

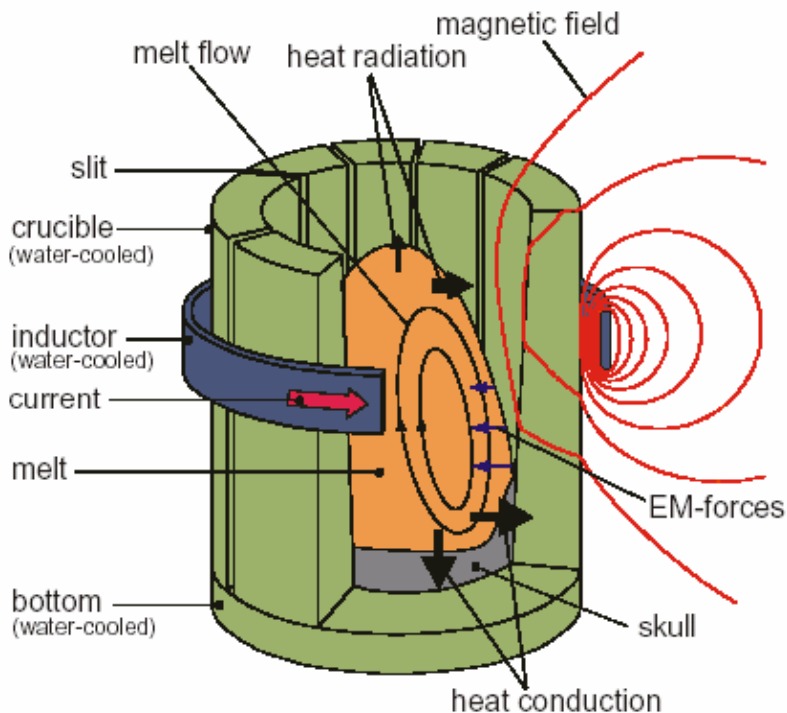
Augstfrekvences strāvu sadalījumu pētīšana uz vadošu objektu virsmām

1. Darba mērķi

Pirms darba students iepazīstas ar laboratorijas darbā novērojamo augstfrekvences strāvu inducēšanas uz vadošu objektu virsmām skinslāņa veidā teorētisko pamatojumu. Darbā tiek ar cilindriskā induktora palīdzību radīts mainīgs vidējas līdz augstas frekvences magnētiskais lauks, kas inducē induktorā ievietotā vadošā čaulā – tīģeļa modelī ar sekcijām virpuļstrāvas. Ar magnētiskā lauka sensora palīdzību tiek pētīta magnētiskā lauka indukcijas čaulas iekšpusē atkarība no sekciju skaita un strāvas frekvences. Tiek veikts salīdzinājums ar datormodelēšanas un tuvinātas analītiskas analīzes rezultātiem.

2. Teorētiskais apskats

2.1. Ievads



2-1. att. Aukstā tīģeļa iekārtas shematiska uzbūve un fizikālie aspekti.

Rūpniecībā dažādu materiālu (metālu un to sakausējumu, oksīdu u.c.) kausēšanai plaši tiek pielietota t.s. induktīvā metode. Šajā metodē tiek izmantots induktors, kas vienkāršākajā gadījumā sastāv no neliela vijumu skaita un kam pieslēgts vidējas (piemēram, 10 kHz) vai augstas frekvences maiņspriegums. Induktorā rodas mainīgs magnētiskais lauks, un, ja šādā laukā ievieto elektrovadošu objektu, saskaņā ar elektromagnētisko indukciju tajā tiek ierosinātas virpuļstrāvas. Virpuļstrāvu rezultātā elektrovadošais objekts sasilst un pie noteiktiem apstākļiem (pietiekamas induktora jaudas) to var arī izkausēt.

Induktīvajā kausēšanā ir nepieciešams tīģelis, kas saturētu izkusušo materiālu un pats neizkustu. Piemērots materiāls ir dažādas keramikas, kam piemīt augsta kušanas temperatūra. Taču ne vienmēr tās ir iespējams izmantot. Piemēram, kausējot agresīvus metālu sakausējumus, no keramikas tīģeļa var atdalīties graudiņi, kas neizkūst un paliek kausējumā un samazina iegūtā materiāla mehānisko izturību. Lai to novērstu, izmanto t.s. aukstā tīģeļa metodi.

Šajā metodē tīģelis tiek izgatavots nevis no keramikas, bet metāla, piemēram, vara. Vara nokļūšana kausējumā ir mazāk bīstama, jo parasti tā kušanas temperatūra ir zemāka nekā kausējamam materiālam, tāpēc tā daļiņas izšķīst kausējumā, un neveidojas lielāka izmēra ieslēgumi. Tomēr, lai tīģelis, kas satur kausējumu ar temperatūru, kas ir augstāka par tīģeļa materiāla kušanas temperatūru, neizkustu, tas ir intensīvi jādzesē. Tādēļ tīģelī tiek iestrādāti kanāli, pa kuriem plūst ūdens, kas aizvada siltumu. Bez tam metāla tīģeļa gadījumā jāņem vērā vairāki papildus apstākļi. Pirmkārt, arī pašā tīģeļa materiālā tiek inducētas virpuļstrāvas, kas rada papildus siltuma izdalīšanos. Sasilšana virpuļstrāvu dēļ ir mazāka, ja tīģeli izgatavo no metāla ar augstāku elektrovadītspēju.

Otrkārt, lai augstfrekvences magnētiskais lauks nokļūtu tīģeļa iekšpusē, nevis tikai plānā slānī uz tā ārējās virsmas, tajā nepieciešams izveidot spraugas. Praksē tīģelī tiek izveidots noteikts skaits vertikālu spraugu, kas tiek aizpildītas ar kādu nemetālisku materiālu. Ilustrācija aukstā tīģeļa metodei redzama 2-1. att.

Aukstā tīģeļa metodi izmanto, piemēram, titāna un alumīnija sakausējuma (TiAl) iegūšanai. TiAl kausējums ir ļoti agresīvs un ar augstu kušanas temperatūru, tādēļ nav iespējams izmantot keramikas tīģeli, ja nepieciešama augsta materiāla tīrība. TiAl ir viegls, mehāniski izturīgs, kā arī izturīgs pret koroziju. Šobrīd tas tiek galvenokārt izmantots sacīkšu automašīnu un lidmašīnas dzinēju detaļu, kā arī automašīnu izplūdes vārstu ražošanā.

