

КІЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

Лабораторна робота №1

на тему:

**Побудова моделі стаціонарної течії навколо
перешкоди заданої форми**

Виконав
студент II курсу магістратури
групи ОМ-2
Пишко Андрій

Київ – 2023

Зміст

1 Випадок стаціонарної течії	3
1.1 Постановка задачі	3
1.2 Математична модель	3
1.3 Метод розв'язку	4
1.4 Комп'ютерне моделювання	6
1.4.1 $\vec{V}_\infty = (\cos -\frac{\pi}{4}, \sin -\frac{\pi}{4})$	6
1.4.2 $\vec{V}_\infty = (\cos 0, \sin 0)$	9
1.4.3 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$	12
1.4.4 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$	15
2 Випадок нестаціонарної течії	17
2.1 Постанова задачі	17
2.2 Математична модель	17
2.3 Метод розв'язку	18
2.4 Комп'ютерне моделювання	20
2.4.1 $\vec{V}_\infty = (\cos 0, \sin 0)$	21
2.4.2 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$	26
3 Висновки	30

1 Випадок стаціонарної течії

1.1 Постановка задачі

Спершу для спрощення задачі розглянемо випадок стаціонарної течії. Розглянемо процес руху течії нев'язкої нестисливої рідини, яка зустрічається з перешкодою у формі, схожій на цифру «3». Даний процес можна описати наступним чином:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0, & (x, y) \in D \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_L = 0, \\ \oint_C \nabla\varphi d\vec{r} = \Gamma_0 \quad \forall C, \text{ які охоплюють } L, \\ \lim_{|r - r_L| \rightarrow \infty} \nabla\varphi(r) = V_\infty \quad \forall r_L \in L. \end{cases} \quad (1)$$

Тут φ - потенціал течії:

$$\lim_{|r - r_\sigma| \rightarrow \infty} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty \quad (2)$$

де \vec{V} - швидкість течії,

L - контур, який обтікає течія,

$D = \mathbb{R}^2 \setminus L$ - частина простору без контура,

Γ_0 - циркуляція течії,

$V_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ - швидкість течії на нескінченності,

n - нормальньа до контура L .

Завдання полягає у тому, щоб дослідити рух і обтікання на площині потенційної течії нев'язкої нестисливої рідини навколо заданої перешкоди.

1.2 Математична модель

Щоб розв'язати задачу варто представити простір \mathbb{R}^2 як простір комплексних чисел \mathbb{C} . Нехай ψ - спряженна функція до φ . Тоді аналітичний розв'язок для течії навколо довільного контуру має аналітичне представлення в інтегральному вигляді:

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \Phi(z) = z\bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega \quad (3)$$

Тут функція f - це невідома щільність, яку треба знайти. Тоді швидкість течії буде представлятися як

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{z - \omega} \quad (4)$$

де $\bar{}$ позначає комплексне спряження.

Враховуючи таке представлення \bar{V} та умову 1 отримаємо умову, що накладається на функцію f :

$$\int_L f(\omega) d\omega = \Gamma_0 \quad (5)$$

1.3 Метод розв'язку

Щоб знайти невідому щільність f скористемось умовою непроникності 1, підставивши у це рівняння представлення $\varphi = \Re \Phi$. Отримаємо

$$\Re \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) n(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega \right\} = -\Re \{ \bar{V}_\infty n(\omega_0) \}. \quad (6)$$

Маємо сингулярне інтегральне рівняння з регулярною правою частиною, розв'язком якого є функція f .

Побудуємо розбиття контура $L = \sum_{j=1}^M L_j$ вузлами $z_{0j} = (x_{0j}, y_{0j})$, $j = \overline{0, M}$. Позначимо

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega. \quad (7)$$

Усереднене значення f на частині контура L_j обчислюється як

$$f_j = \frac{\Gamma_j}{|L_j|}, \quad (8)$$

де $|L_j|$ - довжина частини контура L_j . Тоді буде виконуватись

$$\Phi(z) = z \bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - z_{0j}) + O(\varepsilon), \quad (9)$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta}{\rho_0}$, $\Delta = \max_{j=\overline{1, M}} |L_j|$, $\rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega|$. Відкинувши доданок O -великим, отримаємо наближення функції Φ .

Переходячи назад до векторів з \mathbb{R}^2 та використовуючи виведене наближення, рівняння

$$\Re \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) n(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega \right\} = -\Re \{ \bar{V}_\infty n(\omega_0) \}. \quad (10)$$

в точках колокації $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{2} (x_{0k} + x_{0k+1}), \frac{1}{2} (y_{0k} + y_{0k+1}) \right)$ (які ще називають дискретними особливостями), перепишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j \left(\vec{V}_j(x_k, y_k), \vec{n}(x_k, y_k) \right) = - \left(\vec{V}_\infty, \vec{n}(x_k, y_k) \right), \quad k = \overline{1, M-1} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{V}_j(x, y) &= \left(\frac{y_{0j} - y}{2\pi R_{0j}^2}, \frac{x - x_{0j}}{2\pi R_{0j}^2} \right) \\ R_{0j} &= \max \left\{ \delta, \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \right\} \\ \delta &= \frac{1}{2} \min_{j=\overline{1, M-1}} \sqrt{(x_{0j+1} - x_{0j})^2 + (y_{0j+1} - y_{0j})^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки

$$\int_L f(\omega) d\omega = \Gamma_0, \quad (13)$$

отримаємо розбиття

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0, \quad (14)$$

яке разом з рівнянням

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j (\vec{V}_j(x_k, y_k), \vec{n}(x_k, y_k)) = -(\vec{V}_\infty, \vec{n}(x_k, y_k)), \quad k = \overline{1, M-1} \quad (15)$$

утворює систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\Gamma_j, j = \overline{1, M}$.

Наближення функцій \vec{V}, φ, ψ будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y) &= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \vec{V}_j(x, y), \\ \varphi(x, y) &= xu_\infty + yv_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right), \\ \psi(x, y) &= yu_\infty - xv_\infty - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln R_{0j}. \end{aligned} \quad (16)$$

Нам відомо, що Φ — багатозначна функція, тому для визначення її однозначної гілки треба використати розрізи. В наведених вище формулах розрізи проводяться з кожного вузла розбиття контура до нескінченно віддаленої точки. Проте можна провести розріз уздовж контура від першого до останнього вузла та від останнього вузла до нескінченно віддаленої точки. Тобто ми можемо виконати перехід від дискретних особливостей до диполів - пар дискретних особливостей. Тоді функція φ прийме вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= xu_\infty + yv_\infty + \\ &+ \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{R_j^2} + \\ &+ \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0M}}{x - x_{0M}} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

де $R_j = \max \left\{ \delta, \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right\}$. В цьому випадку розріз до нескінченно віддаленої точки з'являється тільки при умові $\Gamma_0 \neq 0$ в останній дискретній особливості, для якої не існує пари щоб стати диполем.

