a, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

$$\Pr\left\{X_i^{(2)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1\left(1 - \left(p_Q p_1\right)^k\right), \text{если } x = a, \\ \left(p_Q p_1\right)^{k+1}, \text{если } x = a + \varepsilon, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_{N_Z} = (\lambda + \mu)t$ – интенсивность потока событий. Тогда для сложной пуассоновской случайной величины суммарного выигрыша $Z = \sum_{i=1}^{N_Z} X_i$ имеем

$$E[Z] = \sum_{j=0}^{\infty} E[Z|N_Z = j]P\{N_Z = j\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} + \sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} +$$

$$+ \sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=k}^{N_Z} X_i^{(2)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\}. \tag{3.2}$$

Сумма разбита на две части, поскольку до -го слагаемого все X_i представляют собой $X_i^{(1)}$, а после k-го слагаемого – $X_i^{(2)}$. Предполагается, что $k > 1$, т.к. случай $k = 1$ по построению представляет собой основную модель, в которой выплата a заменяется на $a + \varepsilon$.

Подсчитаем первую сумму

$$\sum_{j=0}^{k-1} E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} = E\left(X^{(1)}\right) e^{-\lambda_{N_Z}} \sum_{j=0}^{k-1} j \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!}$$

Воспользуемся для подсчета последней суммы формулой 5.24.3 из [53]:

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} x^n = \frac{1}{k!} e^x \Gamma(k+1, x), \tag{3.3}$$

где $\Gamma(a, z)$ – неполная гамма-функция

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$

В нашем случае

$$\sum_{j=0}^{k-1} j \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{(j-1)!} = \sum_{m=0}^{k-2} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^{m+1}}{m!} = \lambda_{N_Z} \frac{1}{(k-2)!} e^{\lambda_{N_Z}} \Gamma\left(k-1, \lambda_{N_Z}\right).$$

Тогда окончательно первая сумма в выражении для математического ожидания выигрыша выглядит следующим образом

$$\sum_{j=0}^{k-1} E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} = E\left[X^{(1)}\right] \lambda_{N_Z} \frac{\Gamma\left(k-1, \lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)}.$$

Перейдем к подсчету второй суммы

$$\sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} = \sum_{j=k}^{\infty} E\left((k-1) X^{(1)}\right) P\{N_Z = j\} =$$

$$= (k-1) E\left(X^{(1)}\right) \sum_{j=k}^{\infty} P\{N_Z = j\} = (k-1) E\left[X^{(1)}\right] e^{-\lambda_{N_Z}} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!}.$$

Зная формулу (3.3), можем подсчитать сумму в последнем выражении

$$e^{-\lambda_{N_Z}} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!} = e^{-\lambda_{N_Z}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(\lambda_{N_Z}\right)^j}{j!}\right] =$$

$$= e^{-\lambda_{N_Z}} \left[e^{\lambda_{N_Z}} - \frac{1}{(k-1)!} e^{\lambda_{N_Z}} \Gamma(k, \lambda_{N_Z})\right] = 1 - \frac{\Gamma(k, \lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}.$$

Следовательно, вторая искомая сумма выглядит следующим образом

$$\sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} = (k-1)E\left(X^{(1)}\right)\left(1 - \frac{\Gamma(k, \lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right).$$

Остается третья сумма

$$\sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=k}^{N_Z} X_i^{(2)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} = \sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=k}^{j} X_i^{(2)}\right) P\{N_Z = j\} =$$

$$= E\left[X^{(2)}\right] \sum_{j=k}^{\infty} (j - k + 1) P\{N_Z = j\} =$$

$$= E\left[X^{(2)}\right]\left[\sum_{j=k}^{\infty} jP\{N_Z = j\} + (1-k)\sum_{j=k}^{\infty} P\{N_Z = j\}\right] =$$

$$= E\left(X^{(2)}\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1 - \frac{\Gamma(k-1, \lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\left(1 - \frac{\Gamma(k, \lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right].$$

Следовательно, математическое ожидание суммарного выигрыша составит

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i\right) =$$

$$= E\left(X^{(1)}\right)\left[\lambda_{N_Z}\frac{\Gamma\left(k-1, \lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)} + (k-1)\left(1 - \frac{\Gamma\left(k, \lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right] +$$

$$+E\left(X^{(2)}\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1 - \frac{\Gamma\left(k-1, \lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\left(1 - \frac{\Gamma\left(k, \lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right]. \quad (3.5)$$

С учетом того, что

$$E\left(X^{(2)}\right) = -dp_d - bp_b + ap_a(1 - p_a^k) + (a + \varepsilon)p_a^{k+1} + cp_c =$$
$$= E\left(X^{(1)}\right) + \varepsilon p_a^{k+1},$$

то данную формулу можно представить в виде

$$E(Z) = E\left(X^{(1)}\right)\lambda_{N_Z} + \varepsilon p_a^{k+1}\left[\lambda_{N_Z}\left(1 - \frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\left(1 - \frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right].$$

Последнее слагаемое в этой сумме представляет собой дополнительную прибыль, полученную игроком вследствие введения поощрения за «правильное» поведение. Теорема доказана.

3.2.2 Модель со снижающимся поощрением

Теперь изменим условия модели с поощрением: если событие типа Q было распознано устройством правильно k раз подряд, то оно поощряется увеличением премии за распознавание события Q, но эта премия снижается с ростом числа правильно распознанных регулярных событий (Рис. 3). То есть прибавка к выигрышу есть функция от значения функции опыта S_i – представим ее в виде степенной функции $\frac{\varepsilon}{g^{S_i-k}}$, параметр $g \geq 1$ отвечает за дисконт выигрыша, степень $S_i - k$ всегда неотрицательна. Здесь S_i – функция опыта на -м шаге, она строится также как раньше, A – выигрыш за правильное распознание события типа Q, это тоже случайная величина, зависящая от функции опыта.

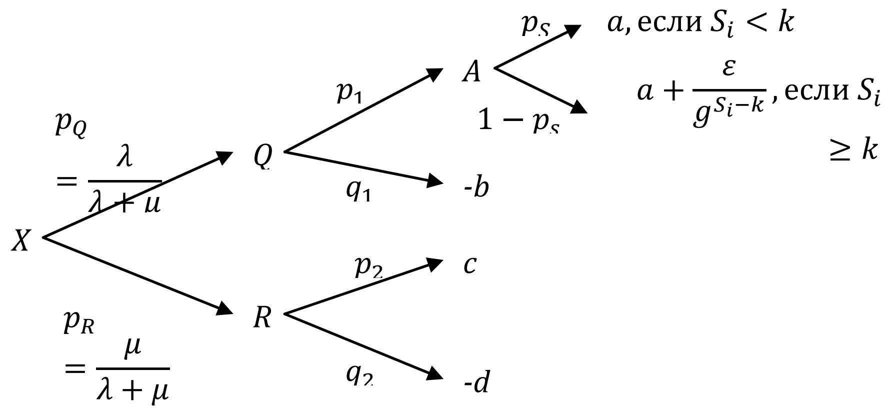

Рис. 3. Схема модели со снижающимся поощрением

Теорема 4. Ожидаемый выигрыш в модели со снижающимся поощрением равен

$$E[Z] = E\left[X_i^{(1)}\right]\lambda_{N_Z} +$$

$$+\varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma\left(k-1,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)}\right)+(1-k)\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right]+$$

$$+\varepsilon p_a^{k+2} g(g-1)\left[\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{1-k} e^{\left(\frac{p_a}{g}-1\right)\lambda_{N_Z}}\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\frac{p_a}{g}\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right].$$

Если выбрать $g = 1$, что соответствует модели с постоянной прибавкой ε, то математическое ожидание будет равно

$$E(Z) = E\left(X^{(1)}\right)\lambda_{N_Z} + \varepsilon p_a^{k+1}\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right)+(1-k)\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right],$$

как и в формуле (3.1).

Доказательство теоремы 4. Математическое ожидание суммарного выигрыша в общем виде выражается той же формулой (3.2), что и для предыдущего случая, разница лишь в вычислении последней суммы из трех

$$E[Z] = \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} +$$

$$+\sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i^{(1)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} + \sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=k}^{N_Z} X_i^{(2)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\}$$

Для начала рассмотрим случайную величину A, учитывая ее связь с S_i (Табл. 4):

Табл. 4. Закон распределения выигрыша за корректную идентификацию регулярного события

	$S_i < k$	$S_i = k$	$S_i = k+1$	$S_i = k+2$	…	$S_i = i-1$	$S_i = i$
A	a	$a+\varepsilon$	$a+\frac{\varepsilon}{g}$	$a+\frac{\varepsilon}{g^2}$	…	$a+\frac{\varepsilon}{g^{i-k-1}}$	$a + \frac{\varepsilon}{g^{i-k}}$
P	$1 - p_a^k$	$p_a^k(1 - p_a)$	$p_a^{k+1}(1 - p_a)$	$p_a^{k+2}(1 - p_a)$	…	$p_a^{i-1}(1 - p_a)$	p_a^i

Математическое ожидание A равно

$$E[A] = a\left(1-p_a^k\right) + \sum_{j=0}^{i-k-1}\left(a+\frac{\varepsilon}{g^j}\right)p_a^{k+j}\left(1-p_a\right) + \left(a+\frac{\varepsilon}{g^{i-k}}\right)p_a^i =$$

$$= a\left(1-p_a^k\right) + a\left(1-p_a\right)p_a^k\frac{1-p_a^{i-k}}{1-p_a} + \varepsilon\left(1-p_a\right)p_a^k\frac{1-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{i-k}}{1-\frac{p_a}{g}} + \left(a+\frac{\varepsilon}{g^{i-k}}\right)p_a^i$$

$$=$$

$$= a + \varepsilon p_a^k\left(\frac{1-p_a}{1-\frac{p_a}{g}}\right)\left(1-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{i-k}\right) + \varepsilon\left(\frac{p_a}{g}\right)^i g^k =$$

$$= a + \varepsilon p_a^k g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right) + \varepsilon\left(\frac{p_a}{g}\right)^i g^k p_a\left(\frac{g-1}{g-p_a}\right)$$

Теперь можем найти математическое ожидание выигрыша

$$E\left[X_i^{(2)}\right] = -dp_d - bp_b + \left(a + \varepsilon p_a^k g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right) + \varepsilon\left(\frac{p_a}{g}\right)^i g^k p_a\left(\frac{g-1}{g-p_a}\right)\right)p_a + cp_c =$$

$$= E\left[X_i^{(1)}\right] + \varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right) + \varepsilon\left(\frac{p_a}{g}\right)^i g^k p_a^2\left(\frac{g-1}{g-p_a}\right).$$

Далее найдем внутреннюю сумму:

$$E\left[\sum_{i=k}^{j} X_i^{(2)}\right] = (j-k+1)\left(E\left[X_i^{(1)}\right] + \varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right)\right) +$$

$$+\varepsilon p_a^{k+2} g(g-1)\left(1-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{j-k+1}\right)$$

Теперь мы можем вычислить третью сумму в (3.2)

$$\sum_{j=k}^{\infty} E\left(\sum_{i=k}^{N_Z} X_i^{(2)} \middle| N_Z = j\right) P\{N_Z = j\} =$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty}\left[(j-k+1)\left(E\left[X_i^{(1)}\right] + \varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right)\right) + \varepsilon p_a^{k+2} g(g-1)\left(1-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{j-k+1}\right)\right]\frac{\left(\lambda_{N_z}\right)^j}{j!}e^{-\lambda_{N_z}} =$$

$$= \left(E\left[X_i^{(1)}\right] + \varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right)\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma\left(k-1,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k-1)}\right)\right.$$

$$\left. + (1-k)\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right] +$$

$$+\varepsilon p_a^{k+2} g(g-1)\left[\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{1-k} e^{\left(\frac{p_a}{g}-1\right)\lambda_{N_Z}}\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\frac{p_a}{g}\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right].$$

Окончательно математическое ожидание итогового выигрыша равно

$$E[Z]=E\left[X_i^{(1)}\right]\lambda_{N_Z}+$$

$$+\varepsilon p_a^{k+1} g\left(\frac{1-p_a}{g-p_a}\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right)+(1-k)\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right]+$$

$$+\varepsilon p_a^{k+2} g(g-1)\left[\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)-\left(\frac{p_a}{g}\right)^{1-k} e^{\left(\frac{p_a}{g}-1\right)\lambda_{N_Z}}\left(1-\frac{\Gamma\left(k,\frac{p_a}{g}\lambda_{N_Z}\right)}{\Gamma(k)}\right)\right].$$

Теорема доказана.

3.2.3 Модель с обучением

Построим другую модель – теперь устройство будет обучаться на своих действиях: если событие типа Q было распознано устройством правильно k раз подряд (то есть k раз получен выигрыш a), то оно будет распознавать события Q правильно с большей вероятностью $p_1^* = p_1 + \delta > p_1$, причем $\delta \le q_1$.

Построим схему для новой модели (Рис. 4).

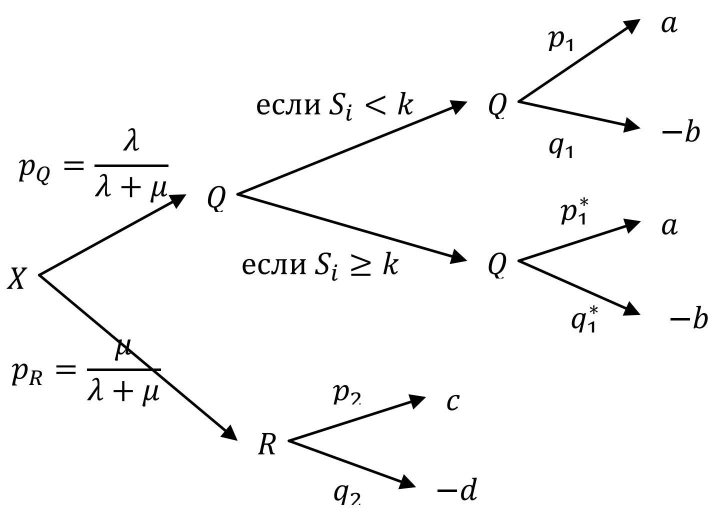

Рис. 4. Схема модели с обучением

Здесь S_i – функция опыта на -м шаге, т.е. случайная величина, равная количеству подряд правильно распознанных событий типа Q. Она строится почти так же, как и в предыдущем разделе, за исключением того, что основанием для изменения функции является наступление события $X_i = a$, то есть наше устройство верно идентифицировало событие типа Q

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} + 1, \text{если случилось } a, \\ 0, \text{если случилось } \bar{a} \text{ (не случилось } a), \end{cases} \qquad S_0 = 0.$$

Нам необходимо знать вероятности $P\{S_i < k\}$ и $P\{S_i \geq k\}$, поскольку случайная величина единичного выигрыша X_i принимает значения – $d, -b, a, c$ с вероятностями

$$\Pr\{X_i = x\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q[q_1 \Pr\{S_i < k\} + q_1^* \Pr\{S_i \geq k\}], \text{если } x = -b, \\ p_Q[p_1 \Pr\{S_i < k\} + p_1^* \Pr\{S_i \geq k\}], \text{если } x = a, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

Теорема 5. 1) Вероятность $P\{S_i < k\}$ равна

$$P\{S_i < k\} =$$

$$= p_Q(q_1 - q_1^*) \sum_{j=0}^{k-1} P\{S_{i-1-j} < k\} (p_Q p_1)^j + \frac{p_Q q_1^* + p_R}{p_Q q_1 + p_R} \left(1 - (p_Q p_1)^k\right).$$

2) Последовательность $P\{S_i < k\}$ сходится и предел последовательности равен

$$\lim_{i \to \infty} P\{S_i < k\} = \frac{(p_Q q_1^* + p_R)(1 - (p_Q p_1)^k)}{(p_Q q_1 + p_R) - p_Q(q_1 - q_1^*)(1 - (p_Q p_1)^k)}.$$

Доказательство теоремы 5.

1) Поскольку

$$P\{S_i < k\} = 1 - P\{S_i \geq k\} =$$

$$= P\{S_i = 0 \text{ или } S_i = 1 \text{ или } S_i = 2 \text{ или ... или } S_i = k - 1\} =$$

$$= P\{S_i = 0\} + P\{S_i = 1\} + P\{S_i = 2\} + \cdots + P\{S_i = k - 1\},$$

то распишем каждое из слагаемых.

