Materiālu un konstrukciju siltumfizika

Mihails Birjukovs, Jānis Ratnieks, Andris Jakovičs

13.09.2018

Anotācija

Laboratorijas darbā studenti iepazīstas ar siltuma vadīšanas procesu un tā matemātisko aprakstu, lai ar modificēto nestacionāro plaknes avota (MNPA, angl. modified transient plane source) metodi noteiktu siltuma vadīšanas koeficientu un siltuma ietilpību dažādiem materiāliem. Turpinājumā studenti tiek iepazīstināti ar termiskās pretestības un siltuma caurlaidības jēdzieniem un to aprēķināšanas metodiku - izmantojot mērījumus siltuma plūsmas mēriekārtā tiek aprēķināta siltuma caurlaidība un termiskā pretestība saliktai konstrukcijai. Izmantojot izmērītos siltuma vadīšanas koeficientus tiek salīdzinātas aprēķinātās siltuma caurlaidības un termiskās pretestības vērtības ar eksperimentāli izmērītajām. Papildus augstākā vērtējuma iegūšanai tiek piedāvāts iegūt siltuma vadīšanas vienādojuma atrisinājumu, uz kuru balstās MNPA metode, lai radītu padziļinātu izpratni par tās principiem. Pēc laboratorijas darba izpildes tiek sagaidīts, ka students ir iepazinies ar stacionāru un nestacionāru siltuma vadīšanas procesu matemātisko aprakstu un tā izmantošanu eksperimentu un simulāciju veikšanai.

Saturs

1 Darba mērķi 2

2 Darba uzdevumi 2

3 Ievads 4

4 Teorētiskais pamatojums 5
- 4.1 Siltuma apmaiņa 5
- 4.2 Siltumavadītspējas un siltumietilpības mērīšana ar C-Therm . 10
- 4.3 Siltuma plūsmas mērīšana ar Taurus 16

5 Darba gaita 18
5.1 Mērījumi Taurus iekārtā 18
5.2 Mērījumi ar C-Therm iekārtu 24

6 Kontroljautājumi 29

7 Pielikumi 32
7.1 Siltumvadīšanas vienādojuma (1) izvedums 32
7.2 Stefana-Bolcmaņa likuma (2) izvedums no Planka formulas . . 35
7.3 Grīna funkcijas izvedums problēmai (16) 36
7.4 Problēmas (16) atrisinājums visam intervālam, izmantojot Grīna funkciju (17) 41
7.5 Problēmas (16) atrisinājums visam intervālam, izmantojot kosīnusa transformāciju 42

1 Darba mērķi

1. Iepazīties ar siltuma vadīšanas procesa matemātiskā apraksta pamatiem.

2. Iepazīties ar siltuma vadīšanas koeficienta un siltuma ietilpības noteikšanas metodēm un iekārtām.

3. Iepazīties ar siltuma caurlaidības koeficienta un termiskās pretestības, siltumvadītspējas, siltumietilpības jēdzieniem, izprast metodes un iekārtu darbību ar kurām tos izmērīt.

2 Darba uzdevumi

1. Eksperimentāli noteikt siltuma vadīšanas koeficientu un siltuma ietilpību dažādiem materiāliem.

2. Izmērīt siltuma caurlaidības koeficientu un termisko pretestību saliktai konstrukcijai.

3. *[1]Izveidot C-Therm sensora un parauga matemātisko modeli un, atrisinot to ar datorsimulācijas palīdzību, veikt virtuālo eksperimentu

[1]Neobligāts uzdevums augstākā vērtējuma iegūšanai. Vairāk par vērtēšanas kritērijiem sadaļā ar kontroljautājumiem.

brīvi izvēlētiem parametriem. No aprēķinu rezultātiem izveidot grafiku temperatūras pieauguma atkarībai no laika kvadrātsaknes materiālu kontaktzonā un temperatūras pieauguma profilu dinamikai abos materiālos.

3 Ievads

Lai mērķtiecīgi un efektīvi izmantotu materiālus dažādās iekārtās, konstrukcijās un būvēs, ir svarīgi pietiekami precīzi zināt to fizikālās īpašības un šo īpašību maiņu dažādu faktoru (temperatūra, mitrums) ietekmē. Ļoti daudzveidīgos lietojumos svarīgas ir materiālu termiskās īpašības, tādas kā siltuma vadītspēja λ $[\frac{W}{m \cdot K}]$ un siltuma ietilpība C_p $[\frac{J}{kg \cdot K}]$, kā arī to izmaiņas līdz ar temperatūru, spiedienu un mitrumu. Materiālu siltuma vadītspēju būtiski ietekmē to ķīmiskais sastāvs, blīvums, porozitāte u.c. faktori. Siltuma vadītspēja λ dažādiem materiāliem var atšķirties par daudzām kārtām. Ieskatam var minēt šādas raksturīgas vērtības pie temperatūras $T = 20°C$: varam $\lambda = 370$; granītam $\lambda = 2,8$; ūdenim $\lambda = 0,6$; putuplastam $\lambda = 0,04$, gaisam $\lambda = 0,026$ un kriptonam $\lambda = 0,009$ $\frac{W}{m \cdot K}$. Tādējādi, piemēram, siltummaiņos tiek izmantoti materiāli ar lielu siltuma vadītspēju, bet būvniecībā siltuma ekonomijai savukārt plaši lieto materiālus ar pēc iespējas mazāku siltuma vadītspēju.

Praksē bieži tiek izmatots jēdziens termiskā pretestība R $[\frac{m^2K}{W}]$ un siltuma caurlaidība koeficients jeb U - vērtība $[\frac{W}{m^2K}]$, kuru plašāk pielieto ēku siltumfizikā. Šie lielumi ļauj kvantitatīvi raksturot saliktas konstrukcijas un tiks definēti nākamajā nodaļā.

Tā kā mūsdienās tehnoloģisko iekārtu projektēšana ļoti cieši ir saistīta ar tajos notiekošo procesu (t.sk. arī siltumfizikālo) matemātisko modelēšanu, tad attiecīgo īpašību kvantitatīvās vērtības nepieciešamas adekvātam norišu aprakstam un šo datu noteikšanai ir izveidotas un tiek lietotas dažādas eksperimentālās metodes, kuras var būt gan stacionāras, piemēram, karstās plates (guarded hot plate) - izmantojot kopējo sistēmai pievadītā siltuma daudzuma uzskaiti vai SPB metodi - izmērot siltuma plūsmas blīvumu caur materiāla slāni vai nestacionāras, piemēram, MNPA vai lāzera impulsa metode (laser flash method). Šajā darbā tiks lietotas SPB un MNPA metodes.

4 Teorētiskais pamatojums

4.1 Siltuma apmaiņa

No vidusskolas fizikas kursa zināms, ka siltuma pārnese notiek trijos veidos - vadīšanas, konvekcijas un starojuma veidā. Siltuma pārnesi fizikā apraksta ar siltumvadīšanas vienādojumu, kas homogēnās vides gadījumā ir:

$$\frac{\partial T(\vec{r})}{\partial t} + \vec{v}\nabla T = a^2 \Delta T + g; \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{1}$$

kur T ir temperatūra, $\vec{v}$ ir ātrumu lauks vielā (piemēram, gaisā), g ir temperatūras avota funkcija (sildīšana/dzesēšana), a^2 ir difūzijas koeficients, c ir īpatnējā siltumietilpība, bet ρ ir vielas blīvums. Kreisās puses otrais loceklis nosaka konvektīvo siltumapmaiņu, bet labās puses pirmais nosaka difūziju jeb siltuma vadīšanu. Ja students vēlas "atsvaidzināt" atmiņā principus, izejot no kuriem nonāk pie (1), kā arī ar izveduma tehnisko pusi, vairāk var izlasīt pielikumā 7.1 (pielikumi apraksta beigās). Termiskais starojums tiek izdalīts robežās, tāpēc to parasti iebūvē robežnosacījumos. Starojuma jaudu nosaka Stefana-Bolcmaņa likums:

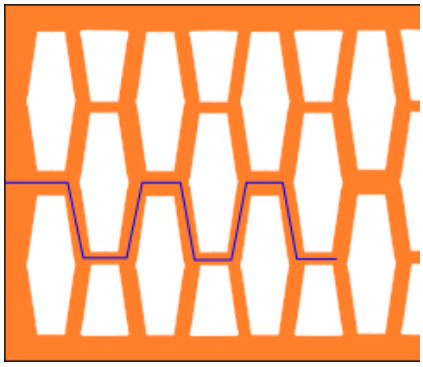
$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \epsilon \sigma_s T^4 \tag{2}$$

kur q $[\frac{W}{m^2}]$ ir siltuma plūsmas blīvuma modulis, σ_s ir Stefana-Bolcmaņa konstante un ϵ ir virsmas materiāla emisivitāte (empīriskais koeficients, kas parāda, cik ķermenis ir tuvs absolūti melnām pēc savām īpašībām - $\epsilon = 1$ atbilst absolūti melnām ķermenim). Ja students vēlas saprast, kāpēc (2) ir tieši šāda forma, skaidrojums tam ir atrodams pielikumā 7.2.

Kā piemēru, kur notiek visi trīs pārneses veidi, var minēt keramikas būvniecības blokus, skatīt attēlu 1. Keramikai siltuma vadīšanas koeficients ir ievērojami augstāks nekā gaisam, tādēļ tiek izveidotas gaisa spraugas, kuras darbojas kā izolators, jo mazos tilpumos termiskā konvekcija dod nelielu ietekmi. Papildus pārnesei konvektīvā veidā darbojas arī siltuma starojums un siltuma apmaiņa starp gaisa spraugu sienām, tomēr mazās temperatūru starpības dēļ arī tā ir mazāk nozīmīga. Siltuma vadīšanas galvenais ceļš pa keramikas daļu parādīts attēlā 2 un redzams, ka tas ir ievērojami garāks kā masīvā, aizpildītā blokā.