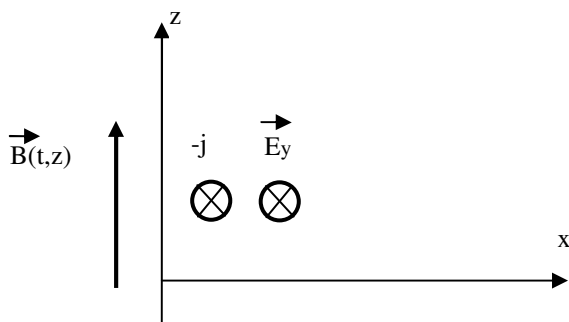
Šajā laboratorijas darbā tiks aplūkots neliela izmēra aukstā tīģeļa eksperimentāls modelis, kas paredzēts elektromagnētiskā lauka pētīšanai. Tiks analizēts virpuļstrāvu sadalījums tīģeļa materiālā un augstfrekvences magnētiskā lauka iespiešanās caur spraugām tīģeļa iekšpusē.

2.2. Skinefekts un magnētiskā plūsma skinslānī

Kvazistacionāra magnētiskais lauks pietiekami lielas frekvences gadījumā tiek „izspiests” no vadītāja tilpuma un koncentrējas slānī pie tā virsmas, kuru dēvē par

skinslāni. Šai parādībai, kuru sauc par virsmas efektu jeb skinefektu ir vispārīgs raksturs: līdzīgi pa vadītāja šķērs griezumam ir sadalītas arī šī lauka inducētās strāvas.

Šajā laboratorijas darba aprakstā tiek dots pilns skinslāņa risinājums bezgalīgā pustelpā ar konstantām materiāla īpašībām. Skinslānis tiek analītiski aprēķināts vadošā pustelpā ($x > 0$), pie kam tiek pieņemts, ka magnētiskā lauka indukcijas vektors ir vērsts z ass virzienā un mainās laikā harmoniski (skat. 2-2. att.). Tiek pieņemts, ka visi lielumi ir atkarīgi tikai no laika un koordinātes x . No Maksvela vienādojumiem tādā gadījumā izriet, ka inducētais elektriskais virpuļlauks un strāva ir vērsti gar y asi.



2-2. att. Skice skinslāņa biezuma analītiskam izvedumam.

Magnētiskā lauka dabu apskatāmajā pustelpā var aprakstīt ar sekojošajiem Maksvela vienādojumiem:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} = \vec{j}, \quad (1)$$

kur otrajā vienādojumā netiek ņemtas vērā nobīdes strāvas, pie kam $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Atceroties, ka

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (2)$$

vienādojumus varam pārrakstīt formā

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \mu \sigma E_y. \quad (3)$$

Atvasinot otrā vienādojuma abas puses pēc x koordinātes un tad tajā ievietojot pirmo vienādojumu, iegūstam

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (4)$$

Tā kā šim vienādojumam atrisinājumu meklējam kā harmoniskas laika funkcijas, tad varam lietot kompleksus mainīgos. Harmonisku, no laika atkarīgu magnētisko lauku var aprakstīt ar kompleksu izteiksmi:

$$B_C = B_{C0}(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad (5)$$

kur $B_{C0}(x)$ ir kompleksā amplitūda un ir atkarīga tikai no x koordinātes. Laikā periodiski mainīgā lauka eksponenciālais pieraksts ar imagināro vienību tiek lietots ērtības labad, jo šādai kompleksai funkcijai ērtāk ir veicamas atvasināšanas un citas matemātiskās darbības, kā arī pats pieraksts ir īsāks nekā lietojot trigonometriskās funkcijas. Tomēr jāatceras, ka fizikālo atrisinājumu nosaka tikai kompleksā atrisinājuma reālā daļa. Lai to iegūtu, varam veikt sekojošus pārveidojumus:

$$\begin{aligned} B_C &= B_{C0} e^{i\omega t} = (B_{C0,Re} + i \cdot B_{C0,Im}) \cdot (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \\ &= B_{C0,Re} \cos \omega t - B_{C0,Im} \sin \omega t + i \cdot B_{C0,Im} \cos \omega t + i \cdot B_{C0,Re} \sin \omega t \end{aligned} \quad (6)$$

Nemot šī lieluma reālo daļu, iegūstam dotajā telpas punktā x magnētiskā lauka atkarību no laika

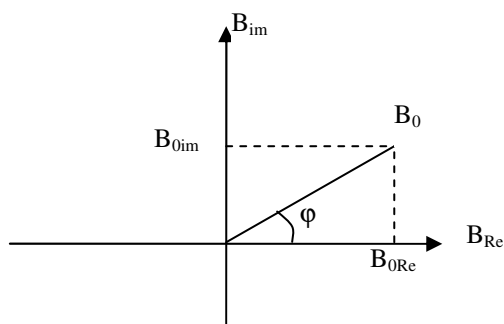
$$B(x, t) = B_{C0,Re}(x) \cdot \cos \omega t - B_{C0,Im}(x) \cdot \sin \omega t \quad (7)$$

Savukārt šo izteiksmi var pārrakstīt formā, izmantojot amplitūdu un sākuma fāzi

$$\begin{aligned} B(x, t) &= \sqrt{B_{C0,Re}^2 + B_{C0,Im}^2} \left(\frac{B_{C0,Re}}{\sqrt{B_{C0,Re}^2 + B_{C0,Im}^2}} \cos \omega t - \frac{B_{C0,Im}}{\sqrt{B_{C0,Re}^2 + B_{C0,Im}^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= \sqrt{B_{C0,Re}^2 + B_{C0,Im}^2} (\cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t) = B_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

Redzams, ka magnētiskā lauka amplitūda (ne kompleksā!) un sākuma fāze ir (skat 2-3. att.)

$$B_0(x) = \sqrt{B_{0Re}^2 + B_{0Im}^2}, \quad \varphi(x) = \arctan \frac{B_{C0,Im}}{B_{C0,Re}}. \quad (9)$$



2-3. att. Magnētiskā lauka amplitūda un fāze.

Ievietojot magnētisko lauku no kompleksās izteiksmes (2) vienādojumā (1), iegūstam vienādojumu kompleksajai amplitūdai $B_{C0}(x)$, kas satur tikai atvasinājumus no koordinātes x :

$$\frac{\partial^2 B_{C0}}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \sigma i \omega B_{C0}. \quad (10)$$

Atrisinājumu šim diferenciālvienādojumam meklē formā

$$B_{C0}(x) = B_B e^{\alpha x}, \quad (11)$$

kur komplekso konstanti B_B nosaka no robežnosacījumiem. Ja ērtībai pieņemam, ka materiāla robeža ir pie koordinātes $x = 0$, tad $B_{C0}(0) = B_B e^{\alpha \cdot 0} = B_B$, proti, kompleksā konstante B_B ir vienāda ar magnētiskā lauka komplekso amplitūdu uz materiāla robežas.