$P\{S_i = 0\}$ – это вероятность функции опыта на -м шаге принять значение 0, то есть устройство неверно распознало событие Q или наступило событие R. Следовательно,

$$P\{S_i = 0\} = P\{X_i = -b \text{ или } X_i = c \text{ или } X_i = -d\} =$$
$$= p_Q[q_1 P\{S_{i-1} < k\} + q_1^* P\{S_{i-1} \geq k\}] + p_R p_2 + p_R q_2 =$$
$$= p_Q[q_1 P\{S_{i-1} < k\} + q_1^* P\{S_{i-1} \geq k\}] + p_R.$$

$P\{S_i = 1\}$ – это вероятность функции опыта на -м шаге принять значение 1, то есть устройство верно распознало событие Q, причем за шаг до этого ошиблось. По сути, эта последовательность соответствует тому, что $S_{i-1} = 0$, а затем наступило событие $X_i = a$ (что происходит с вероятностью $p_Q p_1$). Следовательно,

$$P\{S_i = 1\} = \left[p_Q[q_1 P\{S_{i-2} < k\} + q_1^* P\{S_{i-2} \geq k\}] + p_R\right]\left(p_Q p_1\right).$$

Аналогично можем найти каждое из слагаемых $P\{S_i = 0\}$, $P\{S_i = 1\}, \ldots, P\{S_i = k-1\}$. Например,

$$P\{S_i = k-1\} =$$
$$= \left[p_Q\left[q_1 P\left\{S_{i-1-(k-1)} < k\right\} + q_1^* P\{S_{i-k} \geq k\}\right] + p_R\right]\left(p_Q p_1\right)^{k-1}.$$

Теперь подсчитаем сумму $P\{S_i < k\} = P\{S_i = 0\} + P\{S_i = 1\} + P\{S_i = 2\} + \cdots + P\{S_i = k-1\}$, зная все слагаемые и подставив $P\left\{S_j < k\right\} = 1 - P\left\{S_j \geq k\right\}$:

$$P\{S_i < k\} = P\{S_i = 0\} + P\{S_i = 1\} + \cdots + P\{S_i = k-1\} =$$
$$= p_Q \sum_{j=0}^{k-1} \left[q_1 P\left\{S_{i-1-j} < k\right\} + q_1^*\left(1 - P\left\{S_{i-1-j} < k\right\}\right)\right]\left(p_Q p_1\right)^j + p_R \sum_{j=0}^{k-1} \left(p_Q p_1\right)^j$$
$$=$$
$$= p_Q(q_1 - q_1^*) \sum_{j=0}^{k-1} P\left\{S_{i-1-j} < k\right\}\left(p_Q p_1\right)^j + \left(p_Q q_1^* + p_R\right) \sum_{j=0}^{k-1} \left(p_Q p_1\right)^j.$$

Последняя сумма представляет собой геометрическую прогрессию, а, значит, окончательный ответ выглядит так

$$P\{S_i < k\} =$$

$$= p_Q(q_1 - q_1^*) \sum_{j=0}^{k-1} P\{S_{i-1-j} < k\} (p_Q p_1)^j + (p_Q q_1^* + p_R) \frac{(p_Q p_1)^k - 1}{p_Q p_1 - 1}.$$

Учитывая имеющиеся соотношения между вероятностями, можем переписать знаменатель последнего слагаемого таким образом

$$p_Q p_1 - 1 = p_Q p_1 + p_Q q_1 - p_Q q_1 - 1 = p_Q - p_Q q_1 - 1 = -p_R - p_Q q_1.$$

Тогда окончательно вероятность $P\{S_i < k\}$ равна

$$P\{S_i < k\} =$$

$$= p_Q(q_1 - q_1^*) \sum_{j=0}^{k-1} P\{S_{i-1-j} < k\} (p_Q p_1)^j + \frac{p_Q q_1^* + p_R}{p_Q q_1 + p_R} \left(1 - (p_Q p_1)^k\right). \quad (3.6)$$

2) Пусть $P\{S_i < k\} = z_i$, $p_Q(q_1 - q_1^*) = \alpha, 0 < \alpha < 1$, $p_Q p_1 = \beta, 0 \le \beta < 1$, $\frac{p_Q q_1^* + p_R}{p_Q q_1 + p_R} \cdot \left(1 - (p_Q p_1)^k\right) = \gamma, 0 < \gamma < 1$, причем с учетом наших обозначений $\gamma = \frac{(1-\beta^k)(1-\alpha-\beta)}{(1-\beta)}$. Тогда уравнение (3.6) примет вид

$$z_i = \alpha \cdot \sum_{s=i-k}^{i-1} \beta^{i-1-s} \cdot z_s + \gamma$$

или

$$z_i = \alpha \cdot (z_{i-1} + \beta z_{i-2} + \beta^2 z_{i-2} + \dots + \beta^{k-1} z_{i-k}) + \gamma.$$

Так как все $z_i = P\{S_i < k\}$ являются вероятностями и $\forall i \; 0 \le z_i \le 1$, то последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу.

Эта последовательность является невозрастающей, докажем это по индукции. Первые k членов равны 1 по условию: $z_0 = z_1 = z_2 = \dots = z_{k-1} = 1$, т.к. $S_0 = 0$ и при $i < k$ по построению $P\{S_i < k\} = 1$. Сначала докажем, что $z_k \le z_{k-1}$.

$$z_k = \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{k-1}) + \gamma$$

$$= \alpha \frac{(1-\beta^k)}{(1-\beta)} + \frac{(1-\beta^k)(1-\alpha-\beta)}{(1-\beta)} =$$

$$= 1 - \beta^k \le 1 = z_{k-1}.$$

Пусть теперь неравенство верно для $i-1$-го члена последовательности: $z_{i-1} \le z_{i-1}$ и всех предыдущих. Возьмем z_i и докажем, что $z_i \le z_{i-1}$. Оценим разность двух членов последовательности:

$$z_i = \alpha \cdot (z_{i-1} + \beta z_{i-2} + \beta^2 z_{i-2} + \dots + \beta^{k-1} z_{i-k}) + \gamma,$$

$$z_{i-1} = \alpha \cdot (z_{i-2} + \beta z_{i-3} + \beta^2 z_{i-4} + \dots + \beta^{k-1} z_{i-k-1}) + \gamma,$$

$$z_i - z_{i-1} =$$

$$= \alpha \cdot (z_{i-1} + (\beta-1) z_{i-2} + \beta(\beta-1) z_{i-2} + \dots + \beta^{k-2}(\beta-1) z_{i-k} - \beta^{k-1} z_{i-k-1}) \le$$

$$\le \alpha \cdot (z_{i-2} + (\beta-1) z_{i-2} + \beta(\beta-1) z_{i-2} + \dots + \beta^{k-2}(\beta-1) z_{i-k} - \beta^{k-1} z_{i-k-1}) =$$

$$= \alpha \cdot (\beta z_{i-2} + \beta(\beta-1) z_{i-2} + \dots + \beta^{k-2}(\beta-1) z_{i-k} - \beta^{k-1} z_{i-k-1}) =$$

$$= \alpha \cdot (\beta^2 z_{i-2} + \beta^2(\beta-1) z_{i-3} + \dots + \beta^{k-2}(\beta-1) z_{i-k} - \beta^{k-1} z_{i-k-1})$$

$$\le \dots \le$$

$$\le \alpha(\beta^{k-1} z_{l-k} - \beta^{k-1} z_{l-k-1}) = \alpha\beta^{k-1}(z_{l-k} - z_{l-k-1}) \le 0,$$

учитывая, что $0 < \alpha < 1, 0 \le \beta < 1$, и $z_{i-k} \le z_{i-k-1}$.

Таким образом, $z_i \le z_{i-1}$ – последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ является монотонной (невозрастающей). По признаку сходимости монотонной последовательности если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она сходится, следовательно, у нашей последовательности $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ существует предел $\lim_{i\to\infty} z_i = z$.

Тогда при $i \to \infty$

$$z = \lim_{i\to\infty} z_i = \lim_{i\to\infty} \left[\alpha \sum_{s=i-k}^{i-1} \beta^{i-1-s} z_s + \gamma \right] = \alpha \sum_{s=i-k}^{i-1} \beta^{i-1-s} z + \gamma$$

$$= z\alpha \frac{1-\beta^k}{1-\beta} + \gamma$$

откуда

$$z = \frac{(1-\beta)\gamma}{1-\beta-\alpha(1-\beta^k)}.$$

Или возвращаясь к нашим обозначениям:

$$\lim_{i\to\infty} P\{S_i < k\} = \frac{(p_Q q_1^* + p_R)(1-(p_Q p_1)^k)}{(p_Q q_1 + p_R) - p_Q(q_1 - q_1^*)(1-(p_Q p_1)^k)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Математическое ожидание суммарного выигрыша в модели с обучением равно

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{N_Z} X_i\right) =$$

$$= E\left(X^{(1)}\right)\left[\lambda_{N_Z}\frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)} + (k-1)\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right] +$$

$$+E\left(X^{(2)}\right)\left[\lambda_{N_Z}\left(1-\frac{\Gamma(k-1,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k-1)}\right) + (1-k)\left(1-\frac{\Gamma(k,\lambda_{N_Z})}{\Gamma(k)}\right)\right],$$

где

$$\Pr\left\{X_i^{(1)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q q_1, \text{если } x = -b, \\ p_Q p_1, \text{если } x = a, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

$$\Pr\left\{X_i^{(2)} = x\right\} = \begin{cases} p_R q_2, \text{если } x = -d, \\ p_Q[q_1 \Pr\{S_i < k\} + q_1^* \Pr\{S_i \ge k\}], \text{если } x = -b, \\ p_Q[p_1 \Pr\{S_i < k\} + p_1^* \Pr\{S_i \ge k\}], \text{если } x = a, \\ p_R p_2, \text{если } x = c. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы повторяет вывод формулы (3.5) в доказательстве теоремы 3.

3.3 Численные расчеты по моделям с учетом возможности наступления биржевых кризисов

3.3.1 Оценки параметров для модели из раздела 3.1

Попробуем теперь оценить параметры модели, прежде всего, интенсивности потоков этих событий. Параметры λ и μ, по сути, показатели состояния экономики, поэтому для их оценки возьмем фондовый индекс[15] S&P 500 и будем использовать временной ряд доходности этого фондового индекса. Временной интервал возьмем равный 10 годам – с 1999 по 2009гг[16]. В качестве значения индекса за день возьмем среднее арифметическое от значения открытия и закрытия.

Чтобы понять, когда наступают проблемы в экономике и начинается спад, построим значения волатильности индекса со скользящим интервалом в 20 дней, т.е. для каждого дня возьмем предыдущие 20 значений индекса S_i и подсчитаем стандартное отклонение от выборочного среднего $\bar{S}$ для этой выборки

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=j-19}^{j}(S_i - \bar{S})^2}\,, j = 20{,}22, \dots$$

Примем в качестве ориентира, что если значение волатильности превышает 6%, то это означает наступление событие типа R, т.е. кризис. На рисунке (Рис. 5) видно, что высокие значения волатильности соответствуют падению индекса.

Рис. 5. Индекс S&P500 и его волатильность

[15] см. Приложение П.1.4.
[16] с августа 1999 до декабря 2009 г.

Для этих данных (с августа 1999г. по декабрь 2009г.) количество превышений 6% барьера составляет 42 из 2645 значений (1.6%), т.е. $\mu = 4$ за год (берем среднее число рабочих дней в году – 250 рабочих дней), а $\lambda = 246$ за год.

Таким образом, по нашей оценке за год в среднем бывает 246 “спокойных дней” и 4 дня, характеризующихся высокой волатильностью и падением индекса. Для барьера в 10% соответствующие оценки равняются 249 и 1, соответственно.

Для анализа на стационарность выбирались периоды, соответствующие только регулярным или только кризисным дням; для проверки использовался тест Дики-Фуллера на наличие единичного корня и анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функции [105]. Ряды, как правило, являются стационарными как на небольших выборках (порядка 10-20 точек), так и в течение длительного периода (несколько лет) событий только одного типа.

Теперь оценим величины отдельных выигрышей/проигрышей. В точках, соответствующих событию Q (что определяется по значению волатильности индекса – она должна быть меньше порогового значения для события Q), оценим a и b. Если в этот момент индекс возрастает, значит, реализовалось событие a, а если убывает – то $-b$. Аналогично с событиями типа R, которые мы определили как превышение волатильности над пороговым значением: если значение индекса увеличилось по сравнению с предыдущим значением, то изменение считаем за величину c, если значение индекса уменьшилось, то это уменьшение обозначим как d. В полученных выборках подсчитаем среднее и примем их за оценки соответствующих величин выигрышей/проигрышей.

В Табл. 5 приведены значения параметров модели для пороговых значений 6% и 10%.

Табл. 5. Оценка параметров модели для индекса S&P500

Индекс S&P500 август 1999-декабрь 2009 (n =2664 наблюдения)						
Пороговое значение волатильности	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
6%	246	4	7	-8	24	-26
10%	249	1	7	-8	35	-29

Для таких оценок параметров можно посмотреть, какими должны быть вероятности ошибиться при идентификации, так чтобы ожидаемый выигрыш трейдера был неотрицательным. Для порога 6% область параметров q_1 и q_2, при которых трейдер получает неотрицательный суммарный выигрыш от торговли на бирже, выглядит так, как показано на Рис. 6 (заштрихованная область).

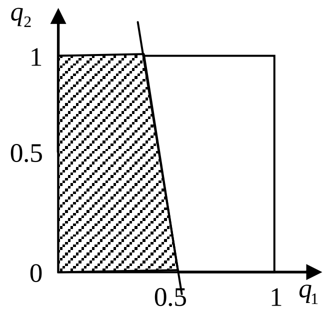

Рис. 6. Область параметров $\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}$, дающих неотрицательный ожидаемый выигрыш.

Как видно, вероятность ошибиться при распознавании частых событий оказывает несравненно более сильное влияние на ожидаемый выигрыш, что неудивительно при таких значениях остальных параметров. Фактически, достаточно распознавать события типа Q в половине случаев для обеспечения положительного результата всей игры. Это главный вывод данной модели – для того, чтобы «быть в плюсе», нужно уметь идентифицировать верно регулярные события, даже если игрок не в состоянии понять, когда наступает кризис.

Действительно, если выбрать горизонт в 1 год и вероятность ошибок для событий Q и R равными $q_1 = 0.46, q_2 = 1$ (т.е. кризисы распознавать не удается) ожидаемый доход будет неотрицателен. Естественно, ожидаемый доход будет увеличиваться с уменьшением q_1 и q_2.

Рассчитаем такие же показатели и для других индексов – французского CAC 40, немецкого DAX, японского Nikkei 225 и гонконгского Hang Seng. Возьмем порог превышения в 6% и сравним значения параметров, полученных для каждого из индексов (Табл. 6).

Табл. 6. Оценки параметров для всех фондовых индексов

Сводные оценки параметров индексов (относительные изменения) для 6-процентного порога, %						
Индекс	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
S&P 500	246	4	0,6	-0,6	2,8	-2,9
Dow Jones	246	4	0,6	-0,6	1,9	-2,4
CAC 40	243	7	0,8	-0,8	3,0	-2,5
DAX	239	11	0,8	-0,9	2,1	-2,5
Nikkei 225	245	5	0,8	-0,9	2,6	-3,2
Hang Seng	241	9	0,9	-0,9	2,6	-3,0

Видно, что в процентном соотношении оценки параметров для индексов примерно равны – в спокойный период индекс колеблется с размахом в 0,6-0,9%, в кризисное время амплитуда увеличивается приблизительно в 4 раза.

Необходимо отметить, что использовались дневные данные, которые отражают изменение индекса в процентах к уровню предыдущего дня, а не скачки индекса за один день в ходе торгов. Подобные изменения могут быть значительнее, например, 17 апреля 2000 года разность между наивысшим и наиболее низким значением индекса японского Nikkei 225 составила почти 100 пунктов (приблизительно 10 %). Однако по сравнению со значением Nikkei за предыдущий день 16 апреля падение составило всего 3,8%.

Применяя наши модели для исследования индексов, мы поступаем так, словно игрок вкладывает деньги в акции всех компаний из списка S&P 500 в равных пропорциях. Однако можно взять данные конкретных компаний и рассчитать каков будет выигрыш игрока при вложениях в акции определенной компании.

Мы выбрали 10 топовых компаний США (по капитализации):

1) The Exxon Mobil Corporation, или ExxonMobil –крупнейшая частная нефтяная компания в мире, одна из крупнейших корпораций в мире по размеру рыночной капитализации;

2) Microsoft Corporation – одна из крупнейших транснациональных компаний по производству программного обеспечения для персональных компьютеров, игровых приставок, мобильных телефонов и проч., разработчик семейства операционных систем Windows;

3) The General Electric Company –многоотраслевая корпорация, производитель многих видов техники, включая локомотивы, энергетические установки, газовые турбины, авиационные двигатели, медицинское оборудование, осветительную технику, пластмассы и герметики;

4) JPMorgan Chase & Co. – одна из старейших и самых влиятельных финансовых компаний на планете, один из лидеров в банковской и инвестиционной сфере;

5) Procter & Gamble Co. – крупный производитель косметических средств, бытовой химии, бытовой техники, продуктов питания, и проч.;

6) Johnson & Johnson –крупный производитель лекарств, товаров по уходу за телом и медицинского оборудования;

7) Apple Inc. – крупный производитель персональных и планшетных компьютеров, аудиоплееров, телефонов, программного обеспечения;

8) AT&T Inc. – одна из крупнейших американских телекоммуникационных компаний, поставщик телефонной связи в США, и один из крупнейших провайдеров беспроводных услуг в США;

9) International Business Machines (IBM) – транснациональная корпорация, один из крупнейших в мире производителей и поставщиков аппаратного и программного обеспечения, ИТ-сервисов, консалтинговых услуг;

10) Bank of America Corporation – крупнейшая банковская холдинговая компания в США по числу активов.

События Q и R определим по данным S&P 500 так же, как в исследовании базовой модели, а затем подсчитаем выплаты a, b, c, d для всех 10 компаний: если цена акции идет вверх/вниз, а волатильность индекса S&P 500 меньше 6%, то реализовалось a/b; и если цена акции компании идет вверх/вниз при том, что волатильность S&P 500 выше 6 %, то это означает реализацию выплат c/d.

Оценки параметров приведены в Табл. 7. Первая строка соответствует оценкам по индексу S&P 500. Можно отметить, что все выбранные компании имеют параметры, превышающие параметры средних рыночных оценок по S&P 500 для регулярных событий, причем некоторые имеют большие оценки также и для кризисных событий.

Табл. 7. Оценки параметров для 10 компаний (порог 6%, $\boldsymbol{\lambda}$=246, $\boldsymbol{\mu}$=4)

	Компания	a	$-b$	c	$-d$
	Фондовый индекс S&P500	0,61	-0,64	2,81	-2,93
1	Exxon Mobil Corporation	0,84	-0,92	3,06	-3,82
2	Microsoft Corporation	1,14	-1,09	3,03	-3,28
3	General Electric Company	1,12	-1,11	5,02	-3,57
4	JPMorgan Chase & Co.	1,40	-1,34	7,30	-5,03
5	Proctor&Gamble Co.	0,73	-0,74	2,27	-2,12
6	Johnson&Johnson	0,73	-0,72	2,43	-2,32
7	Apple Inc.	1,76	-1,64	3,43	-2,83
8	AT&T Inc.	1,07	-1,04	3,52	-2,95

9	International Business Machines (IBM)	1,00	-0,95	2,48	-2,81
10	Bank of America Corporation	1,35	-1,36	7,98	-5,79

Волатильность не является, конечно, единственным показателем поведения рынка и сигналом кризисных явлений. При оценке волатильности естественным образом встает вопрос о расчетном периоде. Уменьшение периода обеспечивает рост вероятности ошибки в оценке волатильности, поскольку она сама приобретет повышенную изменчивость. Удлинение периода снизит ее, но обусловит рост вероятности получения запоздалых сведений о рынке. Возможно, это присутствует и в наших расчетах, т.к. появится погрешность в оценках c и d, требующих точной даты кризисного дня.

Проведем расчеты для оценки параметров модели λ, μ, a, b, c, d, используя вместо волатильности доходность индекса

$$r_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}, \mathrm{i} = 2, \dots 2665.$$

Как видно из Рис. 7, падение индекса немедленно отражается на его доходности, точнее на ее амплитуде. Полученные оценки всех параметров приведены в Табл. 8.