1.4 Комп'ютерне моделювання

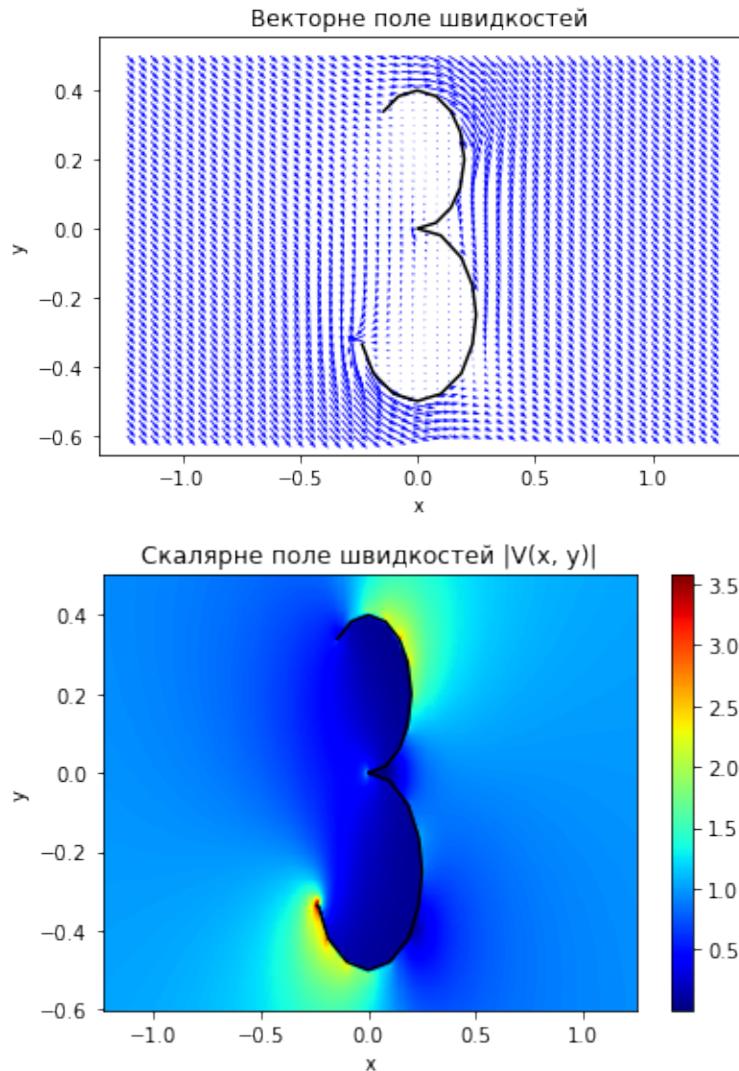
Для наступних вхідних даних

$$M = 100$$

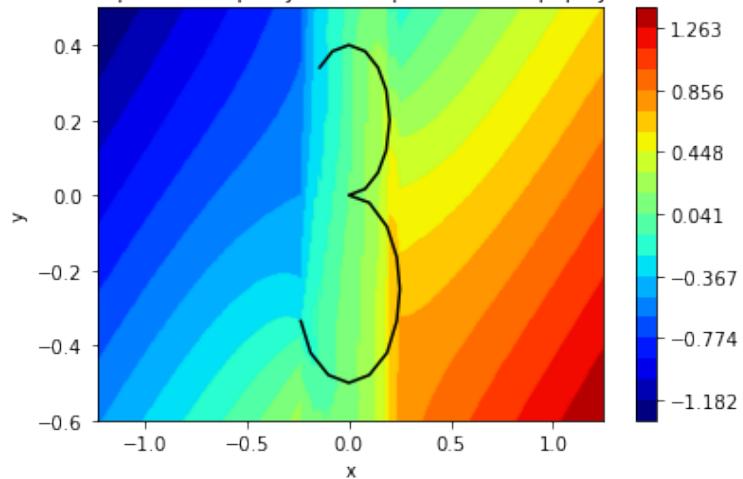
$$\Gamma_0 = 0$$

в квадратній області $\{(x, y) \mid -0.5 \leq x, y \leq 0.5\}$, в якій контур L мав форму цифри «3» були отримані наступні результати.

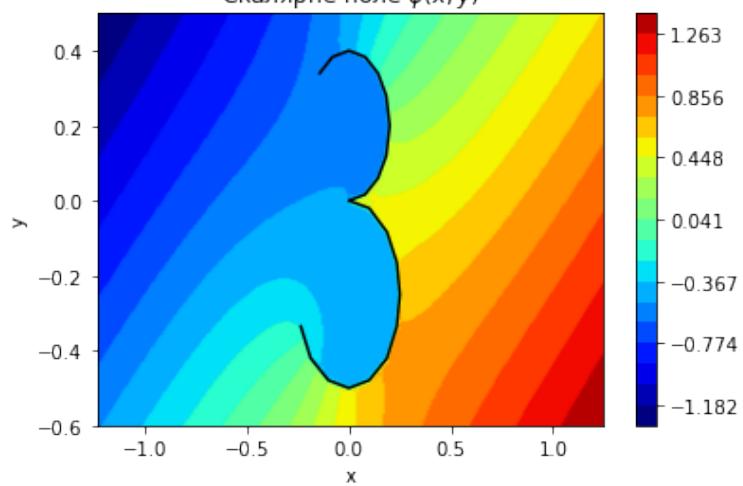
1.4.1 $\vec{V}_\infty = (\cos -\frac{\pi}{4}, \sin -\frac{\pi}{4})$