Tādejādi no (3) vienādojuma iegūstam

$$B_B \alpha^2 = \mu_0 \mu \sigma i \omega B_B. \quad (12)$$

Izpildot saīsināšanas darbības un izsakot α iegūstam

$$\alpha = \pm \sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega} \cdot \sqrt{i}. \quad (13)$$

Lai izrēķinātu \sqrt{i} , jāatceras komplekso skaitļu reizināšanas principi. Lietojot ģeometrisku interpretāciju, atceramies, ka komplekso skaitļu sareizināšanas gadījumā ir jāsareizina to moduļi un jāsaskaita to leņķi. Tādejādi

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (14)$$

Kāpinot šo izteiksmi kvadrātā viegli varam pārlicināties, ka rezultāts būs i . Tādejādi izteiksmi (5) vienādojumu varam pārrakstīt kā

$$\alpha = \pm \sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i). \quad (15)$$

Tā kā fizikālā jēga atrisinājumam ir tikai, ja α ir ar „-”, zīmi (ar „+” zīmi iegūst bezgalīgi augošu atrisinājumu ejot x ass virzienā), tad izteiksmi (11), jeb komplekso amplitūdu $B_{C0}(x)$, varam pārrakstīt sekojoši

$$B_{C0}(x) = B_B \exp \left[-\sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \cdot x \right]. \quad (16)$$

Tā kā B_B ir kompleksā amplitūda uz materiāla virsmas, un tā kā parasti ērtībai pieņem, ka ārējam magnētiskajam laukam, ko rada induktors, ir tikai reālā daļa atšķirīga no nulles, tad tālāk aplūkojam apakšgadījumu, ka

$$B_B = B_{B, \text{Re}} + i \cdot 0. \quad (17)$$

Aplūkojot atsevišķi tikai eksponenti un ievēdot apzīmējumu

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega}}, \quad (18)$$

ko sauc par skinslāņa biezumu, var veikt sekojošus pārveidojumus

$$\begin{aligned} \exp\left[-\sqrt{\mu_0 \mu \sigma \omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \cdot x\right] &= \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i) \cdot x\right] = \exp\left[-\frac{x}{\delta} - i \frac{x}{\delta}\right] = \\ &= \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \exp\left[-i \frac{x}{\delta}\right] = \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \left[\cos \frac{x}{\delta} - i \sin \frac{x}{\delta}\right] \end{aligned} \quad (19)$$

un komplekso amplitūdu $B_{c0}(x)$, varam pārrakstīt sekojoši

$$\begin{aligned} B_{c0}(x) &= (B_{B,Re} + i \cdot 0) \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \left[\cos \frac{x}{\delta} - i \sin \frac{x}{\delta}\right] = \\ B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \left[\cos \frac{x}{\delta} - i \sin \frac{x}{\delta}\right] &= \\ = B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \cos \frac{x}{\delta} - i \cdot B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \sin \frac{x}{\delta} \end{aligned} \quad (20)$$

Iegūstam no koordinātes atkarīgo komplekso amplitūdu, kurai ir atdalīta reālā un imaginārā daļa. Ir redzams, ka virsmas slānī ar biezumu δ magnētiskā lauka vērtība (gan reālai, gan imaginārai daļai) ir kritusies e reizes. Izmantojot izteiksmi (7) varam uzrakstīt atrisinājumu magnētiskajam laukam skinslānī

$$B(x, t) = B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \cos \frac{x}{\delta} \cdot \cos \omega t - B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \sin \frac{x}{\delta} \cdot \sin \omega t \quad (21)$$

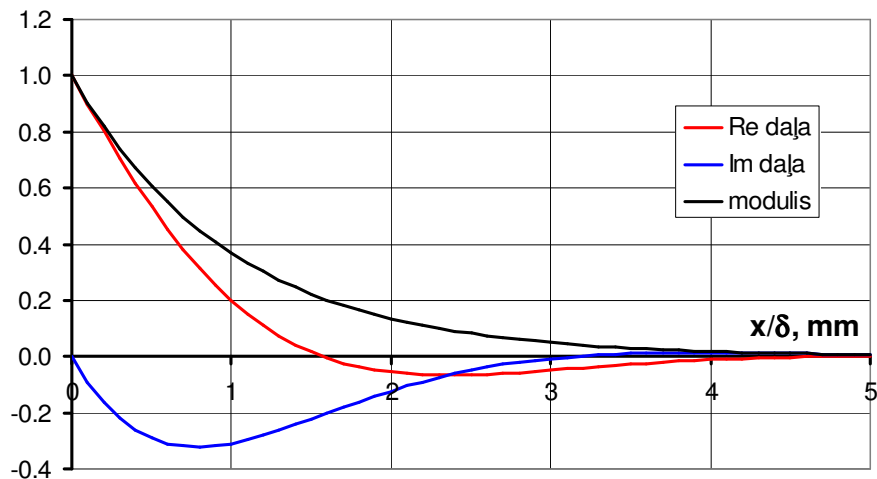
jeb

$$B(x, t) = B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \left(\cos \frac{x}{\delta} \cdot \cos \omega t - \sin \frac{x}{\delta} \cdot \sin \omega t\right). \quad (22)$$

Magnētiskā lauka svārstību amplitūdai (ne kompleksajai !!!) un fāzei iegūstam (skat. grafisku attēlojumu 2-4. att.)

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \sqrt{B_{0Re}^2 + B_{0im}^2} = \sqrt{\left[B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \cos \frac{x}{\delta}\right]^2 + \left[-B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \sin \frac{x}{\delta}\right]^2} = \\ &= B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \sqrt{\left[\cos \frac{x}{\delta}\right]^2 + \left[\sin \frac{x}{\delta}\right]^2} = B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right]. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\varphi(x) = \arctan \frac{-B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \sin \frac{x}{\delta}}{B_{B,Re} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right] \cdot \cos \frac{x}{\delta}} = \frac{-\sin \frac{x}{\delta}}{\cos \frac{x}{\delta}} = -\frac{x}{\delta} \quad (24)$$



2-4. att. Magnētiskais lauks materiālā ($B_{B,Re}=0$).