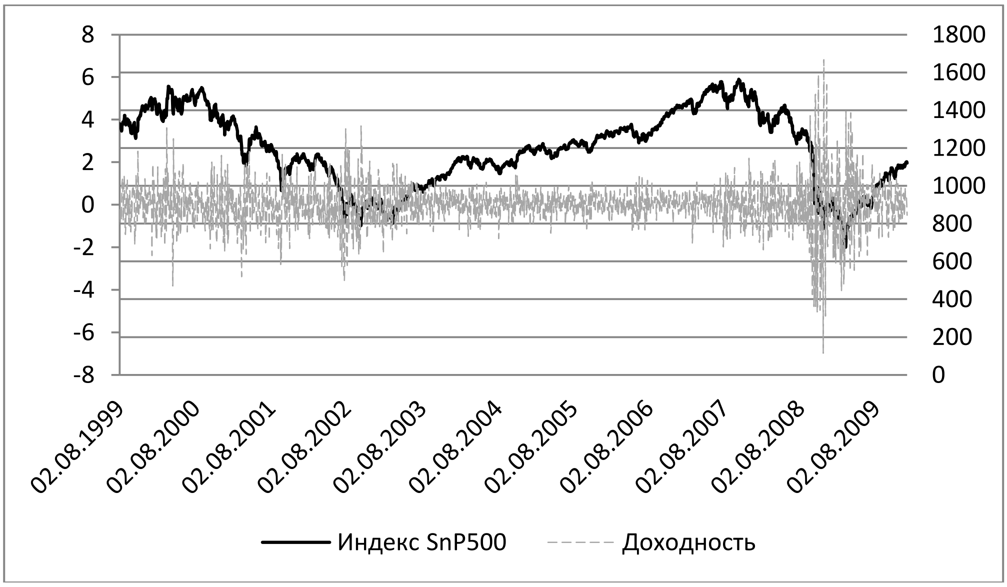

Рис. 7. Индекс S&P 500 и его доходность

Табл. 8. Значения параметров для оценок, рассчитанных по доходности

Индекс S&P500 август 1999-декабрь 2009 (n =2664 наблюдения)						
Пороговое значение доходности	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
3%	246	4	7	-7	40	-39
4%	248	2	7	-7	45	-47
5%	249	1	7	-8	50	-51

Как видно, доходность также может служить «мерилом» состояния индекса.

Кроме того, использование средних оценок на таком большом промежутке времени неизбежно огрубляет расчеты. Любопытно посмотреть на распределение по годам кризисных событий (Табл. **9**). Отсутствие чисел означает отсутствие в указанный период скачков волатильности более 6%, т.е. ‘спокойную жизнь’ и отсутствие потрясений на рынке.

Табл. 9. Оценка параметров модели по годам с использованием волатильности с порогом в 6%

	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Оценка a	8	11	8	8	5	5	4	5	7	11	8
Оценка b	-9	-11	-9	-8	-5	-4	-4	-4	-7	-12	-9
Оценка c				17						30	14
Оценка d				-25						-30	-15

Кроме того, мы можем взять цены закрытия для расчета параметров модели (Табл. 11), вместо среднего значения цен закрытия и открытия (Табл. 10).

Табл. 10. Параметры модели, оцененные по средней цене, %

S&P 500, среднее значение индекса за день						
Порог	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
6%	246	4	0,61	-0,64	2,81	-2,93
8%	248	2	0,63	-0,65	4,00	-2,80
10%	249	1	0,63	-0,66	3,74	-3,05

Табл. 11. Параметры модели, оцененные по цене закрытия, %

S&P 500, значение закрытия						
Порог	λ	μ	a	$-b$	c	$-d$
6%	246	4	0,85	-0,90	3,92	-3,65
8%	248	2	0,88	-0,92	5,59	-3,90
10%	249	1	0,89	-0,93	5,47	-3,87

3.3.2 Анализ моделей с обучением и поощрением

1) Ожидаемый выигрыш как функция от k.

Построим графики математического ожидания выигрыша для каждой модели как функции от параметра k. Выберем такие значения параметров: $a = 0.6, -b = -0.6, c = 2.8, -d = -2.9, \lambda = 246, \mu = 4$ – это параметры, полученные путем анализа индекса S&P500 за период с августа 1999 по декабрь 2009гг. Пусть вероятность ошибки в идентификации редких кризисных событий $q_2 = 1$ (т.е. игрок вообще не может «почувствовать» наступление кризиса), а вероятность ошибки в идентификации регулярных событий q_1 примем равной 0.2, 0.3, 0.4 и 0.46. Дополнительные параметры $\varepsilon = 0.05$ (прибавка к выигрышу a при условии успешного распознавания k раз подряд события Q), $\delta = 0.1$ (увеличение вероятности p_1 при условии успешного распознавания k раз подряд события Q). В основной модели математическое ожидание $E(Z)$ для каждого из четырех случаев равно 77, 47, 18 и 0.2, соответственно.

Для горизонта в 1 год графики зависимости ожидаемого выигрыша от параметра k показаны на Рис. 8.

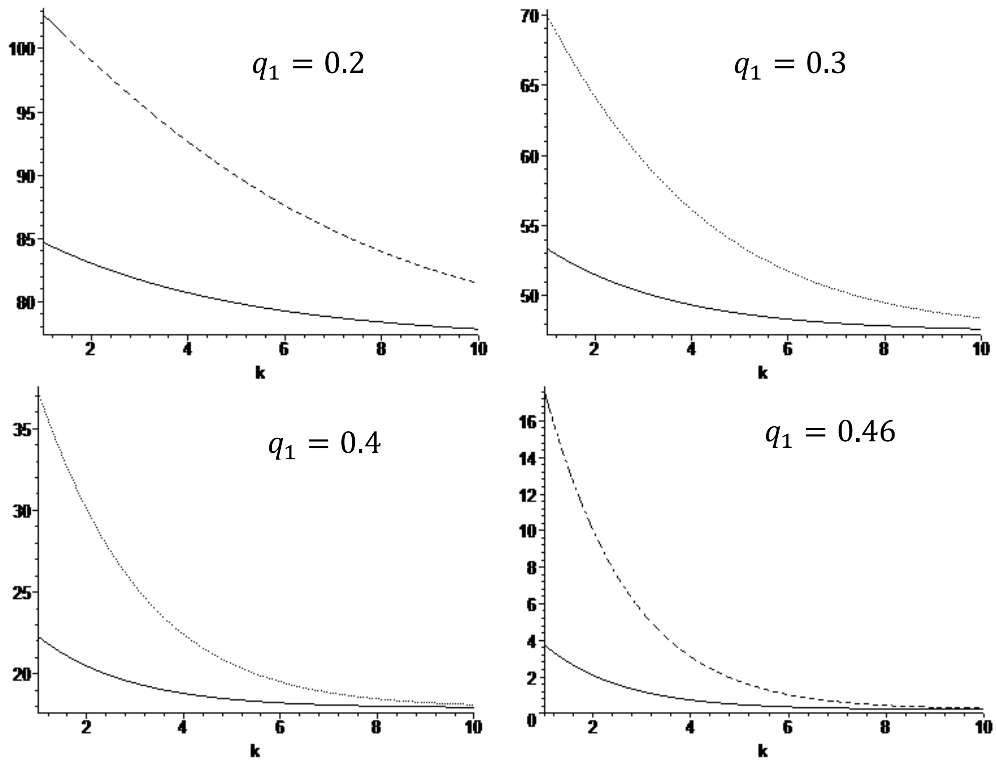

Рис. 8. Сплошная линия обозначает математическое ожидание модели с увеличением премии, а прерывистая – модели с увеличением вероятности правильного распознавания

Расположим значения математического ожидания выигрыша в зависимости от параметра k (Табл. 12 и Табл. 13).

Табл. 12. Ожидаемый выигрыш как функция от $\boldsymbol{k}$ для $\boldsymbol{q_1 = 0.2}$

$E(Z)$ при $q_1 = 0.2$	$k = 1$	$k = 10$	$k = 30$
Модель с поощрением	85	80	78
Модель с обучением	103	90	81
Основная модель	77	77	77

Табл. 13. Ожидаемый выигрыш как функция от $\boldsymbol{k}$ для $\boldsymbol{q_1 = 0.46}$

$E(Z)$ при $q_1 = 0.46$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$
Модель с поощрением	3.7	0.5	0.2
Модель с обучением	17.6	1.7	0.3
Основная модель	0.2	0.2	0.2

Таким образом, чем ближе значения вероятностей ошибок к критическим значениям (при которых математическое ожидание становится нулевым), тем меньше мы можем влиять на ожидаемый выигрыш через параметр k, задающий в обеих моделях момент перехода к более выгодным условиям.

2) Ожидаемый выигрыш как функция от q_1.

Посмотрим теперь на ожидаемый выигрыш $E(Z)$ как на функцию от вероятности ошибки в идентификации регулярных событий q_1, точнее, выясним, дает ли использование более сложных моделей большую свободу в действиях игрока. Очевидно, что математическое ожидание выигрыша $E(Z)$ увеличится в каждой из моделей, но не увеличится ли в новых моделях критическое значение q_1 (под критическим понимается значение q_1, дающее нулевой ожидаемый выигрыш $E(Z)$)?

Параметры модели остаются теми же: $a = 0.6, -b = -0.6, c = 2.8, -d = -2.9, \lambda = 246, \mu = 4,\ \varepsilon = 0.05, \delta = 0.1$. Выберем для начала $k = 5$ (Рис. 9).

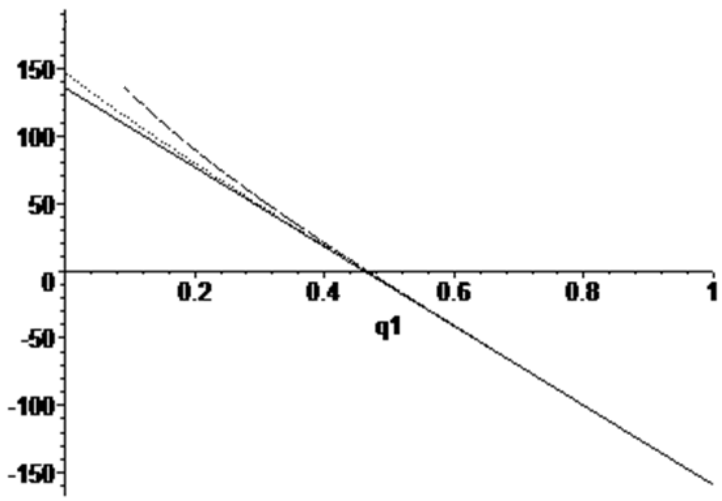

Рис. 9. Сплошная линия обозначает ожидаемый выигрыш в основной модели, точечная – в модели с поощрением, а пунктирная – в модели с обучением

Поскольку $q_1^* = q_1 - \delta \in [0,1]$, то в третьей модели значения q_1 должны принадлежать интервалу $[\delta, 1]$. Сравним результаты (Табл. 14).

Табл. 14. Ожидаемый выигрыш как функция от $\boldsymbol{q_1}$ при $\boldsymbol{k = 5}$

$E(Z)$	q_1, при котором $E(Z) = 0$	$E(Z)$, при $q_1 = 0$	$E(Z)$, при $q_1 = \delta$

Основная модель	0.461	136	106
Модель с поощрением	0.462	147	112
Модель с обучением	0.466	-	132

Если выбрать $k = 10$, то все q_1, при которых $E(Z) = 0$, будут равны 0.461. То есть, увеличение k сводит на нет выигрыш в вероятности q_1, влияя лишь на ожидаемый выигрыш.

Как видно из нижеследующей таблицы (Табл. 15), вероятность $\boldsymbol{q_1}$ можно увеличить, увеличивая параметр $\boldsymbol{\delta}$ либо уменьшая $\boldsymbol{k}$.

Табл. 15. Значения $\boldsymbol{q_1}$, дающие нулевой ожидаемый выигрыш при разных $\boldsymbol{k}$

	$k = 3$ q_1, при котором $E(Z) = 0$	$k = 5$ q_1, при котором $E(Z) = 0$	$k = 10$ q_1, при котором $E(Z) = 0$
Основная модель Модель с поощрением $\varepsilon = 0.05$ Модель с обучением $\delta = 0.1$	0.461 0.464 0.477	0.461 0.462 0.466	0.461 0.461 0.461
Основная модель Модель с поощрением $\varepsilon = 0.05$ Модель с обучением $\delta = 0.2$	0.461 0.464 0.497	0.461 0.462 0.473	0.461 0.461 0.461
Основная модель Модель с поощрением $\varepsilon = 0.05$ Модель с обучением $\delta = 0.3$	0.461 0.464 0.522	0.461 0.462 0.485	0.461 0.461 0.462
Основная модель Модель с поощрением $\varepsilon = 0.05$ Модель с обучением $\delta = 0.4$	0.461 0.464 0.554	0.461 0.462 0.504	0.461 0.461 0.465

Более того, при уменьшении значения k (количества правильно идентифицированных регулярных событий) критическое значение q_1 превышает ½ уже при небольшой прибавке δ к вероятности верной идентификации события Q (Табл. 16).

Табл. 16. Значения $\boldsymbol{q_1}$, дающие нулевой ожидаемый выигрыш при разных $\boldsymbol{k}$, для модели с обучением

	$k=2$ q_1, при котором $E(Z)=0$	$k=3$ q_1, при котором $E(Z)=0$	$k=4$ q_1, при котором $E(Z)=0$	$k=5$ q_1, при котором $E(Z)=0$
Модель с обучением $\delta=0.1$	0.490	0.477	0.470	0.466
Модель с обучением $\delta=0.12$	0.496	0.481	0.472	0.467
Модель с обучением $\delta=0.13$	0.500	0.483	0.473	0.468
Модель с обучением $\delta=0.2$	0.523	0.497	0.482	0.473
Модель с обучением $\delta=0.21$	0.526	0.499	0.483	0.473
Модель с обучением $\delta=0.22$	0.529	0.502	0.485	0.472
Модель с обучением $\delta=0.25$	0.540	0.509	0.490	0.478

Заключение по Главе 3

В данной главе построены математические модели, описывающие поведение трейдера, принимающего решения при возможности наступления биржевого кризиса. Также были предложены варианты модели с дополнительными условиями в виде награды за «правильное поведение» как просто прибавкой в сумме выигрыша, так и увеличением вероятности верной идентификации событий, что означает накопление опыта трейдером.

Предложенные модели были протестированы на данных мировых фондовых индексов и на данных об акциях некоторых компаний. Было показано, что для получения в среднем положительного суммарного выигрыша за некоторый период трейдеру достаточно верно распознавать часто случающиеся регулярные события чуть больше, чем в половине случаев, причем даже при условии полной несостоятельности в определении кризисных событий. Таким образом, традиционная стратегия инвесторов вполне оправдана – ожидание кризиса и попытки заработать на нем могут принести прибыль, однако на рынке можно получить доход и не умея предсказывать кризисы.

Глава 4. Имитационные модели анализа поведения участников фондовой биржи

Четвертая глава посвящена описанию программного комплекса для математического моделирования и численного анализа поведения участников фондовой биржи. В разделе 4.1 приведено описание программного комплекса, представляющего собой инструментарий математического моделирования и анализа поведения участников биржи методами имитационного моделирования. В разделе 4.2 приведены описания схем проведения численных экспериментов по изучению возможностей участников биржи. В разделе 4.3 приведены результаты численных расчетов по трех моделям поведения участников биржи на основе данных нескольких мировых фондовых бирж.

4.1 Описание имитационных моделей анализа поведения участников биржи

Мы моделируем рынок одного актива, на котором торгуют N агентов. Все агенты в этой модели являются спекулянтами и заинтересованы не в самом активе как долгосрочном вложении, а в возможности заработать на разнице в цене актива. Поэтому все заявки рассчитаны на краткосрочную перспективу и агенты торгуют на дневных колебаниях цен. Временной горизонт в описываемых моделях – 10 лет[17].

В начале экспериментов агенты приходят на рынок, не имея ценных бумаг и располагая одинаковым начальным капиталом. Агенты

[17] 10 лет – это условная цифра, связанная с тем, что в расчетах использовались дневные данные по различным биржевым индексам. Можно говорить о тактах и иметь в виду, что в день может быть, например, 10-40 тактов.

выставляют только рыночные заявки[18]. Мы предполагаем, что все выставленные заявки могут быть удовлетворены в полном объеме.

Также мы исследуем влияние использования маржинальных сделок[19] (в том числе при совершении продаж без покрытия) на благосостояние и возможность банкротства трейдеров. В нашей модели маржинальная торговля запрещена в кризис, что связано с появлением у заемщиков опасений невозврата кредитов.

Для оценки успешности деятельности агентов мы рассчитываем в конце дня после проведения торгов показатель общего благосостояния агента, суммируя количество имеющихся у него денег с количеством имеющихся акций, умноженных на рыночную цену следующего дня. Использование следующей рыночной цены связано с тем, что агент сможет продать имеющиеся у него акции лишь на следующий день. В случае снижения благосостояния агента до критического уровня (половины начального состояния) агент объявляется банкротом и прекращает участие в торговле. Порог в 50% от начального капитала выбран как адекватная оценка деятельности трейдера на 10-летнем интервале, этот параметр можно варьировать при проведении экспериментов.

В качестве критериев для оценки успешности стратегий мы рассматриваем три простых критерия: ожидаемое благосостояние в конце 10-летнего периода, вероятность получения положительной доходности за этот период и вероятность обанкротиться за эти 10 лет. Для этого мы оцениваем: 1) среднее благосостояние агентов на финальную дату, 2) долю агентов, чье благосостояние на финальную дату превысило начальное благосостояние и 3) долю банкротов в общей выборке.

[18] см. приложение П.1.3.
[19] см. приложение П.1.3.

Поскольку в данной работе агенты являются мелкими участниками рынка, не имеющими влияния на цену актива (в зарубежной литературе таких трейдеров называют price-takers), то цену необходимо задавать экзогенно – для этого мы использовали дневные данные мировых фондовых индексов за период 01.01.2000-31.12.2009. Временной ряд состоит из цен закрытия. Мы использовали американский индекс S&P500 (2514 наблюдений), французский CAC 40 (2552 наблюдения), немецкий DAX (2542 наблюдения), британский FTSE 100 (2525 наблюдений), японский Nikkei 225 (2453 наблюдения), гонконгский Hang Seng (2488 наблюдений).

Для выделения дней, потенциально подходящих для ограничительных мер по продажам без покрытия, мы использовали волатильность индекса, рассчитанную со скользящим интервалом в 20 значений, и применяли пороговое правило: если значение волатильности не превышает соответствующего значения индекса, умноженного на заранее заданное значение порога, то будем считать этот день регулярным (экономика стабильна) и обозначать буквой Q, а в случае превышения будем считать, что рынок испытывает некоторые потрясения (кризис) и будет введен запрет на маржинальную торговлю – такие дни обозначим R. Окно в 20 значений приблизительно соответствует одному календарному месяцу и позволяет использовать эффект «долгой памяти» – в течение месяца после прекращения резких колебаний цен трейдеры не смогут использовать продажи без покрытия и будут вынужденно осторожны. Эксперименты проводились для значения порога в 4%.

