МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 3

з дисципліни

«Дискретна математика»

Виконав:

студент групи КН-114

Долінський А.Г.

Викладач:

Мельникова Н.І.

Львів – 2019р.

Тема: Побудова матриці бінарного відношення.

Мета роботи: Набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначенні їх типів.

Теоретичні відомості

Декартів добуток множин A і B (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b\in B$. При цьому вважається, що $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартового добутку дорівнює $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R \subset A\times B$). Якщо пара (a,b) належить відношенню R , то пишуть $(a, b)\in R$, або aRb .

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x\ \exists y\ (x, y) \in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y\ \exists x\ (x, y) \in R\}$ ($\exists$- існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R \subset A\times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m\times n} = (r_{ij})$ $m = |A|$, а $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } (a_i , b_j) \in R, \\ 0, \text{якщо } (a_i , b_j) \notin R. \end{cases}$

<u>Види бінарних відношень</u>.

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2 : $R \subseteq A \times A = \{(a, b)\ a \in A, b \in A \}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa , тобто $(a,a)\in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов’язково має петлі у кожній вершині.
2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого a

$\in A$ не виконується aRa , тобто $(a,a)\notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з

aRb слідує bRa , тобто якщо $(a,b)\in R$ то і $(b,a)\in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких

$a,b\in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,a)\in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c\in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,c)\in R$, то $(a,c)\in R$. Матриця транзитивного

відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} =1$, то обов'язково $\sigma_{im} =1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c\in A$ з aRb та bRc слідує, що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b)\in R$ і $(b, c)\in R$, то $(a, c)\notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та

$\sigma_{jm} =1$, то обов'язково $\sigma_{im} =0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується

наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f : X \rightarrow Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$.

Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y)\in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

Видии функціональних відношень

1. Функція називається ін’єктивною (ін’єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$.

Функція ін’єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр’єктивною (сюр’єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін’єктивна та сюр’єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

Додаток 1

Варіант № 7

1. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x,y) | (x,y) \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке є антирефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, y = (x - 2)^{-2}\}$.

1. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$?

Нехай (x, y) є $(A \cap B) \times (C \cap D)$ ↔ (x, y) є $(A \cap B)$ & (x, y) є $(C \cap D)$ ↔
↔ (x є A & y є B) & (x є C & y є D) ↔ (x є A & x є C) & (y є B & y є D) ↔
↔ (x є A∩C) & (y є B∩D) ↔ (x, y) є (A∩C) × (B ∩ D).

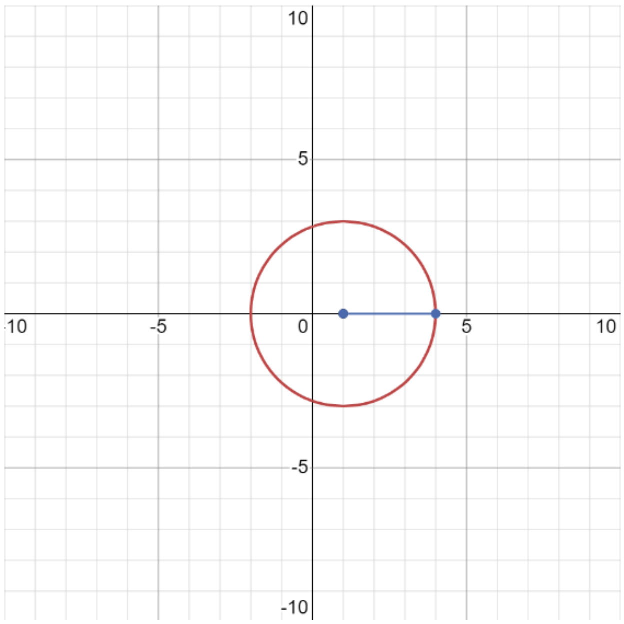
Рівність невірна.