Šādus blokus nav ērti aprakstīt ar siltuma vadīšanas koeficientu vērtībām, jo tas sastāv no gaisa un keramikas, turklāt ir svarīgs šo materiālu savstarpējais izvietojums. Līdzīgas situācijas praksē parādās bieži un tādēļ tiek ieviesti iepriekš minētie termiskā pretestības R un siltuma caurlaidības

Att. 1: Keramikas būvniecības bloks



Att. 2: Siltuma plūsmas ceļš keramikas būvniecības blokā

U jēdzieni, ko lieto plakanparalēlām konstrukcijām. Termiskā pretestība raksturo materiāla slāņa vai konstrukcijas spēju pretoties siltuma vadīšanai, tās analogs ir elektriskā pretestība noslēgtā ķēdē. Lai intuitīvi saprastu šo analoģiju, atceramies, ka elektriskā lauka potenciālu ϕ un strāvas blīvumu j saista sakarība

$$\vec{j} = -\sigma \nabla \phi \tag{3}$$

kur σ ir elektrovadītspēja. Integrālā formā šī sakarība ir

$$I = \frac{U}{R} \tag{4}$$

šeit I ir strāva, U ir spriegums un R ir elektriskā pretestība. Siltuma vadīšanai savukārt spēkā ir Furjē likums

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \tag{5}$$

kurš ar siltumvadīšanas koeficientu λ sasaista temperatūru T un siltuma plūsmas blīvumu $\vec{q}$. Kaut arī temperatūra nav termodinamiskais potenciāls, šajā kontekstā izteiksmju formas identiskuma dēļ to par tādu (nosacīti) nosauksim. Analogi kā tas tiek darīts elektriskās strāvas gadījumā, šai izteiksmei var iegūt formu līdzīgu (4)

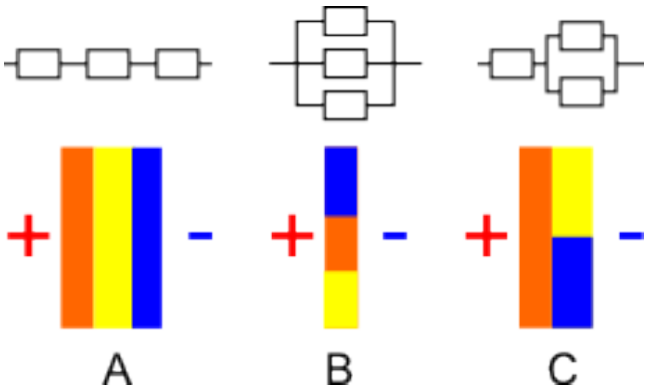
$$q = \frac{\delta T}{R} \tag{6}$$

kur δT ir temperatūras starpība, un R, līdzīgi kā tas ir elektriskās pretestības gadījumā, ekvivalentā viendabīga materiāla termiskā pretestība. Jāatzīmē, ka atšķirībā no I izteiksmē (4), q šeit nav integrāla plūsma, bet plūsmas

blīvums, jo tieši šis rādītājs būvfizikā ir svarīgs. Apskatām vienkāršu gadījumu ar viendabīgu materiālu ar zināmu siltuma vadīšanas koeficientu λ un biezumu d. Šādam materiālam termisko pretestību, definē šādi:

$$R = \frac{d}{\lambda} \tag{7}$$

Ja konstrukcija ir daudzslāņu, tad slāņi var tikt izvietoti vairākos veidos, kā parādīts attēlā 3, kur "+" apzīmē silto pusi, bet "-" auksto, savukārt dažādu krāsu taisnstūri dažādus materiālus.



Att. 3: Materiālu novietojums saliktā konstrukcijā un atbilstošais elektriskās ķēdes slēgums virs tā a) virknē b)paralēli c) jaukti

Līdzīgi kā elektrība vai ūdens, arī siltums intensīvāk plūst pa minimālās pretestības ceļu, no vietas ar augstāku temperatūru uz vietu ar zemāku temperatūru. Apskatot A gadījumu attēlā 3 ir skaidrs, ka siltumam plūstot vispirms jāiziet caur oranžo slāni, tad caur dzelteno un pēc tam zilo, kas nosaka virknes saslēgumu. Ņemot vērā temperatūras starpības starp katra materiāla robežām un to individuālās termiskās pretestības, var noteikt kopējo pretestību. Ja δT uztur pastāvīgu, tad saskaņā ar Furjē likumu (5) caur visu salikumu A plūst konstanta plūsma un visos materiālos temperatūras starpības uz robežām ir konstantas, kas ļauj uzrakstīt

$$\delta T = \sum_{k=1}^{3} \delta T_k = \sum_{k=1}^{3} qR_k = qR \tag{8}$$

$$R = \sum_{k=1}^{3} R_k \tag{9}$$

Apskatot B gadījumu var redzēt, ka siltums var plūst materiālos paralēli, un šajā gadījumā caur materiālu ar mazāku pretestību siltums plūdīs inten-

sīvāk. Dēļ tā, kā tika definēts R (7), jāņem vērā dažādas laukumu attiecības un tādēļ katram saskaitāmajam jāpiereizina laukuma daļa a_i. Kopējā siltuma plūsma caur B ir paralēlu slāņu plūsmu summa, bet temperatūras starpība vienāda visā slānī, kas dod

$$q = \sum_{k=1}^{3} q_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k \delta T}{R_k} = \frac{\delta T}{R} \tag{10}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{R_k} \tag{11}$$

Izmantojot iepriekš iegūtās sakarības var viegli aprēķināt termisko pretestību dažādām saliktām konstrukcijām, piemēram, attēla 3 C gadījumam kopējā termiskā pretestība tiek aprēķināta pēc vienādojuma (12),

$$R_{total} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{(a_2 \cdot R_1 + a_1 \cdot R_2)} \tag{12}$$

kur R_1, R_2 un R_3 ir termiskās pretestības attiecīgi zilajam, dzeltenajam un oranžajam materiālam.

Termisko pretestības lietojums neaprobežojas tikai ar materiālu slāņu un konstrukciju kvantitatīvu aprakstu, to lieto arī materiāla un apkārtējās vides, piemēram, gaisa robežslāņiem. Gaisa plūsmas ātrums pie nekustīgas virsmas ir nulle, bet palielinās līdz ar attālumu no sienas. Tā kā gaisam ir maza siltumvadītspēja un sienas tuvumā konvektīvā pārnese maza ātruma dēļ ir neliela, tad rodas papildus termiskā pretestība. Piemēram ēkām ar sliktu siltuma izolāciju šie robežslāņi ir būtiski un ievērojami samazina ēkas energopatēriņu. Piemēram var ņemt tipisku 20. gs. vidū būvētu ēku ar sienas biezumu 2 ķieģeļi, jeb aptuveni 55 cm (kopā ar apmetumu). Ķieģeļu siltumvadīšanas koeficients ir aptuveni $1[\frac{W}{m \cdot K}]$, līdz ar to sienas termiskā pretestība bez robežslāņiem ir $0.55[\frac{m^2 K}{W}]$. Tipiskas robežslāņu termisko pretestību vērtības ir $0.17[\frac{m^2 K}{W}]$ iekšpusē un $0.04[\frac{m^2 K}{W}]$ sienas ārpusei (lielāks gaisa plūsmas ātrums). Kā redzams, tad sienas kopējā termiskā pretestība ar robežslāņu termisko pretestību ir $0.76[\frac{m^2 K}{W}]$.

Siltuma caurlaidības koeficients jeb U - vērtība $[\frac{W}{m^2 K}]$ ir apgrieztais lielums kopējai termiskai pretestībai, kur iekļautas arī termisko robežslāņu pretestības (13) un to bieži izmanto būvniecībā:

$$U = \frac{1}{R} \tag{13}$$

Jo lielāka termiskā pretestība, jo mazāka ir U - vērtība un tādēļ ēkas ar mazāku U - vērtību ir energoefektīvākas. Nobeigumā vēl atliek minēt, ka

materiāli var būt ne tikai ar makroskopiskiem gaisa dobumiem, bet arī ar mazām porām, piemēram, gāzbetona bloki, kā redzams attēlā 4. Šajā gadījumā poru izmērs ir pietiekami mazs ($d_{porm} << d_{slnim}$), lai ņemot pietiekami biezu materiāla slāni, materiālu uzskatītu par viendabīgu un tam varētu izmērīt siltuma vadīšanas koeficientu. Materiāli mēdz būt arī ar atšķirīgām īpašībām dažādos virzienos jeb anizotropi, piemēram, koks, kuram siltuma vadīšanas koeficients šķiedru virzienā ir lielāks nekā perpendikulāri šķiedrai. Būtībā katram materiālam atsevišķi jāvērtē mērījumos un aprēķinos iegūto rezultātu ticamība un jāsaprot potenciālie kļūdu avoti.

Att. 4: Gāzbetons būvniecības bloks ar porozu struktūru

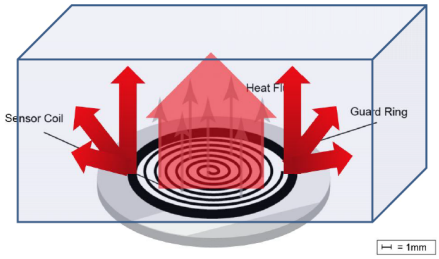
Jāatzīmē ka neviendabīgiem vai anizotropiem materiāliem arī matemātiskais apraksts ir sarežģītāks - siltuma vadīšanas vienādojuma (1) difūzijas loceklis pārtop par sekojošu:

$$\frac{\nabla(\lambda \nabla T)}{c\rho} \tag{14}$$

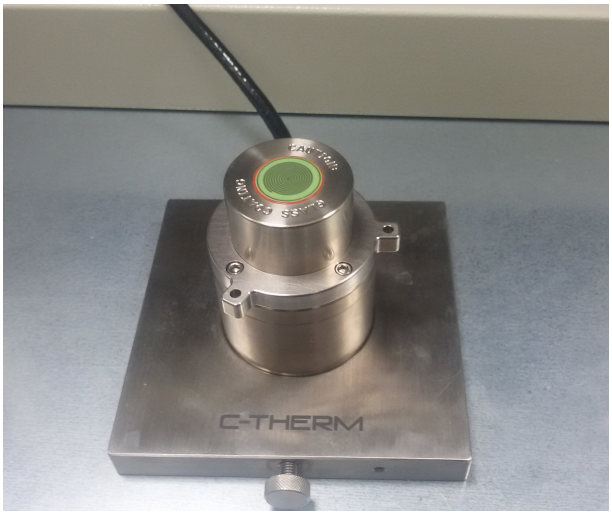
kur vispārīgā gadījumā λ ir otrā ranga tenzors.

4.2 Siltumavadītspējas un siltumietilpības mērīšana ar C-Therm

Viena no jaunākajām metodēm, kura patentēta tikai 2004. gadā ir modificētā plaknes impulsa avota metode. Mēriekārtas galvenā sastāvdaļa ir sensors, kuram ir sildelements/termopāris un kompensācijas gredzens (attēli 5 un 6)



Att. 5: Shematisks sensora un siltuma plūsmu attēlojums

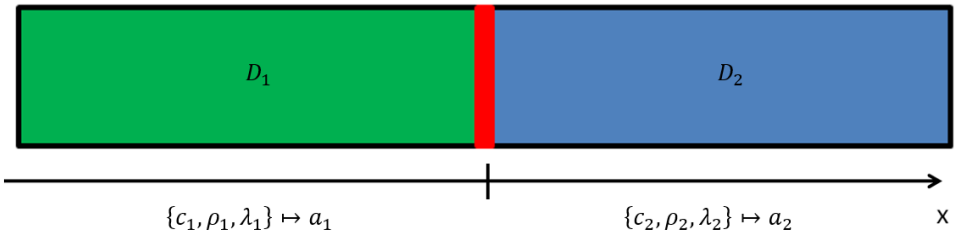


Att. 6: C-Therm sensors uz tā pamatnes

Iekārtā sildītājs un termopāris ir apvienoti - kad termopārī plūst strāva tas ir sildītājs, bet pārējā laikā termopāris. Iekārtai aiz sensora ir izolējoša materiāla slānis ar zināmām īpašībām - siltumietilpību un siltuma vadītspējas koeficientu. Sildelementā plūst strāva, kura sasilda sensoru un paraugu, termopāris mēra temperatūru, kura ir sensora un parauga saskarsmes vietā, savukārt kompensācijas gredzens domāts, lai nodrošinātu 1D siltuma plūsmu. Mērījuma ar sensoru tiek uzņemta tā un pētāmā materiāla kontakta plaknes temperatūras atkarība no sildīšanas laika (tiek uzturēta konstanta

sildītāja jauda), pēc kuras, zinot sensora materiālu parametrus, nosaka pētāmās vielas termodinamiskās īpašības.

