Лабораторна робота №7

Тема: «Інтерполяція та апроксимація»

Мета роботи: навчитись на практиці будувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, а також використовувати метод найменших квадратів апроксимації функції.

Хід роботи:

Завдання на лабораторну роботу:

Завдання 1.

1. Побудувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона (для рівновіддалених та нерівновіддалених вузлів інтерполяції) для заданої дискретної функції.
2. Зробити перевірку – обчислити значення функції у вузлі x_0.

Варіанти завдань

Варіант	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
1	-1	0	3	-3	5	2

Завдання 2.

За методом найменших квадратів побудувати апроксимальний поліном 2-го степеня для заданої дискретної функції та порахувати мінімальну суму квадратів похибок.

Варіанти завдань

		0	*1*	*2*	*3*	*4*
Варіант 1	*x*	0,59	0,7	0,81	0,9	0,95
	y	2,94	3,2	3,38	3,53	3,75

Змн.	Арк.	№ докум.	Підпис	Дата	«Житомирська політехніка».21.121.01.000–Лр7		
Розроб.	Бабушко А.С.				Звіт з лабораторної роботи	Літ.	Арк. 1	Аркушів 9
Перевір.	Нікітчук Т.М.					ФІКТ Гр. ВТ-21-1[1]	
Керівник							
Н. контр.							
Зав. каф.							

Завдання 1.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

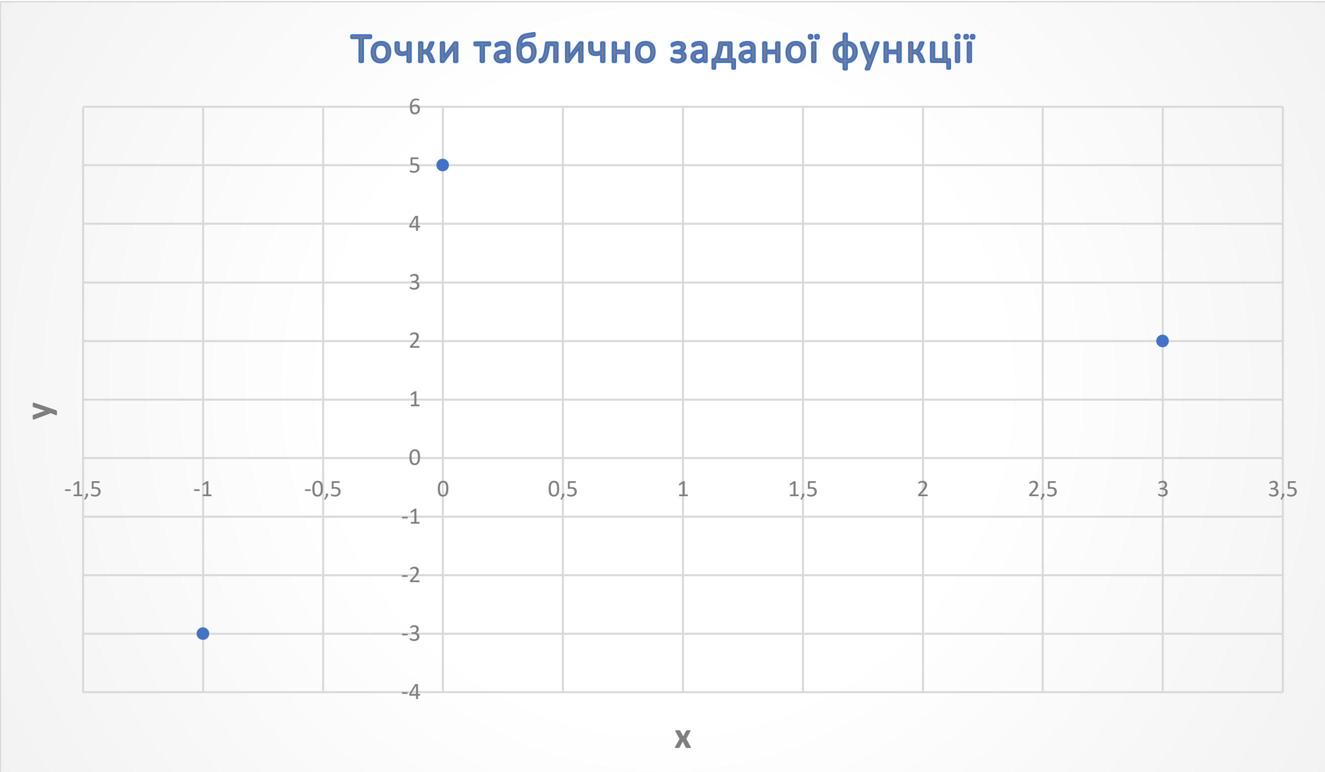
Таблиця значень дискретної функції:

i	0	1	2
x_i	-1	0	3
y_i	-3	5	2

1) Визначимо:

- ***вузли інтерполяції – точки:*** $x_0, x_1, x_2 (x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 3)$;
- ***значення деякої функції – точки:*** $y_0, y_1, y_2 (y_0 = -3, y_1 = 5, x_2 = 2)$;

2) Відмітимо на координатній прощині точки заданої дискретної функції:



3) Побудуємо наближену функцію ***F(x) у вигляді інтерполяційного поліному Лагранжа*** за формулою:

$$F(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i$$

n=2, інтерполяційний поліном Лагранжа є рівнянням 2-го степеню, яке описує **параболу, що проходить через три задані точки (x0; y0), (x1; y1) і (x2; y2):**

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) y_i$$

$$L_2(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$$

4) Знаходимо коефіцієнти Лагранжа ***(L0(x), L1(x), L2(x)):***

a. коефієнт Лагранжа для $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-3)}{(-1-0)(-1-3)}$$

b. коефієнт Лагранжа для $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)}$$

c. коефієнт Лагранжа для $\boldsymbol{i} = \mathbf{2}$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)}$$

5) Запишемо інтерполяційний поліном Лагранжа 2-го степеню для заданої дискретної функції:

$$L(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 =$$

$$= \frac{x(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} * -3 + \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} * 5 + \frac{(x+1) * x}{(3+1)(3-0)} * 2 =$$

$$= \frac{-3(x^2 - 3x)}{4} + \frac{5(x^2 - 2x - 3)}{-3} + \frac{2x(x+1)}{12} =$$

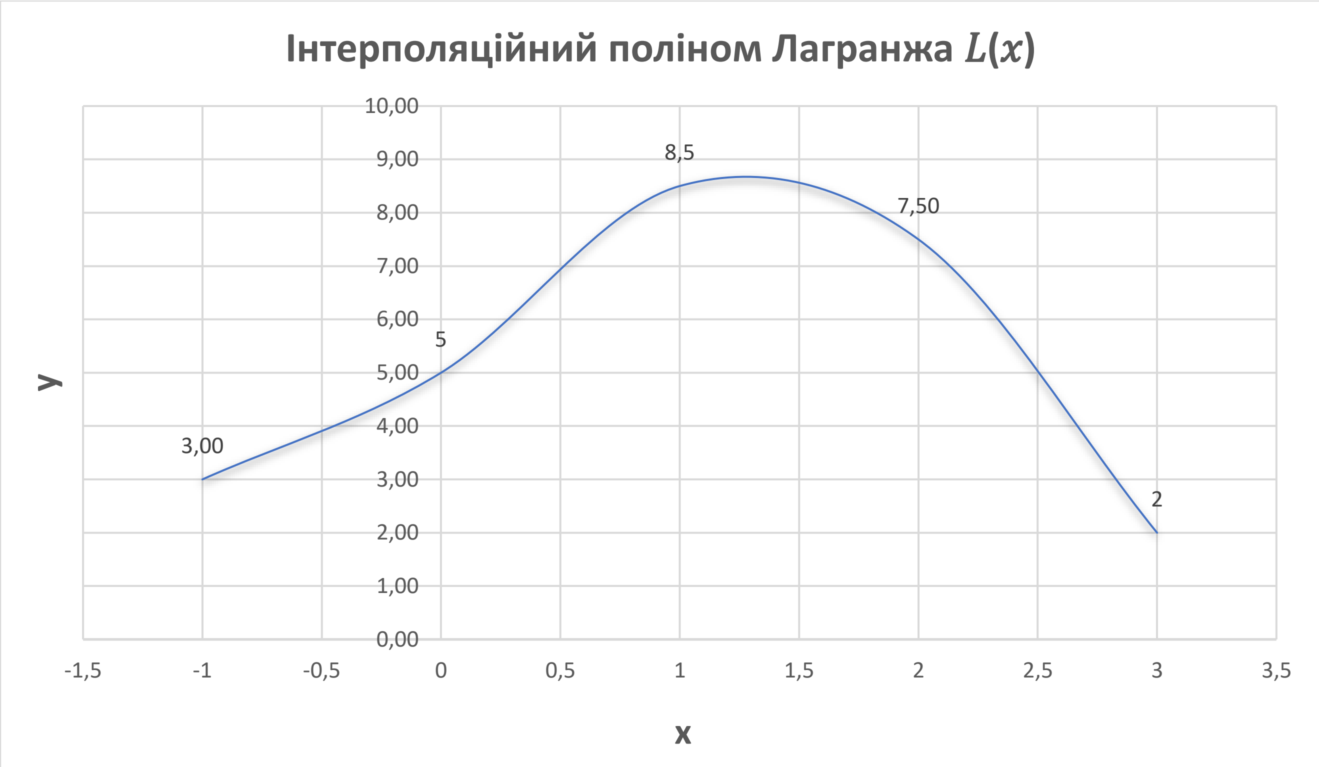
$$= \frac{-9(x^2 - 3x) - 20(x^2 - 2x - 3) + 2x(x+1)}{12} =$$