4.2 Описание схем экспериментов по изучению возможных стратегий участников биржи

4.2.1. Базовая модель

В начальный момент времени все агенты обладают $m_0 = 10\,000$ условных единиц и $v_0 = 0$ акций. Агенты в этом эксперименте являются спекулянтами и принимают решения в краткосрочной перспективе, поэтому в каждый момент времени t их заботит только направление движения цены в следующий момент времени $s_{t+1} - s_t$, вероятность того, что направление будет ими предсказано верно, равна p. Эта характеристика выбирается в начальный момент существования агента и неизменна в течение жизни агента на рынке.

На каждой -ой итерации i-й агент принимает решение о продаже $\left(d_{i,t} = -1\right)$ или покупке $\left(d_{i,t} = +1\right)$ актива. Если в момент времени t агент прогнозирует рост цены актива, то агенту выгодно купить акции по цене s_t, так его благосостояние в следующий момент времени увеличится. Если агент ожидает снижения цены, то ему выгодно сейчас продать по текущей цене, чтобы не допустить снижения благосостояния в следующий момент времени. После принятия решения агенты выставляют заявки. Если решение $d_{i,t} = +1$, то объем заявки при запрете использования заемных средств выставляется по формуле $x_{i,t} = z \cdot \frac{m_{i,t}}{s_t}$, где z – случайная величина, равномерно распределенная на интервале [0, 1] (в дальнейшем такой закон распределения будем обозначать как R[0,1]). Если маржинальные сделки разрешены, то агент выставляет заявку на покупку в объеме $x_{i,t} = z \cdot \frac{w_{i,t} \cdot leverage}{s_t}$, где $leverage$ обозначает кредитное плечо (соотношение залога и заемного капитала). Наличие случайной величины z отражает тот факт, что агент может хотеть продать не все имеющиеся у него акции или купить не на все деньги в случае торговли без кредитного плеча или использовать не полностью максимально доступный заемный капитал в случае маржинальной торговли. Как правило, агентные модели учитывают такую возможность, например, в [101] агенты могут торговать, используя только 2% капитала в одной заявке. Аналогично выставляются заявки для случая $d_{i,t} = -1$.

После совершения всех сделок с учетом выставленных заявок пересчитывается число имеющихся у агента акций и собственных средств (с этими средствами агент приступит к торгам на следующий день) и текущее благосостояние агента $w_{i,t+1} = m_{i,t+1} + v_{i,t} \cdot s_{t+1}$. Если агент i становится банкротом в момент времени t, что происходит при условии $w_{i,t} \leq \frac{1}{2} w_0 = 5000$, то он уходит с рынка.

4.2.1. Модель «Лидеры и последователи»

Агенты делятся на две равные группы – первая из них ведет себя так же, как и в базовой модели, т.е. пытается предсказать движение цен с вероятностью p, а вторая группа копирует действия агентов из первой группы с опозданием на один шаг и агент-последователь j, наблюдая предыдущее действие своего лидера i, повторяет его на следующем шаге. Для каждого агента из первой группы (лидера) существует только один агент из второй группы (последователь), копирующий его действия. Последователь не знает значение вероятности p у своего лидера.

4.2.3. Модель «Искатели черного лебедя»

Агенты делятся на две группы, условно называемые «обычные трейдеры» и «искатели черного лебедя» – первые из них хорошо предсказывают движение цен в период спокойной экономической жизни, но не могут сориентироваться в кризис, а вторые, наоборот, не очень хорошо предсказывают движение в регулярные периоды, зато практически не ошибаются в кризисное время (стратегия Талеба).

Разница в характеристиках выглядит следующим образом. «Обычные трейдеры» в дни, соответствующие регулярным дням (т.е. экономика стабильна, такие дни для краткости назовем -днями), угадывают направление движения цен и принимают верные решения с вероятностью p^Q, которая назначается агенту с помощью равномерно распределенной на интервале $[p_{min1}, p_{max1}]$ случайной величины, причем $p_{min1} \geq 0.5$. В кризисные дни (назовем их -дни) эта вероятность падает: $p^R = p^Q - \delta$. «Искатели черного лебедя», наоборот, принимают верные решения в регулярные дни с меньшей вероятностью, чем в кризисные: $p^Q \sim R[p_{min2}, p_{max2}]$, $p_{max2} \leq 0.5$ и $p^R = p^Q + \delta$. Таким образом, агенты из группы «обычных трейдеров» показывают лучшие результаты в условиях стабильной экономической ситуации и мало результативны в кризис, а агенты, использующие стратегию Талеба, больше нацелены на кризис и в условиях стабильного рынка чаще терпят убытки.

4.3 Анализ поведения участников биржи при работе с финансовыми инструментами по результатам экспериментов

4.3.1. Результаты базовой модели

Для всех моделей мы рассматриваем три характеристики: 1) среднее благосостояние на финальную дату, 2) доля агентов из всей выборки, чье благосостояние на финальную дату превышало начальное благосостояние, 3) доля банкротов среди всех агентов (напоминаем, что мы называем банкротами тех агентов, чье благосостояние опустилось ниже порога в 5 000).

Мы проводили серии экспериментов с параметром p, заданным конкретным числом для всех агентов на одну серию экспериментов. Как правило, в одной серии проводилось 100-150 экспериментов. Эксперименты проводились для значений p от 0.3 до 0.7 с шагом 0.01.

По результатам для S&P500 (Табл. 17) видно, что для агентов с $p \geq 0.52$ оценка вероятности банкротства меньше 1%, кроме того, во всех наших экспериментах агенты с $p \geq 0.56$ никогда не терпели банкротства. Конечно, если агенты используют маржинальную торговлю, то благосостояние агентов и частота банкротств возрастает.

Табл. 17. Результаты экспериментов для разрешенной маржинальной торговли с различным уровнем рычага (по S&P500).

		Доля агентов с $w_{i,T} \geq w_0$, %			
	p	*leverage=0*	*leverage=2*	*leverage=5*	*leverage=10*
1	0.50	35.4	29.8	10.3	1.3
2	0.51	52.8	47.7	20.2	3.6
3	0.52	70.3	67.6	38.0	8.7
4	0.53	85.7	85.4	56.2	18.2
5	0.54	92.8	93.1	69.3	29.2
6	0.55	97.1	97.4	78.5	40.0
7	0.56	99.3	98.7	86.3	50.6
8	0.57	99.7	99.3	89.1	59.2
9	0.58	99.9	99.5	92.7	67.6
10	0.59	99.9	99.8	94.9	73.5
11	0.60	100.0	99.9	97.3	78.2
12	0.61	100.0	99.9	98.2	82.1
13	0.62	100.0	100.0	98.5	84.5
14	0.63	100.0	100.0	98.6	86.7
15	0.64	100.0	100.0	99.5	90.4
16	0.65	100.0	100.0	99.5	92.9
		Доля банкротов,%			
1	0.50	6.2	52.2	88.5	98.6
2	0.51	2.7	37.5	77.6	96.2
3	0.52	0.9	20.7	60.6	90.8
4	0.53	0.2	10.2	42.4	81.4
5	0.54	0.0	5.0	30.3	70.5
6	0.55	0.0	2.4	21.4	59.8
7	0.56	0.0	1.0	13.7	49.3
8	0.57	0.0	0.7	10.9	40.8
9	0.58	0.0	0.5	7.3	32.4
10	0.59	0.0	0.0	5.1	26.5
11	0.60	0.0	0.0	2.7	21.8
12	0.61	0.0	0.0	1.8	17.9
13	0.62	0.0	0.0	1.5	15.5

14	0.63	0.0	0.0	1.4	13.3
15	0.64	0.0	0.0	0.5	9.6
16	0.65	0.0	0.0	0.5	7.0

Результаты для всех шести мировых фондовых индексов в целом весьма схожи. В Табл. 18 представлены результаты агентов, угадывающих направление движения цены с вероятностью 0.5, т.е. попросту подбрасывающих монетку для принятия решений. Интересно, что без маржинальной торговли такие агенты не могут выиграть на бирже (в среднем финальное благосостояние не обанкротившихся агентов меньше начального), но использование коротких продаж и покупок в кредит сразу же значительно увеличивает вероятность банкротства. Немногие люди согласились бы заплатить 10 000 за участие в лотерее с возможностью выиграть 130 000 с вероятностью 1% и получить 0 с вероятностью 99%.

Табл. 18. Параметры для агентов с p = 0.5

		leverage=0					
		S&P 500	CAC 40	DAX	FTSE	Nikkei 225	Hang Seng
1	Среднее благосостояние агентов на финальную дату эксперимента	9 584	9 464	11 098	9 667	8 929	12 719
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	35.35	28.05	45.35	37.36	18.83	71.12
3	Доля банкротов,%	6.17	19.58	23.17	3.95	24.09	5.16
		leverage=2					
1	Среднее благосостояние агентов на финальную дату эксперимента	14 131	19201	17 348	14 110	15 637	19 606
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	29.80	20.44	25.73	29.25	18.87	34.99
3	Доля банкротов,%	52.21	72.06	65.20	54.40	71.95	55.87
		leverage=5					
1	Среднее благосостояние агентов на финальную дату эксперимента	43 427	64 072	66 643	44 156	56 847	61 566
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превы-	10.31	5.47	7.67	10.35	5.51	9.06

	шает начальное, %						
3	Доля банкротов,%	88.54	93.95	91.16	88.12	93.66	89.86
		leverage=10					
1	Среднее благосостояние агентов на финальную дату эксперимента	2e+05	3e+05	2e+05	3e+05	5e+05	3e+05
2	Доля агентов, чье финальное благосостояние превышает начальное, %	1.32	0.21	0.67	1.26	0.47	0.89
3	Доля банкротов,%	98.62	99.79	99.27	98.63	99.51	99.09

Основные результаты:

1. Если агент принимает решения, подбрасывая монетку (p = 0.5), и не торгует с кредитным плечом, то после 10 лет торговли он мало проиграет на рынке (оценка ожидаемого благосостояния равна 9500), но вряд ли обанкротится (оценка вероятности такого события 0.06).
2. Если агент не использует заемных средств для торговли, то достаточно торговать с долей верных решений $p \geq 0.52$, чтобы с вероятностью 0.99 не обанкротиться за 10 лет. оценка вероятности получения дохода в этом случае составляет 0.7. А если $p \geq 0.56$, то агент не обанкротится и получит доход с вероятностью 0.99. Такие небольшие значения p по сравнению со стратегией случайного принятия решений с помощью бросания монеты могут объяснить, почему так много людей стремится попробовать себя в торговле ценными бумагами.
3. Если же агент, стремясь увеличить свою прибыль, прибегает к заемному кредитованию, то ситуация меняется кардинальным образом. Агент, принимающий решения случайным образом, «выживет» на рынке с вероятностью 0.48 при использовании рычага 1:2, с вероятностью 0.11 при использовании рычага 1:5 и с вероятностью только 0.01, если кредитный рычаг 1:10. Несмотря на тот факт, что 10-летняя доходность составит 50%,

300% and 2000% в этих случаях, соответственно, риск подобной стратегии для агента с $p = 0.5$ очевиден.

4. Для использования маржинальной торговли агенту нужно иметь как минимум $p \geq 0.7$ для того, чтобы не обанкротиться с вероятностью 0.99, и $p > 0.85$, чтобы не обанкротиться с вероятностью 0.001, что возможно лишь для инсайдеров. Для обычного мелкого трейдера такая доля успешных прогнозов на протяжении 10 лет выглядит недостижимой.

4.3.2. Результаты модели «Лидеры и последователи»

Стратегия «последователь» для осторожных агентов (т.е. $leverage = 0$) приводит к неплохим результатам (Табл. 19), поскольку в целом оценка вероятности банкротства невелика (всегда меньше 0.09 для S&P500 и 0.15 для остальных индексов) и финальное благосостояние превышает начальное с ненулевой вероятностью. Большой разброс значений среднего благосостояния агентов в случае $leverage = 10$ в Табл. 19 объясняется тем, что выборка необанкротившихся агентов очень маленькая и результаты чувствительны к выбросам.

Табл. 19. Результаты стратегии «последователь» для S&P500

	leverage = 0			*leverage* = 5			*leverage* = 10		
p лидера	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние, %	Доля банкротов, %	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние, %	Доля банкротов, %	Среднее благосостояние	Доля увеличивших благосостояние, %	Доля банкротов, %
0.40	11 044	31.0	0.7	91 778	21.8	75.5	51 940	1.8	98.2
0.41	11 018	28.8	0.9	48 753	14.5	80.9	260 832	2.5	97.5
0.42	10 654	28.5	1.0	66 802	16.4	81.8	30 727	1	99
0.43	10 728	26.2	0.9	47 134	15.5	83.6	323 271	0.5	99.5
0.44	10 336	25.3	1.4	49 738	12.7	84.5	59 670	1.2	98.8
0.45	10 131	23.1	1.5	52 434	18.9	79.1	163 849	1.6	98.64

0.46	9 926	22.2	1.9	50 334	17.3	80.9	230 542	1.4	98 .6
0.47	9 970	21.2	2.1	85 579	8.3	89.1	18 023	1.3	98.7
0.48	9 946	19.8	2.3	37 389	14.8	83.6	59 015	0.7	99.3
0.49	9 603	19.3	2.5	65 388	19.1	79.1	29 822	1.9	98.1
0.50	9 590	17.5	3.2	39 833	10.6	87.3	28 308	2.8	97.2
0.51	9 559	17.0	3.1	52 156	16.1	82.7	18 291	1.5	98.5
0.52	9 408	15.8	3.6	39 057	8.5	87.3	-	0	100
0.53	9 443	13.9	4.4	87 119	4.5	95.5	14 227	0.1	99.9
0.54	9 050	12.9	4.7	36 900	10.9	88.2	-	0	100
0.55	8 839	11.7	5.1	28 826	7.3	90.9	639 577	0.9	99.1
0.56	9 012	11.7	6.0	18 045	2.4	96.4	-	0	100
0.57	9 069	10.0	6.8	16 397	6.4	90.9	55 243	1.4	98.6
0.58	8 592	9.2	7.5	95 561	5.9	93.6	18 908	2.1	97.9
0.59	8 414	8.1	8.1	28 376	1.8	97.3	-	0	100
0.60	8 590	7.4	9.0	16 725	2.7	95.5	75 147	2.2	97.8

В сравнении с базовой моделью, где значение p полностью определяет будущее благосостояние агента и вероятность стать банкротом, и выгоднее иметь как можно большее значение p, для последователя значение p у его лидера не является определяющим фактором. Ожидаемая 10-летняя доходность всех последователей практически нулевая, единственное преимущество такой стратегии – низкая вероятность банкротства. Опять же, если агенты используют возможности маржинальной торговли, то увеличивается и финальное благосостояние, и вероятность стать банкротом.

Небольшое преимущество агентов-последователей лидеров с меньшим значением p в Табл. 19, является следствием выбранной стратегии и особенностей данных. Дело в том, что в нашей модели последователи придерживаются самой простой модели имитации, повторяя действия своих лидеров с предыдущего шага, и ключевым фактором здесь является то, как часто меняется направление движения цен. Например, пусть правильным решением для -го дня было «купить», а для $i + 1$-го и $i + 2$-го дня – «продать», и лидер был достаточно опытен, чтобы принять верное решение (т.е. лидер имеет высокое значение p), то его последователь ошибется, повторив действие «купить» на второй день, поскольку во второй день бычий тренд сменится медвежьим и цена пойдет вниз. Решение же последователя «продать» на третий день будет верным, поскольку тренд сохранится.

Результаты по всем шести мировым индексам очень схожи – для случая отсутствия маржинальной торговли вероятность банкротства невысока и финальное благосостояние не обанкротившихся агентов остается практически на уровне начального капитала 10 000, а для случая использования маржинальных сделок с кредитным плечом 1:10 вероятность банкротства становится экстремально высокой.

Основные результаты:

1. Эффективность стратегии «последователь» мало зависит от значения p его лидера. Моделируемая стратегия простого повторения действий лидера и особенности данных выявили небольшое преимущество тех агентов, кто следует за менее квалифицированными лидерами.

2. Практически независимо от значения p лидера, последователь будет иметь практически нулевую доходность в случае $leverage = 0$. Преимуществом стратегии «последователь» является небольшая вероятность банкротства.

3. Если агент торгует с кредитным плечом, то оценка вероятности стать банкротом увеличивается, а оценка вероятности получить доход снижается.

4. В целом, стратегия «последователь» демонстрирует схожие результаты со стратегией подбрасывания монеты, если последователь использует возможности маржинальной торговли; для случая запрета маржинальной торговли стратегия «последователь» демонстрирует такие же результаты по среднему выигрышу, что и стратегия «подбра-

сывание монет», но имеет преимущества в оценке вероятности банкротства – она почти всегда будет ниже для стратегии «последователь».

4.3.3. Результаты модели «искатели черного лебедя»

Мы проводили эксперименты при $\delta = 0.3$, половина агентов использует стратегию Талеба, т.е. зарабатывает мало в обычные дни и очень много в дни кризиса, поэтому для них $p^Q \sim R[0.4;\ 0.5]$ и $p^R \sim R[0.7;\ 0.8]$. Остальные агенты используют традиционную стратегию из базовой модели и их параметры $p^Q \sim R[0.5;\ 0.6]$ и $p^R \sim R[0.2;\ 0.3]$.

Благосостояние обычных агентов в среднем всегда выше, чем благосостояние «искателей Черных лебедей», хотя и сильно уменьшается в периоды кризисов. На Рис. 10 приведены гистограмма благосостояния агентов на конец экспериментов для «искателей Черных лебедей» (слева), гистограмма благосостояния агентов для обычных трейдеров (справа).

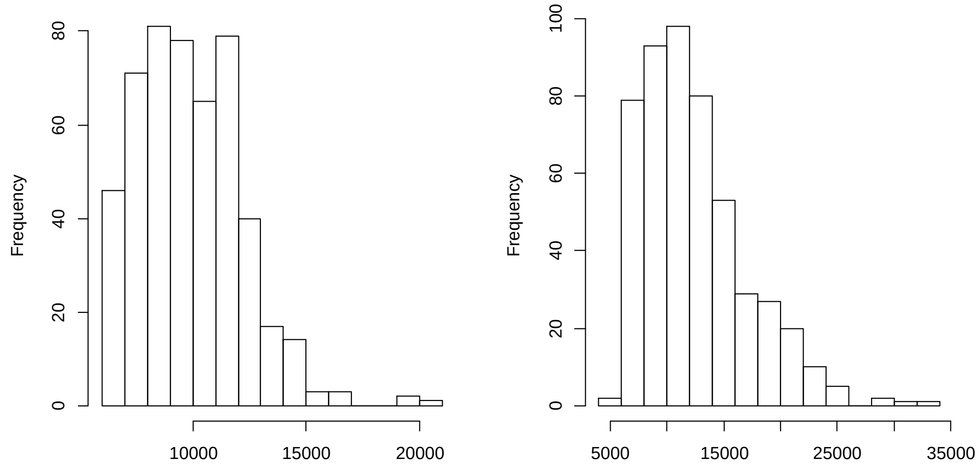

Рис. 10. Гистограммы благосостояния агентов обеих групп

«Искатели Черных лебедей» гораздо более подвержены риску банкротства, в течение эксперимента обанкротились 239 агентов из этой группы и только 12 из группы обычных трейдеров. На Рис. 11 приведены гистограмма распределения значения p^Q для группы «искателей Черных лебедей» (слева), гистограмма распределения значения p^Q для группы обычных трейдеров (справа).