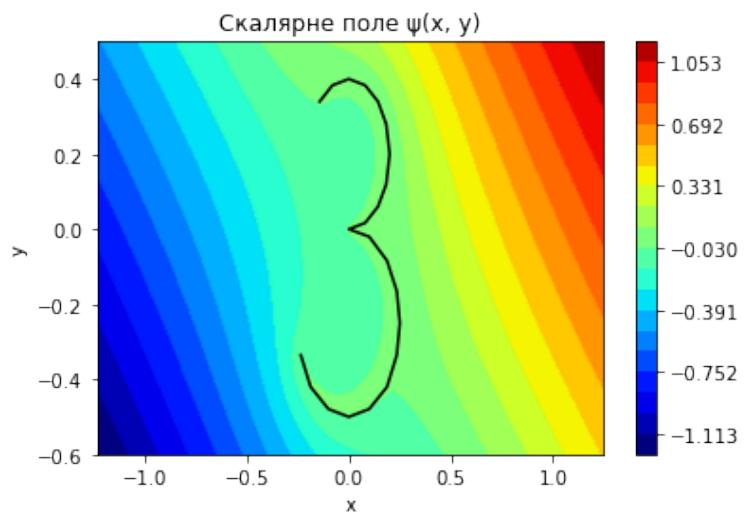


Скалярне поле $\varphi(x, y)$ за неправильною формулою

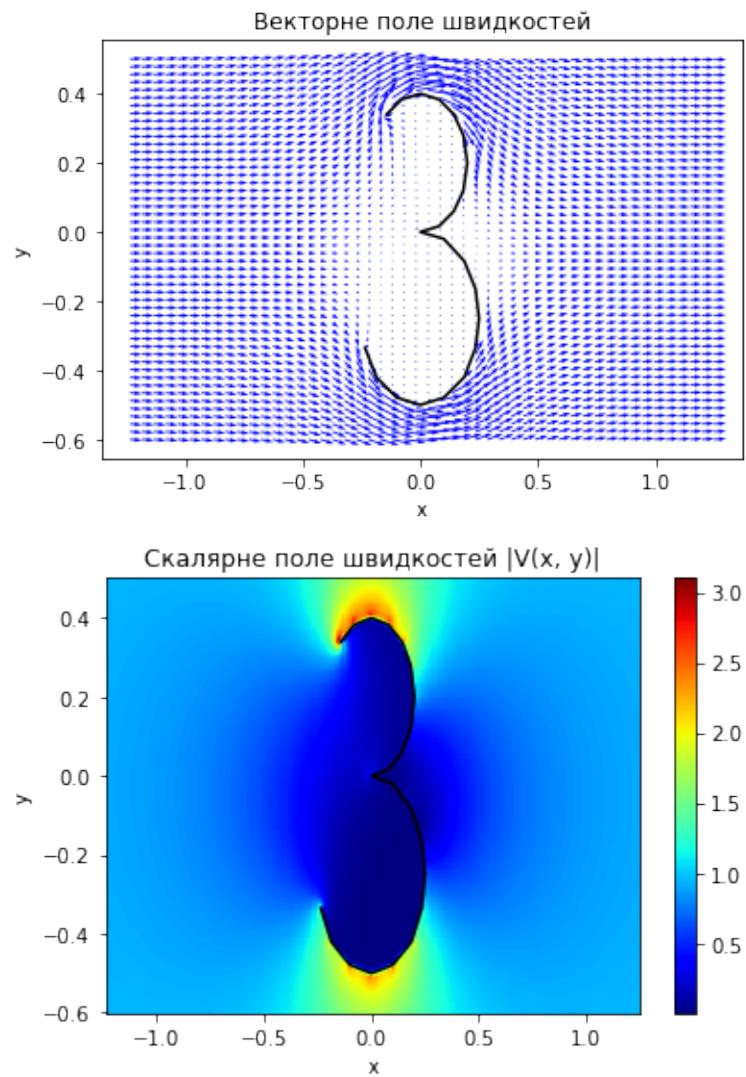


Скалярне поле $\varphi(x, y)$

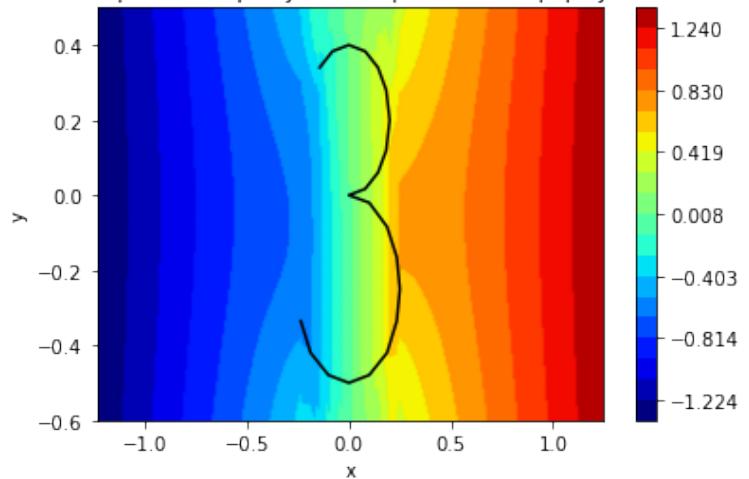




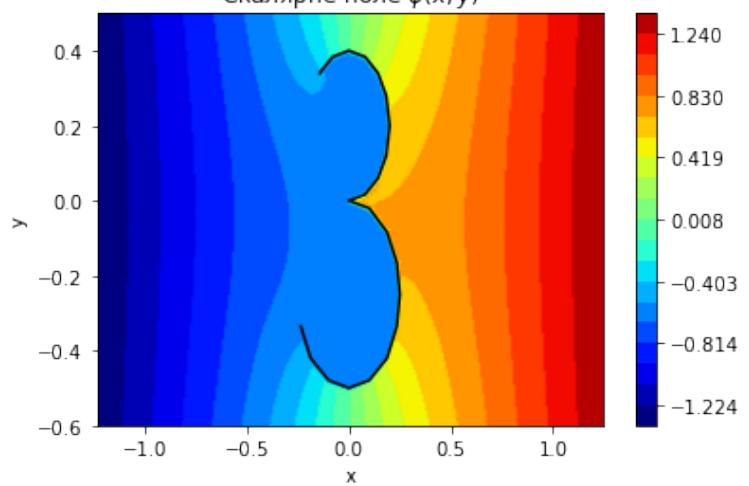
1.4.2 $\vec{V}_\infty = (\cos 0, \sin 0)$

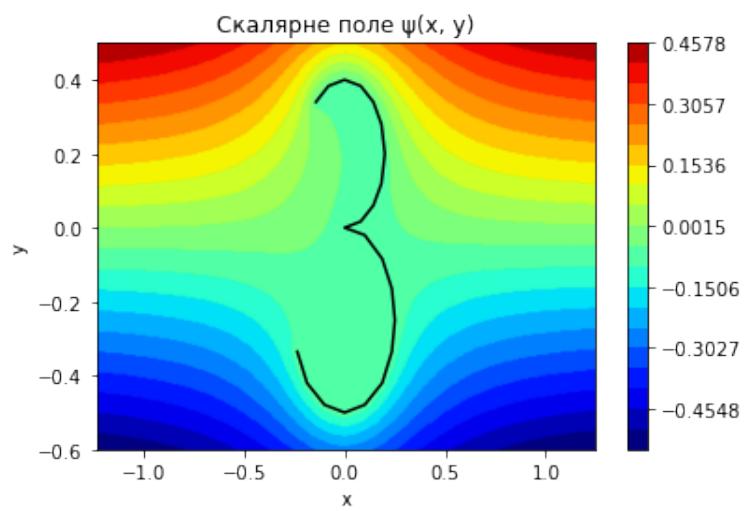


Скалярне поле $\varphi(x, y)$ за неправильною формулою

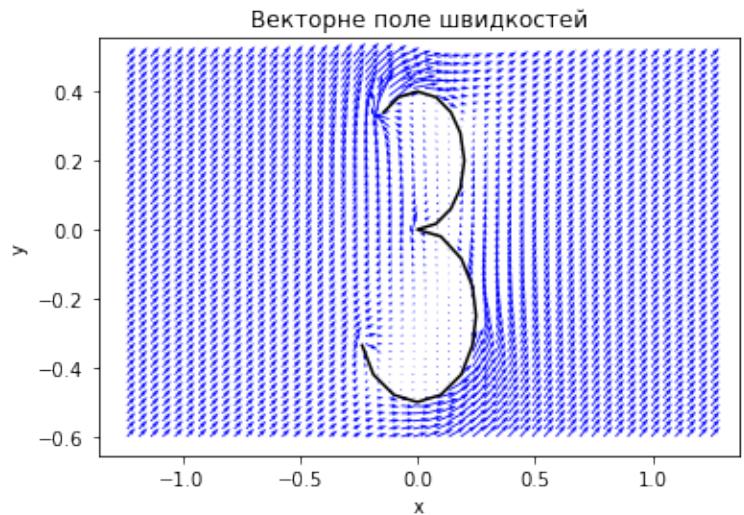


Скалярне поле $\varphi(x, y)$

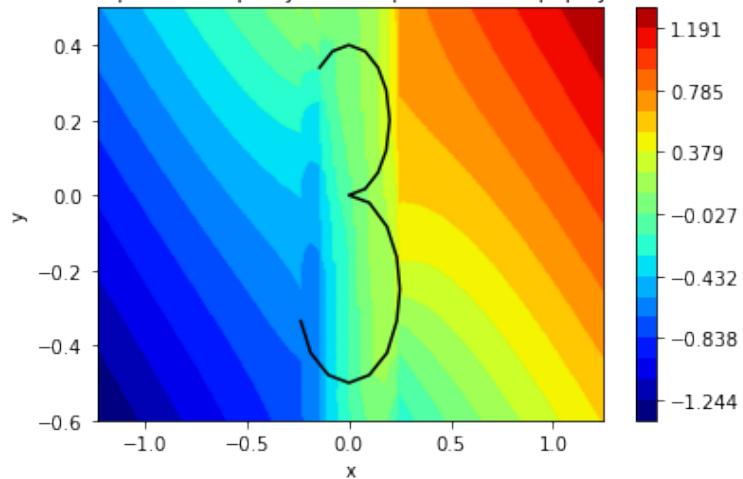




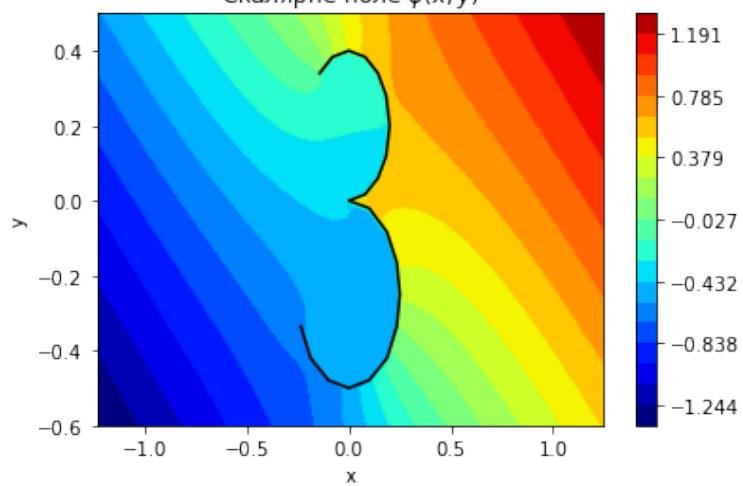
1.4.3 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$