Lai izprastu metodi, apskatīsim matemātisku modeli, uz kura tā balstās. Pieņemot, ka pētāmās vielas paraugs un C-Therm sensors ir pietiekami biezi, lai īsā mērījuma laikā siltums neizplatītos līdz ķermeņu robežām, sensoru un paraugu apskata kā divas bezgalīgas pustelpas (attēls 7, apgabali D_1 un D_2), kuras ir kontaktā viena ar otru. Starp pustelpām ir siltuma avots (sarkans, attēlā 7), kurš ir vienāds visā plakņu saskarsmes laukumā - tad siltuma plūsma notiek tikai perpendikulāri saskarsmes virsmai (ko papildus nodrošina Guard Ring) un var kā vēl vienu tuvinājumu pieņemt, ka siltums izplatās tikai vienā dimensijā - perpendikulāri kontakta plaknei.



Att. 7: Tuvinātais sensora/parauga modelis

Konvekcija šajā gadījumā nenotiek, un abas vides ir homogēnas, tāpēc siltumvadīšanas vienādojums (1) vienkāršojas:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g \tag{15}$$

jāpiezīmē, ka šādā formulējumā $g = f/(c\rho)$, kur f ir sildītāja jaudas blīvums. Vienādojums (15) ir spēkā abiem materiāliem. Sākumā kā robežgadījumus abus materiālus apskata kā savā starpa izolētus, kur siltuma izolācija atrodas pie $x = 0$, un turpat arī siltuma avots, bet $x > 0$ un $x < 0$ atbilst vidēm, kuras ir kontaktā. Tādā gadījumā, atbilstošais matemātiskās fizikas uzdevumus ir sekojošs:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g \tag{16a}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \tag{16b}$$

$$T(x,0) = 0 \tag{16c}$$

$$x > 0;\ t > 0 \tag{16d}$$

kur (16b) uzdod nulles siltuma plūsmu caur $x = 0$, bet (16) definē sākotnējo temperatūru par līmeni, no kura atskaita temperatūras pieaugumu.

Ir vairāki paņēmieni šī uzdevuma risināšanai, bet divi acīmredzamākie varētu būt izmantojot Grīna funkciju vienādojumam (16a) pusbezgalīgā intervālā, vai arī risinot tiešā veidā ar kosīnusa transformāciju. Pirmais paņēmiens ir daudz vienkāršāks, ja vēlas iegūt atrisinājumu tikai punktā $x = 0$ (it īpaši ja lasītājs Grīna funkciju atceras), jo darbojoties ar kosīnusa transformāciju ir jāizrēķina daudz nepatīkamāki integrāļi. Problēmai (16) Grīna funkcija ir sekojoša:

$$G(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{17}$$

Students, kas nav pazīstams ar Grīna funkcijas jēdzienu, vai vienkārši vēlas atcerēties tās iegūšanas procesu, ir aicināts pielikumā 7.3. Zinot, ka $G(x,t)$ raksturo sistēmas (16) "atsauci" uz momentāno siltuma impulsu punktā $x = 0$, atrisinājumu dinamiskai sildīšanai ar konstantu jaudu iegūst kā

$$\int_0^t dT(0,t)\,dt = \int_0^t \frac{f}{c\rho} \cdot G(0,t)\,dt \tag{18}$$

kas, ņemot vērā (16c), dod

$$\delta T(0,t) = \frac{f}{ac\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} \tag{19}$$

un, ievietojot izteiksmi priekš a no (1), iegūst

$$\delta T(0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{f\sqrt{t}}{\sqrt{c\lambda\rho}} \tag{20}$$

kur katrai videi ir savi parametri (λ, c, ρ). Ja lasītājam interesē iepazīties ar pilnu atrisinājumu visam intervālam, izmantojot Grīna funkciju, tādu iespēju dod pielikums 7.4. Alternatīvs izvedums, izmantojot kosīnusa transformāciju, ir mazliet grūtāks, bet bez Grīna funkcijas starpniecības uzreiz dod pilnu atrisinājumu visam intervālam, kā to var redzēt pielikumā 7.5.

Termiskā efūzivitāte tiek definēta kā

$$e = \sqrt{c\rho\lambda} \tag{21}$$

un ir aditīvs lielums (mērvienības ir $[\frac{J}{Km^2\sqrt{s}}]$). Efūzivitāte ārpus siltumfizikas varētu būt nepierasts lielums - tas raksturo to, cik ātri materiāls(-i) spēj absorbēt siltumu. Tas izriet arī no (20), kur var redzēt, ka temperatūras pieauguma ātrums ir apgriezti proporcionāls efūzivitātei - tas ir saistīts ar to, ka lielāka spēja absorbēt siltumu nosaka to, ka mazāks siltuma daudzums

uzkrājas pie avota, jo lielāks daudzums tiek aizvadīts materiālos. Difūzijas koeficients varētu šķist līdzīgs, bet tas raksturo to, cik ātri iestājas termodinamiskais līdzsvars jeb siltuma pārneses ātrumu. Efuzivitāte, piemēram, palīdz saprast, kāpēc, pieskaroties metālam, tas šķiet auksts, pat ja atrodas pie istabas temperatūras, bet koks identiskajos apstākļos šķiet silts - metālam ir ievērojami lielāki λ un ρ nekā cilvēka ādai/muskuļiem, bet kokam spēkā pretējais.

Apskatot pretējo ekstrēmgadījumu kad starp materiāliem nav kontakta pretestības, ir skaidrs, ka punktam $x = 0$ tas atbilst nosacījumam

$$\delta T_1(0,t) = \delta T_2(0,t) \tag{22}$$

jo tajā siltumu absorbē abas vides vienlaicīgi, kas nozīmē, ka

$$\delta T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{f\sqrt{t}}{e_1 + e_2} \tag{23}$$

kur e_1 un e_2 ir efūzivitāte attiecīgi sensoram un mērāmajam paraugam, f - siltuma avots $[\frac{W}{m^2}]$, kurš sīkāk aprakstīts tālāk.

Ja sensora materiāla efūzivitāte ir zināma, izmērot temperatūras pieauguma izmaiņas laikā var noteikt efuzivitāti pētāmām paraugam. Skaidrs, ka kaut arī eksperimenta gaitā cenšas minimizēt kontakta pretestību, realitāte vienmēr būs kaut kur starp augstāk apskatītiem robežgadījumiem, kas arī nosaka to relatīvi nelielu kļūdu, kas šai metodei raksturīga.

Tagad ir jāaplūko siltuma avota blīvuma funkcija f, jo tā ieiet proporcionalitātes koeficientā sakarībā $\delta T = \delta T(\sqrt{t})$. Tā kā sildīšana notiek ar elektrību, jaudas blīvums saskaņā ar Džoula-Lenca likumu ir vienāds ar

$$f = j^2 \rho_e \tag{24}$$

Sensora sildītājā plūst homogēna strāva, kas nozīmē, ka

$$j^2 \rho_e V = I^2 R \tag{25}$$

kur V ir sildītāja aktīvās daļas tilpums. Jāatceras, ka pretestība ir atkarīga no temperatūras, un mērījuma laikā mainīsies saskaņā ar

$$R(T) = R_0(1 + \alpha T) \tag{26}$$

kur $R_0 = R(0)$ un α ir lineārais temperatūras koeficients. Tad

$$\delta R = R_0 \alpha \cdot \delta T \tag{27}$$

Ņemot vērā, ka (23) ir spēkā tikai konstantai siltuma avota jaudai, eksperimenta laikā temperatūras pieaugumu noteiks pēc sildītāja sprieguma

izmaiņām, kurš tiks palielināts, lai noturētu konstantu strāvu, un tātad arī jaudu:

$$\delta U = I\delta R = IR_0\alpha \cdot \delta T \tag{28}$$

Apvienojot (23), (24), (25) un (28) iegūst:

$$\delta U = A \cdot \frac{I^3 R}{e_1 + e_2}\sqrt{t};\ A = \frac{2\alpha R_0}{V\sqrt{\pi}} \tag{29}$$

Tālāk apraksta autors izmantos apzīmējumus, kurus ievieš sensora ražotājs, jo tieši tos students sastaps C-Therm sensora vadības programmā. Ieviešot apzīmējumu

$$\delta U = m\sqrt{t} \tag{30}$$

izriet, ka

$$\frac{1}{m} = \frac{e_1}{AI^3R} + \frac{e_2}{AI^3R} = C + Me_2 \tag{31}$$

kur reizinājums I^3R sensoram, veicot eksperimentu, tiek turēts konstants un A ir zināms no sensora specifikācijām (konstants mērījumu temperatūru diapazonā). Sensora efūzivitāte arī ir zināma - to viegli noteikt, veicot mērījumu tikai ar sensoru vakuumā, jo tajā $e_2 = 0$ un $m = C^{-1}$, bet no (30) var atrast m, ja attēlo mērījumu rezultātus kā $\delta U(\sqrt{t})$. Kad C ir zināms, no eksperimenta nosakot M var izrēķināt pētāmām paraugam efūzivitāti. Tad, izmantojot (21), var noskaidrot λ, ja zināms ρ un c, vai arī c, ja zināms ρ un λ.

Ar efūzivitātes mērīšanu nav izsmeltas visas iekārtas iespējas un ar to ir iespējams noteikt gan siltumietilpību, gan siltumvadīšanas koeficientu vienlaicīgi, zinot tikai materiāla blīvumu. Ir eksperimentāli zināms, ka termiskās efūzivitātes attiecībā pret siltumvadīšanas koeficientu ievērojami nemainās, tādēļ izveidojot papildus kalibrācijas līkni ir iespējams vienlaicīgi veikt arī siltuma vadīšanas koeficienta mērījumus. Dotajai pieejai ir izņēmumi, kad kādas klases materiālam ievērojami atšķiras īpašības. Piemēram, ogleklim siltumvadītspēja ir aptuveni $90\frac{W}{m \cdot K}$ līdzīgi kā labi vadošiem metāliem, bet oglekļa siltumietilpība uz tilpuma vienību ir ievērojami mazāka nekā šiem metāliem. Papildus kalibrācijas līknes iegūšana detalizētu aprakstīta patentā. To iegūst ieviešot papildus kalibrācijas parametrus (C_1, C_2, m^*):

$$\frac{1}{m - m^*} = C_1 \cdot \lambda + C_2 \tag{32}$$

Tabula 1: Siltumietilpība uz tilpuma vienību materiālu klasēm

Materiālu klase	$\rho c, \frac{MJ}{m^3 \cdot K}$
Putas	0 - 0.69
Polimēri	1.3 - 2.0
Keramikas	1.8 - 2.7

Veicot mērījumus materiāliem ar zināmu siltumvadītspējas koeficientu iteratīvi iegūst nepieciešamo kalibrācijas līkni, no kuras savukārt, lietojot (32) iegūst siltuma vadītspējas koeficientu.

Ar šiem mērījumiem jābūt uzmanīgam un jāievēro ražotāja noteiktie ierobežojumi materiālu klasēm, kuri apkopoti tabulā 1.