Lai noteiktu kopējo magnētiskā lauka plūsmu skinslānī, magnētiskā lauka reālā un imaginārā daļa ir jāintegrē pa koordināti x . Ērtāk to ir darīt kompleksajai amplitūdai Φ_{c0} un pēc tam atdalīt reālo Φ_{Re} un imagināro Φ_{Im} daļu:

$$\begin{aligned} \Phi_{c0} &= \\ &= \int_0^{\infty} B_{c0}(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} B_B \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i) \cdot x\right] \cdot dx = B_B \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i) \cdot x\right] \frac{-\delta}{1+i} \Big|_0^{\infty} =, \quad (25) \\ &= B_B \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i) \cdot x\right] \frac{-\delta}{1+i} = B_B \frac{\delta}{1+i} = B_B \frac{\delta(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} B_B \delta - i \frac{1}{2} B_B \delta \end{aligned}$$

un

$$\Phi_{Re} = \frac{1}{2} B_B \delta, \quad \Phi_{Im} = -\frac{1}{2} B_B \delta. \quad (26)$$

Redzam, ka nointegrēts pa dziļumu magnētiskais lauks dod plūsmu, kurai atšķirībā no magnētiskā lauka pie materiāla robežas ir gan reālā, gan imaginārā daļa. Tā kā tās pēc savas absolūtās vērtības ir vienādas, tad magnētiskā lauka plūsma skinslānī atšķiras fāzē no magnētiskā lauka pie materiāla virsmas par 45° . Par to var pārliecināties arī izmantojot (7) analoģu izteiksmi magnētiskā lauka plūsmai

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi_{Re} \cdot \cos \omega t - \Phi_{Im} \cdot \sin \omega t = \frac{1}{2} B_B \delta \cdot \cos \omega t + \frac{1}{2} B_B \delta \cdot \sin \omega t = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} B_B \delta \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \quad (27) \end{aligned}$$

jo

$$\varphi = \arctan \frac{\Phi_{\text{Im}}}{\Phi_{\text{Re}}} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Savukārt elektriskās strāvas blīvuma sadalījumu iegūstam no magnētiskā lauka sadalījuma, to atvasinot pēc koordinātes x , to darām, vispirms izmantojot komplekso pierakstu:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_{c0}(x)}{\partial x} &= \mu_0 \mu \cdot j_{c0}(x), \\ j_{c0}(x) &= -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(B_B \exp \left[-\frac{1}{\delta} (1+i) \cdot x \right] \right) = \mu_0 \mu B_B \frac{1}{\delta} (1+i) \exp \left[-\frac{1}{\delta} (1+i) \cdot x \right] = \\ &= \mu_0 \mu B_B \frac{1}{\delta} (1+i) \cdot \exp \left[-\frac{x}{\delta} \right] \cdot \left[\cos \frac{x}{\delta} - i \sin \frac{x}{\delta} \right] = \\ &= \mu_0 \mu B_B \frac{1}{\delta} \exp \left[-\frac{x}{\delta} \right] \cdot \left(\cos \frac{x}{\delta} + \sin \frac{x}{\delta} \right) + i \cdot \mu_0 \mu B_B \frac{1}{\delta} \exp \left[-\frac{x}{\delta} \right] \cdot \left(\cos \frac{x}{\delta} - \sin \frac{x}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

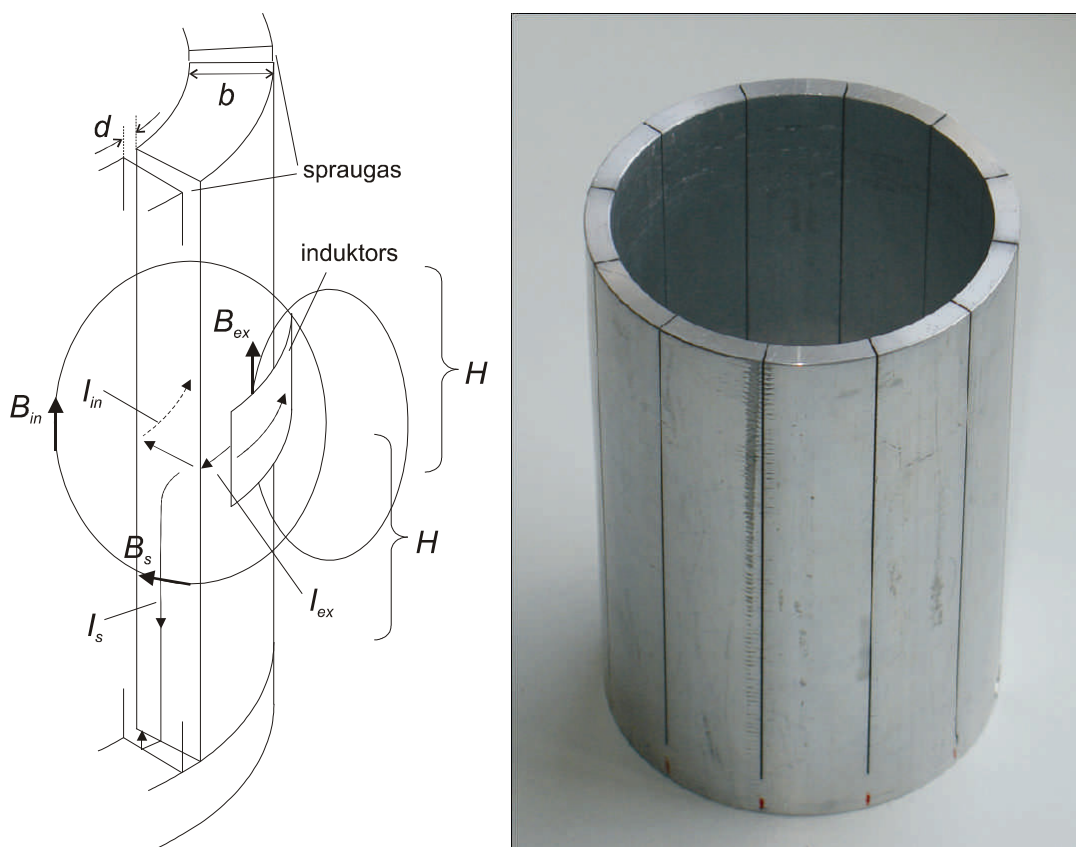
Iegūtās strāvas blīvuma kompleksās amplitūdas reālā un imaginārā daļas parāda, ka strāvas blīvums dilst līdzīgi kā magnētiskais lauks, atšķiras tikai oscilējošā reizinātāja fāze.

2.3. Vienkāršots aukstā tīģeļa matemātiskais modelis

Aukstā tīģeļa sienīnās izveidojas trīsdimensionāls virpuļstrāvu sadalījums, kuru vispārīgā gadījumā nevar noteikt ar analītiskām metodēm. Taču ir iespējams izveidot tuvinātu modeli, kas ļauj iegūt priekšstatus un vienkāršas kvantitatīvas sakarības par virpuļstrāvu sadalījumu un magnētisko lauku aukstā tīģeļa iekšienē, kā arī starp attiecību η starp magnētisko lauku B_{in} induktora vidū gadījumā, kad induktorā ir ievietots aukstais tīģelis, un magnētisko lauku B_{ex} induktora vidū, kad tīģelis nav ievietots, proti tā saucamo tīģeļa caurlaidību magnētiskajam laukam..

Aplūkojam fragmentu no aukstā tīģeļa (2-5. att.), ko veido viena tā sekcija. Sekcijas sienīnās biezums ir b , spraugas platums abās pusēs ir d . Visas sekcijas apakšējā daļā ir savienotas. Augstumā H no apakšējās sienas ir novietots cilindriskas formas induktors ar aptuvenu augstumu H , kurā plūst augstfrekvences maiņstrāva.