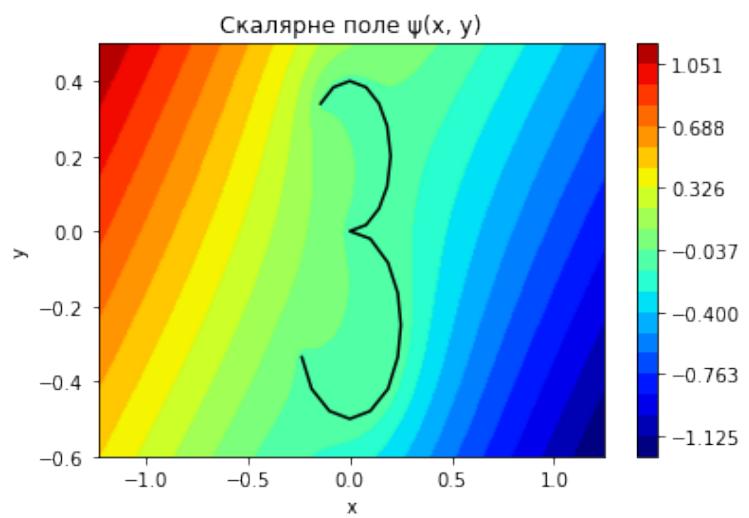


Скалярне поле $\varphi(x, y)$ за неправильною формулою

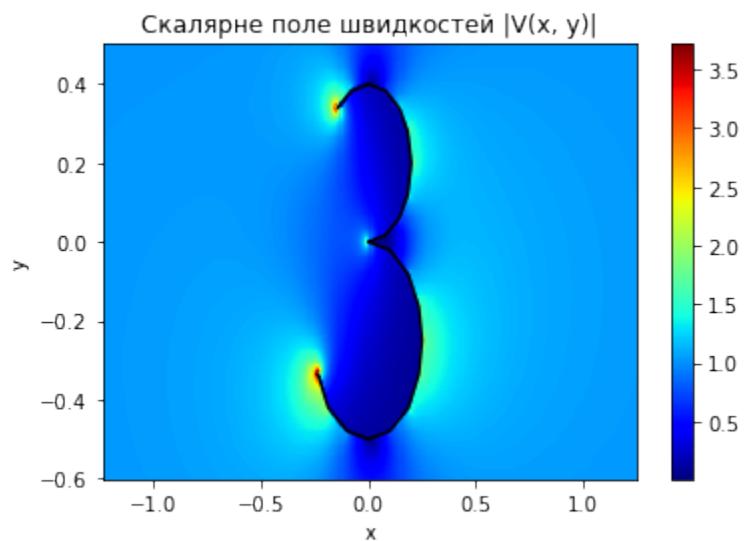
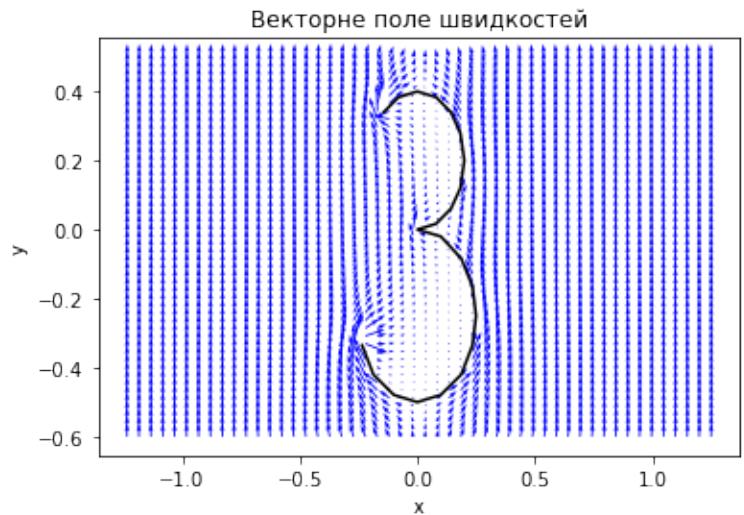