4.3 Siltuma plūsmas mērīšana ar Taurus

Eksistē vairākas stacionāras metodes, kā izmērīt siltuma plūsmu - šim darbam ir pieejama iekārta, kura mēra siltuma plūsmas blīvumu un kura parādīta attēlā 8.

Att. 8: Siltuma plūsmas iekārta Taurus TCA 750-X siltuma caurlaidības un termiskās pretestības noteikšanai

Ar šādu iekārtu ir iespējams mērīt arī kopējo termisko pretestību vai siltuma caurlaidību plakanparalēlai daudzslāņu konstrukcijai. Tāpat arī iespējams izmērīt efektīvo siltuma vadītspēju kompozītam materiālam, kuram ir nehomogēna struktūra. Ja materiāls ir homogēns ar zināmu biezumu, tad pēc definīcijas (7) no termiskās pretestības iespējams aprēķināt arī materiāla siltuma vadītspējas koeficientu.

Pētāmā viela, materiāls vai daudzslāņu konstrukcija tiek ievietota mēriekārtā, kur ar Peltjē elementu palīdzību tiek uzturēta konstanta, bet dažāda temperatūra abās parauga puses. Uz parauga virsmām abās pusēs tiek novietoti siltuma plūsmas blīvuma sensori. Sensori veidoti no vairākiem termopāriem, kuri iestrādāti plānā, ar zināmu biezumu un siltuma vadīšanas koeficientu, materiālā. Zinot sensora biezumu d_s un siltuma vadīšanas koeficientu λ_s no (7) noskaidro termisko pretestību sensoram R_s. Zinot temperatūru starpību starp parauga abām pusēm, ir iespējams noskaidrot siltuma plūsmas blīvumu q, izmantojot (6). Siltuma plūsmas blīvumi tiek mērīti abās parauga pusēs un brīdī kad iestājies stacionārs stāvoklis var mērīt ar pietiekamu precizitāti.

5 Darba gaita

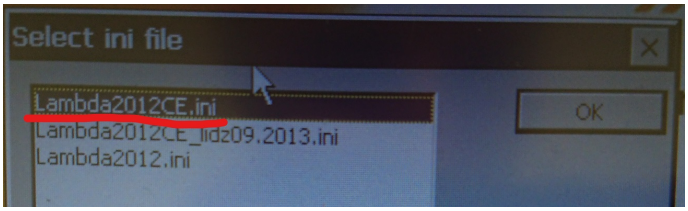
5.1 Mērījumi Taurus iekārtā

Lai optimizētu darba gaitu, sākotnēji ir lietderīgi sākt ar siltuma caurlaidības un termiskās pretestības mērījumiem daudzslāņu konstrukcijai ar Taurus mēriekārtu, kas parādīta attēlā 8, jo šie mērījumi aizņem ilgāku laiku (atkarībā no vēlamās temperatūru starpības starp parauga robežām, mērījums var ilgt vairāk kā 5 stundas). No vairākiem pieejamajiem materiāliem studenti izvēlas sev tīkamākos no kuriem pēc pasniedzēja norādījumiem izveido konstrukciju. Materiāliem, kuri lietoti konstrukcijā darba turpinājumā ar C-Therm tiks eksperimentāli noteikta arī siltuma vadītspēja, tādējādi radot iespēju eksperimentāli pārbaudīt sakarību (9) un (11) patiesumu, lietojot (7) pārejai no siltuma vadītspējas koeficienta uz termisko pretestību.

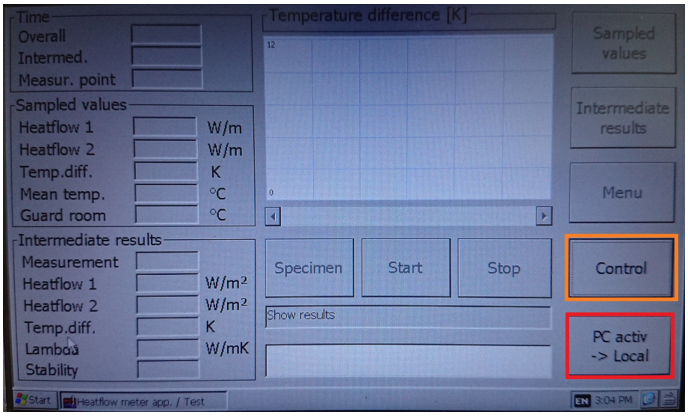
Kad materiāli izvēlēti turpmākais darbs notiek ar iekārtu un vadības datoru:

- Atver iekārtas apakšējās durvis (sk. attēlu 8) un ieslēdz iekārtu (attēls 9).
- Sagaidot iekārtas operētājsistēmas gatavību darbam, izmantojot stilusu (nodrošina pasniedzējs) izvēlas "Lambda2012CE.ini" (izvēlne parādīsies automātiski) - sk. attēlu 10.
- Ekrānā parādīsies kontrolpanelis - pārliecinās, ka attēlā 11 ar sarkano iezīmēta poga ir stāvoklī "PC aktiv → Local".

Att. 9: Iekārtas slēdzis

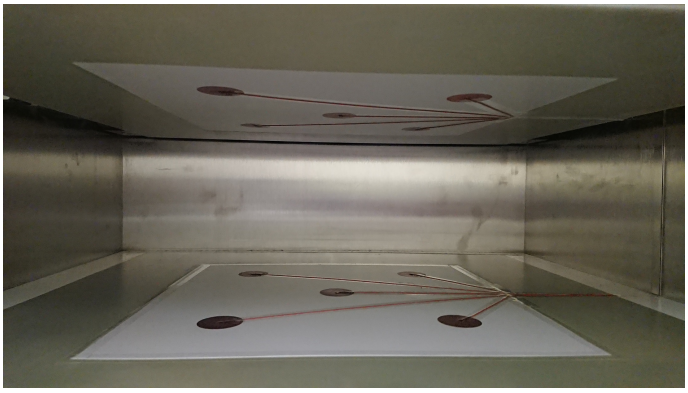


Att. 10: Pēc iekārtas palaišanas, izvēlamies šajā attēlā iezīmēto

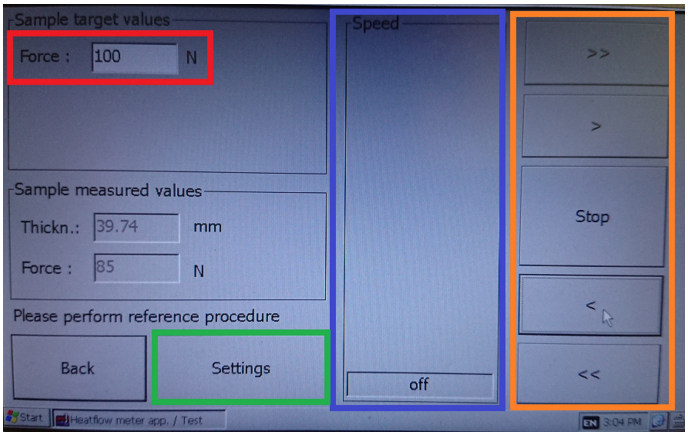


Att. 11: Iekārtas kontrolpanelis

- Atver iekārtas augšējās durvis un kontrolpanelī nospiež "Control" (attēls 11).
- Aiz iekārtas augšējām durvīm atrodas divas plates - statiska (apakšējā) un pārvietojama (augšējā). Attēlā 12 var redzēt abās platēs iebūvētus siltuma plūsmas un temperatūras sensorus - iekārta automātiski nosaka attālumu starp tiem, bet lai tas tiktu darīts pareizi, ir jāuzdod nulles biezuma pozīcija. Pozīciju maina, darbinot Taurus motorus no attēlā 13 redzamā ekrāna - "Force" (apvilkts sarkanā krāsā) nosaka balsta (apakšējās plates) reakcijas spēku, pie kura augšējā plate pārtrauc kustību uz leju; kreisajā malā izvietotas 5 pogas (oranžs) regulē augšējās plates kustības ātrumu uz leju (ātrāk << un lēnāk <), uz augšu (analogi), vai pārtrauc kustību. Ātrums tiek attēlots ar zilo krāsu iezīmētā apgabalā, kurā to var regulēt arī precīzāk. Rekomendācija: kad plates ir tuvu, izmanto mazākus ātrumus. Izmantojot šo, panāk, lai plates ir saspiestas ar spēku 200 N.



Att. 12: Plates, starp kuram tiks novietots pētāmais paraugs. Abās platēs ir iebūvēti temperatūras un siltuma plūsmas sensori

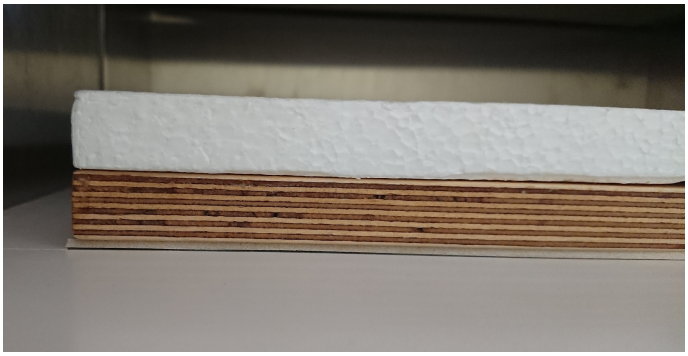


Att. 13: Augšējās plates pozīcijas kontroles panelis.

- Kad plates ir saspiestas, nospiež "Settings" (attēls 13, zaļā krāsa), šī poga vietā parādās divi, no kuriem izvēlas "Set thickn." - tad nākamajā panelī ievada vērtību 0.

- Pēc atskaites pozīcijas ievadīšanas, attālina plates pietiekami tālu, lai iekārtā varētu ievietot izvēlēto materiālu konstrukciju. Pirms to darīt, izmēra parauga elementu biezumus ar bīdmēru. Svarīgi: ja salikumā ir materiāls, kuram siltumvadītspēja ievērojami labāka nekā gaisam, starp to un sensora platēm ir jāievieto speciāls gumijas paklājs (nodrošina darba vadītājs; gumijas īpašības zināmas). Tad platēm uzstāda 100 N maksimālo reakcijas spēku un saspiež ievietoto konstrukciju.

Pēc saspiešanas nav jānolasa no ekrāna biezums, jo ja ir ievietots gumijas paklājs, Taurus pēc tam automātiski atņems tā biezumu no kopējā. Spēks 100 N var likties neliels, bet ņemot vērā materiālu bloku laukumu ap 0.25 m^2, rezultējošais spiediens ir ap 400 Pa, un lielāka slodze varētu ievērojami saspiest mīkstākus materiālus (piemēram, putuplastu). Tipisks salikums varētu izskatīties kā tas ir redzams attēlā 14.