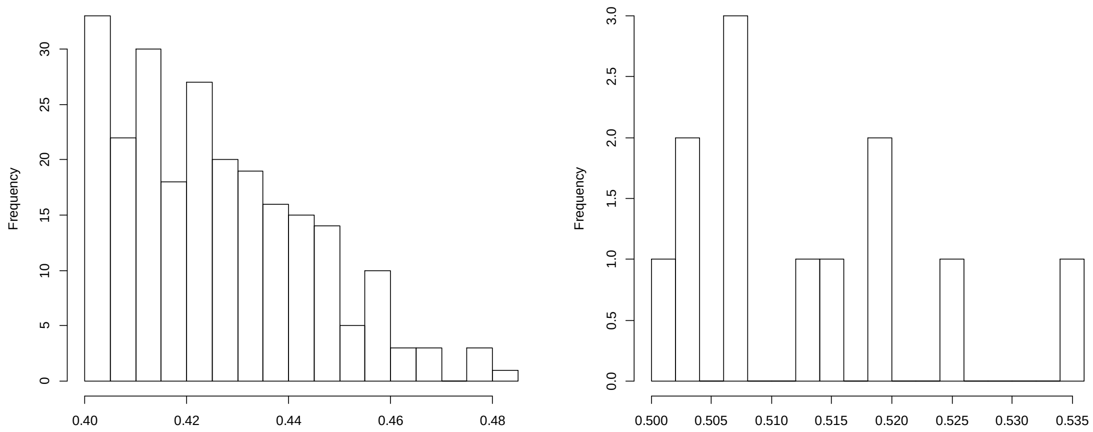

Рис. 11. Гистограммы распределений значений $\boldsymbol{p^Q}$ для обеих групп

Основные результаты:

1. В среднем оценка 10-летняя доходности «искателей Черных лебедей» сравнима с доходностью обычных трейдеров, несмотря на различный, даже противоположный характер их стратегий – обычные трейдеры зарабатывают в периоды стабильной экономики, а «искатели Черных лебедей», наоборот, в дни сильных экономических потрясений.
2. Однако, для «искателей Черных лебедей» оценка вероятности обанкротиться намного выше. Черные лебеди – слишком редкие события, чтобы строить длительные успешные долгосрочные торговые стратегии на их основе.

Заключение по Главе 4

В настоящей главе было приведено описание программного комплекса для анализа поведения участников биржи методами имитационного моделирования.

Разработаны три программы для оценки финансовых результатов трейдера, использующего различные стратегии: 1) самостоятельное принятие решений трейдером с известной вероятностью p принятия им правильного решения относительно будущего направления движения цены финансового инструмента, 2) стратегию «последователя», когда трейдер повторяет действия выбранного им лидера с некоторой вероятностью p с задержкой на один такт, 3) стратегию «искателя Черного Лебедя», моделирующую действия последователя Талеба. Характеристика p выбирается в начальный момент и неизменна в течение эксперимента.

В результате численного анализа финансовых результатов различных стратегий трейдер, зная свою вероятность принятия верного рещения относительно направления изменения цен финансовых инструментов, может выбрать набор финансовых инструментов (ценных бумаг), результаты торговли с которыми по описанным моедлям виртуального рынка его устраивают, для формирования своего портфеля финансовых инструментов, например, с помощью моделей и методов главы 2.

Заключение

Поведенческие финансы – это новое направление теории финансов, которое объясняет процесс торговли на основе психологии инвесторов и влияния их поведения на рынок. Поведенческие модели, предложенные в данной работе, описывают и математически моделируют поведение участников биржи на основе статистических данных в зависимости от их способностей, имеющейся у них информации и принципов принятия ими решений по покупке и продаже финансовых инструментов, в условиях стабильной экономической ситуации и в периоды кризиса.

Результаты такого моделирования в виде теоретических моделей, а также программного комплекса, реализующего разработанные модели и методы, могут быть использованы для научных исследований и при решении прикладных задач (как для управления инвестиционным портфелем со стороны индивидуального трейдера, так и для управления всей биржевой системой со стороны регулирующих органов). Количественный и качественный анализ работы биржи на основе таких моделей позволит получать, обрабатывать, анализировать и объяснять информацию о поведении биржи и ее участников, формировать и тестировать научные гипотезы и изучать опыт удачливых биржевых игроков.

Основные результаты всей работы могут быть описаны следующим образом:

1) предложена система математических моделей поведения участников биржи, учитывающих их способности к анализу биржевой ситуации в виде вероятности верно определить направление движения цены финансового инструмента в следующий момент времени, и указано, как можно оценить эту вероятность,

2) предложены несколько моделей выбора оптимального порт-

феля инвестиций в рамках указанного подхода в период стабильной экономической ситуации и доказано, что в случае наличия у трейдера предположений о границах изменений будущих цен финансового инструмента эту задачу можно свести к задаче линейного программирования, а в случае отсутствия у трейдера таких предположений можно найти гарантирующую стратегию для трейдера в антагонистической игре с биржей, моделируемой в виде игры с природой, и сводимой к паре двойственных задач линейного программирования,

3) на основе систем массового обслуживания предложены математические модели, описывающие влияние возможности появления биржевых кризисов на задачу трейдера, и показано, что способность трейдера распознать появление кризиса практически не влияет на ожидаемый доход в сравнении со способностью трейдера правильно распознавать будущее состояние биржи в периоды стабильной экономики,

4) исследованы модели поведения участника биржи при возможности наступления финансовых кризисов, в которых учитывается его способность к обучению на своих действиях,

5) разработан комплекс программ, позволяющих численно оценивать результаты торговли трейдером финансовым инструментом при известной его вероятности верного определения направления изменения стоимости данного финансового инструмента,

6) проведен численный анализ стратегий трейдеров, связанных со «стадным» поведением и с использованием моделей Талеба, и показано, что такие стратегии приводят к результатам, не превышающим традиционных стратегий инвестирования.

Литература

1. Федеральный закон от 21.11.2011 N 325-ФЗ (ред. от 21.12.2013) «Об организованных торгах» // СПС КонсультантПлюс.
2. Федеральный закон от 22.04.1996 N 39-ФЗ (ред. от 21.07.2014, с изм. от 29.12.2014) «О рынке ценных бумаг» (с изм. и доп., вступ. в силу с 01.01.2015) // СПС КонсультантПлюс.
3. Андреев Н. А., Лапшин В. А., Науменко В. В., Смирнов С. Н. Определение ликвидационной стоимости портфеля акций с учетом особенностей микроструктуры рынка (на примере ММВБ) // Управление риском. – 2011. – Т. 58, № 2. – С. 35-53.
4. Беленький А.С. Минимаксные задачи планирования с линейными ограничениями и методы их решения // Автоматика и Телемеханика. – 1981. – Т.42, выпуск 10. – С.1409-1419.
5. Берзон Н.И., Буянова Е.А., Кожевников М.А., Чаленко А.В. Фондовый рынок. – М.: Вита-пресс, 1998.
6. Гасанов И.И., Ерешко Ф.И. Построение множества Парето в модели хеджирования актива опционами // Экономика и математические методы. – 2007– Т. 43, вып. 1. – С. 68-75.
7. Ерешко Ф.И. Принятие решений о диверсификации систем. Динамика неоднородных систем / Под ред. Ю.С. Попкова. – М.: ЛЕНАНД, 2010. – 324 с. С. 107-114.
8. Завриев С.К., Калихман А.И. Долгосрочное страхование жизни и пенсионное страхование в высокорисковой экономической среде. – М.: ЦСО, 1999.
9. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.
10. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.

11. Моисеев С.Р. Макроэкономические модели валютного курса // Финансы и кредит. –2003. – Т. 3. – С. 44-54.
12. Моисеев С.Р. Политика валютных интервенций центральных банков: сущность, теневые механизмы и эффективность операций банка России // Финансы и кредит. –2002. –Т. 11. – С.46-53.
13. Моисеев С.Р. Ожидания на валютном рынке: теоретический экскурс и результаты прикладных исследований // Финансы и кредит. –2001. – Т.18. – С.31-35.
14. Науменко В. В., Смирнов С. Н., Костов Т. В. Измерение риска и управление портфелем в условиях низкой ликвидности // Управление риском. – 2009. – № 3. – С. 66-71.
15. Обросова Н.К., Шананин А.А. Исследование альтернативных вариантов развития экономики и энергетики России с помощью математической модели // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, № 2 – С. 3–22.
16. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996.
17. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. От Госплана к неэффективному рынку: математический анализ российских экономических структур. — Lewiston, NY: The Edwin Mellon Press, 1999.
18. Поспелов И. Г. Моделирование экономических структур. — М.: ФАЗИС, ВЦ РАН, 2004.
19. Теплова Т.В. Инвестиции: теория и практика. – М.: Издательство Юрайт, 2014.
20. Чалдаева Л.А. Биржевое дело. – М.: Издательство Юрайт, 2014.
21. Чиркова Е. В. Анатомия финансового пузыря. – М.: ООО «Кейс», 2010.

22. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. / Том 1. Факты. Модели, Том 2. Теория.– М.: Фазис, 1998.
23. Смирнов А. Д. Макрофинансы II: модель пузырей и кризисов // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2010. – Т. 141, № 4. – С. 401-439.
24. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / А.А. Лобанов [и др.]; под ред. А.А.Лобанова и А.В.Чугунова. – М.: Изд-во Альпина Паблишер, 2009.
25. Aït-Sahalia Y., Cacho-Diaz J., Laeven R.J.A. Modeling Financial Contagion Using Mutually Exciting Jump Processes. – 2010. – NBER Working Paper. URL: http://www.nber.org/papers/w15850.
26. Allen F., Morris S., Postlewaite. Finite bubbles with short constraints and asymmetric information // Journal of Economic Theory. – 1993. – Vol. 61, no. 2. – P. 206-229.
27. Bacry E., Delattre S., Hoffmann M., Muzy J. F. Modeling micro-structure noise with mutually exciting point processes // Quantitative Finance. – 2013. – Vol.13, no.1. – P. 65-77.
28. Barber B., Odean T. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors // Journal of Finance. – 2000. – Vol. 55, No. 2. – P.773–806.
29. Barber B.M., Odean T. All that glitters: The effect of attention and news on the buying behavior of individual and institutional investors // Review of Financial Studies. –2008. – Volume 21, Issue 2. – P. 785-818.
30. Barberis N., Thaler R. A survey of behavioral finance. – 2002. – NBER Working Paper Series. URL: http://www.nber.org/papers/w9222.
31. Bhardwaj G., Swanson N.R. An empirical investigation of the usefulness of ARFIMA models for predicting macroeconomic and fi-

nancial time series // Journal of Econometrics. –2006. – Vol. 131. – P. 539–578.

32. Blanchard O.J., Watson M.W. Bubbles, Rational Expectations and Financial Markets. – 1982. – NBER Working Paper. URL: http://www.nber.org/papers/w0945.
33. Blume M.E. Betas and Their Regression Tendencies // The Journal of Finance. – 1975. – Vol. 30, No. 3.– P. 785-795.
34. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastisity // Journal of Econometrics. – 1986. – Vol. 31. – P. 307–327.
35. Box G. E. P., Jenkins G. M. Time Series Analysis, Forecasting and Control. – Holden-Day, 1976.
36. Brigo D., Pallavicini A., Torresetti R. Credit models and the crisis: default cluster dynamics and the generalized Poisson loss model // The Journal of Credit Risk. – 2010. – Vol. 6, no. 4. – P. 39–81.
37. Chaderina M. Essays in Finance: Pre-borrowing: Co-existence of Cash and Debt; Predators, Prey and Volatility on Wall Street. – 2013. – Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University. URL: http://gradworks.umi.com/35/73/3573571.html
38. Chaudhuri R., Ivković Z., Pollet J., Trzcinka C. What a Difference a Ph.D. Makes: More than Three Little Letters. – 2013. – URL: http://ssrn.com/abstract=2344938
39. Chen L. Stochastic Mean and Stochastic Volatility — A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives // Financial Markets, Institutions, and Instruments. –1996. – Vol. 5. – P. 1–88.
40. Chiu M. Asset-Liability Management under the Safety-First Principle // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 143, no. 3. – P. 455-478.

41. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. The relation between forward prices and futures prices // Journal of Financial Economics. –1981. – Vol. 9, no.4. – P. 321-346.
42. De Bondt W., Thaler R. Does the stock market overreact? // The Journal of Finance. –1985. – Vol.XL, No.3. – P. 793-805.
43. De Bondt W.F.M., Thaler R.H. Financial Decision-Making in Markets and Firms: a Behavioral Perspective. – 1994. – NBER Working paper. URL: http://www.nber.org/papers/w4777.
44. De Bondt W., Mayoral R.M., Vallelado E. Behavioral decision-making in finance: An Overview and Assessment of Selected Research // Revista Espanola de Financiacion y Contabilidad. –2013. – Vol. XLII, no. 157. – P.99-118.
45. Devenow A, Welch I. Rational herding in financial economics // European Economic Review. –1996. –Vol. 40 no.3-5. – P.603-615.
46. Embrechts P., Liniger T., Lin L. Multivariate Hawkes Processes: an Application to Financial Data // Journal of Applied Probability. – 2011. – Vol. 48A. – P.367-378.
47. Engle R.F. Autoregressive Conditional Heteroskedastisity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation // Econometrica. – 1982. – Vol. 50. – P. 987–1007.
48. Enke D., Thawornwong S. The use of data mining and neural networks for forecasting stock market returns // Expert Systems with Applications. –2005. – Vol. 29. – P. 927–940.
49. Fenzl T., Perlzmann L. Psychological and Social Forces behind Aggregate Financial Market Behavior // The Journal of Behavioral Finance. – 2012. – Vol. 13. – P.56-65.
50. Geman H. Pure jump Levy processes for asset price modelling // Journal of Banking & Finance. – 2002. – Vol. 26. – P. 1297–1316.

51. Giesecke K. A Simple Exponential Model for Dependent Defaults // Journal of Fixed Income. – 2003. – Vol. 13, no.3. – P. 74-83.
52. Gracia E. Predator-Prey: An Efficient-Markets Model of Stock Market Bubbles and the Business Cycle. – 2004. – URL: http://ssrn.com/abstract=549741
53. Hansen E.R. A Table of Series and Products. – Prentice-Hall, 1975.
54. Harras G., Sornette D. How to grow a bubble: A model of myopic adapting agents // Journal of Economic Behavior & Organization. – 2011. – Vol. 80, no.1. – P. 137-152.
55. Hauptmann J., Hoppenkamps, A., Min A., Ramsauer F., Zagst, R. Forecasting market turbulence using regime-switching models // Financial Markets and Portfolio Management. – 2014. – Vol. 28, no. 2. – P. 139-164.
56. Hawkes A. G. Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes // Biometrika. –1971. – Vol. 58, no. 1 . – P. 83-90.
57. Hjalmarsson E. Predicting Global Stock Returns // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 2010. – Vol. 45, no. 1. – P. 49–80.
58. Homm U., Breitung J. Testing for Speculative Bubbles in Stock Markets: A Comparison of Alternative Methods // Journal of Financial Econometrics. – 2012. – Vol. 10, no. 1. –P. 198–231.
59. Ihler A., Hutchins J., Smyth P. Adaptive Event Detection with Time-Varying Poisson Processes / in 'Proceedings of the 12th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining'. – 2006. –ACM, New York, NY, USA, P. 207-216.
60. Jarrett J. Daily variation and predicting stock market returns for the frankfurter börse (stock market) // Journal of Business Economics & Management. –2008. – Vol. 9, no. 3. – P. 189-198.

61. Jarrow R., Turnbull S. Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk // Journal of Finance. –1995. – Vol. L, No. 1. – P. 53-85.
62. Jorion P. Value at Risk: A New Benchmark for Managing Derivatives Risk. – Irwin Professional Publishers, 2000.
63. Kahneman D. Thinking, fast and slow. - N.Y.: Penguin, 2011.
64. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk // Econometrica. – 1979. – Vol. 47, no. 2. – P. 263-291.
65. Kelly M. Do noise traders influence stock prices? // Journal of Money, Credit and Banking. – 1997. – Vol. 29, no.3. – P. 351-363.
66. Kim Y.S., Rachev S.T., Bianchi M.L., Fabozzi F.J. Financial market models with Lévy processes and time-varying volatility // Journal of Banking & Finance. – 2008. – Vol. 32, no.7. – P. 1363–1378.
67. Koijen R., van Nieuwerburgh S. Predictability of Returns and Cash Flows // Annual Review of Financial Economics. – 2011. – Vol.3. – P. 467-491.
68. Konno H., Yamakazi H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market // Management Science. – 1991. – Vol. 37, no.5. – P. 519 – 531.
69. Kuo W.Y., Lin T.C. Overconfident individual day traders: Evidence from the Taiwan futures market // Journal of Banking & Finance. – 2013. - Vol. 37, no. 9. – P. 3548-3561.
70. Liu Y.K., Wyu X.L, Hao F.F. A new Chance–Variance optimization criterion for portfolio selection in uncertain decision systems // Expert Systems With Applications. – 2012. –Vol. 39. no.7. – P. 6514-6526.
71. Lo A.W., Repin D.V. The Psychophysiology of Real-Time Financial Risk Processing // Journal of Cognitive Neuroscience. – 2002. – Vol. 14, no. 3. – P. 323-339.