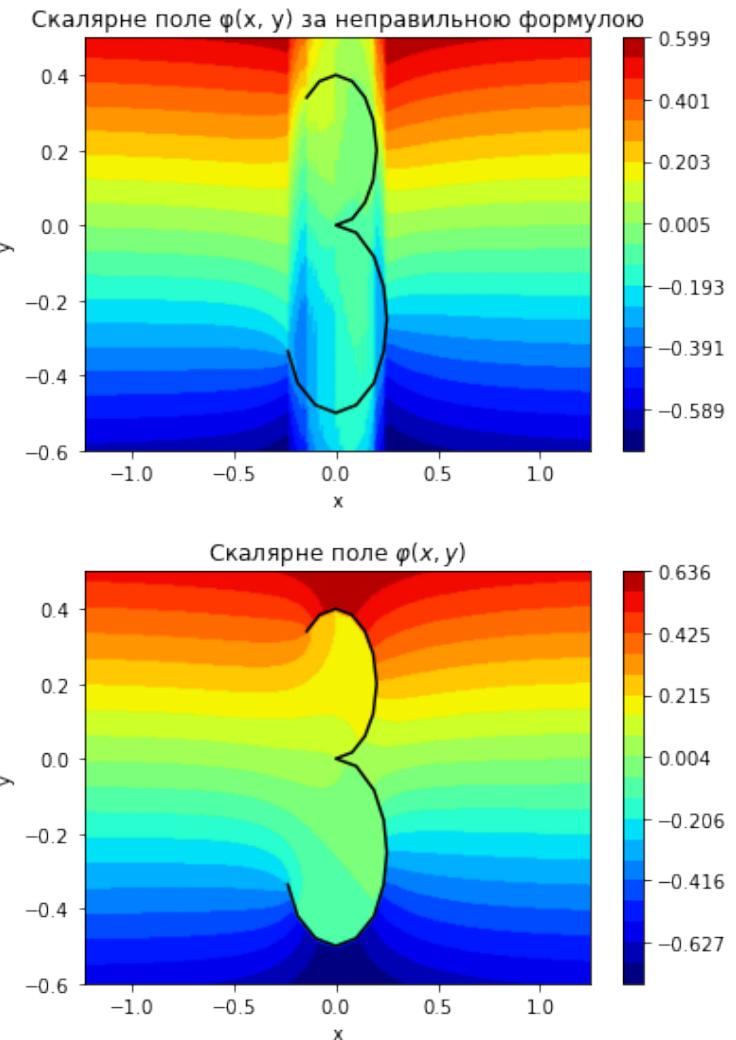
Скалярне поле $\varphi(x, y)$

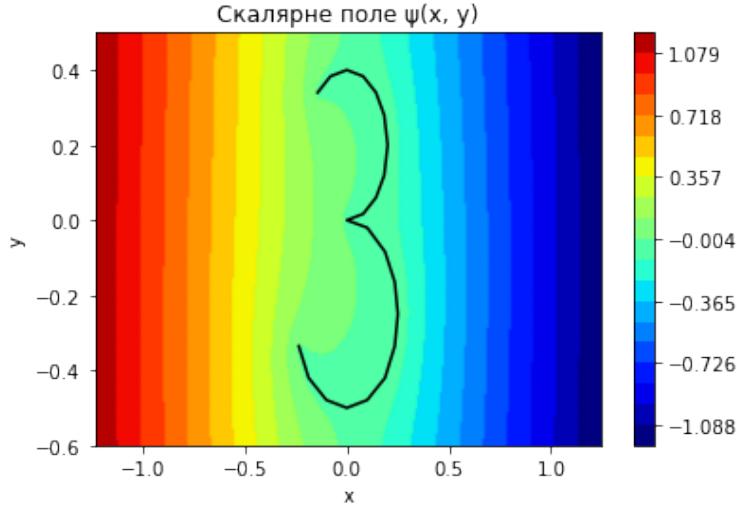




1.4.4 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$







2 Випадок нестационарної течії

2.1 Постанова задачі

Аналогічно попередній задачі опишемо процес руху течії, враховуючи нестигливість речовини, умову непроникності на контурі, граничні умови на L , умову обмеженості швидкості на D та умову на нескінченності, утворимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & t \geq t_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\vec{r}_d} = 0, & \vec{r}_d \in L, \quad \text{що рівносильно } (\vec{V} \cdot \vec{n})\Big|_{\vec{r}_d} = 0, \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^- & \text{на } D, \\ p^+ = p^- & \text{на } D, \\ |\varphi| < \infty & \text{на гострих краях } L, \\ \lim_{|r| \rightarrow 0} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty. & \end{cases} \quad (18)$$

2.2 Математична модель

Додамо до системи рівняння Коші-Лагранжа, який дозволить визначати тиск,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}\left|\vec{V}_\infty\right|^2 + \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t} \quad (19)$$

та початкову умову

$$\varphi^+|_{t=t_0} = \varphi_0^+. \quad (20)$$

Аналітична формуляф для коефіцієнту тиску:

$$C_p(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho |\vec{V}_\infty|^2} = 1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{|\vec{V}_\infty|^2} - \frac{2}{|\vec{V}_\infty|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21)$$

Перейдемо до функцій комплексної змінної:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t), \\ V(z, t) &= u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \Phi'(z, t). \end{aligned} \quad (22)$$

Інтегральне представлення аналітичного розв'язку має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \varphi + i\psi = \vec{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} f(w, t) \ln(z - w) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{D(t)} f(w, t) \ln(z - w) dw + \text{Const}, \\ \vec{V}(z, t) &= u - iv = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{f(w, t)}{z - w} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{D(t)} \frac{f(w, t)}{z - w} dw. \end{aligned} \quad (23)$$

2.3 Метод розв'язку

Для знаходження чисельного розв'язку спершу дискретизуємо контур L . Виділимо M точок дискретних особливостей (x_{0j}, y_{0j}) , $j = \overline{1, M}$ та $(M-1)$ точку колокацій:

$$\begin{cases} x_k = \frac{x_{0k} + x_{0,k+1}}{2}, \\ y_k = \frac{y_{0k} + y_{0,k+1}}{2}, \end{cases} \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (24)$$

Нормалі в точках колокацій обчислюються наступним чином:

$$\begin{cases} \vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}), \quad k = \overline{1, M-1}, \\ n_{xk} = \frac{-(y_{0,k+1} - y_{0k})}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}, \\ n_{yk} = \frac{x_{0,k+1} - x_{0k}}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}. \end{cases} \quad (25)$$

Покладемо $\vec{V}_\infty = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

У момент часу $t = t_{n+1}$ маемо наступний вигляд потенціалу та швидкості

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, t_{n+1}) &= (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \\
&\quad + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right), \\
\vec{V}(x, y, t_{n+1}) &= (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \\
&\quad + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})),
\end{aligned} \tag{26}$$

де γ_i^p - вихорова інтенсивність в i -ій точці на p -ій дузі та

$$R_j = \max \left\{ \delta, \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \right\}. \tag{27}$$

$$\vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \left(\frac{y_{0j} - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}}{2\pi R_j^2} \right), \tag{28}$$

Для отримання коефіцієнтів $\Gamma_j(t_{n+1})$ слід розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} \sum_j^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{V}(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j}) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) = - \left(\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) - \\ - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \left(\vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right), \\ \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) = - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p. \end{cases} \quad k = \overline{1, M-1};$$

Після розв'язання СЛАР можливе обчислення швидкостей на момент $t = t_{n+1}$, та моделювання руху точок вихорової границі:

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+2}) = x_i^p(t_{n+1}) + u(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}), t_{n+1}) \tau_{n+1}, \\ y_i^p(t_{n+2}) = y_i^p(t_{n+1}) + v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}), t_{n+1}) \tau_{n+1}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n+1}.$$

де

$$\tau_{n+1} = \frac{\min_k \delta_k}{\max_{D^+}(|\vec{V}|)}. \tag{29}$$

На кожному кроці з кінцевих та кутових точок контура вилітають нові вихорові точки. У момент часу $t = t_{k+1}$ для них справедливо:

$$\begin{cases} \gamma_{k+1}^p = \Gamma_p(t_k) \forall p, \\ x_{k+1}^p(t_{k+1}) = x_{0p}(t_k) + u(x_{0p}(t_k), y_{0p}(t_k), t_k) \tau_k, \\ y_{k+1}^p(t_{k+1}) = y_{0p}(t_k) + v(x_{0p}(t_k), y_{0p}(t_k), t_k) \tau_k. \end{cases} \tag{30}$$

При моделюванні руху частинок слід звертати увагу на умову непроникності контуру. Щоб забезпечити цю непроникність, встановлюємо вимогу, що відстань між будь-якими двома точками дискретних особливостей повинна бути менше, ніж 2δ , де δ - константа, що використовується для розрахунку кроку τ . Це нам дозволяє відстежувати ті вихорові точки, які наблизилися до границі.

Припустимо, що у нас є точка дискретної особливості $z_0 = (x_0, y_0)$, до якої наблизилася точка вихорової границі $z_1(t_{n+1}) = (x_i(t_{n+1}), y_i(t_{n+1}))$ на відстань менше 2δ .

Для визначення того, з якої сторони контуру наблизилася вихорова точка, ми використовуємо точку $z_1(t_n)$ - позначення точки, де знаходилася точка $z_1(t_n + 1)$ на попередньому кроці, і обчислюємо $\lambda = \text{sign}((\vec{n}_0, z_1(t_n) - z_0))$, де \vec{n}_0 - нормальнь в точці z_0 .