Induktors inducē uz ārējās sekcijas virsmas aptuveni H platā joslā strāvu I_{ex} , kas ir pretēja fāzē induktorā plūstošajai strāvai. Tā rada magnētisko lauku pie aukstā tīģeļa virsmas B_{ex} . Sasniedzot spraugu, strāva I_{ex} sadalās divās komponentēs - pa tīģeļa iekšējo virsmu I_{in} , gar spraugu uz leju un pa nākamo sekciju uz augšu I_s . Strāvas I_s un I_{in} ir attiecīgi saistītas ar to, ka magnētiskā lauka līnijas iziet cauri spragai (B_s) un iespiežas tīģeļa iekšpusē (B_{in}).



2-5. att. Aukstā tīģeļa fragments ar attēlotu kvalitatīvu priekšstatu par virsmas strāvu sadalījumu tajā, kā arī viena tīģeļa modeļa ar 12 spraugām fotogrāfija

Jāuzsver, ka šeit neanalizējam visu pilno strāvu sadalījumu, piemēram, virs induktora. Lai iegūtu nepieciešamos rezultātus, pietiek ar šādu daļēju analīzi.

Strāvām sazarojuma punktā ir spēkā

$$I_s = I_{ex} - I_{in} . \quad (30)$$

Ar strāvu I_s saistīto magnētisko lauku spraugā var izteikt, pielietojot cirkulācijas teorēmu skinslāņa gadījumā

$$B_s = \frac{I_s}{b} \mu_0 , \quad (31)$$

tādējādi šim laukam atbilstošā magnētiskā plūsma caur spraugu ir

$$\Phi_s = B_s dH = I_s \mu_0 \frac{dH}{b} , \quad (32)$$

kur dH ir caur spraugu ieejošajai magnētiskā lauka plūsmai atbilstošais laukums. Pareizinot plūsmu Φ_s ar spraugu skaitu N , iegūstam kopējo magnētisko plūsmu caur visām spraugām, kas ir iegājusi tīģeļa iekšpusē

$$\Phi_{in} = N\Phi_s. \quad (33)$$

Acīmredzot šai plūsmai atbilstošais magnētiskais lauks iegājis caur spraugām tīģeļa iekšpusē pagriežas vertikāli, un tad apmēram induktora vidū ir spēkā

$$\Phi_{in} = B_{in}\pi R^2, \quad (34)$$

kur ir R - tīģeļa rādiuss, un magnētiskais lauks B_{in} ir vertikāli orientēts magnētiskais lauks tīģelī apmēram induktora spoles viduspunktā. B_{in} var saistīt ar I_{in} , izmantojot cirkulācijas teorēmu

$$B_{in} = \mu_0 \frac{I_{in}}{H}. \quad (35)$$

Pielīdzinot (33) un (34), iegūstam:

$$I_s \frac{\mu_0 dH}{b} N = \mu_0 \frac{I_{in}}{H} \pi R^2 \quad (36)$$

$$\text{jeb } I_s = I_{in} \frac{b\pi R^2}{dH^2 N}. \quad (37)$$

Izmantojot (30) iegūstam

$$I_s = I_{ex} - I_{in} = I_{in} \frac{b\pi R^2}{dH^2 N}, \quad (38)$$

ko atrisinot attiecībā pret I_{in} , iegūstam

$$\frac{I_{in}}{I_{ex}} = \frac{1}{1 + \frac{b\pi R^2}{dH^2 N}}. \quad (39)$$

Ievedot apzīmējumu, ko nosaucam par tīģeļa konstanti K

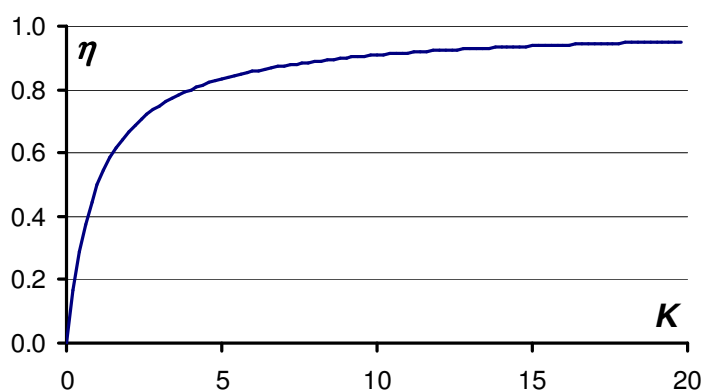
$$\boxed{K = \frac{dH^2 N}{b\pi R^2}}, \quad (40)$$

iegūstam

$$\frac{I_{in}}{I_{ex}} = \frac{1}{1+1/K} = \frac{K}{K+1}. \quad (41)$$

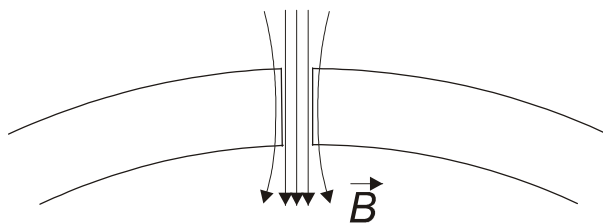
Tā kā magnētiskais lauks iekšpusē ir $B_{in} = \mu_0 \frac{I_{in}}{H}$ un tāpat magnētiskais lauks ārpusē ir $B_{ex} = \mu_0 \frac{I_{ex}}{H}$, tad magnētisko lauku attiecība, ko nosaucam par tīģeļa caurlaidību η , izsakās ar tīģeļa konstanti sekojoši (skat. 2-6. att.)

$$\eta = \frac{B_{in}}{B_{ex}} = \frac{K}{K+1}. \quad (42)$$



2-6. att. Tīģeļa magnētiskās caurlaidības atkarība no tīģeļa konstantes.