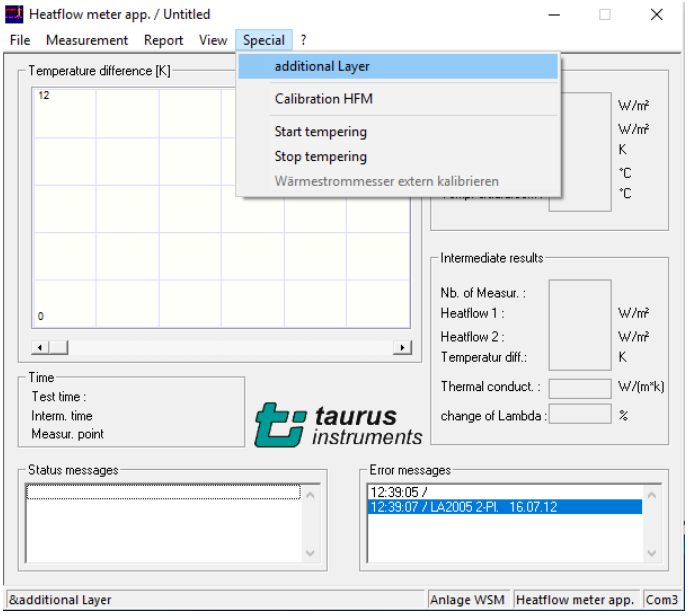


Att. 14: Tipiskais materiālu salikums testēšanai Taurus iekārtā.

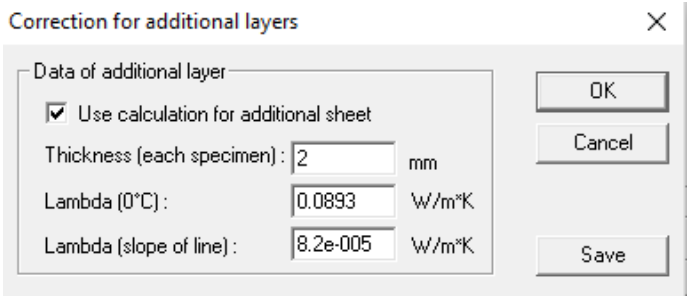
- Aiztaisa Taurus iekārtas durvis (augšējā pagriežot atslēgu) un pāriet pie datora, kas atrodas blakus. Datora darbavirsmas augšējā labajā stūrī atver mapi "TAURUS" un tajā palaiž "Lambda2012.exe"

- Atveras logs, kurš ir redzams attēlā 15 - tajā atver "Special" un izvēlas "Additional Layer". Parādīsies logs kā tas ir redzams attēlā 16. Gadījumā ja tiek izmantots gumijas paklājs, ieliek ķeksi pretī "Use calculation for additional sheet". Zem tā būs redzami parametri pēc noklusējuma - tie atbilst gumijai, kuru pēc nepieciešamības nodrošina darba vadītājs. Izmantojot šos parametrus, iekārta izrēķina parauga termisko pretestību bez gumijas ieguldījuma.

- Tālāk atver izvēlni "Measurement" un izvēlas "Parameters". Atvērsies logs, kurš parādīts attēlā 17 - tajā ir jāievada divi parametri, pārējo atstājot bez izmaiņās: vidējā temperatūra kamerā ar paraugu un temperatūras starpība sensoru plaknēm (iezīmēti attēlā 17). Temperatūru nolasa no telpā esošā termometra un ieraksta vienā no laukiem, pārējus atstājot tukšus - pretējā gadījumā iekārta veiks mērījumus vairākām temperatūras vērtībām. Temperatūras starpību ievada darba vadītājs.

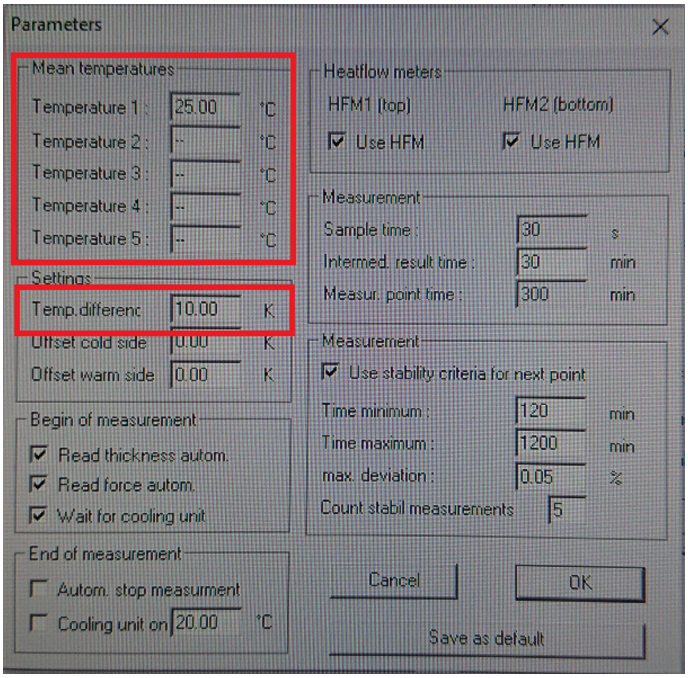


Att. 15: Kontrolpanelis eksperimenta vadīšanai no datora.

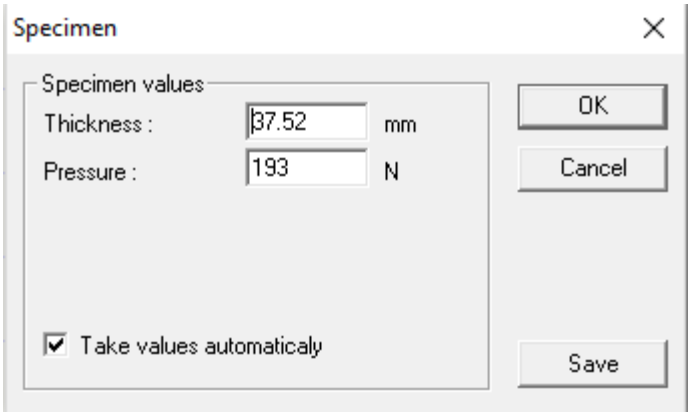


Att. 16: Logs papildus slāņa korekcijas aprēķinam.

- Atvērot izvēlni "Measurement", izvēlas "Start" - paradīsies attēlā 18 redzams logs, kurš norādīs pētāmā parauga biezumu, atskaitot gumijas paklāja ieguldījumu (jāatķeksē "Take values automatically"). Šo biezumu ir vērts pierakstīt un salīdzināt ar mērījumiem ar bīdmēru.



Att. 17: Logs eksperimenta parametru ievadam.



Att. 18: Logs, kas norāda noteikto parauga biezumu un reakcijas spēku.

- Nospiežot "OK", nonāk pie nākamā loga, kurā nospiež "Immediate start". Pēc īsa brīža sāksies mērījums. Ja vēlas novērot siltuma plūsmu līdzsvara iestāšanos, var izvēlnē "View" atrast "Graphics" - tas parādīs temperatūras un siltuma plūsmas blīvuma grafikus abām sensoru platēm. Par datu apstrādi nav jārūpējas, jo mērījums ir ļoti ilgs, un datus pēc tā beigām apstrādās un atsūtīs studentam darba vadītājs.

5.2 Mērījumi ar C-Therm iekārtu

Kaut arī pati C-Therm iekārta ir elegants teorētiskā un inženiertehniskā darba apvienojums, mērījumu veikšana ar šo iekārtu ir vienkārša. Papildus aprakstam šajā nodaļā, C-Therm vadības programmā ir implementēts User Guide.

Kā iepriekš minēts, siltumvadītspējas un siltumietilpības mērījumus ar šo iekārtu nepieciešams veikt materiāliem, kuri tiek mērīti ar Taurus instrumentu - šim nolūkam ir sagatavoti mazāki šo materiālu paraugi ar zināmiem blīvumiem (sk. pielikumu kursa vietnē E-studijās).

Lai arī teorētiski ir nepieciešama viena kalibrācijas līkne, mērījumu precizitātes nodrošināšanai ir izveidotas materiālu grupas, kurām katrai ir sava instrumenta kalibrācija. Laboratorijas darbā pieejamās materiālu grupas un to efūzijas un siltuma vadīšanas koeficientu vērtības pieejamas tabulā 2.

Tabula 2: Materiālu grupas un mērījumu apgabali

Klase	$\lambda_{min}, \frac{W}{m \cdot K}$	$\lambda_{max}, \frac{W}{m \cdot K}$	$e_{min}, \frac{J}{m^2\sqrt{K \cdot s}}$	$e_{max}, \frac{J}{m^2\sqrt{K \cdot s}}$	Termopasta
Polimēri	0.13	1.2	570	1450	Jā
Keramika	1.1	29	1400	8600	Jā
Putas	0.04	0.12	50	290	Nē

"Jā" pēdējā kolonnā nozīmē, ka ir nepieciešams lietot termopastu (attēls 19), to plānā slānī uzklājot uz sensora. Pasta nepieciešama kontakta nodrošināšanai starp virsmu un pētāmo paraugu, jo gaiss ir labs izolators un jebkura gaisa sprauga var ievērojami ietekmēt mērījuma rezultātu. Putu grupas materiāli dabiski ir ar zemu siltuma vadīšanas koeficientu un pārsvarā izmanto mazus gaisa apgabalus kā izolējošu materiālu un tādējādi gaisa kontakts kļūdu nerada.

Att. 19: Termopasta un tās uzklāšana

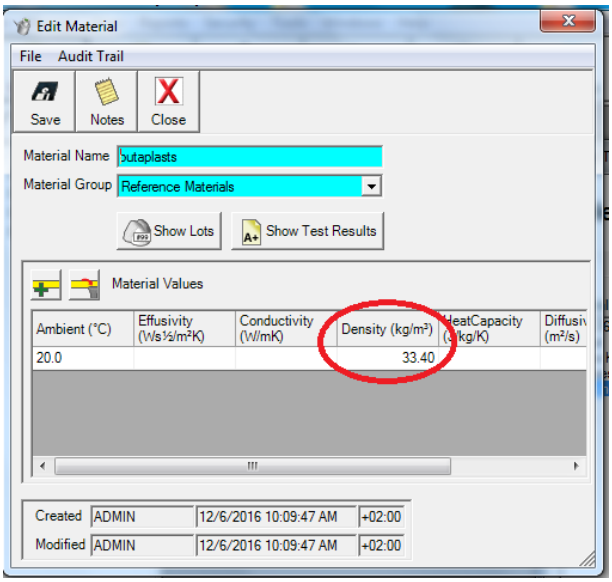
Tagad par mērīšanas procedūru:

- Ieslēdz datoru (ThinkPad notebook) un C-Therm iekārtu (zils bloks blakus datoram). Datora darbavirsmā atrod "TCi 4.0 - 1" un to atver. Programma pieprasīs Login - vienkārši nospiež "OK" (paroles nav).

- Interfeisa augšējā kreisajā stūrī atrod "New Test". Nospiežot to, izveido jaunu projektu "Studenti2018" un, to izvēloties, turpina.

- Programma piedāvās izvēlēties testa metodi - šeit izvēlas materiālu grupu, atbilstoši paraugiem, kuriem veic mērījumus ar C-Therm un Taurus. Svarīgi to izdarīt pareizi, jo katrai materiālu grupai ir sava kalibrācijas līkne, kas palīdz noteikt gan siltumvadītspēju, gan īpatnējo siltumietilpību.