Тепер можемо розрахувати коефіцієнт $k = \lambda |z_0 - z_1|$. Остаточно переважуємо положення точки таким чином:

$$z_1(t_{n+1}) = z_1(t_n) + k\vec{n}_0. \quad (31)$$

2.4 Комп'ютерне моделювання

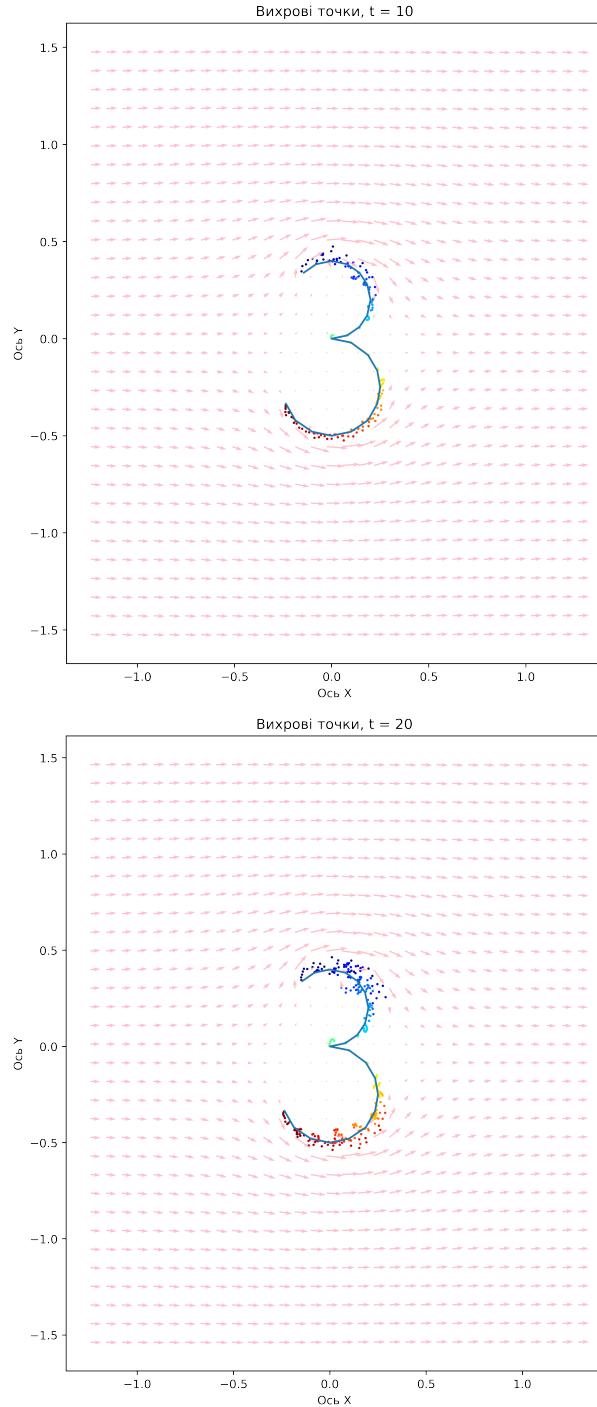
Для наступних вхідних даних

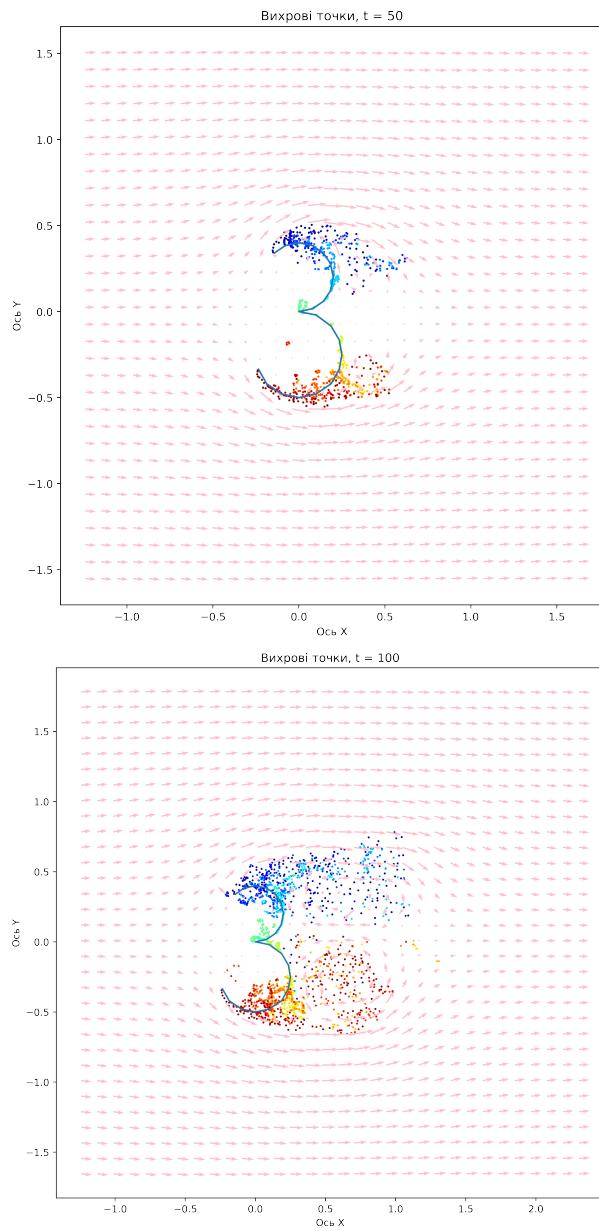
$$M = 50$$

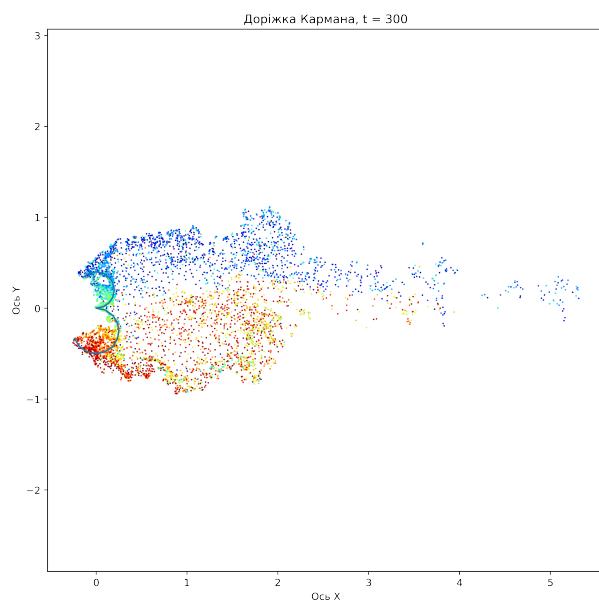
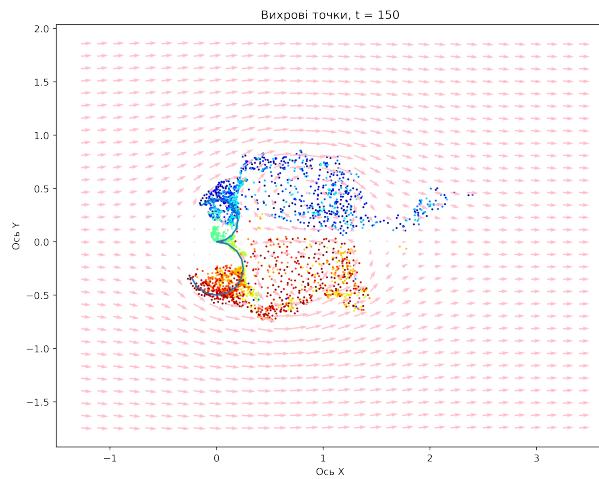
$$\Gamma_0 = 0$$