72. Lo A.W., Repin D.V., Steenbarger B.N. Fear and Greed in Financial Markets: A Clinical Study of Day-Traders // American Economic Review. – Vol. 95, no. 2. – P.352-359.
73. Longstaff F.A., Rajan A. An Empirical Analysis of the Pricing of Collateralized Debt Obligations // Journal of Finance. – 2008. – Vol. 63, no. 2. – P. 529-563.
74. Lewellen J. Predicting returns with financial ratios // Journal of Financial Economics. – 2004. – Vol. 74. – P. 209–235.
75. Malkiel B.G., Saha A. Hedge Funds: Risk and Return // Financial Analysts Journal. – 2005. – Vol. 61, no. 6. – P.80-88.
76. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. –1952. – Vol. VII, No.1. – P. 77-91.
77. Mao J. Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S // Journal of Financial and Quantitative Analysis. –1970. – Vol. 4, no. 05. – P. 657-675.
78. Merton R. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model // Econometrica. – 1973. – Vol. 41, no.5. – P. 867-887.
79. Montero M. Predator-Prey Model for Stock Market Fluctuations. – 2008. – URL: http://ssrn.com/abstract=1290728.
80. Morelli M., Montagna G., Nicrosini G., Treccani M., Farina D., Amato P. Pricing financial derivatives with neural networks // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2004. – Vol. 338, .no.1-2. – P. 160 – 165.
81. Mullainathan S., Thaler R.H. Behavioral Economics. – 2000. – NBER Working paper. URL: http://www.nber.org/papers/w7948.
82. Nelson C. R., Kang H. Pitfalls in the Use of Time as an Åxplanatory Variable in Regression // Journal of Business and Economic Statistics. – 1984. – Vol. 2. – P. 73–82.

83. Nelson C. R., Plosser C. I. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implication // Journal of Monetary Economics. – 1982. – Vol. 10. – P. 139–62.
84. O'Connor N., Madden M. A neural network approach to predicting stock exchange movements using external factors // Knowledge-Based Systems. – Vol. 19, no.5. – P. 371-378.
85. Odean T. Do investors trade too much? // American Economic Review. – 1999. – Vol. 89, no. 5. – P. 1279–98.
86. Östermark R. Predictability of Finnish and Swedish stock returns // Omega. – Vol. 17, no. 3. – P. 223-236.
87. Ortobelli L.S., Rachev S.T. Safety-first analysis and stable paretian approach to portfolio choice theory // Mathematical and Computer Modelling. – 2001. – Vol. 34, no. 9-11. – P. 1037-1072.
88. Palomino F., Renneboog L., Zhang C. Information salience, investor sentiment, and stock returns: The case of British soccer betting // Journal of Corporate Finance. – 2009. – Vol. 15, no. 3. – P. 368-387.
89. Penikas H., Proskurin S. How Well Do Analysts Predict Stock Prices? Evidence from Russia. – 2013. – Working papers by NRU Higher School of Economics. Series FE «Financial Economics», WP BRP 18/FE/2013.
90. Phillips P. C. B., Wu Y., Yu J. Explosive Behavior in the 1990s NASDAQ: When Did Exuberance Escalate Asset Values? // International Economic Review. – 2011. – Vol. 52, no. 1. – P.201–226.
91. Robertson S., Zaragoza H. The Probabilistic Relevance Framework: BM25 and Beyond // Journal Foundations and Trends in Information Retrieval. 2009. –Vol. 3, no 4. – P. 333–389.
92. Rockafellar R. T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // Journal of Risk. – 2000. – Vol. 2. P. 21–41.

93. Rothig A., Chiarella C. Small traders in currency futures markets // Journal of Futures Markets. – 2011. – Vol.31, no.9. – P. 898-914.
94. Ross S. The arbitrage theory of capital asset pricing // Journal of Economic Theory. – 1976. – Vol. 13, no.3. – P. 341-360.
95. Roy A.D. Safety-first and the holding of assets // Econometrica. – 1952. – Vol. 20, no.3. – P. 431-439.
96. Simon H. A Behavioral Model of Rational Choice // The Quarterly Journal Of Economics. – 1955. – Vol. 69, no. 1. – P. 99-118.
97. Shapira Z., Venezia I. Patterns of behavior of professionally managed and independent investors // Journal of Banking & Finance. – 2001. – Vol. 25, no. 8. – P. 1573-1587.
98. Sharpe W.F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // Journal of Finance. – 1964. –Vol. 19, no.3. – P. 425–442.
99. Seppala J. The diversification of currency loans: A comparison between safety-first and mean-variance criteria // European Journal of Operational Research. – 1994. – Vol. 74, no. 2. – P. 325-34.3
100. Soderlind P. Predicting stock price movements: regressions versus economists // Applied Economic Letters. – 2010. – Vol. 17. – P. 869-874.
101. Sornette D. Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises // International Journal of Terraspace Science and Engineering. – 2009. – Vol. 2, no.1. – P. 1-18.
102. Stracca L. Behavioral Finance and Asset Prices: Where Do We Stand? // Journal of Economic Psychology. – 2004. – Vol. 25. – P. 373-405.
103. Taleb N. N. The Black Swan: The Impact of The Highly Improbable. – London: Penguin Books, 2008.

104. Tay F.E.H., Lijuan C. Application of support vector machines in financial time series forecasting // Omega: The International Journal of Management Science. – 2001. – Vol. 29, no. 4. – P. 309-317.
105. Tedeschi G., Iori G., Gallegati M. Herding Effects in Order Driven Markets: The Rise and Fall of Gurus // Journal of Economic Behavior & Organization. – 2012. – Vol. 81. – P. 82-96
106. Tsay R.S. Analysis of Financial Time Series. – Wiley, 2002.
107. Tversky A., Kahneman D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases // Science. – 1974. – Vol. 185, no. 4157. – P. 1124-1131.
108. Tversky A., Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice // Science. – 1981. – Vol. 211, no. 4481. – P. 453-458.
109. Tversky A., Kahneman D. Advances in Prospect-Theory - Cumulative Representation of Uncertainty // Journal of Risk and Uncertainty. – 1992. – Vol.5, no.4. – P.297-323.
110. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. – 1977. – Vol. 5, no.2. – P. 177-188.
111. Venezia I., Nashikkar A., Shapira Z. Firm Specific and Macro Herding by Professional and Amateur Investors and Their Effects on Market Volatility // Journal of Banking &Finance. – 2011. – Vol. 35. – P. 1599-1609.
112. Yan W. Continuous-time safety-first portfolio selection with jump-diffusion processes // International Journal of Systems Science. – 2012. – Vol. 43, no. 4. – P. 622-628.
113. Yu C. L., Li H., Wells M. T. MCMC Estimation of Levy Jump Models using Stock and Option Prices // Mathematical Finance. – 2011. – Vol. 21, no. 3. – P. 383–422 .

Приложение 1. Краткое описание биржи и правил игры на ней

П.1.1. Основные сведения о бирже

Биржей называется регулярно функционирующий организованный оптовый рынок однородных товаров. На бирже не требуется присутствия товаров, и иногда даже наличия самих продавцов и покупателей – нужны лишь посредники, осуществляющие непосредственную процедуру торга, что упрощает и облегчает торговлю различными товарами, способствует формированию рыночных цен на товары и расширению возможностей для продавцов и покупателей [20].

Биржа организует ведение торгов, учет заявок и исполненных сделок, организует и гарантирует расчеты, следит за выполнением сделок. Биржа ставит своей целью не извлечение прибыли, а организацию и облегчение торговли, являясь по сути посредником между продавцами и покупателями, и получает основной доход за счет комиссионных сборов с заключенных сделок, а также за счет членских взносов и продажи биржевой информации.

В зависимости от реализуемых на бирже товаров различают следующие типы бирж:

1. Товарные биржи, на которых ведется торговля продовольственными товарами, сырьем, энергоносителями и другими товарами массового потребления,
2. Фондовая биржа, на которой торгуют ценными бумагами (акциями, облигациями, сертификатами и др.) и производными ценными бумагами (опционами, фьючерсами и др.),
3. Валютные биржи, на которых происходит свободная купля-продажа национальных валют,
4. Универсальные биржи, на которых организована торговля различными товарами и инструментами,

5. Биржи труда, на которых безработные люди ищут возможности трудоустройства.

Наличие биржи и организация торговли на ее основе выгодна для всех участников рынка:

1. для государства и экономики в целом:
   1) наличие площадки для торгов большого числа товаров и упрощение поиска потенциальных покупателей и продавцов,
   2) развитие рынка биржевых товаров и производных ценных бумаг,
   3) мобилизация свободных денежных ресурсов и инвестиция их в экономику,
   4) свободное ценообразование на биржевые товары,
   5) формирование конкурентной среды для покупателей и продавцов,
   6) привлечение средств под государственные ценные бумаги,
   7) возможность проведения государством денежно-кредитной политики в целях обеспечения устойчивости национальной финансовой системы и стабилизации национальной экономики в целом, а также воздействия на бизнес (в отсутствие возможности прямого вмешательства государства в предпринимательскую деятельность).
2. для организаторов биржи:
   1) получение комиссионных сборов с совершенных сделок,
   2) продажа биржевой информации,
   3) сбор членских взносов,
3. для бизнеса (реального производства, эмитентов ценных бумаг на фондовой бирже):

1) привлечение денежных средств для ведения хозяйственной деятельности, расширения производственных мощностей и реализации инвестиционных проектов,
2) развитие компании и повышение ее инвестиционной привлекательности,
3) выход на международный рынок капитала.

4. для участников биржевых торгов:
   1) возможность инвестировать свободные денежные средства,
   2) широкий выбор ценных бумаг и контрагентов для совершения сделок,
   3) возможность осуществить сделку за короткий промежуток времени,
   4) нет необходимости физического присутствия на торгах с развитием современных средств связи,
   5) возможность спекуляций и арбитража, т.е. получения выгоды на разнице цен,
   6) возможность снижения риска инвестиций, с помощью диверсификации портфеля и использования производных ценных бумаг для хеджирования риска.

На данный момент в мире существует более 100 товарных и 300 фондовых бирж, часть из них является универсальными [20]. Валютные биржи, как правило, являются частью фондовых и универсальных бирж, также торговать валютой можно на FOREX – рынке межбанковского обмена валюты по свободным ценам.

В настоящее время на товарных биржах ведут торги приблизительно 70 видами различных товаров, к которым относятся сельскохозяйственные и лесные продукты, животные и продукты питания, цветные и драгоценные металлы, нефть и нефтепродукты. Однако подавляющее большинство сделок заканчиваются не поставкой реальных товаров, а лишь выплатой разницы в ценах, и покупают и продают не сами товары, а опционные и фьючерсные контракты на них [20]. Поэтому и торги на товарных биржах носят преимущественно спекулятивный характер, соответственно, и цены на товарной бирже более волатильны, чем на фондовой. Валютная биржа также, как и товарная, является площадкой для спекуляций, а не для долгосрочного инвестирования.

На фондовых биржах также торгуют не только акциями, облигациями и векселями различных компаний и государственными ценными бумагами, но и производными ценными бумагами [5]. Ценные бумаги являются инструментами для вложений и получения контроля над компаниями-эмитентами (для обычных акций). Кроме того, фондовая биржа в сравнении с товарной и валютной не только более разнообразна по числу торгуемых инструментов, но и более разнородна – на бирже обращаются ценные бумаги компаний из различных отраслей экономики. Также в отличие от товарной и валютной биржи, на фондовой бирже на динамику цен оказывают влияние не только тенденции рынка, динамика развития национальной и мировой экономики и их отдельных отраслей, но и показатели финансового состояния конкретной компании-эмитента.

П.1.2. Участники биржевых торгов

К участию в организованных торгах ценными бумагами на фондовой бирже могут быть допущены дилеры, управляющие и брокеры, которые имеют лицензию профессионального участника рынка ценных бумаг, управляющие компании инвестиционных фондов, паевых инвестиционных фондов, негосударственных пенсионных фондов, а также Банк России [1]. К торгам на товарной бирже могут быть допущены индивидуальные предприниматели и юридические лица, созданные в соответствии с законодательством Российской Федерации [1]. К торгам на валютной бирже могут быть допущены кредитные организации, имеющие право на основании лицензий Банка России осуществлять банковские операции со средствами в иностранной валюте, центральный контрагент, Банк России, а также иные юридические лица, которые вправе осуществлять куплю-продажу иностранной валюты в силу федерального закона [1].

Физические лица и юридические лица (банки, специализированные финансовые компании, страховые фонды, различные фирмы и предприятия), желающие участвовать в биржевых торгах на фондовой бирже, могут торговать при посредничестве профессиональных членов биржи – брокеров, дилеров и управляющих [5].

Брокерской деятельностью признается деятельность по совершению гражданско-правовых сделок с ценными бумагами и (или) по заключению договоров, являющихся производными финансовыми инструментами, по поручению клиента от имени и за счет клиента (в том числе эмитента эмиссионных ценных бумаг при их размещении) или от своего имени и за счет клиента на основании возмездных договоров с клиентом [2]. Брокеры не являются собственниками ценных бумаг и получают доход в виде комиссионных от сделки, размер которых зависит от объема сделки. В обязанности брокера входит получение заявки от клиента и размещение ее на бирже.

Дилерской деятельностью признается совершение сделок куплипродажи ценных бумаг от своего имени и за свой счет путем публичного объявления цен покупки и/или продажи определенных ценных бумаг с обязательством покупки и/или продажи этих ценных бумаг по объявленным лицом, осуществляющим такую деятельность, ценам [2]. Дилер также может совмещать свою деятельность с брокерской и оказывать посреднические услуги. Разница между дилером и брокером состоит в том, что брокер является только посредником, осуществляющим сделки на рынке, а дилер (если он одновременно ведет и брокерскую деятельность) может как вывести заявку своего клиента на рынок и найти там контрагента для совершения сделки, так и сам может выступить в роли контрагента и заключить сделку со своим клиентом.

Деятельностью по управлению ценными бумагами признается деятельность по доверительному управлению ценными бумагами, денежными средствами, предназначенными для совершения сделок с ценными бумагами и (или) заключения договоров, являющихся производными финансовыми инструментами. Профессиональный участник рынка ценных бумаг, осуществляющий деятельность по управлению ценными бумагами, именуется управляющим [2]. В качестве управляющего на рынке ценных бумаг обычно выступают коммерческие банки, инвестиционные компании или специально создаваемые для этих целей компании, которые называются «управляющие компании». Доверительное управление – основа существования инвестиционных фондов (паевых, пенсионных и др.).

Непосредственных участников торгов на бирже называют трейдерами – торговцами биржевыми товарами, самостоятельно принимающими решение о покупке или продаже и преследующих цели получения прибыли и/или защиты вложений от риска. Трейдерами могут быть:

1) физические лица, торгующие на бирже через посредников-брокеров,

2) юридические лица, торгующие через посредников-брокеров или самостоятельно как дилеры (при наличии соответствующей лицензии),

3) юридические лица, являющиеся управляющими (распоряжающимся средствами какого-либо фонда) и торгующие самостоятельно, через посредников-брокеров или в качестве дилера.

Классификация трейдеров по нескольким основным признакам:

1) по организационному признаку – институциональные и частные трейдеры. Институциональные инвесторы – это паевые инвестиционные фонды, инвестиционные фонды, страховые, пенсионные и др. фонды, банки, компании и предприятия и проч., частные инвесторы – это физические лица, самостоятельно играющие на бирже при помощи брокеров, исполняющих их заявки.

2) по размеру капитала – крупные, средние и мелкие трейдеры. Разделение на такие категории достаточно условно, кроме того, на различных биржах должны быть различные пороги для разграничения игроков по категориям. Мелкие и средние игроки из-за небольшого капитала не оказывают поодиночке значимого влияния на биржу и не могут повлиять на динамику изменения котировок ценных бумаг, поэтому таких инвесторов в западной литературе называют price-takers в отличие от price-makers, то есть игроков, оказывающих сильное влияние на цены – это крупные инвесторы. Частные трейдеры могут быть лишь мелкими трейдерами.

3) по используемой информации – сторонники фундаментального анализа и сторонники технического анализа. Первые считают, что цена акции зависит от финансового положения и производственных возможностей компании-эмитента и на основании этой информации рассчитывают справедливую цену; заявки формируют на покупку или продажу исходя из того, насколько отличаются рыночная и справедливая цены акции. Сторонники технического анализа (чартисты) считают, что можно прогнозировать стоимость биржевых товаров, основываясь на анализе изменения цен в прошлом, и сосредотачивают

свои усилия на анализе трендов (тенденций) в развитии цен. Считается, что чартисты действуют в краткосрочной и среднесрочной перспективе (дни и недели), а фундаменталисты ориентируются на долгосрочную перспективу.

4) по целям инвестирования и горизонту планирования – инвесторы, спекулянты и хеджеры. Инвесторы ищут способ получения дохода в виде дивидендов, контроля над предприятиями или просто как выгодные инвестиции, спекулянты торгуют ради получения дохода на разнице цен покупки и продажи, хеджеры страхуют себя от изменения цен на биржевые товары и для этого, как правило, совершают сделки с производными ценными бумагами для уменьшения ценового риска.

5) по используемым мерам риска

Поскольку будущая стоимость биржевого товара i является случайной величиной, то будущая стоимость портфеля W_{t+1} также является случайной величиной и трейдеры могут при принятии решений использовать различные целевые функции, основанные на численных характеристиках этих случайных величин. Различают две группы мер риска:

1. характеристики среднего отклонения:

- математическое ожидание $M[W_{t+1}]$ (ожидаемое среднее значение) будущей стоимости портфеля W_{t+1} в момент времени $t+1$:
- дисперсия будущей стоимости портфеля

$$D[W_{t+1}] = M(W_{t+1} - M[W_{t+1}])^2,$$

- среднеквадратическое отклонение будущей стоимости портфеля:

$$\sigma[W_{t+1}] = \sqrt{D[W_{t+1}]},$$

- полудисперсии будущей стоимости портфеля:

$$D_+[W_{t+1}] = (W_{t+1} - M[W_{t+1}])^2_+, \text{ где } x_+ = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases},$$

- абсолютное отклонение и полуотклонение будущей стоимости портфеля:

$$\delta[W_{t+1}] = |W_{t+1} - M[W_{t+1}]|,$$

$$\delta_+[W_{t+1}] = \sqrt{M(\min[W_{t+1} - M[W_{t+1}], 0])^2},$$

2. пороговые характеристики:

- вероятность того, что будущая стоимость портфеля на момент времени $t+1$ не опустится ниже некоторого порогового уровня β от имеющегося на момент времени t благосостояния W_t:

$$P_t = P\{W_{t+1} \geq \beta W_t\},$$

- Value-at-Risk (VaR_α) – это квантиль уровня α стоимости портфеля W_{t+1}, т.е. такое значение будущей стоимости портфеля W_{t+1}, что вероятность снижения стоимости портфеля ниже этой величины менее α:

$$VaR_\alpha[W_{t+1}] = sup\{l: P(W_{t+1} \leq l) \leq \alpha,\},$$

- Conditional Value-at-Risk, Expected Shortfall ($CVaR_\alpha$) – это математическое ожидание будущей стоимости портфеля в случае, когда стоимость портфеля опустилась ниже уровня VaR_α:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = M[W_{t+1} | W_{t+1} < VaR_\alpha].$$

П.1.3. Виды выставляемых на бирже заявок и схема торгов на бирже

Для покупки и/или продажи биржевых товаров трейдеру необходимо выставить на бирже заявки, которые можно классифицировать по следующим основным признакам [5]:

1) по совершаемому действию – трейдер может выставить либо заявку на покупку ценной бумаги, либо заявку на продажу ценной бу-

маги (причем необязательно из числа имеющихся у него). Заявки на покупку также называют «длинной позицией».