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:
$R = \{(x,y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.
2^A = { {O}, {1}, {2}, {1, 2} };
2^B = {{O}, {1}, {2}, {4}, {1, 2}, {1, 4}, {2, 4}, {1, 2, 4}};
R = { (1, {1, 2}), (1, {1, 4}), (2, {1, 2}), (2, {2, 4}) };

$$R = \begin{matrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{matrix}$$

3.Зобразити відношення графічно:
$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел

$x^2 - 2x + y^2 = 8$;
$(x - 1)^2 + y^2 = 9$



4.Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке є антирефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

R = { (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d) };

$$R = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

5.Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

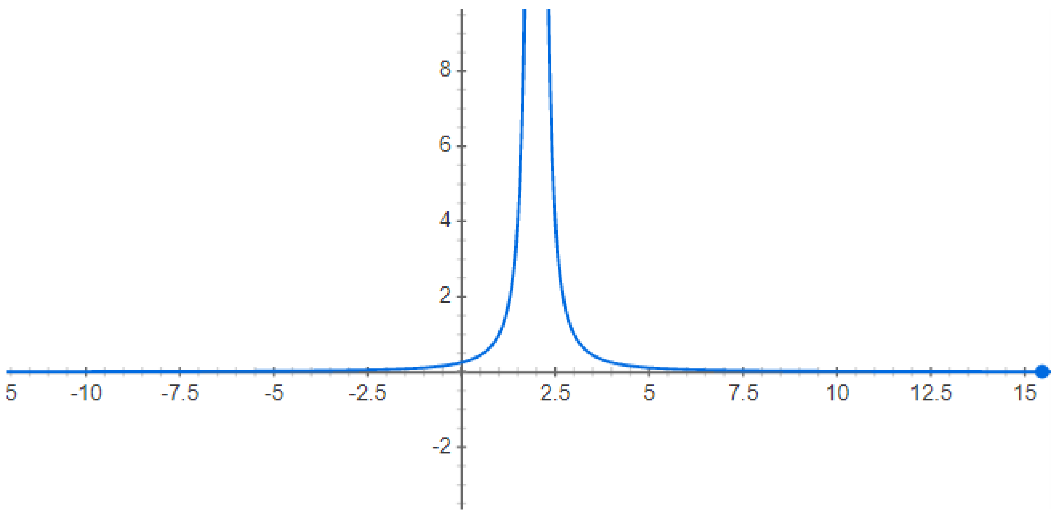
$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ y = (x-2)^{-2}\}$.

$y = \frac{1}{(x-2)^2}$; D(f): x є R\{2};

а) R\{2};

б) R\ $(B \cup \{2\})$ або R\$\bar{B}$;

(R - множина дійсних чисел, B – множина дійсних недодатніх чисел);



Додаток 2

Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

7. $\rho = \left\{ (a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a < 3b \right\};$

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;


void arrayInput(int* arr, int n);
void arrayOutput(int* arr, int n);
void array2dOutput(int** arr, int n, int m);
void relation(int** arr, int n, int m);

int main() {
    int n, m;
    cout << "Enter the number of elements in first array: ";
    cin >> n;
    int* firstArray = new int[n];
    cout << "Enter the first array: " << endl;
    arrayInput(firstArray, n);
    cout << "The first array: " << endl;
    arrayOutput(firstArray, n);
    cout << "Enter the number of elements in second array: ";
    cin >> m;
    int* secondArray = new int[m];
    cout << "Enter the second array: " << endl;
    arrayInput(secondArray, m);
    cout << "The second array: " << endl;
    arrayOutput(secondArray, m);
    int** R = new int* [n];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        R[i] = new int[m];
    }
```

```
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            if (firstArray[i] < 3 * secondArray[j]) {
                R[i][j] = 1;
            }
            else {
                R[i][j] = 0;
            }
        }
    }
    cout << endl;
    cout << "The relation(a < 3b): " << endl;
    array2dOutput(R, n, m);
    relation(R, n, m);


    delete[]firstArray;
    delete[]secondArray;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        delete[]R[i];
    }
    delete[] R;
    system("pause");
    return 0;