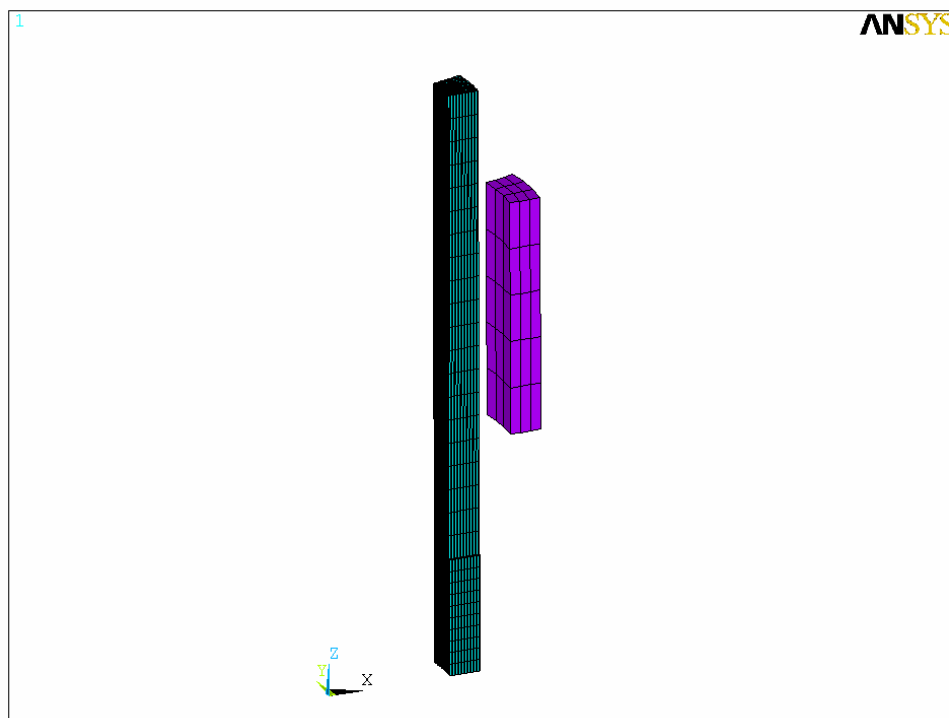
Japiezīmē, ka magnētiskais lauks iziet ne tikai caur spraugu, bet arī caur skinslāni abās spraugas pusēs - skat. ilustrāciju 2-7. att. Tāpēc efektīvais spraugas platums magnētiskajam laukam ir vienāds ar ģeometriskā spraugas platuma un divu skinslāņa biezumu summu.



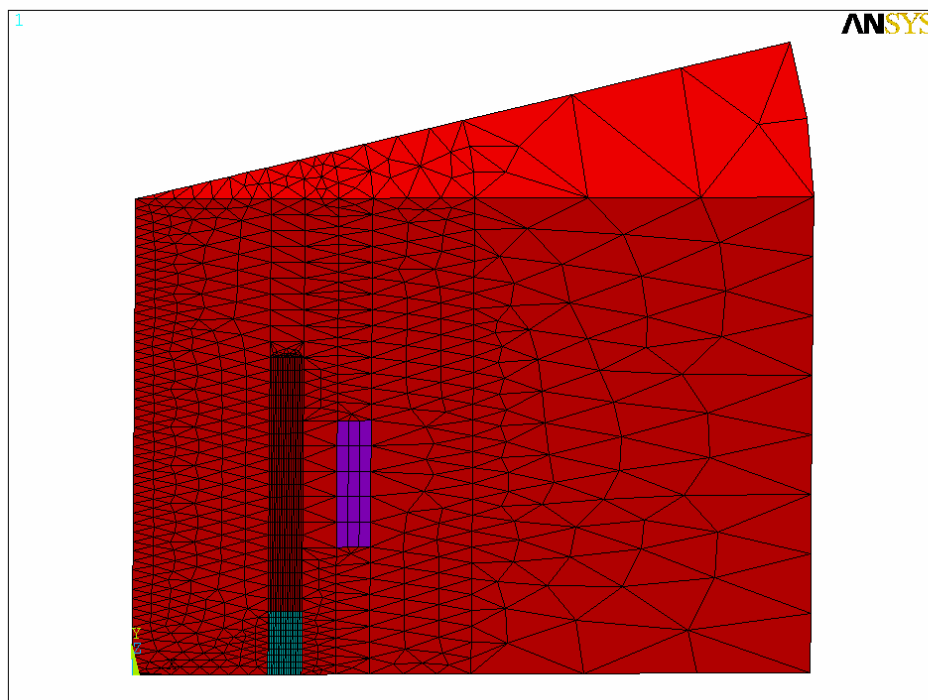
2-7. att. Magnētiskā lauka iziešana caur spraugu.

2.4. Matemātiskais modelis un skaitliskais aprēķins ar paketi ANSYS 12 spraugu tīģelim

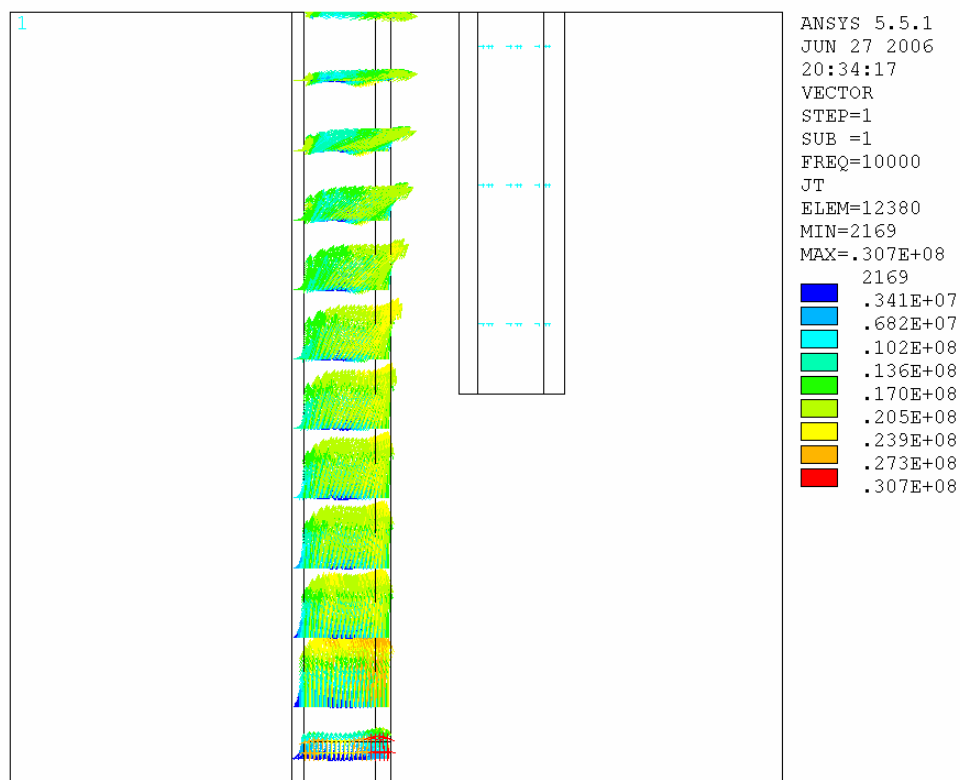
Šajā nodaļā pagaidām tiek tikai ilustrēta skaitliskā aprēķina iespēja strāvu sadalījumam elektromagnētiskā sistēmā ar auksto tīģeli. Precīzs eksperimentālās sistēmas aprēķins tiks ievietots darba aprakstā vēlāk.