$$= \frac{-9x^2 + 27x - 20x^2 + 40x + 60 + 2x^2 + 2x}{12} =$$

$$= \frac{-27x^2 + 69x + 60}{12} = \boldsymbol{-2.25x^2 + 5.75x + 5}$$

6) Зобразимо на координатній площині отриманий інтерполяційний поліном Лагранжа 2-го степеню:

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	3	5	8.5	7.5	2



7) Обчислимо значення функції у точці x_1:

$$F(x_1) = F(0) = 2.25 * 0 + 5.75 * 0 + 5 = 5$$

Інтерполяційний поліном Ньютона

Випадок 1. Інтерполяційний поліном Ньютона для ***нерівновіддалених вузлів:***

Таблиця значень дискретної функції:

i	0	1	2
x_i	-1	0	3
y_i	-3	5	2

1) Записуємо вигляд інтерполяційного полінома Ньютона 2-го степеня:

$$P_2(x) = N_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

2) Обчислимо **розділені різниці** за відповідними формулами:

- **Розділена різниця 1-го порядку:**

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{5 + 3}{0 + 1} = 8$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{3 - 0} = -1$$

- **Розділена різниця 2-го порядку:**

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 8}{3 + 1} = -2.25$$

3) Заповнюємо таблицю:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
x_0	$f(x_0) = -3$	$f(x_0, x_1) = 8$	$f(x_0, x_1, x_2) = -2.25$
x_1	$f(x_1) = 5$	$f(x_1, x_2) = -1$	$-$
x_2	$f(x_2) = 2$	$-$	$-$

4) Підставляємо знайдені розділені різниці і записуємо інтерполяційний поліном Ньютона 2-го степеня для випадку нерівновіддалених вузлів за формулою:

$$P_2 = N_2 = -3 + 8 * (x + 1) - 2.25 * (x + 1) * (x - 0) = \mathbf{-2.25x^2 + 5.75x + 5}$$

5) Обчислимо значення функції у точці x_1:

$$F(x_1) = F(0) = 2.25 * 0 + 5.75 * 0 + 5 = 5$$

Випадок 2. Інтерполяційний поліном Ньютона для ***рівновіддалених вузлів(h=1):***

Таблиця значень дискретної функції:

i	0	1	2
x_i	-1	0	3
y_i	-3	5	2

1) Записуємо вигляд інтерполяційного полінома Ньютона:

$$P_2(x) = N_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

1) Обчислимо **скінчені різниці** за відповідними формулами:
   - **Скінчена різниця 1-го порядку:**

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = 5 + 3 = 8$$

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) = 2 - 5 = -3$$

   - **Скінчена різниця 2-го порядку:**

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta\big(\Delta f(x_0)\big) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = -3 - 8 = -11$$

2) Заповнюємо таблицю:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
x_0	$f(x_0) = -3$	$\Delta f(x_0) = 8$	$\Delta^2 f(x_0) = \mathbf{-11}$
x_1	$f(x_1) = 5$	$\Delta f(x_1) = \mathbf{-3}$	$-$
x_2	$f(x_2) = 2$	$-$	$-$

3) Підставляємо знайдені розділені різниці і записуємо інтерполяційний поліном Ньютона 2-го степеня для випадку нерівновіддалених вузлів за формулою:

$$P_2(x) = N_2(x) = -3 + \frac{8}{1! * 1}(x + 1) + \frac{-11}{2! * 1^2}(x + 1)(x - 0) =$$

$$\mathbf{-5.5x^2 + 2.5x + 20}$$

Завдання 2.