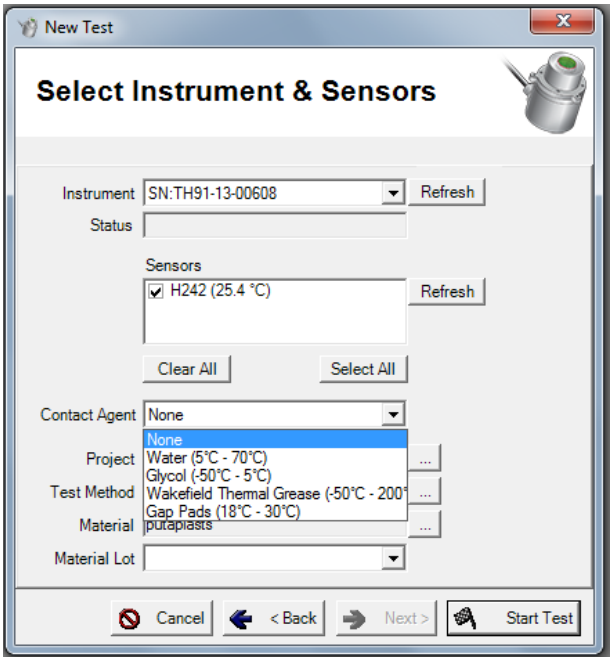
- Tālāk jāizvēlas materiāls - var paņemt kādu no esošajiem ar izvēlētām materiālam atbilstošu blīvumu, vai arī izveidot jaunu, ja neatrod vajadzīgo (ja ir šaubas, jautā darba vadītājam). Lai apskatītos materiāla īpašības, to izvēloties nospiež "Edit Material" (attēls 27). Lūgums nemainīt jau esošo materiālu ierakstus.



Att. 20: Materiāla īpašību iestatījumu logs.

- Pēc materiāla izvēles apstiprināšanas, nonāk izvēlnē "Select Instrument and Sensors" (attēls 21). Uzgaida neilgu laiku kamēr vadības iekārta "atrod" sensoru (to varēs redzēt loga augšējā daļā), tad loga apakšējā

daļā vēlreiz pārbauda info par izvēlēto materiālu un testa metodi. Ja tiek izmantota termopasta, tad kā "Contact Agent" izvēlas "Wakefield Thermal Grease". Testu pagaidām neuzsāk, jo vēl ir jāsagatavo paraugs un krāsns.



Att. 21: Izvēlētā materiāla, testa metodes, sensora un kontakta vielas pārskata logs.

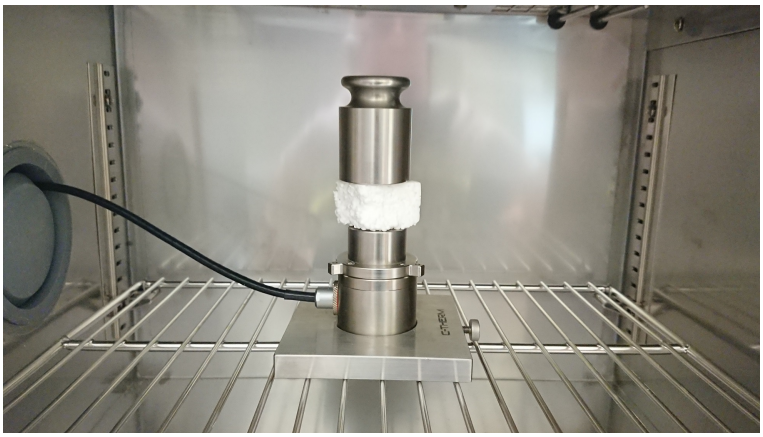
- Darbībai ar paraugiem uzvelk cimdus (attēls 22, tos nodrošina pasniedzējs), tad atver krāsni ("TPS Tenney", pa labi no datora), un atrod tajā sensoru un atsvaru (attēls 23). Pēc nepieciešamības, pirms parauga novietošanas uz sensora, uz sensora sildelementa uznes termopastu (iepriekš noņemot aizsargvāku) kā tas ir parādīts attēlā 19. Svarīgi ir neuznest pārāk daudz, jo pastai arī piemīt noteikta siltumietilpība.

- Tālāk uz sensora sildelementa novieto paraugu tā, lai tas sensoru pilnībā aizklāj, pēc kā uz parauga uzliek atsvaru. Uzmanīgi: paraugs pēc atsvara uzlikšanas mēdz lēni slīdēt pa sensora virsmu - pirms pāriet pie nākamā punkta, jāpārleicinās, ka paraugs ir stabilā stāvoklī (attēls 24).

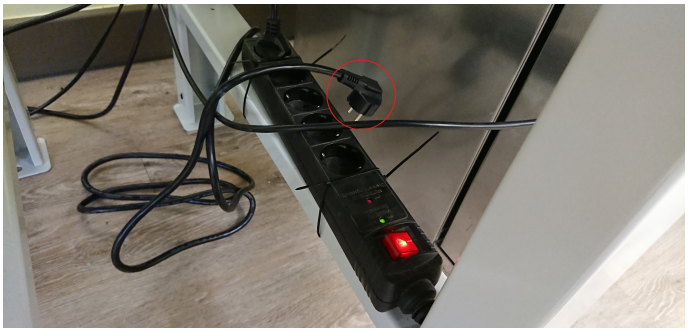
- Aizverot krāsni, to ieslēdz (atbilstošais vads ir zem galda, attēls 25). Skaņām, kuras nāk no krāsns, nav jāpievērš uzmanība, pēc īsa brīža

Att. 22: Cimdi darbībai ar paraugiem (pa kreisi) un ar termopastu (pa labi).

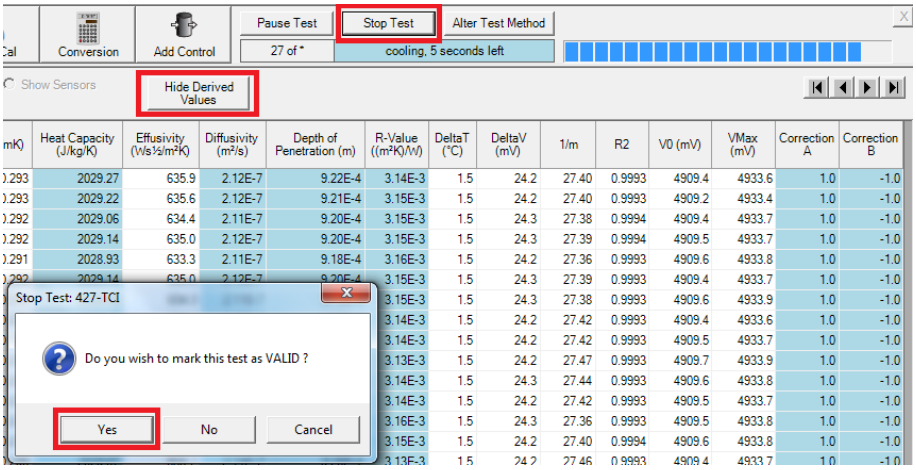
Att. 23: Krāsns un tajā esošie sensors un atsvars.



Att. 24: Mērījumam gatavs paraugs.



Att. 25: Krāsns barošanas pieslēgšana.



Att. 26: Mērījumu rezultātu saglabāšana.

tās pārtrauksies un krāsns būs gatava darbam. Uz krāsns augšējās malas būs redzama temperatūra tā kamerā. Tagad pāriet pie datora un nospiež "Start Test" (attēls 21).

- C-Therm mērījumus veic diezgan ātri. Ieteicams ļaut aparātam veikt 15-20 mērījumus. Lai beigtu mērījumus, nospiež "Stop Test" (attēls 26) un, parādoties logam ar "Do you wish to mark this test as valid?", izvēlas "Yes".

- Lai saglabātu rezultātus, nospiež "Show Derived Values" (atrodams tur, kur attēlā 26 ir "Hide Derived Values") un, atzīmējot visas rezultātu rindas, saglabā izvēlētās rindas ar "Save Rows As...". Piemēram, var saglabāt datus .csv formātā.

- Par darba beigšanu paziņo darba vadītājam. Saglabātie dati tiks nosūtīti studentiem iepriekš norādītos e-pastos.

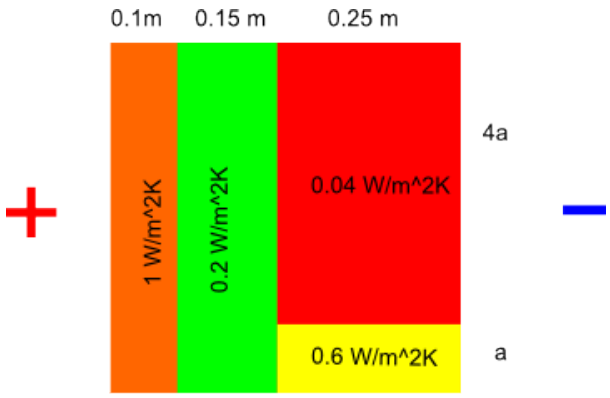
6 Kontroljautājumi

Gatavojoties darba aizstāvēšanai, ir vērts atbildēt uz sekojošiem jautājumiem:

1. Kuras no materiāla īpašībām nosaka, cik labs tas būs kā siltuma izolācijas materiāls?

2. Ar ko atšķiras termiskās pretestības definīcija no elektriskās pretestības definīcijas (nejaukt ar īpatnējām pretestībām)? Kādēļ ir tā atšķirība?

3. Aprēķināt kopējo termisko pretestību konstrukcijai, kura redzama attēlā (+ un − ir kārstā un aukstā robeža attiecīgi):



4. Kādēļ būvmateriālus mēdz veidot ar gaisa porām/spraugām?

5. Kādi lielumi nepieciešami Taurus iekārtai, lai noteiktu parauga termisko pretestību?

6. Kāds temperatūras sadalījums ir sagaidāms Taurus iekārtā materiālā starp tās platēm brīdī, kad ir nostabilizējusies siltuma plūsma?

7. Kādiem materiāliem un kāpēc ir jāizmanto mērījumiem gumijas paklājs Taurus iekārtā un termopasta C-Therm sensoram?

8. Vai Taurus iekārtai līdzsvara stāvoklī būs vienāda lieluma plūsmas uz abām platēm? Kāpēc?

9. Darbībai ar C-Therm iekārtu un paraugiem izmanto cimdus, pat ja termopasta nav nepieciešama - kāpēc?

10. Ja novēro termometru blakus Taurus iekārtai, tad darba gaitā var pamanīt, ka telpā temperatūra pieaug. Kādi tam ir iemesli?

11. Kāpēc koks ir anizotrops materiāls? Kāda ir atšķirība starp anizotropu un nehomogēnu materiālu?

12. No kādiem fizikāliem apsvērumiem var iegūt siltumvadīšanas vienādojumu (1)?

13. Kā vienu no izrēķinātiem parametriem rezultātu apkopojumā C-Therm vadības programma norāda "Depth of Penetration" jeb siltuma iespiešanas dziļumu. Ko nozīmē šis radītājs? Kā to var noteikt teorētiski?

14. Kāda fizikālā interpretācija ir materiāla efūzivitātei? Ar ko tā būtiski atšķiras no difūzijas koeficienta? Kāpēc efūzivitāte ir aditīvs lielums?