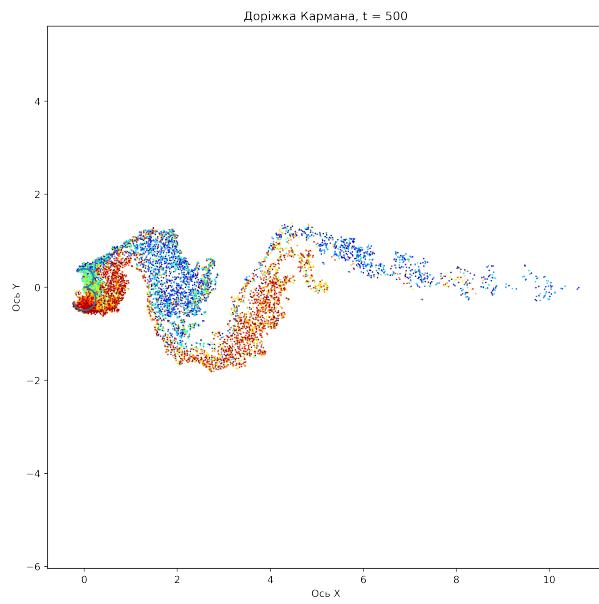
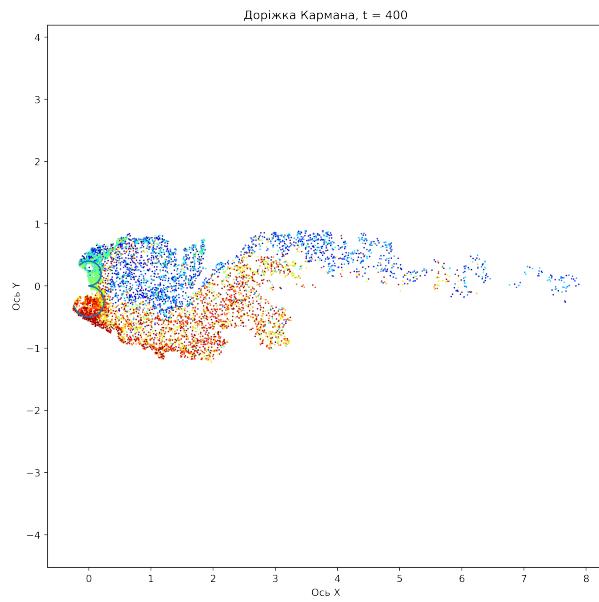
в квадратній області $\{(x, y) \mid -0.5 \leq x, y \leq 0.5\}$, в якій контур L мав форму цифри «3» були отримані наступні результати.

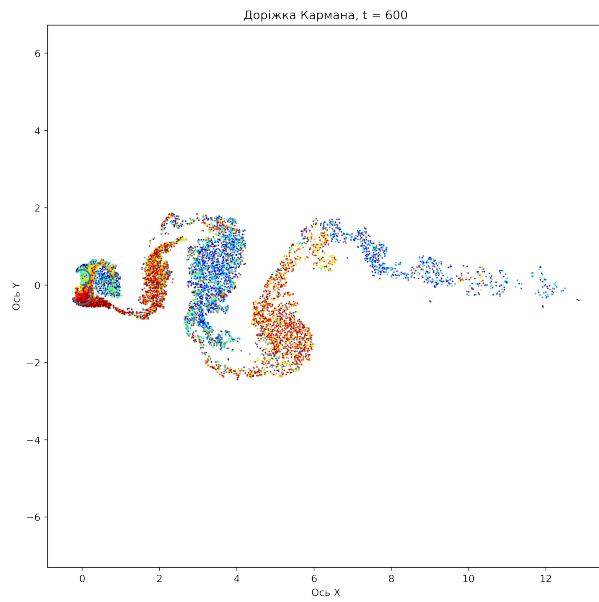
2.4.1 $\vec{V}_\infty = (\cos 0, \sin 0)$



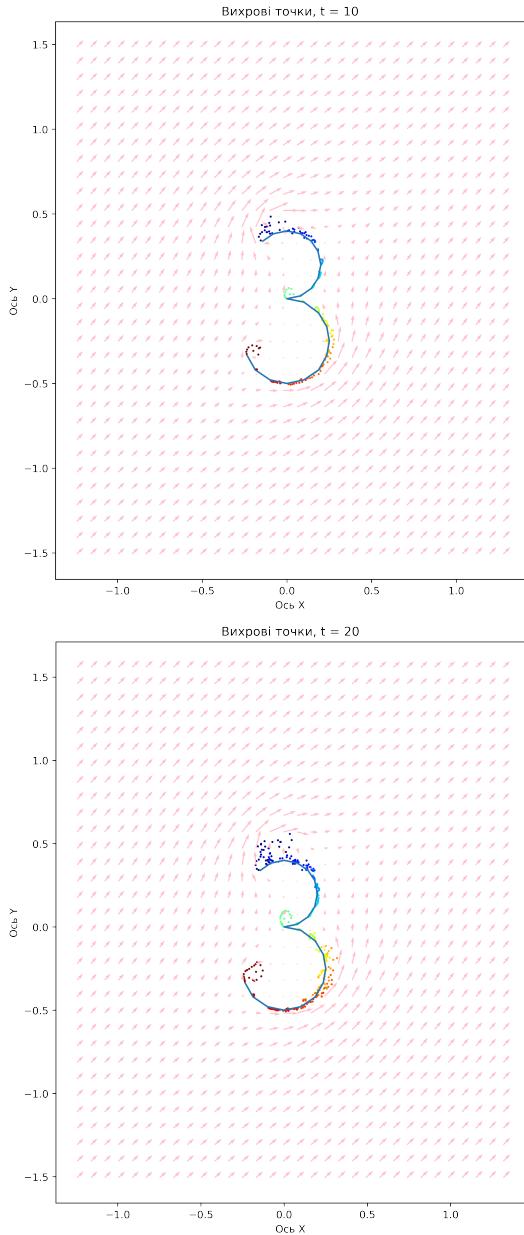


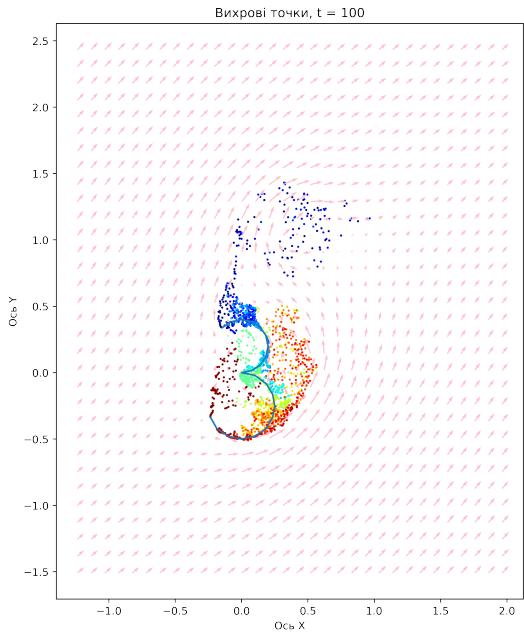
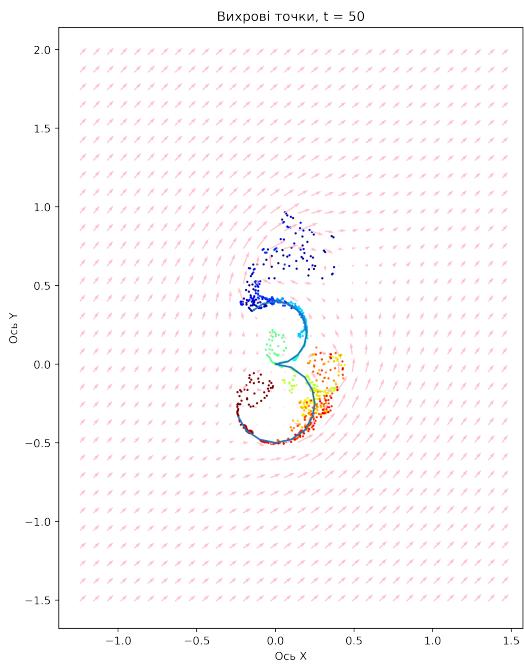