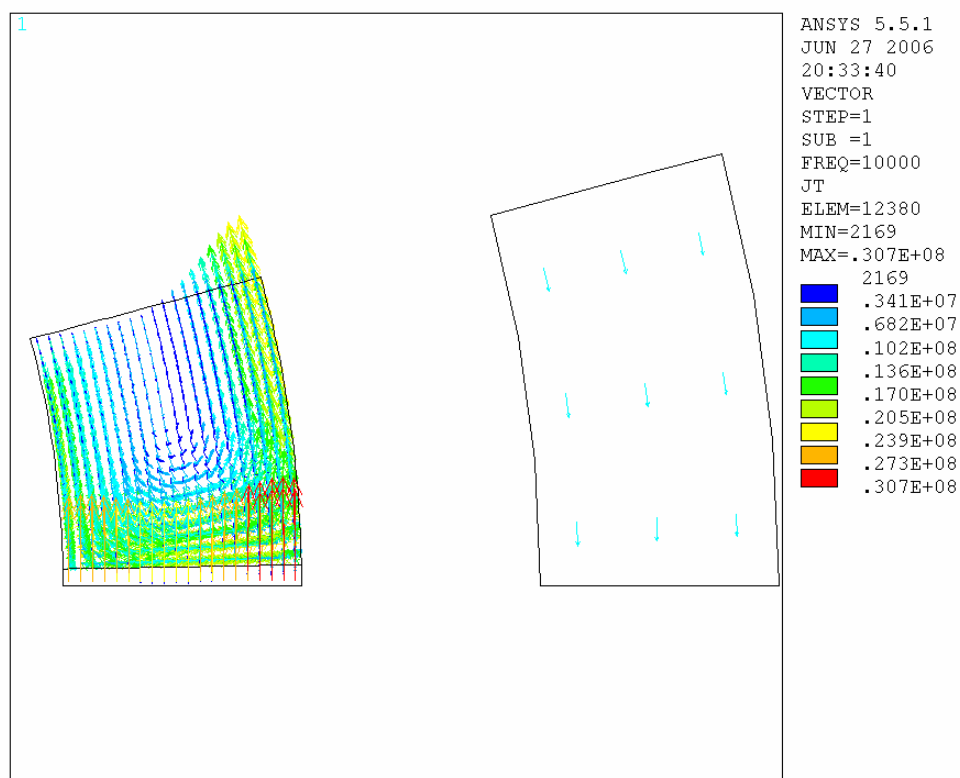
2-8. att. Aukstā tīģeļa sekcijas puses un atbilstošā induktora fragmenta diskretizācija ar galīgajiem elementiem.



2-9. att. Aprēķinātā apgabala diskretizācija ar galīgajiem elementiem.



2-10. att. Strāvu sadalījums induktora sekcijā, skats no sāna.



2-11. att. Strāvu sadalījums induktora sekcijā, skats no augšas.

3. Darba uzdevumi

3.1. Magnētiskā lauka sadalījuma uz spoles ass noteikšana tukšai spolei un gadījumam ar tajā ievietotu tīģeli ar 12 spraugām.

- a) Izmērīt ar magnētiskā lauka sensoru lauka vertikālās komponentes sadalījumu uz spoles ass pie frekvences 50 kHz tukšai spolei un spolei ar tajā ievietotu tīģeli ar 12 spraugām.
- b) **ŠO PUNKTU PAGAIÐĀM NEPILDĪT !** (Izmērītos sadalījumus salīdzināt ar datormodelēšanas rezultātiem (skat. teorētisko apskatu).)

3.2. Tīģeļa caurlaidības magnētiskajam laukam atkarības no spraugu skaita (2, 6, 12 un 48) noteikšana.

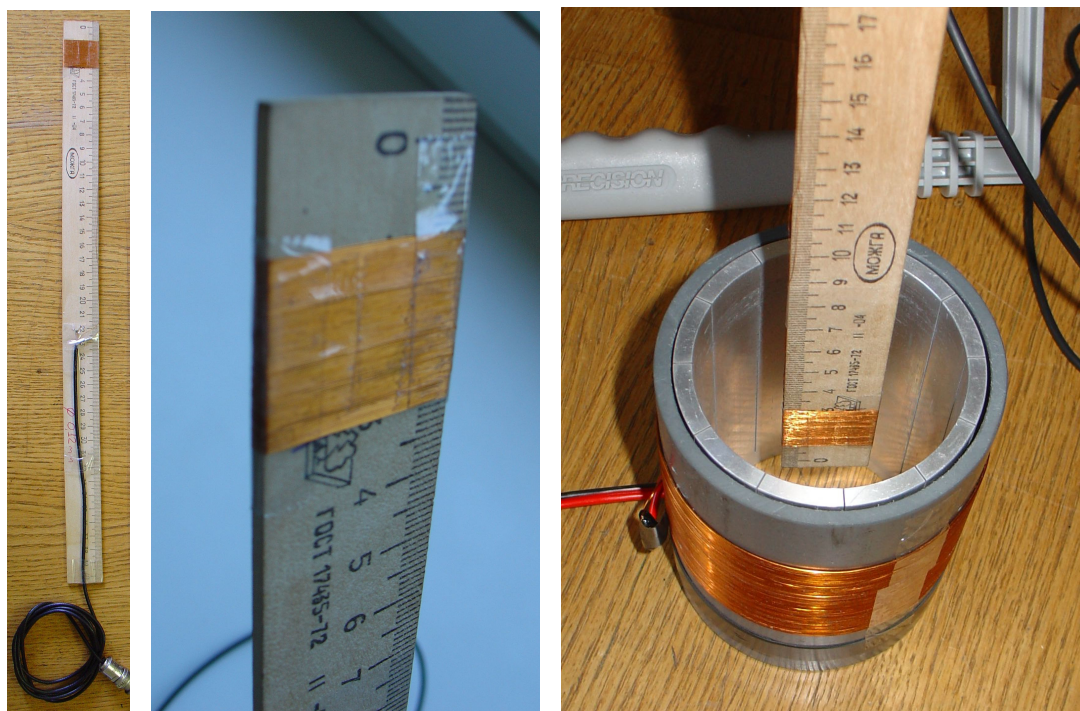
- a) Ievietojot magnētiskā lauka sensoru spoles centrā izmērīt magnētiskā lauka indukcijas vērtību gadījumam ar B_T un bez B_0 tīģeļa visiem četriem tīģeļiem. Šos mērījumus veikt pie frekvencēm 10 kHz un 200 kHz. Katrai frekvencei izvēlēties maksimāli iespējamo strāvu spolē, ko nodrošina ģenerators.
- b) Aprēķināt visiem gadījumiem tīģeļa magnētisko caurlaidību B_T/B_0 un no tās aprēķināt eksperimentālo efektīvo tīģeļa konstanti K_{EF} .
- c) Atlikt abām frekvencēm grafiski K_{EF} atkarību no spraugu skaita tīģeļī. Šo atkarību aproksimēt ar taisni un no tās slīpuma koeficienta noteikt spraugas efektīvo platumu abām frekvencēm 10 kHz un 200 kHz.
- d) Abām frekvencēm iegūtos efektīvo spraugas platumu salīdzināt ar ģeometriskā spraugas platuma un divu skinslāņu biezumu summu.