1) Задана дискретна функція:

i	0	1	2	3	4
x_i	0.59	0.7	0.81	0.9	0.95
y_i	2.94	3.2	3.38	3.53	3.75

2) Побудуємо апроксимаційний поліном ***другого*** степеня (m=2):

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

3) Виконаємо допоміжні обчислення для подальшого запису отриманих даних у нормальну систему рівнянь:

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = 0.59 + 0.7 + 0.81 + 0.9 + 0.95 = \mathbf{3.95}$$

$$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^2 = 0.59^2 + 0.7^2 + 0.81^2 + 0.9^2 + 0.95^2 = \mathbf{3.2067}$$

$$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^3 = 0.59^3 + 0.7^3 + 0.81^3 + 0.9^3 + 0.95^3 = \mathbf{2.666195}$$

$$\sum_{i=0}^{4} {x_i}^4 = 0.59^4 + 0.7^4 + 0.81^4 + 0.9^4 + 0.95^4 = \mathbf{2.26234707}$$

$$\sum_{i=0}^{4} y_i = 2.94 + 3.2 + 3.38 + 3.53 + 3.75 = \mathbf{16.8}$$

$$\sum_{i=0}^{4} y_i x_i = 2.94 * 0.59 + 3.2 * 0.7 + 3.38 * 0.81 + 3.53 * 0.9 + 3.75 * 0.95 = \mathbf{13.4519}$$

$$\sum_{i=0}^{4} y_i {x_i}^2 = 2.94 * 0.59^2 + 3.2 * 0.7^2 + 3.38 * 0.81^2 + 3.53 * 0.9^2 + 3.75 * 0.95^2 = \mathbf{11.052707}$$

4) Для визначення невідомих коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 запишемо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5a_0 & 3.95a_1 & 3.2067a_2 \\ 3.95a_0 & 3.2067a_1 & 2.666195a_2 \\ 3.2067a_0 & 2.666195a_1 & 2.26234707a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.8 \\ 13.4519 \\ 11.052707 \end{pmatrix}$$

5) Знайдемо розв'язок нормальної системи рівнянь, використовуючи, наприклад, метод Гаусса – значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2

$$a_0 = 2.269079673$$

$$a_1 = 0.5956342797$$

$$a_2 = 0.967301659$$

6) Запишемо шуканий апроксимаційний поліном другого степеня для заданої дискретної функції:

$$\boldsymbol{P_2(x) \approx 2.27 + 0.6x + 0.97x^2}$$

7) Рахуємо мінімальну суму квадратів похибок за формулою:

i	0	1	2	3	4
x_i	0.59	0.7	0.81	0.9	0.95
y_i	2.94	3.2	3.38	3.53	3.75

$$\boldsymbol{y(x_0)} = 2.27 + 0.6 * 0.59 + 0.97 * 0.59^2 = \boldsymbol{2.961657}$$

$$\boldsymbol{y(x_1)} = 2.27 + 0.6 * 0.7 + 0.97 * 0.7^2 = \boldsymbol{3.1653}$$

$$\boldsymbol{y(x_2)} = 2.27 + 0.6 * 0.81 + 0.97 * 0.81^2 = \boldsymbol{3.392417}$$

$$\boldsymbol{y(x_3)} = 2.27 + 0.6 * 0.9 + 0.97 * 0.9^2 = \boldsymbol{3.5957}$$

$$\boldsymbol{y(x_4)} = 2.27 + 0.6 * 0.95 + 0.97 * 0.95^2 = \boldsymbol{3.715425}$$

$$\boldsymbol{(y(x_0) - y_0)^2} = (2.961657 - 2.94)^2 = \boldsymbol{0.00046902564}$$

$$\boldsymbol{(y(x_1) - y_1)^2} = (3.1653 - 3.2)^2 = \boldsymbol{0.00120409}$$

$$\boldsymbol{(y(x_2) - y_2)^2} = (3.392417 - 3.38)^2 = \boldsymbol{0.00015418188}$$

$$\boldsymbol{(y(x_3) - y_3)^2} = (3.5957 - 3.53)^2 = \boldsymbol{0.00431649}$$

$$\boldsymbol{(y(x_4) - y_4)^2} = (3.715425 - 3.75)^2 = \boldsymbol{0.00119543062}$$

$$\sum_{i=0}^{4} (\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{y}_i)^2 = (y(x_i) - y_i)^2 = 0.00046902564 +$$

$$+0.00120409 + 0.00015418188 + 0.00431649 + 0.00119543062 = \mathbf{0.00733921814}$$

Висновок: під час виконання лабораторної роботи було отримано навички будування інтерполяційних поліномів Лагранжа та Ньютона, а також використання методу наймеших квадратів апроксимації функції.