15. Kādi faktori nosaka neprecizitāti C-Therm un Taurus iekārtu mērījumos?

Par vērtēšanu: Atzīmi 10 iegūst, ja aizstāvēšanas laikā atbild uz visiem kontroljautājumiem. Otrs veids kā iegūt augstāko atzīmi ir izpildīt 3. papilduzdevumu - tādā gadījumā darba vadītājs "neieskaitīs" neatbildētus sarežģītākus jautājumus. Ja ir neatbildēti daži jautājumi un nav izpildīts papilduzdevums, students joprojām var iegūt 10, ja parāda, ka brīvi orientējas laboratorijas darbā apskatīto procesu matemātiskajā aprakstā.

Par papilduzdevumu: atskaitot sava koda rakstīšanu, students var izmantot komerciālas paketes COMSOL Multiphysics un ANSYS, kuras ir pieejamas laboratorijas korpusa 3. stāva datorklasē, vai arī instalēt LU licencēto ANSYS savā datorā (var arī izmantot ANSYS Student no ANSYS mājaslapas).

Literatūras saraksts

[1] Emanuel, M. ,2006 Effusivity Sensor Package (ESP) System for process monitoring and control Proceedings of the 28th International Thermal Conductivity Conference 28:256–268

[2] Mathis, N., Chandler, C. Direct thermal conductivity measurement technique, Patent US 6676287 B1, 2004.

[3] C-Therm Technologies Thermal Conductivity Evaluation Report

[4] Mathis, N. TCi User Manual

[5] C-Therm Technologies TCi Thermal Conductivity Analyzer Training and Installation

7 Pielikumi

7.1 Siltumvadīšanas vienādojuma (1) izvedums

Apskatīsim kāda patvaļīga materiāla (var arī būt anizotrops/nehomogēns) apgabalu D. Siltuma daudzums tajā var mainīties divos veidos - vai nu to ģenerē iekšējie avoti, vai arī tas tiek pārnests caur apgabala robežu ∂D (pieņem, ka ∂D nešķērso pati sevi un ir nepārtraukta, bet D ir vienkārši sakarīgs). Tas nozīmē, ka kopējā siltuma Q daudzuma izmaiņa apgabalā būs

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)_{\partial D} + \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)_{D} \tag{33}$$

Ja apskata patvaļīgu punktu iekš D, tad tajā siltuma blīvuma $\tilde{q}$ izmaiņas ir saistītas ar temperatūras izmaiņām sekojoši:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t} = c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

Pagaidām neņemot vērā konvekciju, saskaņā ar Furjē likumu siltuma plūsmas blīvumu caur ∂D nosaka temperatūras gradients uz ∂D:

$$\vec{q} = -\lambda\nabla T \tag{35}$$

un savukārt iekšējos siltuma avotus nosaka siltuma avota blīvuma funkcija f (piemēram, šī darba ietvaros, tā var aprakstīt Džoula siltumu, kas izdalās dēļ tā, ka caur materiālu plūst strāva).

Tad iznāk, ja patvaļīgā D punktā siltuma blīvuma izmaiņas nosaka

$$c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\vec{q}\cdot\vec{n} + f \tag{36}$$

kur $\vec{n}$ ir ∂D normālvektors. Mīnusa zīmi plūsmas loceklī nosaka tas, ka par normālvektoru tiek uzskatīta ārējā normāle, kas nozīmē, ka plūsmai tās virzienā jābūt negatīvai, jo no D tiek aiznests siltums, savukārt reizinājums $\vec{q}\cdot\vec{n}$ bez šīs korekcijas būtu pozitīvs. Integrējot ieguldījumus visiem D punktiem tā iekšpusē un virsmā, ievietojot (35) iekš (36), var iegūt (33) atklātā formā:

$$\int_D c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,dV = \int_{\partial D}\lambda\nabla T\vec{n}\,dS + \int_D f\,dV \tag{37}$$

Var redzēt, ka plūsmas locekļa integrālis ir citādas kārtas nekā pārējie - to var apiet, izmantojot Ostrogradska-Gausa teorēmu (Matemātiskā analīze III):

$$\int_{\partial D}\vec{a}\vec{n}\,dS = \int_D \nabla\vec{a}\,dV \tag{38}$$

kur $\vec{a}$ ir vektorlauks, kura komponenšu atvasinājumi pēc jebkuras koordinātes visā D pieņem galīgās vērtības. Tas dod

$$\int_{\partial D} \lambda \nabla T \vec{n}\, dS = \int_D \nabla(\lambda \nabla T)\, dV \tag{39}$$

un rezultātā, pārnesot visus (37) locekļus kreisajā pusē, iegūst

$$\int_D \left(c\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \nabla(\lambda \nabla T) - f \right) dV = 0 \tag{40}$$

Jāatceras, ka (40) tika izvests patvaļīga izmēra D. Saspiežot D tilpumu V līdz kāda tam piederošā punkta $\vec{r_0}$ ϵ-apkārtnes izmēriem, iegūst

$$\lim_{R_V \to \epsilon} \int_D \left(c\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \nabla(\lambda \nabla T) - f \right) dV = 0 \tag{41}$$

taču tad, kad tilpuma raksturīgais izmērs R_V tiecas ϵ, integrālis ir vienkārši vienāds ar zemintegrāļa izteiksmi punktā $\vec{r_0}$:

$$c\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \nabla(\lambda \nabla T) - f = 0 \tag{42}$$

jeb, pārrakstot ierastā veidā:

$$c\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \nabla(\lambda \nabla T) + f \tag{43}$$

Apskatot (41) formālāk, tas ir vienāds ar

$$\int_D \left(c\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \nabla(\lambda \nabla T) - f \right) \delta(\vec{r} - \vec{r_0})\, dV = 0 \tag{44}$$

jo dotajā robežā tilpums tiecas punktam. Šeit $\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$ ir Dīraka delta funkcija, kuras neformāla definīcija ir

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r_0} \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r_0} \end{cases} \tag{45}$$

ar īpašību

$$\int_{R^n} \delta(\vec{r} - \vec{r_0})\, dV = 1;\ \vec{r_0} \in R^n \tag{46}$$

kur R^n ir n-dimensiju Eiklīda telpa. Definīcija (45) un (46) noderēs arī tālāk, pielikumā 2.

Atgriežoties pie (43) un ņemot vērā, ka tas ir spēkā jebkuram patvaļīga D punktam, izriet, ka tas ir spēkā jebkuram apgabalam, kura virsma nešķērso

pati sevi un ir nepārtraukta. Tagad ievērosim to, ka papildus siltuma vadīšanai ir iespējama arī konvekcija, kur vielas masa pārvietojas un, pa cik tai piemīt noteikta siltumietilpība, tai pārvietojoties ar to tiek pārnests arī tajā esošais siltuma daudzums. Tas nozīmē, ka ja novēro kādu bezgalīgi mazu vielas tilpumu, tam ir laikā mainīgas koordinātes un temperatūra ir saliktā funkcija $T(\vec{r}(t), t)$. Apskatīsim (43) kreiso pusi: gadījumā, ja vielā ir nenulles ātruma lauks, Dekarta ortogonālā koordinātu sistēmā tā ir vienāda ar

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{47}$$

kur koordināšu atvasinājumi pēc laika ir ātrumi atbilstošajos virzienos un tad ir skaidrs, ka otrais (47) labās puses loceklis ir nekas cits, ka ātruma un temperatūras gradienta vektoru skalārais reizinājums, kas dod

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T \tag{48}$$

un tagad siltumvadīšanas vienādojums (43) izskatās sekojoši:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T \right) = \nabla(\lambda \nabla T) + f \tag{49}$$

Izdalot abas puses ar $c\rho$, iegūst

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T = \frac{\nabla(\lambda \nabla T)}{c\rho} + g \tag{50}$$

kur $g = f/(c\rho)$. Gadījumā, ja materiāls ir homogēns un izotrops, iegūst vienādojumu (1), jo tad nabla operators neiedarbojas uz λ.

7.2 Stefana-Bolcmaņa likuma (2) izvedums no Planka formulas

No bakalaura programmas kursiem Optika un Kvantu fizika, students varētu būt pazīstams ar Planka formulas izvedumu un principiem, no kuriem tā tika iegūta:

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{51}$$

Tā nosaka absolūti melnā ķermeņa starojuma jaudu noteiktā frekvencē viena steradiāna telpiskā leņķī uz tā virsmas laukuma vienību. Tas nozīmē, ka lai noteiktu starojuma intensitāti, jāintegrē (51) pa visām iespējamām frekvencēm ($\nu \in R$) un telpiskiem leņķiem (tas ir, visā 4π telpā) sfēriskajās koordinātēs. Ņemot vērā, ka absolūti melnie ķermeņi pakļaujas Lamberta likumam (Optikas kurss), iegūst

$$I(T) = \frac{2h}{c^2} \int_R \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \tag{52}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi \tag{53}$$

$$I(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_R \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \tag{54}$$

Ieviešot $x = (h\nu)/(kT) \Rightarrow dx = (hd\nu)/(kT)$, iegūst

$$I(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_R \frac{x^3}{e^x - 1} dx = CT^4 \tag{55}$$

kur C ir pagaidām vēl nezināmas formas konstante, bet jau esam ieguvuši fizikāli svarīgu atziņu par starojuma jaudas atkarību no absolūti melnā ķermeņa virsmas temperatūras.

Ja vēlas atrast konstanti C, kura pagaidām ir

$$C = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \int_R \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \cdot \Phi \tag{56}$$

tad ir jāizrēķina integrālis Φ, ko var izdarīt dažādos veidos, divi acīmredzamākie no kuriem ir izmantot Zeta funkcijas definīciju, vai arī integrēt Φ kompleksā plaknē. Ņemot vērā, ka abi ir ārpus fizikas bakalaura programmas matemātikas kursu apskatītās vielas, un ka Φ aprēķins nesniegs studentam jaunas, šim darbam aktuālas atziņas, aprēķina gaita šeit netiek rādīta. Ieinteresēts students ir aicināts jautāt par šo darba vadītājam.

7.3 Grīna funkcijas izvedums problēmai (16)

No kursa Lineārā algebra un analītiskā ģeometrija II students varētu būt pazīstams ar diferenciālā operatora jēdzienu un saprast, ka tas ir lineārs. Tas ir svarīgi, jo Grīna funkcija, pēc definīcijas, ir tāda funkcija $G(\vec{r}, \vec{r_0})$, kur $\vec{r_0}$ ir kāds punkts Eiklīda telpā, kas ir sekojošās problēmas atrisinājums:

$$L(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r_0}) = \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \tag{57}$$

kur $L(\vec{r})$ ir diferenciāloperators, kas varētu būt, piemēram, vienkārši pirmais atvasinājums pēc kādas no koordinātēm. Tas var būt arī salikti operatori, tādi kā Laplasa Δ, vai vektoriālie operatori, tādi kā nabla ∇.

No šīs definīcijas Grīna funkciju operatoram var interpretēt kā sistēmas (kuru raksturo $L(\vec{r})$ "atsauci" uz punktveida avotu, kurš ir novietots punktā $\vec{r_0}$. Tas nozīmē, ka ja avots ir uzdots kāda apgabalā D ar sadalījuma funkciju $g(\vec{r}-\vec{r_0})$ (fizikāli tā, piemēram, var būt jauda), tad problēma tiek noformulēta kā

$$L(\vec{r})u(\vec{r}) = g(\vec{r} - \vec{r_0}) \tag{58}$$

kur $u(\vec{r})$ ir nezināmā funkcija, un tad atrisinājumu dod Grīna funkcijas superpozīcija visos apgabala D punktos ar svaru, kuru uzdod avota funkcija $g(\vec{r} - \vec{r_0})$:

$$u(\vec{r}) = \int_D g(\vec{r} - \vec{r_0})G(\vec{r}, \vec{r_0})\ d\vec{r_0} \tag{59}$$

kur $d\vec{r_0}$ apzīmē integrēšanu pa visiem punktiem iekš D.