2) по использованию кредитных средств – трейдер может торговать за счет собственных средств и имеющихся ценных бумаг или торговать с использованием денег и ценных бумаг, предоставляемых в кредит под залог оговоренной суммы (маржи) – это называется маржинальной торговлей. В отличие от обычного кредита, в маржинальном кредите выдаваемая сумма в несколько раз больше размера требуемого залога. Соотношение между суммой залога и получаемой суммой называется кредитным плечом (по англ. leverage). Маржинальная торговля позволяет трейдеру использовать для торговли средства, значительно превышающие размер собственного капитала.

Продажа ценных бумаг, взятых взаймы у брокера, в расчёте на падение их стоимости, с последующим выкупом таких же ценных бумаг и возвратом их кредитору, называется короткой позицией (продажей без покрытия). Трейдер открывает короткую позицию в надежде на снижение стоимости ценной бумаги, что позволит купить ее позднее за меньшие деньги и вернуть кредитору, при этом разница в цене покупки и продажи и составит прибыль трейдера.

3) по параметрам заявки – существуют рыночные заявки, лимитированные заявки и стоп-заявки.

В рыночной заявке (market order) указывается объем и не указывается цена, поэтому она немедленно совершается по текущей рыночной цене. В лимитированной заявке (limit order) указывается не только объем требуемой ценной бумаги, но и желаемая цена. Если на рынке есть трейдеры, предлагающие встречную заявку по такой же или по лучшей цене, то совершается сделка. Если подобных предложений нет, то заявка встает в лист ожидания. В стоп-заявке (stop order) устанавливаются пороговые уровни цены, при достижении которых рыночной ценой брокер должен будет купить (продать) ценные бумаги.

4) по торгуемому товару - контракт на покупку/продажу биржевого товара или производного финансового инструмента.

Основными производными финансовыми инструментами являются фьючерсы и опционы.

Фьючерс – это контракт купли/продажи ценной бумаги, по которому стороны (продавец и покупатель фьючерса) определяют уровень цены при исполнении сделки (эта цена называется страйк) и сроке поставки ценной бумаги. Исполнение фьючерса осуществляется в указанный срок либо путём поставки указанной во фьючерсе ценной бумаги, либо путём уплаты разницы в ценах страйка и теекущей рыночной стоимости указанной во фьючерсе ценной бумаги.

Опцион – это контракт купли/продажи ценной бумаги, при заключении которого покупатель опцииона получает право (но не обязательство) совершить покупку (такие опционы называются call) или продажу (put) указанной в опционе ценной бумаги по указанной в контракте цене (страйку) в определённый момент в будущем (для опционов европейског типа) или на протяжении определённого отрезка времени (для опционов американского типа), а продавец опциона обязан совершить ответную сделку по ценной бумаги (продать указанную в опционе call и купить указанную в опционе put ценную бумагу, соответственно).

П.1.4. Биржевые индексы

Фондовая биржа предоставляет не только информацию о динамике цен на различные ценные бумаги, но и агрегирует и обобщает эту информацию для понимания общих тенденций развития рынка ценных бумаг [5]. Для этого фондовыми биржами и различными информационно-аналитическими агентствами рассчитываются различные фондовые (биржевые) индексы.

Фондовые индексы не только характеризует текущее состояние и динамику развития как национальной экономики, так и отдельных ее отраслей, но также используются в качестве базового актива в производных ценных бумагах – опционах и фьючерсах. По своим характеристикам они похожи на обычные опционы и фьючерсы на акции, но они должны быть исполнены не путем покупки или продажи ценных бумаг, а выплатой разницы в цене исполнения опциона и значения индекса на момент заключения и исполнения сделки.

Основные мировые фондовые индексы:

1. Фондовый индекс S&P500 (Standard and Poor's 500) – рассчитывается на основе акций 500 американских компаний с 1941г.,
2. Фондовый индекс DJIA (Dow Jones Industrial Average) – старейший американский фондовый индекс, рассчитывается по акциям 30 американских компаний с 1896г.,
3. Фондовый индекс DAX (Deutscher Aktienindex) – один из наиболее важных биржевых индексов Германии, рассчитывается с 1988г. на основе акций 30 немецких компаний,
4. Фондовый индекс CAC 40 (Cotation Assistée en Continu) – французский фондовый индекс, рассчитывается с 1987г. по акциям 40 крупнейших французских компаний,
5. Фондовый индекс Nikkei 225 (Nikkei 225 Stock Average) – один из важнейших фондовых индексов Японии. Для расчетов используется 225 акций компаний Токийской фондовой биржи.
6. Фондовый индекс Hang Seng (HSI, Hang Seng Index) – важнейший биржевой индекс КНР, он вычисляется на основе акций 34 акционерных компаний Гонконга,

7. Фондовый индекс ММВБ (Московская Межбанковская Валютная Биржа) – российский фондовый индекс, рассчитывается на основе акций 50 российских компаний с 1997г.

П.1.5. Биржевые кризисы и их влияние на поведение биржевых игроков

Биржевой кризис – это резкое изменение (как правило, падение) за непродолжительное время биржевых котировок одной или нескольких ценных бумаг, или ценных бумаг одного сектора, или всех (почти всех) ценных бумаг, торгуемых на бирже [20].

Биржевые кризисы могут быть вызваны внутренними и внешними причинами. Внутренняя нестабильность биржевых процессов связана с:

1) большой сложностью системы – биржа представляет собой сложную социально-экономическую систему со скрытыми взаимосвязями между элементами. Огромное число участников и их разнородность (по характеристикам, целям, возможностям, информированности и т.п.), быстрота взаимодействия на бирже, рефлексивность как положительная обратная связь (цены зависят от принятых участниками биржи решений, которые они принимают, основываясь на ценах, и т.д.) – все это порождает неопределенность и непредсказуемость будущего состояния биржи для ее участников,

2) возможной нерациональностью некоторых ее участников – человек как лицо принимающее решение не всегда рационален, часто принимает решения под воздействием эмоций, склонен к стадному поведению и т.д. Многие трейдеры не обладают способностью правильно предсказывать направление движения цен [28,85], и даже у финансовых аналитиков доля верных прогнозов часто не достигает 50% [63,89],

3) намеренными действиями по дестабилизации биржи – причиной биржевого кризиса могут быть сознательные действия его участников, создающих спекулятивный пузырь – когда участники торгов, даже понимая, что цены оторвались от разумных, реальных значений, продолжают покупать или продавать в надежде успеть продать раньше, чем цены снизятся.

Биржевой кризис также может быть составной частью, проявлением или последствием экономического кризиса (на уровне одной отрасли экономики, национальной или мировой экономики), т.е. резкого ухудшения экономического состояния страны, проявляющегося в проблемах в денежно-кредитной, валютной и финансовой сферах, падении производства, накоплении долгов, банкротстве предприятий, росте безработицы, снижение жизненного уровня и благосостояния населения.

Внешние факторы также влияют на биржу, поскольку биржа чутко реагирует на финансовые, политические, социальные изменения в стране и мире, даже на природные явления и стихийные бедствия, и биржевой кризис может быть вызван и неэкономическими причинами – войнами, стихийными бедствиями, политическими действиями, например, введением эмбарго. Как правило, такие внешние причины мало предсказуемы, но могут оказать сильное влияние на биржу, например, в первый торговый день после терактов 11 сентября 2001 индекс Доу-Джонса потерял 7,1%.

Основные биржевые кризисы XX и XXI вв [21]:

1. Банковская паника 1907г. в США (падение индекса Доу-Джонса на 50% за 10 месяцев) во время экономической рецессии и массового бегства вкладчиков из банков,
2. Великая депрессия 1929-1933гг. (падение индекса Доу-Джонса на 90% за 2,5 года) – мировой экономический кризис,

3. «Черный понедельник» 19.10.1987г в США (падение индекса Доу-Джонса на 22,6% за 1 день), вызванный распространением автоматических программ для трейдинга,
4. Dotcom кризис в 2000г. в США (индекс высокотехнологичных компаний Nasdaq упал на 82% за 2000-2002гг.) – спекулятивный пузырь цен, надутый большими ожиданиями относительно развития интернет-бизнеса,
5. Великая рецессия 2008-2012гг. (падение индекса S&P500 на 52% за 1,5 года) – мировой экономический кризис, начавшийся с кризиса в финансовом секторе США.

Во время биржевых кризисов большая часть трейдеров теряет деньги. Заработать на биржевом кризисе, конечно же, можно – для этого нужно продать акции на пике, непосредственно накануне обвала цен, а также встать по возможности в короткую позицию, т.е. продать заемные акции и вернуть их уже по сильно сниженной цене после наступления кризиса. При знании момента начала биржевого краха прибыль от использования такой стратегии огромна, однако для ее использования необходимо точно знать момент краха, т.е. быть инсайдером. Подавляющее большинство трейдеров не имеют доступа к такой информации и во время кризиса теряет значительные средства.

Приложение 2. Комплекс программ для исследования возможностей участников фондовой биржи по работе с финансовыми инструментами

Исходный код для базовой модели из подраздела 4.2.1

```
library(fBasics)
rm(list=ls(all=TRUE))

# загружаем данные по ценам
Data <- read.table("C:/temp/data_n.txt", header=T)

# выставление границ вероятностей p в этой серии экспериментов
```

```
n1<-0.47
n2<-0.57

# число экспериментов в серии
nn<-100

# переменные для критериев успешности стратегий
av_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1,ncol=nn)
better_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1,ncol=nn)
bankrupts<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1, ncol=nn)

# число тактов и число агентов в экспериментах
tt<-2500
n<-100

# величина кредитного рычага (если маржинальна торговля запрещена, то
# leverage=0)
leverage<-2

# достаем данные

price<- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)
R<- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)

date<- Data[F:(tt),1 ]
price<- Data[F:(tt),2 ]
R<- Data[F:(tt),3 ]
month<- Data[F:(tt),4 ]

#начальное благосостояние
cash0<-10000
stocks0<-0
wealth0<-cash0+stocks0*price[1]


#матрицы благосостояний агентов
cash<-mat.or.vec(n,2)
stocks<-mat.or.vec(n,2)
wealth<-mat.or.vec(n,tt)

#матрицы решений агентов
s<-matrix(0, nrow = n, ncol=1)
vol<-matrix(0, nrow = n, ncol=1)

for (ii in 1:nn) {

i1<-0

for (pr in n1*100:n2*100) {

i1<-i1+1

p_min<-n1
p_max<-n2

rm(wealth)
wealth<-mat.or.vec(n,tt)

cash[,1]<-cash0
stocks [,1]<-stocks0
wealth[,1]<-wealth0
```

```
#матрица банкротств
b<-matrix(0,nrow=1,ncol=tt)


# матрица со случайными числами для розыгрыша вероятности
u1 <- runif(n*tt)
z1<- matrix(u1, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)
u2 <- runif(n*tt)
z2 <- matrix(u2, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)

# вектор вероятностей верного определения направления изменения цен и
список, в который записываются значения вероятности у тех, кто обанк-
ротился
p<-runif(n, min=p_min, max=p_max)
m<-c()
k<-1          # счетчик


# Блок 1. Принятие решений агентами

for (t in 1:(tt-1))
{
for (i in 1:n)
{

# те, кто обанкротился, не участвуют в дальнейшей торговле
if (p[i]==0) {
      wealth[i,t]<-0;stocks[i,1]<-0;cash[i,1]<-0
      } else {


if ((z1[i,t]<p[i])& (price[t+1]-price[t]>0)) { s[i,1] <- 1}
else if ((z1[i,t]<p[i])& (price[t+1]-price[t]<=0)) { s[i,1] <- -1}
else if ((z1[i,t]>=p[i])& (price[t+1]-price[t]>0)) { s[i,1] <- -1}
else if ((z1[i,t]>=p[i])& (price[t+1]-price[t]<=0)) {s[i,1] <- 1}


# выставление объема заявки

if ((s[i,1]==-1) & (stocks[i,1]>0)& (R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,1] <- z2[i,t]*stocks[i,1] else vol[i,1] <-
z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/price[t]
} else if ((s[i,1]==-1) & (stocks[i,1]>0)& (R[t]==1)) {
vol[i,1] <- z2[i,t]*stocks[i,1]
} else if ((s[i,1]==-1) & (stocks[i,1]<=0) & (R[t]==0)) {
vol[i,1] <- z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/price[t]
} else if ((s[i,1]==-1) & (stocks[i,1]<=0) & (R[t]==1)) {
vol[i,1] <- 0
} else if ((s[i,1]==1)&(R[t]==1)) {
if (cash[i,1]>=0) vol[i,1] <- z2[i,t]*cash[i,1]/price[t] else
vol[i,1]<-0
} else if ((s[i,1]==1)& (cash[i,1]>=0) &(R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,1]<-z2[i,t]*cash[i,1]/price[t] else vol[i,1]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/price[t]
}
else if ((s[i,1]==1)& (cash[i,1]<=0) &(R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,1]<-0 else vol[i,1]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/price[t]
}
```

```
# пересчет параметров после сделок
if ((s[i,1]>=0) & (vol[i,1]*price[t]<=cash[i,1])) {
cash[i,2]<-cash[i,1]-vol[i,1]*price[t]; stocks[i,2]<-
stocks[i,1]+vol[i,1]
}else if ((s[i,1]>=0) & (vol[i,1]*price[t]>cash[i,1])){
cash[i,2] <- 0; stocks[i,2] <- stocks[i,1]+vol[i,1]-
(vol[i,1]*price[t]-cash[i,1])/price[t+1]
} else if ((s[i,1]<0)& (stocks[i,1]>0)& (stocks[i,1]>=vol[i,1])) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+vol[i,1]*price[t]; stocks[i,2] <- stocks[i,1]-
vol[i,1]
} else if ((s[i,1]<0)& (stocks[i,1]>0)& (stocks[i,1]<vol[i,1])) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+stocks[i,1]*price[t]+ (vol[i,1]-
stocks[i,1])*(price[t]-price[t+1]); stocks[i,2] <- 0
} else if ((s[i,1]<0)& (stocks[i,1]<=0)) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+vol[i,1]*(price[t]-price[t+1]); stocks[i,2]<- 0
}

#пересчет благосостояния и анализ банкротств

wealth[i,t+1]<-cash[i,2]+stocks[i,2]*price[t+1]
cash[i,1]<-cash[i,2]
stocks[i,1]<-stocks[i,2]

if (wealth[i,t+1]<=wealth0/2) {
      b[t]<-b[t]+1
      m[k]<-p[i]
      p[i]<-0
      k<-k+1
}

}
}
}

num<-0
for (i in 1:n) if (wealth[i,tt]>=wealth0) num<-num+1
better_wealth[i1,ii]<-num

bankrupts[i1,ii]<-sum(b)

if (bankrupts[i1,ii]<n)
av_wealth[i1,ii]<-sum(wealth[1:(n),tt])/(n-bankrupts[i1,ii])
else av_wealth[i1,ii]<-0


}
}
av_wealth
better_wealth
bankrupts

v<-matrix(10, nrow = n2-n1+1, ncol=1)
h<-0; for (j in n1:n2) {h<-h+1; v[h]<-j/100}

x11()
par(mfrow = c(1, 3))
plot(v,rowMeans(av_wealth), xlab="time", ylab="money", main="average
wealth", col="black", type = "l")
```

```
plot(v, rowMeans(better_wealth), xlab="time", ylab="percentage",
main="fraction of agent with wealth greater than initial",
col="black", type = "l")
plot(v, rowMeans(bankrupts), xlab="time", ylab="number of agents",
main="average number of bankrupts", col="black", type = "l")
```

