Лабораторна робота №3

Андрій Пишко

Варіант 9

1 Метод Якобі

1.1 Опис методу

Припустимо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці A ненульові. Розділивши i-те рівняння на a_{ii}, отримаємо таку СЛАР:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n}.$$

Задамо якесь початкове наближення $\overline{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Наступні наближення обчислюємо за формулами

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n},\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Метод збігається, якщо виконуються умови діагональної переваги матриці A

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n}.$$

Якщо виконуються нерівності

$$q|a_{ii}| \geq \sum_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n},\ q < 1,$$

то правдива така оцінка точності:

$$||\overline{x}^k - \overline{x}|| \leq \frac{q^k}{1-q} ||\overline{x}^0 - \overline{x}^1||.$$

1.2 Завдання

Методом Якобі розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Розв'язок оформлено у вигляді комп'ютерної програми (код програми додано до звіту). Результати програми:

```
Початкова матриця:

    4     0     1     0   |  12

    0     3     0     2   |  19

    1     0     5     1   |  27

    0     2     1     4   |  30
```

```
Крок №1
x[1] = 3
x[2] = 6.3333
x[3] = 5.4
x[4] = 7.5

Крок №2
x[1] = 1.65
x[2] = 1.3333
x[3] = 3.3
x[4] = 2.9833

Крок №3
x[1] = 2.175
x[2] = 4.3444
x[3] = 4.4733
x[4] = 6.0083

Крок №4
x[1] = 1.8817
x[2] = 2.3278
x[3] = 3.7633
x[4] = 4.2094

Крок №5
x[1] = 2.0592
x[2] = 3.527
x[3] = 4.1818
x[4] = 5.3953

Крок №6
x[1] = 1.9546
x[2] = 2.7365
x[3] = 3.9091
x[4] = 4.691

Крок №7
x[1] = 2.0227
x[2] = 3.206
x[3] = 4.0709
x[4] = 5.1545

Крок №8
x[1] = 1.9823
x[2] = 2.897
x[3] = 3.9646
x[4] = 4.8793

Крок №9
x[1] = 2.0089
x[2] = 3.0805
x[3] = 4.0277
x[4] = 5.0604

Крок №10
x[1] = 1.9931
x[2] = 2.9598
x[3] = 3.9862
x[4] = 4.9528

Крок №11
x[1] = 2.0035
x[2] = 3.0314
x[3] = 4.0108
x[4] = 5.0236

Крок №12
x[1] = 1.9973
x[2] = 2.9843
x[3] = 3.9946
x[4] = 4.9816

Крок №13
x[1] = 2.0014
x[2] = 3.0123
x[3] = 4.0042
x[4] = 5.0092

Крок №14
x[1] = 1.9989
x[2] = 2.9939
x[3] = 3.9979
x[4] = 4.9928

Крок №15
x[1] = 2.0005
x[2] = 3.0048
x[3] = 4.0017
x[4] = 5.0036

Крок №16
x[1] = 1.9996
x[2] = 2.9976
x[3] = 3.9992
x[4] = 4.9972

Крок №17
x[1] = 2.0002
x[2] = 3.0019
x[3] = 4.0006
x[4] = 5.0014

Крок №18
x[1] = 1.9998
x[2] = 2.9991
x[3] = 3.9997
x[4] = 4.9989

Крок №19
x[1] = 2.0001
x[2] = 3.0007
x[3] = 4.0003
x[4] = 5.0005

Крок №20
x[1] = 1.9999
x[2] = 2.9996
x[3] = 3.9999
x[4] = 4.9996

Крок №21
x[1] = 2
x[2] = 3.0003
x[3] = 4.0001
x[4] = 5.0002

Крок №22
x[1] = 2
x[2] = 2.9999
x[3] = 4
x[4] = 4.9998

Крок №23
x[1] = 2
x[2] = 3.0001
x[3] = 4
x[4] = 5.0001

Крок №24
x[1] = 2
x[2] = 2.9999
x[3] = 4
x[4] = 4.9999
```

```
------------Результат------------

x[1] = 2

x[2] = 3

x[3] = 4

x[4] = 5
```

2 Метод Зейделя

2.1 Опис методу

Якщо в першій сумі (1) використати вже відомі нові значення

$$x_j^{k+1},\ j = \overline{1, i-1},$$

то отримаємо формулу

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1, n},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

2.2 Завдання

Методом Зейделя розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 19 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Розв'язок оформлено у вигляді комп'ютерної програми (код програми додано до звіту). Результати програми:

```
Початкова матриця:

    6     3     1     0   |  25

    3     5     0     2   |  31

    1     0     3     1   |  19

    0     2     1     5   |  35
```

```
Крок №1
x[1] = 4.1667
x[2] = 3.7
x[3] = 4.9444
x[4] = 4.5311


Крок №2
x[1] = 1.4926
x[2] = 3.492
x[3] = 4.3254
x[4] = 4.7381


Крок №3
x[1] = 1.6998
x[2] = 3.2849
x[3] = 4.1874
x[4] = 4.8486


Крок №4
x[1] = 1.8263
x[2] = 3.1648
x[3] = 4.1084
x[4] = 4.9124


Крок №5
x[1] = 1.8995
x[2] = 3.0953
x[3] = 4.0627
x[4] = 4.9493
```

```
Крок №6
x[1] = 1.9419
x[2] = 3.0551
x[3] = 4.0363
x[4] = 4.9707


Крок №7
x[1] = 1.9664
x[2] = 3.0319
x[3] = 4.021
x[4] = 4.9831


Крок №8
x[1] = 1.9806
x[2] = 3.0184
x[3] = 4.0121
x[4] = 4.9902


Крок №9
x[1] = 1.9888
x[2] = 3.0107
x[3] = 4.007
x[4] = 4.9943


Крок №10
x[1] = 1.9935
x[2] = 3.0062
x[3] = 4.0041
x[4] = 4.9967
```

```
Крок №11
x[1] = 1.9962
x[2] = 3.0036
x[3] = 4.0023
x[4] = 4.9981


Крок №12
x[1] = 1.9978
x[2] = 3.0021
x[3] = 4.0014
x[4] = 4.9989


Крок №13
x[1] = 1.9987
x[2] = 3.0012
x[3] = 4.0008
x[4] = 4.9994


Крок №14
x[1] = 1.9993
x[2] = 3.0007
x[3] = 4.0005
x[4] = 4.9996


Крок №15
x[1] = 1.9996
x[2] = 3.0004
x[3] = 4.0003
x[4] = 4.9998
```

```
------------Результат----------
x[1] = 2
x[2] = 3
x[3] = 4
x[4] = 5
```