Šis ir ekstrapolējams uz parciāldiferenciālvienādojumiem vispār, un uz problēmu (16) konkrēti - tikai šajā gadījumā problēma ir viendimensionāla, un $\vec{r_0} \to x_0 = 0$, bet Grīna funkcija ir atkarīga arī no laika, un tātad ir formā $G(x, t)$. Ja apgabals ir ierobežots un galīgs, tad robežnosacījumiem jābūt homogēniem un lineāriem, lai izmantotu šo pieeju (piemēram, saskaņā ar Stefana-Bolcmaņa likumu (2), siltuma starojuma jauda ir proporcionāla T^4, tāpēc ja robeža ir starotājs, Grīna funkcijas metodi pielietot nevar, jo atbilstošais robežnosacījums ir nelineārs). Apskatīsim problēmas (16) analogu bezgalīgā intervālā - tad nav definēti robežosacījumi (nav 16b) un (16d) vietā ir $x \in R;\ t > 0$:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g \tag{60a}$$

$$T(x, 0) = 0 \tag{60b}$$

$$x \in R;\ t > 0 \tag{60c}$$

Tad lai atrastu $G(x,t)$, jārisina apakšproblēma

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x)\delta(t) \tag{61a}$$

$$x \in R;\ t \in R \tag{61b}$$

kur $\delta(x)\delta(t)$ uzdod momentānu avotu punktā $x = 0$.

Iemesls, kāpēc darba autors pāriet uz analogu problēmu bezgalīgā intervālā, ir ka šī uzdevuma risināšanai var izmantot Furjē transformāciju, ar kuru students, atšķirībā no kosīnusa transformācijas, varētu būt pazīstams pēc kursa Matemātiskās fizikas metodes I. Transformācijas lietošanu motivē tas, ka (60) un (61) nav definēti robežnosacījumi, un nevar pielietot mainīgo atdalīšanu (jo nevar definēt Šturma-Liuvila problēmu). Pielietojot abām (61a) pusēm Furjē transformāciju, kuras definīcija ir

$$\mathscr{F}_{x\to k}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f(x) e^{-ikx} dx = F(k) \tag{62}$$

kur R apzīmē integrēšanu pa visu reālu skaitļu asi, iegūst sekojošu (pieņemot, ka $G(x,t)$ ir gluda):

$$\mathscr{F}_{x\to k}\left(\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_{x\to k}\left(G(x,t)\right) = \frac{\mathrm{d}F(k,t)}{\mathrm{d}t} \tag{63}$$

$$\mathscr{F}_{x\to k}\left(a^2 \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2}\right) = a^2 \int_R G''(x,t)_x e^{-ikx}\ dx = a^2 I \tag{64}$$

tikt vaļā no otrā atvasinājuma var divreiz parciāli nointegrējot, turot prātā, ka $G(x,t)$ no fizikāliem apsvērumiem apmierina

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x,t) = 0 \tag{65}$$

Tad ja $dv = G''(x,t)dx \Rightarrow v = G'(x,t)$ un $u = e^{-ikx} \Rightarrow du = -ike^{-ikx}dx$, iegūst

G'(x,t) - ?

"+". Jo uv - vdu

$$I = e^{-ikx} G\ (x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - ik \int_R e^{-ikx} G'(x,t) dx \tag{66}$$

kur pirmais loceklis, saskaņā ar (65), ir nulle. Otro locekli parciāli integrējot iegūst, ka ja $dv = G'(x,t)dx \Rightarrow v = G(x,t)$ un $u = e^{-ikx} \Rightarrow du = -ike^{-ikx}dx$, tad

$$I = -ike^{-ikx} G(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + (ik)^2 \int_R e^{-ikx} G(x,t) dx \tag{67}$$

Šeit pirmais loceklis ir nulle, bet otrais, saskaņā ar (62), ir vienāds ar $-k^2$ reiz $G(x,t)$ Furjē attēls, un tātad

$$\mathscr{F}_{x\to k}\left(a^2\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2}\right) = -a^2k^2F(k,t) \tag{68}$$

Furjē transformācija avota funkcijai, atceroties Dīraka delta funkcijas definīciju (45) un (46), ir

$$\mathscr{F}_{x\to k}\left(\delta(x)\delta(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \delta(x)\delta(t)e^{-ikx}dx = \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}} \tag{69}$$

Rezultātā parciāldiferenciālvienādojuma vietā iegūst parasto, un problēma (61) vienkāršojas līdz

$$\frac{\mathrm{d}F(k,t)}{\mathrm{d}t} = -a^2k^2F(k,t) + \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}};\ t\in R \tag{70}$$

Homogēnās daļas atrisinājums ir:

$$F(k,t) = C(t)e^{-a^2k^2t} \tag{71}$$

kur $C(t)$ var atrast ar konstanšu variācijas metodi, ievietojot (71) iekš (70), iegūstot

$$-a^2k^2F(k,t) + C'(t)e^{-a^2k^2t} = -a^2k^2F(k,t) + \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi}} \tag{72}$$

no kurienes izsakot $C(t)$ un integrējot pēc t, iznāk, saskaņā ar (46), sekojošais:

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \delta(t)e^{a^2k^2t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{73}$$

$$F(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2k^2t} \tag{74}$$

Beidzot, Grīna funkciju problēmai (60) iegūst aprēķinot inverso Furjē transformāciju attēlam (74):

Šeit varbūt ir domāts x nevis r?
Arī skatīt turpmāk

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-a^2k^2t}\cdot e^{ikr}dk = \frac{1}{2\pi}\cdot I \tag{75}$$

Integrāļa I aprēķināšanai izmantosim ļoti skaistu un noderīgu paņēmienu. Diferencēsim I pēc x un, izmantojot to, ka zemintegrāļa funkcija ir gluda pēc visiem parametriem un mainīgiem, ienesīsim diferenciāloperatoru iekš integrāļa:

v=

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_R \frac{\partial}{\partial x} e^{-a^2k^2t} \cdot e^{ikr} dk = i \int_R k e^{-a^2k^2t} \cdot e^{ikr} dk = I_2 \tag{76}$$

I_2 var integrēt parciāli ar $u = ie^{ikx} \Rightarrow du = -xe^{-ikx}dk$ un $dv = ke^{-a^2k^2t}dk \Rightarrow -e^{-a^2k^2t}/(2a^2t)$, kas dod

$$I_2 = \frac{1}{2a^2t} e^{-a^2k^2t} \cdot e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_R \frac{x}{2a^2t} e^{-a^2k^2t} e^{ikx} dk \tag{77}$$

kur pirmais loceklis ir vienāds ar nulli, bet otro var pārrakstīt, ņemot vērā (75), kā

$$I_2 = -\frac{x}{2a^2t} I \tag{78}$$

un, ievietojot to (76), var iegūt vienādojumu

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{x}{2a^2t} I \tag{79}$$

kura atrisinājums, mainīgos atdalot, ir

$$I = C \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = G(x,t) \tag{80}$$

bet no (75) izriet, ka

$$G(0,t) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-a^2k^2t} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_R e^{-(a\sqrt{t}k)^2} d(a\sqrt{t}k) \tag{81}$$

$$G(0,t) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_R e^{-z^2} dz = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \cdot I = C \tag{82}$$

Varbūt vajag citu apzīmējumu...
I ir viss, kas ir aiz 1/(2pi)

Šeit integrāli I var izrēķināt, ja iedomājas, ka:

$$I = \int_R e^{-z^2} dz \Rightarrow I^2 = \left(\int_R e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_R e^{-y^2} dy \right) \tag{83}$$

$$I^2 = \int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{84}$$

un, pārejot polārās koordinātēs, kur $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ un $dxdy = rdrd\phi$, var viegli noteikt I^2:

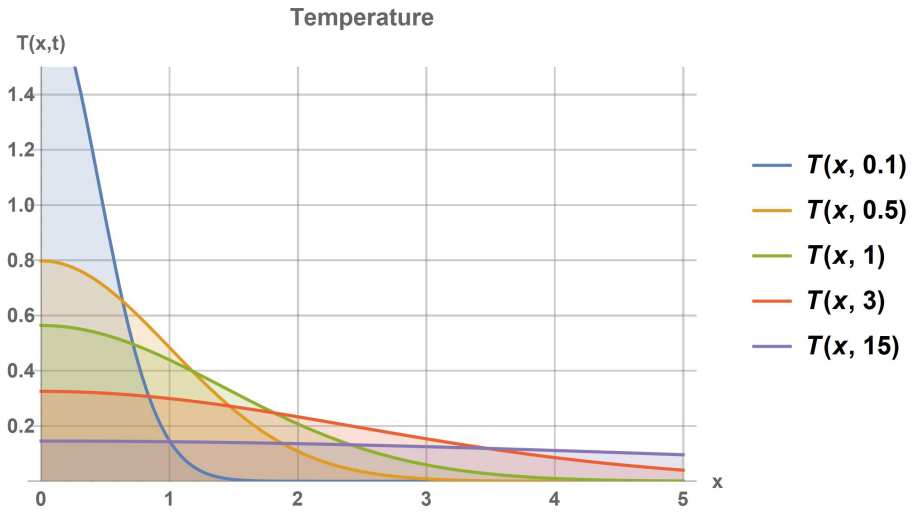
$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\phi = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi \tag{85}$$

Beidzot, šo rezultātu ievietojot iekš (82) un atgriežoties pie (80), iegūst Grīna funkciju problēmai (16).

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{86}$$

Atceroties, ka sākotnējā problēma eq:mathproblem ir definēta pustelpai ar izolāciju punktā $x = 0$, kurā atrodas avots, ir no fizikāliem apsvērumiem skaidrs, ka ja siltums nevar plūst caur izolāciju, tad pustelpā tiek pārnests divreiz lielāks siltuma daudzums laika vienībā, jo pretēja gadījumā prom no $x = 0$ simetriski plūstu divreiz mazākas plūsmas, kas atbilst tikko atrastai $G(x,t)$. Līdz ar to, Grīna funkcija pustelpai ir vienkārši $2 \cdot G(x,t)$:

$$G_{x>0}(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{87}$$



Att. 27: $G(x,t)/c\rho$ siltumvadīšanas vienādojumam pusbezgalīgā intervālā. Šeit $(\lambda, \rho, c) = (1, 1, 1)$.

7.4 Problēmas (16) atrisinājums visam intervālam, izmantojot Grīna funkciju (17)

VĒL NAV IEVIETOTS - PAGAIDĀM, JA INTERESĒ, PRASIET DARBA VADĪTĀJAM

7.5 Problēmas (16) atrisinājums visam intervālam, izmantojot kosīnusa transformāciju

VĒL NAV IEVIETOTS - PAGAIDĀM, JA INTERESĒ, PRASIET DARBA VADĪTĀJAM