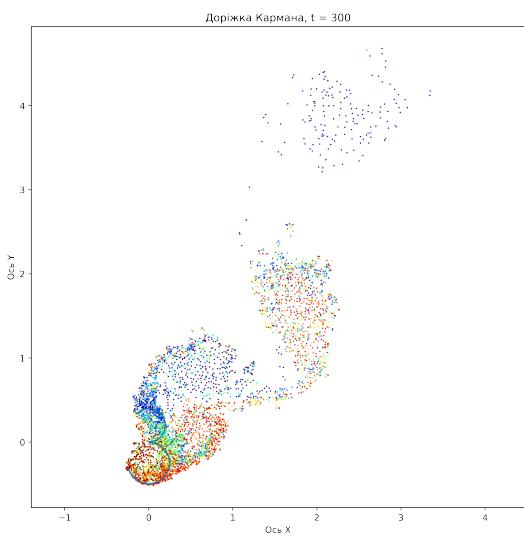
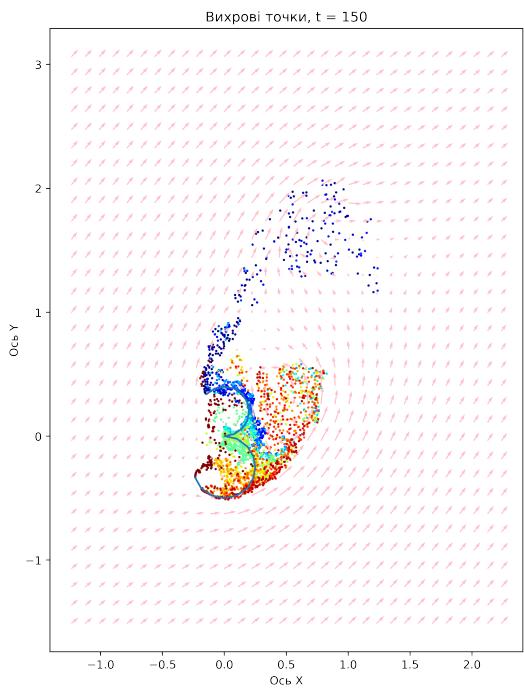


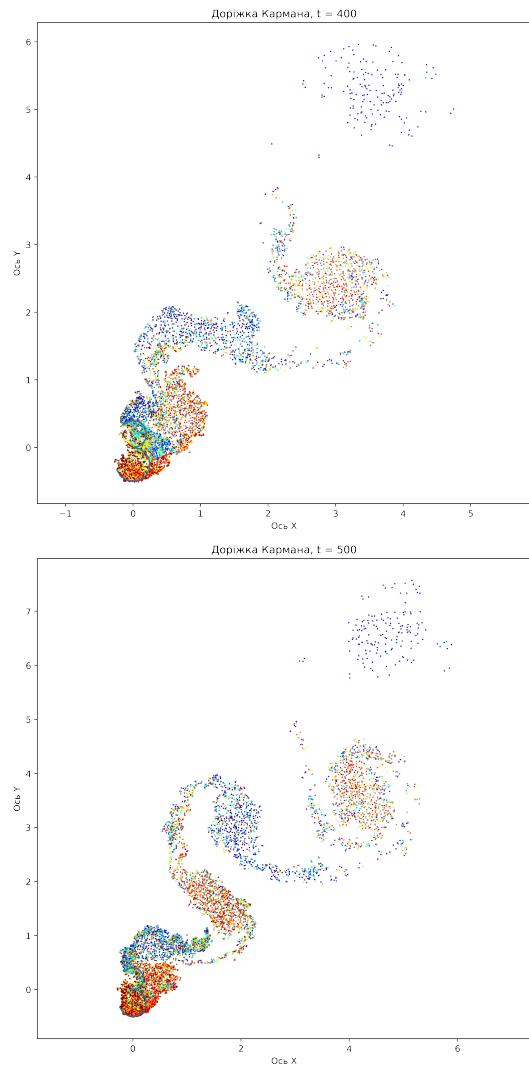


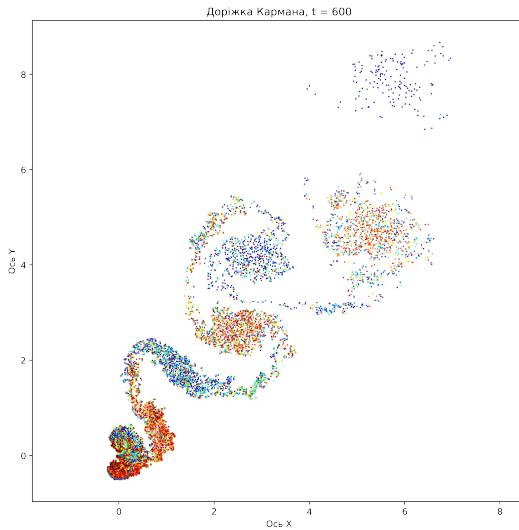
2.4.2 $\vec{V}_\infty = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$











3 Висновки

У ході даної лабораторної роботи було побудовано комп’ютерні моделі для аналізу стаціонарного та нестаціонарного руху нестисливої нев’язкої рідини навколо визначеної перешкоди. Для отримання числового розв’язку використовувався метод дискретних особливостей.

Представленний алгоритм продемонстрував достатню точність результатів, навіть при використанні обмеженої кількості дискретних особливостей на контурі. Проте варто відзначити, що обчислення функцій \vec{V}, φ, ψ є завданням з високим рівнем складності, особливо при значній кількості дискретних особливостей. Зокрема, нелінійне зростання складності обчислень добре видно на наступних графіках, які демонструють залежність часу, потрібного для виконання алгоритму, від кількості кроків моделювання.

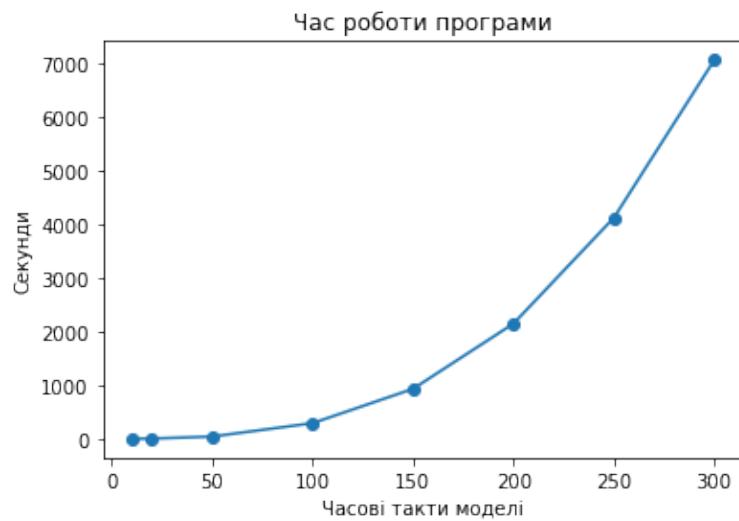


Рис. 1: Час для обчислення вихрових точок

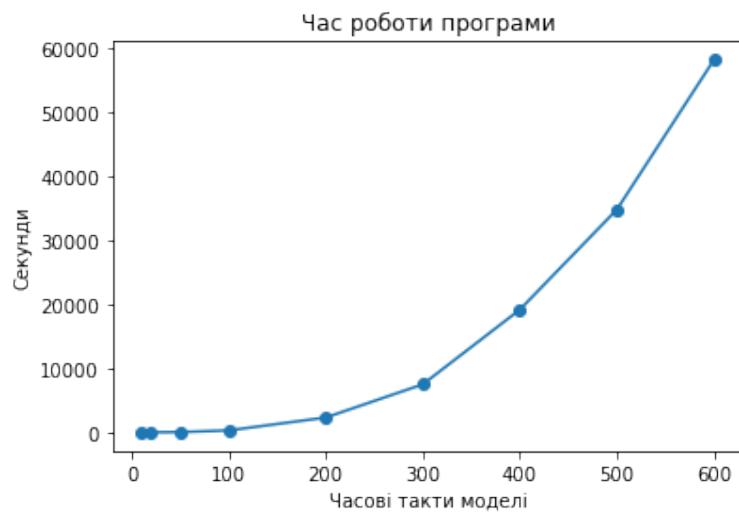


Рис. 2: Час для обчислення Доріжки Кармана