Контрольна робота. Тема: Ряди.

Виконав студент групи ВТ-21-1(1) – Бабушко Андрій.

Варіант – 1.

Сторінка 1:

Контрольна робота. Розділ: Ряди.

Виконав: Бабушко Андрій. Група: ВТ-21-1 (1).

$\boxed{1.1.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

Порівнюємо межі за доп. lim:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

Підставляємо 0:

$$\frac{1}{1+2\cdot 0} = 1 \Rightarrow \text{Ряд } \underline{\text{розбіжний}}$$

$\boxed{2.1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ $\quad a_n = \frac{2n}{3^n} \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} \Rightarrow \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ – $\underline{\text{збіжний}}$

$\boxed{3.1}$ $\frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \ldots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$

Позначимо ряд, як ф-я $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^4} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx =$$

Підставляємо інтеграл у границю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$\boxed{t = x^2}$

$\boxed{dx = dt}$

Сторіка 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2}\Big|_1^n = \frac{\operatorname{arctg} n^2}{2} - \frac{\operatorname{arctg}(1^2)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\infty^2)}{2} - \frac{\pi}{8} => \frac{\pi}{8}.$$

Значення $\frac{\pi}{4} > 0$, отже ряд збіжний.

$\boxed{4.1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ Досліджуємо ряд за допом. lim та порівняння

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} => \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} > 0 \le 1.$$

Ряд розбіжний за озн. Даламбера

$\boxed{6.1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2x-3)^n}{2n-1}$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}{\frac{(-1)^n}{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-(-1)^n \cdot (2n+1)}{(-1)^n \cdot (2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n-1}{2n-1} = -1$$

$x_1 = 3-(-1) = 4 \qquad x_2 = 3+(-1) = 2$

Перевіримо збіжність ряду на кінцях:

$$x = 4 => \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot n-1} (2 \cdot 4 - 3)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Перевіримо перші 3 члени ряду

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

За 1 ознакою Лейбніца маємо: $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

За 2 озн. Лейбніца: $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2n-1} = 0$ ✓ (виконується).

Сторінка 3:

Тому, ряд є <u>збіжний</u>

$\boxed{5.1}$ $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{x^2+n^2}$ $\quad a_n=(-1)^{n-1} \quad a_{n+1}=1$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{-(-1)^n}{(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1}=-1 \qquad x\in(-1;1)$$

Перевіримо збіжність ряду на кінцях відрізка:

$x=1 \Rightarrow \sum(-1)^{n-1}$

Перші 3 члени ряду: 1; -1; 1

1 ознака Лейбніца не виконується

За 2 ознакою Лейбніца маємо $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}=\underline{-1}$ не прямує до 0

Тому, ряд є <u>розбіжний</u>, точка $x=1$ є розбіжною точкою.