}
```

```
void arrayInput(int* arr, int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> arr[i];
        bool uniq = true;
        for (int k = 0; k < i; k++) {
            if (arr[i] == arr[k]) {
                uniq = false;
            }
        }
        if (uniq == false) {
            cout << "The elemnent should be unique!" << endl;
            exit(0);

        }
    }
}

void arrayOutput(int* arr, int n) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << arr[i] << " ";
    }
    cout << endl;
}
void array2dOutput(int** arr, int n, int m) {

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            cout << arr[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }

}
void relation(int** arr, int n, int m) {
    int s = 0, k = 0;
    bool equal = true;
    bool trans = false;
    bool antitrans = false;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        //Рефлексивність
        if (arr[i][i] == 1) {
            s++;
        }
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            //Симетричність
            if (i >= j) {
                if (arr[i][j] == arr[j][i] && arr[i][j] == 1 && arr[j][i] == 1 && i != j) {
                    k++;
                }
                else if (arr[i][j] != arr[j][i] && equal == true) {
                    equal = false;
                }
```

```cpp
                }
            }
            //Транзитивність
            for (int q = 0; q < n; q++) {
                if (i >= j) {
                    if (arr[i][j] == arr[j][k] == arr[i][k] == 1) {
                        trans = true;
                    }
                    else if (arr[i][j] == arr[j][k] == 1 && arr[i][j] == arr[j][k] != arr[i][k])
                    {
                        antitrans = true;
                    }
                }
            }
        }
    }
    if (s == m) {
        cout << "Matrix is reflexive" << endl;
        }
    else if (s > 0 && s != m) {
        cout << "Matrix is irreflexive" << endl;
    }
    else {
        cout << "Matrix is antireflexive" << endl;
    }

    if (k > 0 && equal == true) {
        cout << "Matrix is symmetrical" << endl;
    }
    else if (k > 0 && equal == false) {
        cout << "Matrix is asymmetrical" << endl;
    }
    else {
        cout << "Matrix is antisymmetrical" << endl;
    }

    if (trans == true && antitrans == false) {
        cout << "Matrix is transitive" << endl;
    }
    else if (trans == true && antitrans == true)
    {
        cout << "Matrix is intransitive" << endl;
    }
    else if (trans == false && antitrans == true)
    {
        cout << "Matrix is antitransitive" << endl;
    }
}
```

Скрін-шот коду на мові С++.

```
C:\Users\Admin\source\repos\Lab 3 (math)\Debug\Lab 3 (math).exe
Enter the number of elements in first array: 4
Enter the first array:
1 2 5 7
The first array:
1 2 5 7
Enter the number of elements in second array: 4
Enter the second array:
1 2 3 4
The second array:
1 2 3 4

The relation(a < 3b):
1 1 1 1
1 1 1 1
0 1 1 1
0 0 1 1
Matrix is reflexive
Matrix is asymmetrical
Matrix is transitive
Press any key to continue . . .
```

Скрін-шот тесту №1.

```
C:\Users\Admin\source\repos\Lab 3 (math)\Debug\Lab 3 (math).exe
Enter the number of elements in first array: 5
Enter the first array:
1 5 8 9 19
The first array:
1 5 8 9 19
Enter the number of elements in second array: 5
Enter the second array:
1 2 4 6 7
The second array:
1 2 4 6 7

The relation(a < 3b):
1 1 1 1 1
0 1 1 1 1
0 0 1 1 1
0 0 1 1 1
0 0 0 0 1
Matrix is reflexive
Matrix is asymmetrical
Matrix is intransitive
Press any key to continue . . .
```

Скрін-шот тесту №2.

Висновок: Я набув практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначенні їх типів.