Лабораторна робота №2

Андрій Пишко

Варіант 9

1 Метод Гаусса з вибором головного елемента

1.1 Опис методу

Класичний метод Гаусса недосконалий, адже він не працює за умови, коли головний елемент на k-тому кроці $a_{kk}^{(k-1)} = 0$.

Даний метод відрізняється від класичного тим, що на кожному кроці виключають чергове невідоме за допомогою рівняння з найбільшим за модулем коефіцієнтом при відповідному невідомому. Головний елемент обирається наступним чином:

$$\left|a_{kj_0}^{(k-1)}\right| = \max_j \left|a_{kj}^{(k-1)}\right|, \; j = \overline{k, n};$$

1.2 Завдання

Методом Гаусса з вибором головного елемента розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 47 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Розв'язок оформлено у вигляді комп'ютерної програми (код програми додано до звіту). Результати програми:

```
Початкова матриця:

    7     2     3     0   |  32

    0     3     2     6   |  47

    2     5     1     0   |  23

    0     1     4     2   |  29
```

```
-----------Прямий хід-----------

[Ітерація №1]
Максимальний елемент у рядку №1
(жодного рядка не було переставлено)

     7     2     3     0   |  32

     0     3     2     6   |  47

     2     5     1     0   |  23

     0     1     4     2   |  29

Виключення невідомих... Успішно!

     7     2     3     0   |  32

     0     3     2     6   |  47

     0  4.43  0.14     0   |  13.86

     0     1     4     2   |  29
```

```
[Ітерація №2]
Максимальний елемент у рядку №3
(були переставлені рядки : 2 та 3)

     7     2     3     0   |  32

     0  4.43  0.14     0   |  13.86

     0     3     2     6   |  47

     0     1     4     2   |  29

Виключення невідомих... Успішно!

     7     2     3     0   |  32

     0  4.43  0.14     0   |  13.86

     0     0   1.9     6   |  37.61

     0     0  3.97     2   |  25.87
```

```
[Ітерація №3]
Максимальний елемент у рядку №4
(були переставлені рядки : 3 та 4)

    7     2     3     0   |  32

    0  4.43  0.14     0   |  13.86

    0     0  3.97     2   |  25.87

    0     0   1.9     6   |  37.61

Виключення невідомих... Успішно!

    7     2     3     0   |  32

    0  4.43  0.14     0   |  13.86

    0     0  3.97     2   |  25.87

    0     0     0  5.04   |  25.2
```

```
----------Зворотній хід----------
[Крок №4]

    7     2     3     0   |  32

    0  4.43  0.14     0   |  13.86

    0     0  3.97     2   |  25.87

    0     0     0     1   |  5

[Крок №3]

    7     2     3     0   |  32

    0  4.43  0.14     0   |  13.86

    0     0     1     0   |  4

    0     0     0     1   |  5
```

```
[Крок №2]
    7     2     3     0   |  32
    0     1     0     0   |  3
    0     0     1     0   |  4
    0     0     0     1   |  5
[Крок №1]
    1     0     0     0   |  2
    0     1     0     0   |  3
    0     0     1     0   |  4
    0     0     0     1   |  5
```

```
------------Результат-----------
x[1] = 2
x[2] = 3
x[3] = 4
x[4] = 5
```

2 Метод квадратного кореня

2.1 Опис методу

Метод квадратного кореня застосовують для розв'язання СЛАР із неособливою симетричною матрицею $A = A^T$. Цей метод базується на тому, що симетричну матрицю A можна подати у вигляді:

$$A = S^T DS,$$

де S – права трикутна матриця

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

а D – діагональна матриця з елементами $d_{ii} = \pm 1,\ i = \overline{1, n}$.
Елементи матриць S та D обчислюють за формулами:

$$d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} |s_{pi}|^2 d_{pp}\right),\ s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} |s_{pi}|^2 d_{pp}\right|},\ i = \overline{1, n},$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}},\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}.$$

Тоді розв'язання СЛАР зводиться до розв'язання наступних двох СЛАР:

$$S^T D\overline{y} = \overline{b},\ \ S\overline{x} = \overline{y}$$

2.2 Завдання

Методом квадратного кореня розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Розв'язок оформлено у вигляді комп'ютерної програми (код програми додано до звіту). Результати програми:

```
Початкова матриця:

    1     2     0   | 8

    2     2     3   | 21

    0     3     2   | 17
```

```
Матриця S має вигляд:

     1     2     0

     0  1.41 -2.12

     0     0  2.55

Матриця D має вигляд:

     1     0     0

     0    -1     0

     0     0     1

Отримаємо S^Dy = b:

     1    -0     0   |  8

     2 -1.41     0   |  21

     0  2.12  2.55   |  17
```

```
Виконаємо зворотній хід методу Гаусса згори вниз:

[Крок №1]

    1    -0     0   |  8

    2 -1.41     0   |  21

    0  2.12  2.55   |  17

[Крок №2]

    1    -0     0   |  8

    0     1     0   |  -3.54

    0  2.12  2.55   |  17

[Крок №3]

    1    -0     0   |  8

    0     1     0   |  -3.54

    0     0     1   |  9.61
```

```
Виконаємо зворотній хід методу Гаусса знизу вгору матриці Sx = y:

    1     2     0   |  8

    0  1.41 -2.12   |  -3.54

    0     0  2.55   |  9.61

[Крок №3]

    1     2     0   |  8

    0  1.41 -2.12   |  -3.54

    0     0     1   |  3.77

[Крок №2]

    1     2     0   |  8

    0     1     0   |  3.15

    0     0     1   |  3.77

[Крок №1]

    1     0     0   |  1.69

    0     1     0   |  3.15

    0     0     1   |  3.77
```

```
------------Результат------------

x[1] = 1.69231

x[2] = 3.15385

x[3] = 3.76923
```