Исходный код для модели «Лидеры и последователи» из подраздела 4.2.2

```
library(fBasics)
rm(list=ls(all=TRUE))

# загружаем данные по ценам
Data <- read.table("C:/temp/data_n.txt", header=T)

# выставление границ вероятностей p в этой серии экспериментов
n1<-0.4
n2<-0.6

# число экспериментов в серии
nn<-100

# переменные для критериев успешности стратегий
av_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1,ncol=nn)
better_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1,ncol=nn)
bankrupts<-matrix(0,nrow=(n2-n1)*100+1, ncol=nn)

# число тактов и число агентов в экспериментах
tt<-2500
n<-100

# величина кредитного рычага (если маржинальна торговля запрещена, то
# leverage=0)
leverage<-2

# достаем данные
date<- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)
price<- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)
R<- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)

date<- Data[F:(tt),1 ]
price<- Data[F:(tt),2 ]
R<- Data[F:(tt),3 ]
month<- Data[F:(tt),4 ]

#начальное благосостояние
cash0<-10000
stocks0<-0
wealth0<-cash0+stocks0*price[1]


#матрицы благосостояний агентов
cash<-mat.or.vec(n,2)
stocks<-mat.or.vec(n,2)
wealth<-mat.or.vec(n,tt)

#матрицы решений агентов
s<-matrix(0, nrow = n, ncol=1)
vol<-matrix(0, nrow = n, ncol=1)
```

```
ii<-0
for (ii in 1:nn) {

print(ii)
i1<-0

for (pr in n1:n2) {

i1<-i1+1

p_min<-n1
p_max<-n2

s<-matrix(0, nrow = n, ncol=tt)
vol<- matrix(0, nrow = n, ncol=1)
cash<-mat.or.vec(n,2)
stocks<-mat.or.vec(n,2)
wealth<-mat.or.vec(n,tt)

cash[,1]<-cash0
stocks [,1]<- stocks0
wealth[,1]<-wealth0

# матрица со случайными числами для розыгрыша вероятности
u1 <- runif(n*tt)
z1 <- matrix(u1, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)
u2 <- runif(n*tt)
z2 <- matrix(u2, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)

p<-runif(n, min=p_min, max=p_max)
m2<-c(0)
numbers2<-c()
k2<-1          # счетчик


# Блок 1. Принятие решений агентами

for (t in 1:(tt-1))
{
 for (i in 1:n)
 {

# те, кто обанкротилися не участвуют в дальнейшей торговле
if (p[i]==0) {
wealth[i,t]<-0;stocks[i,1]<-0;cash[i,1]<-0
} else {

# принятие решений лидерами
if (i<=(n/2)) {
      if ((z1[i,t]<p[i]) & (price[t+1]- price[t]>0)) { s[i,t] <- 1}
      else if ((z1[i,t]<p[i]) & (price[t+1]-price[t]<=0)) { s[i,t] <-
-1}
      else if ((z1[i,t]>=p[i]) & (price[t+1]-price[t]>0)) { s[i,t] <-
-1}
      else if ((z1[i,t]>=p[i]) & (price[t+1]-price[t]<=0)) {s[i,t] <-
1}

# принятие решений последователями
} else if (i>(n/2)) {
      if (t==1) s[i,t]<-0
      else s[i,t]<-s[i-n/2,t-1]
```

```
 }
}
}

# выставление объема заявки последователями
for (i in (n/2+1):n)
 {
if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,1]>0) & (R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,1] <- z2[i,t]*stocks[i,1] else vol[i,1] <-
z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/price[t]
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,1]>0) & (R[t]==1)) {
vol[i,1] <- z2[i,t]*stocks[i,1]
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,1]<=0) & (R[t]==0)) {
vol[i,1] <- z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/price[t]
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,1]<=0) & (R[t]==1)) {
vol[i,1] <- 0
} else if ((s[i,t]==1) & (R[t]==1)) {
if (cash[i,1]>=0) vol[i,1] <- z2[i,t]*cash[i,1]/price[t] else
vol[i,1]<-0
} else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,1]>=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,1]<-z2[i,t]*cash[i,1]/price[t] else vol[i,1]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/price[t]
}
else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,1]<=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,1]<-0 else vol[i,1]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/price[t]
}

# пересчет параметров после сделок
if ((s[i,t]>=0) & (vol[i,1]*price[t]<=cash[i,1])) {
cash[i,2]<-cash[i,1]-vol[i,1]*price[t]; stocks[i,2]<-
stocks[i,1]+vol[i,1]
} else if ((s[i,t]>=0) & (vol[i,1]*price[t]>cash[i,1])) {
cash[i,2] <- 0; stocks[i,2] <- stocks[i,1]+vol[i,1]-
(vol[i,1]*price[t]-cash[i,1])/price[t+1]
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,1]>0)& (stocks[i,1]>=vol[i,1])) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+vol[i,1]*price[t]; stocks[i,2] <- stocks[i,1]-
vol[i,1]
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,1]>0)& (stocks[i,1]<vol[i,1])) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+stocks[i,1]*price[t] + (vol[i,1]-
stocks[i,1])*(price[t]-price[t+1]); stocks[i,2] <- 0
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,1]<=0)) {
cash[i,2] <- cash[i,1]+vol[i,1]*(price[t]-price[t+1]); stocks[i,2]<- 0
}

# пересчет благосостояния и анализ банкротства

wealth[i,t+1]<-cash[i,2]+stocks[i,2]*price[t+1]
cash[i,1]<-cash[i,2]
stocks[i,1]<-stocks[i,2]

if ((wealth[i,t+1]<=wealth0/2)&(p[i]!=0))
{

            numbers2[k2]<-i
            k2<-k2+1
            p[i]<-0

}
}
}
```

```
num1<-0
for (i in (n/2+1):n) {
if (wealth[i,tt]>=wealth0)
num1<-num1+1
}
better_wealth[i1,ii]<-num1

bankrupts[i1,ii]<-k2-1

num2<-0
for (i in 1:n) {
      if (wealth[i,tt]>0) {
            av_wealth[i1,ii]<-av_wealth[i1,ii]+wealth[i,tt]
            num2<-num2+1
            }
      }
      av_wealth[i1,ii]<-av_wealth[i1,ii]/num2
      }
}

# создание графиков критериев
v<-matrix(10, nrow = n2-n1+1, ncol=1)
h<-0; for (j in n1:n2) {h<-h+1; v[h]<-j/100}

x11()
par(mfrow = c(1, 3))
plot(v,rowMeans(av_wealth,na.rm=TRUE), xlab="time", ylab="money",
main="average wealth", col="black", type = "l",
ylim=c(min(av_wealth,na.rm=TRUE),max(av_wealth,na.rm=TRUE)))
for (i in 1:nn) points(v,av_wealth[,i], col="grey", type = "p")
lines(v,rowMeans(av_wealth,na.rm=TRUE), col="black", type = "l")

plot(v, rowMeans(better_wealth), xlab="time", ylab="percentage",
main="fraction of agent with wealth greater than initial",
col="black", type = "l",
ylim=c(min(better_wealth,na.rm=TRUE),max(better_wealth,na.rm=TRUE)))
for (i in 1:nn) points(v,better_wealth[,i], col="grey", type = "p")
lines(v,rowMeans(better_wealth,na.rm=TRUE), col="black", type = "l")

plot(v, rowMeans(bankrupts), xlab="time", ylab="number of agents",
main="average number of bankrupts", col="black", type = "l",
ylim=c(min(bankrupts,na.rm=TRUE),max(bankrupts,na.rm=TRUE)))
for (i in 1:nn) points(v, bankrupts[,i], col="grey", type = "p")
lines(v,rowMeans(bankrupts,na.rm=TRUE), col="black", type = "l")
```

Исходный код для модели «Искатели Черных лебедей» из подраздела 4.2.3

```
library(fBasics)
rm(list=ls(all=TRUE))

# загружаем данные по ценам
Data <- read.table("C:/temp/data_n.txt", header=T)

# выставление границ вероятностей p в этой серии экспериментов
n1<-0.4
n2<-0.6

# число экспериментов в серии
```

```
nn<-100

# критерии успешности стратегий
av_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)+1,ncol=nn)
better_wealth<-matrix(0,nrow=(n2-n1)+1,ncol=nn)
bankrupts<-matrix(0,nrow=(n2-n1)+1,ncol=nn)

# границы вероятностей определения направления изменения цен для обеих
групп участников в период стабильной экономики и параметр дельта, от-
вечающий за изменение этой вероятности в кризисные периоды – у обычных
вероятность уменьшится на дельту, а у искателей Черных лебедей, наобо-
рот, увеличится
p_min1<-0.4
p_max1<-0.5
p_min2<-0.5
p_max2<-0.6
delta<-0.4

# величина кредитного рычага (если маржинальна торговля запрещена, то
# leverage=0)
leverage<-5

# достаем данные из матрицы
date <- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)
price <- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)
R <- matrix(0,nrow = tt, ncol=1)

date <- Data[1:(tt),1 ]
price <- Data[1:(tt),2 ]
R <- Data[1:(tt),3 ]

#начальное благосостояние
cash0<-10000
stocks0<-0
wealth0<-cash0+stocks0*price[1]

#матрицы благосостояний агентов
cash<-mat.or.vec(n,tt)
stocks<-mat.or.vec(n,tt)
wealth<-mat.or.vec(n,tt)

#матрицы решений агентов
s<-matrix(10, nrow = n, ncol=tt)
vol<- matrix(10, nrow = n, ncol=tt)

for (ii in 1:nn) {

i1<-0

for (pr in n1*100:n2*100) {

i1<-i1+1


# матрица банкротств
b<-matrix(0,nrow=2,ncol=tt)

cash[,1]<-cash0
stocks [,1]<- stocks0
wealth[,1]<-wealth0
```

```
# матрица со случайными числами для розыгрыша вероятности
u1 <- runif(n*tt)
z1 <- matrix(u1, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)
u2 <- runif(n*tt)
z2 <- matrix(u2, nrow = n, ncol=tt, byrow=TRUE)

# вектор вероятностей верного определения направления изменения цен
для обычных трейдеров и икателей Черных лебедей

p<-matrix(0, nrow = n, ncol = 1)
p1<-runif(n/2, min=p_min1, max=p_max1)
p2<-runif(n/2, min=p_min2, max=p_max2)
for (i in 1:(n/2)) p[i]<-p1[i]
for (i in (n/2+1):n) p[i]<-p2[i-n/2]

m1<-c()
m2<-c()
k1<-1;k2<-1          # счетчик


# Блок 1. Принятие решений агентами

for (t in 1:(tt-1))
{

for (i in 1:n)
 {

# изменение вероятностей верного определения направдения изменения цен
в кризисный период
  if ((R[t]==1)&(i<=n/2)) p[i]<-p[i]+0.4 else if ((R[t]==1)&(i>n/2))
p[i]<-p[i]-0.4

  if ((z1[i,t]<p[i]) & (price[t+1]- price[t]>0)) { s[i,t] <- 1}
  else if ((z1[i,t]<p[i]) & (price[t+1]-price[t]<=0)) { s[i,t] <- -1}
  else if ((z1[i,t]>=p[i]) & (price[t+1]-price[t]>0)) { s[i,t] <- -1}
  else if ((z1[i,t]>=p[i]) & (price[t+1]-price[t]<=0)) {s[i,t] <- 1}

# возвращаем прежние значения вероятности

if ((R[t]==1)&(i<=n/2)) p[i]<-p[i]-0.4
else if ((R[t]==1)&(i>n/2)) p[i]<-p[i]+0.4

}

# выставление объема заявки для обеих групп трейдеров
 for (i in 1:(n/2))
 {

if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]>0) & (R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,t] <- z2[i,t]*stocks[i,t]/10 else vol[i,t] <-
z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/(price[t]*10)
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]>0) & (R[t]==1)) {
vol[i,t] <- z2[i,t]*stocks[i,t]
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]<=0) & (R[t]==0)) {
vol[i,t] <- z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/(price[t]*10)
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]<=0) & (R[t]==1)) {
vol[i,t] <- 0
} else if ((s[i,t]==1) & (R[t]==1)) {
```

```
if (cash[i,t]>=0) vol[i,t] <- z2[i,t]*cash[i,t]/price[t] else
vol[i,t]<-0
} else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,t]>=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,t]<-z2[i,t]*cash[i,t]/(price[t]*10) else
vol[i,t]<- z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/(price[t]*10)
}
else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,t]<=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,t]<-0 else vol[i,t]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/(price[t]*10)
}
}

for (i in (n/2+1):n)
 {

if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]>0) & (R[t]==0)) {
if (leverage==0) vol[i,t] <- z2[i,t]*stocks[i,t] else vol[i,t] <-
z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/(price[t])
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]>0) & (R[t]==1)) {
vol[i,t] <- z2[i,t]*stocks[i,t]
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]<=0) & (R[t]==0)) {
vol[i,t] <- z2[i,t]*leverage*wealth[i,t]/(price[t])
} else if ((s[i,t]==-1) & (stocks[i,t]<=0) & (R[t]==1)) {
vol[i,t] <- 0
} else if ((s[i,t]==1) & (R[t]==1)) {
if (cash[i,t]>=0) vol[i,t] <- z2[i,t]*cash[i,t]/price[t] else
vol[i,t]<-0
} else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,t]>=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,t]<-z2[i,t]*cash[i,t]/(price[t]) else
vol[i,t]<- z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/(price[t])
}
else if ((s[i,t]==1) & (cash[i,t]<=0) & (R[t]==0) ) {
if (leverage==0) vol[i,t]<-0 else vol[i,t]<-
z2[i,t]*(wealth[i,t]*leverage)/(price[t])
}
}

for (i in 1:n)
{

# пересчет денег и акций после сделок

if ((s[i,t]>=0) & (vol[i,t]*price[t]<=cash[i,t])) {
cash[i,t+1]<-cash[i,t]-vol[i,t]*price[t]; stocks[i,t+1]<-
stocks[i,t]+vol[i,t]
} else if ((s[i,t]>=0) & (vol[i,t]*price[t]>cash[i,t])) {
cash[i,t+1] <- 0; stocks[i,t+1] <- stocks[i,t]+vol[i,t]-
(vol[i,t]*price[t]-cash[i,t])/price[t+1]
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,t]>0)& (stocks[i,t]>=vol[i,t])) {
cash[i,t+1] <- cash[i,t]+vol[i,t]*price[t]; stocks[i,t+1] <-
stocks[i,t]-vol[i,t]
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,t]>0)& (stocks[i,t]<vol[i,t])) {
cash[i,t+1] <- cash[i,t]+stocks[i,t]*price[t] + (vol[i,t]-
stocks[i,t])*(price[t]-price[t+1]); stocks[i,t+1] <- 0
} else if ((s[i,t]<0) & (stocks[i,t]<=0)) {
cash[i,t+1] <- cash[i,t]+vol[i,t]*(price[t]-price[t+1]);
stocks[i,t+1]<- 0
}

# пересчет благосостояния и анализ банкротства
```

```
wealth[i,t+1]<-cash[i,t+1]+stocks[i,t+1]*price[t+1]

if (wealth[i,t+1]<=wealth0/2)
{

      if (i<=(n/2))
      {
            b[1,t]<-b[1,t]+1
            cash[i,t+1]<-cash0
            stocks[i,t+1]<-stocks0
            m1[k1]<-p[i]
            k1<-k1+1
            p[i]<- runif(1,min=p_min1, max=p_max1)
      }
      else
      {
            b[2,t]<-b[2,t]+1
            cash[i,t+1]<-cash0
            stocks[i,t+1]<-stocks0
            m2[k2]<-p[i]
            k2<-k2+1
            p[i]<- runif(1,min=p_min2, max=p_max2)

      }
}


}
}

av_wealth[i1,ii]<- colMeans(wealth)[tt]

num<-0
for (i in 1:n) if (wealth[i,tt]>=wealth0) num<-num+1
better_wealth[i1,ii]<-num

bankrupts[i1,ii]<-sum(b)

x11()

}
}

# рисуем графики критериев
v<-matrix(10, nrow = n2-n1+1, ncol=1)
h<-0; for (j in n1:n2) {h<-h+1; v[h]<-j/100}

x11()
par(mfrow = c(1, 3))
plot(v,rowMeans(av_wealth), xlab="time", ylab="money", main="average
wealth", col="black", type = "l")
plot(v, rowMeans(better_wealth), xlab="time", ylab="percentage",
main="fraction of agent with wealth greater than initial",
col="black", type = "l")
plot(v, rowMeans(bankrupts), xlab="time", ylab="number of agents",
main="average number of bankrupts", col="black", type = "l")
```

Исходный код для модели из раздела 3.3

```
> restart;
```
Подключение пакетов

```
> with(linalg):with(simplex):
```
Общее число акций и число акций во множествах I+,I- и 0
```
> n:=6:np:=2:nm:=2:
n0:=n-np-nm:
```
Вероятности p+ и p-
```
> pp:=0.9:pm:=0.9:
```
Начальные данные - имеющиеся акции, наличные деньги и величина кредитного рычага
```
> v:=vector(n,[10,20,50,0,4,12]):
> #v:=vector(n,0):
> m:=1000:k:=2:
```
s - массив цен на текущий момент,smin и smax - массивы прогнозируемых трейдером границ цен на следующий момент времени
```
> s:=vector(n,[50,90,10,22,49,50]):
smin:=vector(n,[40,75,8,18,42,30]):
smax:=vector(n,[60,120,13,25,53,70]):
```
Задание матриц
```
> A:=matrix(4*n,2*n,0):
for i from 1 to 2*n do
      A[2*i-1,i]:=1:
      A[2*i,i]:=-1:
od:
> bsmall:=vector(4*n,0):
> for i from 1 to np do
      bsmall[(i-1)*4+1]:=s[i]:
      bsmall[(i-1)*4+2]:=-smax[i]:
      bsmall[(i-1)*4+3]:=smin[i]:
      bsmall[(i-1)*4+4]:=-s[i]:
od:
for i from np+1 to np+nm do
      bsmall[(i-1)*4+1]:=smin[i]:
      bsmall[(i-1)*4+2]:=-s[i]:
      bsmall[(i-1)*4+3]:=s[i]:
      bsmall[(i-1)*4+4]:=-smax[i]:
od:
for i from np+nm+1 to n do
      bsmall[(i-1)*4+1]:=s[i]:
      bsmall[(i-1)*4+2]:=-smax[i]:
      bsmall[(i-1)*4+3]:=smin[i]:
      bsmall[(i-1)*4+4]:=-s[i]:
od:
> B:=matrix(n+2,n,0):
for i from 1 to n do
      B[i,i]:=1:
od:
for i from np+1 to np+nm do
      B[n+1,i]:=-s[i]:
      B[n+2,i]:=s[i]:
od:
for i from 1 to np do
      B[n+2,i]:=-s[i]:
od:
> dsmall:=vector(n+2,0):
dsmall[n+1]:=-k*(m+multiply(s,v)):
dsmall[n+2]:=-m+multiply(s,v):
> Dbig:=matrix(n,2*n,0):
for i from 1 to np do
      Dbig[i,i]:=pp:
od:
for i from 1 to np do
      Dbig[i,np+i]:=1-pp:
```

```
od:
for i from 1 to nm do
      Dbig[np+i,2*np+i]:=pm:
od:
for i from 1 to nm do
      Dbig[np+i,2*np+nm+i]:=1-pm:
od:
for i from 1 to n-np-nm do
      Dbig[np+nm+i,2*(np+nm)+i]:=1/2:
od:
for i from 1 to n-np-nm do
      Dbig[np+nm+i,2*(np+nm)+(n-np-nm)+i]:=1/2:
od:
> q:=vector(2*n):
for i from 1 to np do
      q[i]:=pp*v[i]:
      q[np+i]:=(1-pp)*v[i]:
od:
for i from 1 to nm do
      q[2*np+i]:=pm*v[np+i]:
      q[2*np+nm+i]:=(1-pm)*v[np+i]:
od:
for i from 1 to n-np-nm do
      q[2*(np+nm)+i]:=v[np+nm+i]/2:
      q[2*(np+nm)+n-np-nm+i]:=v[np+nm+i]/2:
od:
Задача 1
> h:=vector(4*n);x:=vector(n);
> eq1:=matadd(matadd(multiply(h,A),-multiply(x,Dbig)),-q):
eq2:=map(x -> x<=0, eq1);
> eq3:=matadd(multiply(B,x),-dsmall):
eq4:=map(x -> x>=0, eq3);
> cnsts1:= {seq(eq2[i],i=1...2*n),seq(eq4[i],i=1...n+2)};
> obj1:= multiply(bsmall,h);
> maximize(obj1,cnsts1,NONNEGATIVE);
Задача 2
> u:=vector(n+2);w:=vector(2*n);
> eq5:=matadd(multiply(u,B),multiply(Dbig,w)):
eq6:=map(x -> x<=0, eq5);
> eq7:=matadd(multiply(A,w),-bsmall):
eq8:=map(x -> x>=0, eq7);
> cnsts2:= {seq(eq6[i],i=1...n), seq(eq8[i],i=1...4*n)};
obj2:= multiply(-dsmall,u)+multiply(q,w);
> minimize(obj2,cnsts2,NONNEGATIVE);
```