1. Алгоритм чисельного знаходження густини розподілу

$p_{\sigma_Y^2} = \mathsf{E}(I_{\sigma_Y^2}\delta)$. Зафіксуємо точку u.

1 Генеруємо масив спостережень Y_t довжиною N.
2 Знаходимо σ_Y^2, якщо $\sigma_Y^2 \geq u$, повертаємось до першого пункту, інакше переходимо до наступного кроку.
3 Генеруємо двовимірний масив по t, v розміру $N \times N$ із $Z_t^v := D_v^B Y_t$.
4 Генеруємо масив значень $D_v^B \sigma_Y^2$ по v розміру N.
5 Обчислюємо $\|D^B \sigma_Y^2\|$.
6 Обчислюємо η, $D^B \eta$ і відповідно δ.
7 Повторюємо пункти 1-6 n разів.
8 Усереднюємо обчислені значення δ.

2. Деталізація пунктів алгоритму

Перший пункт алгоритму реалізується за допомогою схеми Ейлера для рівняння

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + dB_t^H,$$

генерування приростів дробного броунового руху реалізуємо за алгоритмом наведеним в https://arxiv.org/pdf/1406.1956.pdf (с. 13). Відповідна рекурентна схема така

$$Y_{n+1} = Y_n - \alpha Y_n \Delta_N + \Delta B^H, \ Y_n := Y_{t/n}, \ \Delta_N = t/n.$$

В другому пункті алгоритму використовуються наступна формула $\sigma_Y^2 = \int_0^t \sigma^2(Y_s)ds$. Відповідний чисельний вираз наступний

$$\sigma_Y^2 = \sum_{n=0}^{N} \sigma^2(Y_n)\Delta_N.$$

Третій пункт реалізуємо наступним чином. Позначимо елементи необхідного масиву $Z_{nk} = Z_{\Delta_N n}^{\Delta_N k}$:

$$Z_{nk} = I_{k<n} C_H (\Delta_N)^{H-1/2} \sum_{i=k+1}^{n} \exp\{-\alpha(n-i)\Delta_N\}(i/k)^{H-1/2}(i-k)^{H-3/2},$$

$$C_H = \left(H - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2/H)}}.$$

На четверотому кроці використовується наступне співвідношення

$$D_v^B \sigma_Y^2 = 2\int_0^t \sigma(Y_s)\sigma'(Y_s) Z_s^v ds.$$

Тому формула для чисельного знаходження масиву $(s)_{k=1}^N$, що відповідає $D_v^B \sigma_Y^2$ така:

$$s_k = 2\Delta_N \sum_{n=1}^{N} \sigma(Y_n)\sigma'(Y_n) Z_{nk}.$$

В п'ятому і шостому пунктах алгоритму використовуємо наступні співвідношення $\eta = (\|D^B \sigma_Y^2\|_H^2)^{-1}$, $D^B \sigma_Y^2 = \int_0^T (D_v^B \sigma_Y^2)^2 dv$. Позначимо $\eta^- = \Delta_N \sum_{k=1}^N s_k^2$, $\eta = 1/\eta^-$,

$$ds_n = -4\eta^2(\Delta_N)^2 \sum_{n=1}^{N} s_n \left(\sum_{i=1}^{N} (\sigma`(Y_i)^2 + \sigma``(Y_i)\sigma(Y_i)) Z_{ik} Z_{in}\right).$$

Нагадаємо. що

$$D_v^B \eta = -\eta^2 D_v^B \int_0^t (D_q^B \sigma_Y^2)^2 dq =$$

$$- 4\eta^2 \int_0^t D_q^B \sigma_Y^2 \left(\int_0^t (\sigma`(Y_\tau)^2 + \sigma``(Y_\tau)\sigma(Y_\tau)) Z_\tau^v Z_\tau^q d\tau \right) dq,$$

$$\delta = 2\eta \int_0^t \sigma(Y_s)\sigma'(Y_s) C_H \times$$

$$\left(\int_0^s \tau^{1/2-H} \int_u^s \exp\{-\alpha(s-v)\} v^{H-1/2} (v-\tau)^{H-3/2} dv dB_\tau \right) ds - \int_0^t D_\tau^B \eta D_\tau^B \sigma_Y^2 d\tau.$$

Остаточна формула має вигляд

$$\delta = 2\eta C_H (\Delta_N)^{H+1/2} \sum_{n=2}^{N} \sigma(Y_n)\sigma'(Y_n) \times$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=k+1}^{n} \exp\{-\alpha \Delta_N (n-i)\} (i/k)^{H-1/2} (i-k)^{H-3/2} \right) (\Delta B)_k - \sum_{n=1}^{N} s_n ds_n.$$

$$- \sum_{n=1}^{N} s_n ds_n = 16(\Delta_N)^3 \eta^2 *$$

$$\sum_{k1=1}^{N} \sum_{k2=1}^{N} \sum_{k3=1}^{N} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{N} \sigma(Y_i)\sigma'(Y_i) Z_{k2i} \Big) \Big(\sum_{j=1}^{N} \sigma(Y_j)\sigma'(Y_j) Z_{k1j} \Big) (\sigma'(Y_{k3})^2 + \sigma''(Y_{k3})\sigma(Y_{k3})) Z_{k1k3} Z_{k2k3} \Big].$$