3.3. Spoles impedances izmaiņas dēļ tajā ievietota alumīnija cilindra un feromagnētiskas dzelzs caurules noteikšana.

- a) Izmērīt strāvu spolē un spriegumu uz tās, kā arī fāzu nobīdi starp strāvu un spriegumu tukšai spolei. Izmantot 10 kHz frekvenci.
- b) Izmērīt strāvu spolē un spriegumu uz tās, kā arī fāzu nobīdi starp strāvu un spriegumu spolei, kurā ir ievietota feromagnētiskas dzelzs caurule. Aprēķināt spoles impedanci. Izmantot 10 kHz frekvenci.
- c) Izmērīt strāvu spolē un spriegumu uz tās, kā arī fāzu nobīdi starp strāvu un spriegumu spolei, kurā ir ievietots alumīnija cilindrs. Aprēķināt spoles impedanci. Izmantot 10 kHz frekvenci. Izskaidrot atšķirību no gadījuma ar ievietotu alumīnija cilindru.

4. Darba piederumi

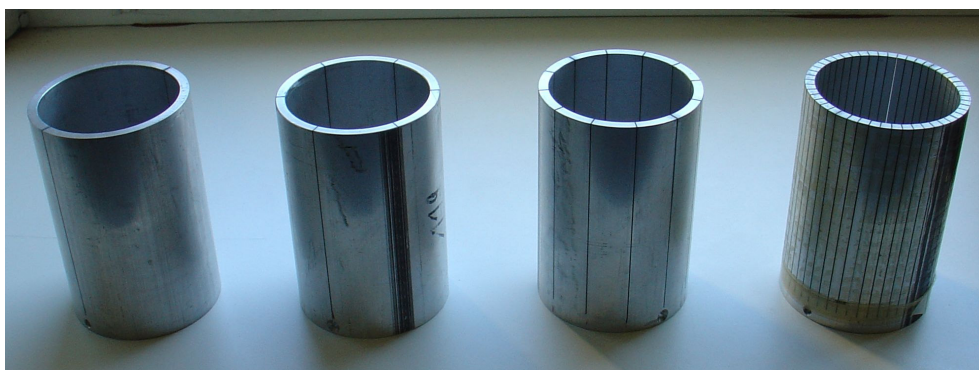
1. Signāļģenerators *I3-33*. Skat. 4-2. att.
2. Divstaru oscilogrāfs *BK PRECISION 2121*. Skat. 4-4., 4-5. att.
3. Maiņstrāvas milivoltmeters *B3-38A*. Skat. 4-2. att.
4. Cilindriska indukcijas spole ar augstumu $H=51$ mm, vijumu diametru $D_{in}=88$ mm, vijumu skaitu uz garuma vienību 1137, kopējo vijumu skaitu $N_{sp}=58$. Skat. 4-3. (a) att.
5. Feromagnētiskas dzelzs ($\rho=1\cdot10^{-7}\ \Omega m$) caurule ar augstumu $H=200$ mm, ārējo diametru $D_{ex}=76$ mm, sienas biezumu $d=3$ mm. Skat. 4-3. (a) att.
6. Alumīnija cilindrs ar augstumu $H=120$ mm, diametru $D_{ex}=60$ mm.
7. Vairākas sekcionētas alumīnija caurules (skat. 4-3 (a). att.) ar augstumu $H=120$ mm, ārējo diametru $D_{ex}=80$ mm, sienas biezumu $d=5$ mm, spraugas platumu 0.5 mm un sekciju (spraugu) skaitu: 2; 6; 12; un 48.
8. Magnētiskā lauka sensors ar spoles šķērsriezuma laukumu $2.0\text{ mm} \times 25.7\text{ mm}$ un spoles garumu 20 mm (skat. 4-1. att.): 138 vijumi ar vada diametru $D=0.12$ mm.



4-1. att. Magnētiskā lauka sensors un tā izmantošana mērījumos.



4-2. att. Signālgenerators un maiņstrāvas milivoltmetrs. Apzīmējumi: milivoltmetram 1 - ieeja, 2 - sprieguma diapazona pārslēgs; signālgeneratoram 3 - izejas pretestības iestādīšana, 4 - izeja, 5 un 6 - frekvences regulēšana, 7 - izejas sprieguma regulēšana.

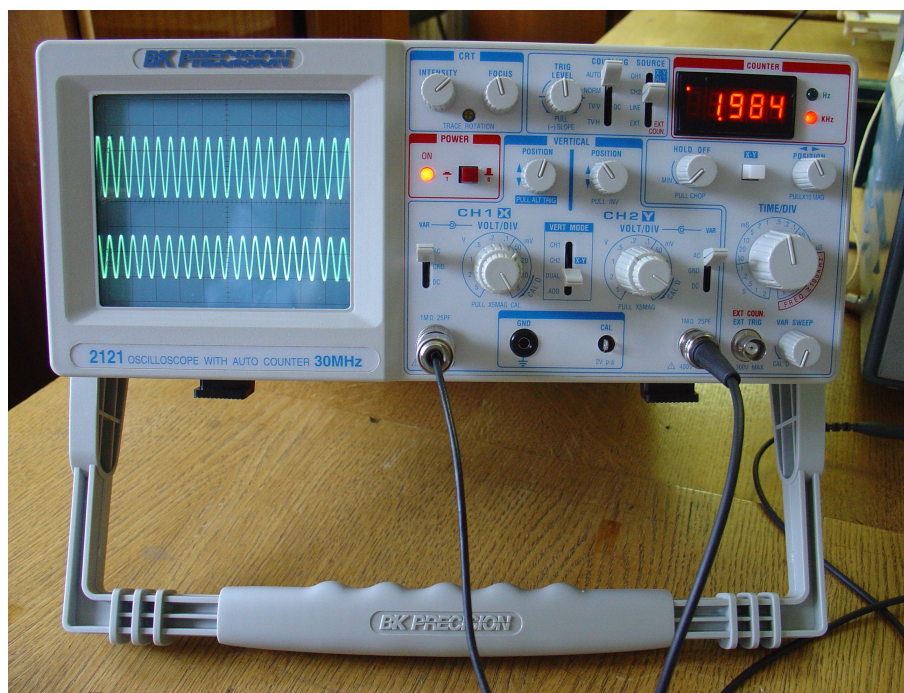


(a)

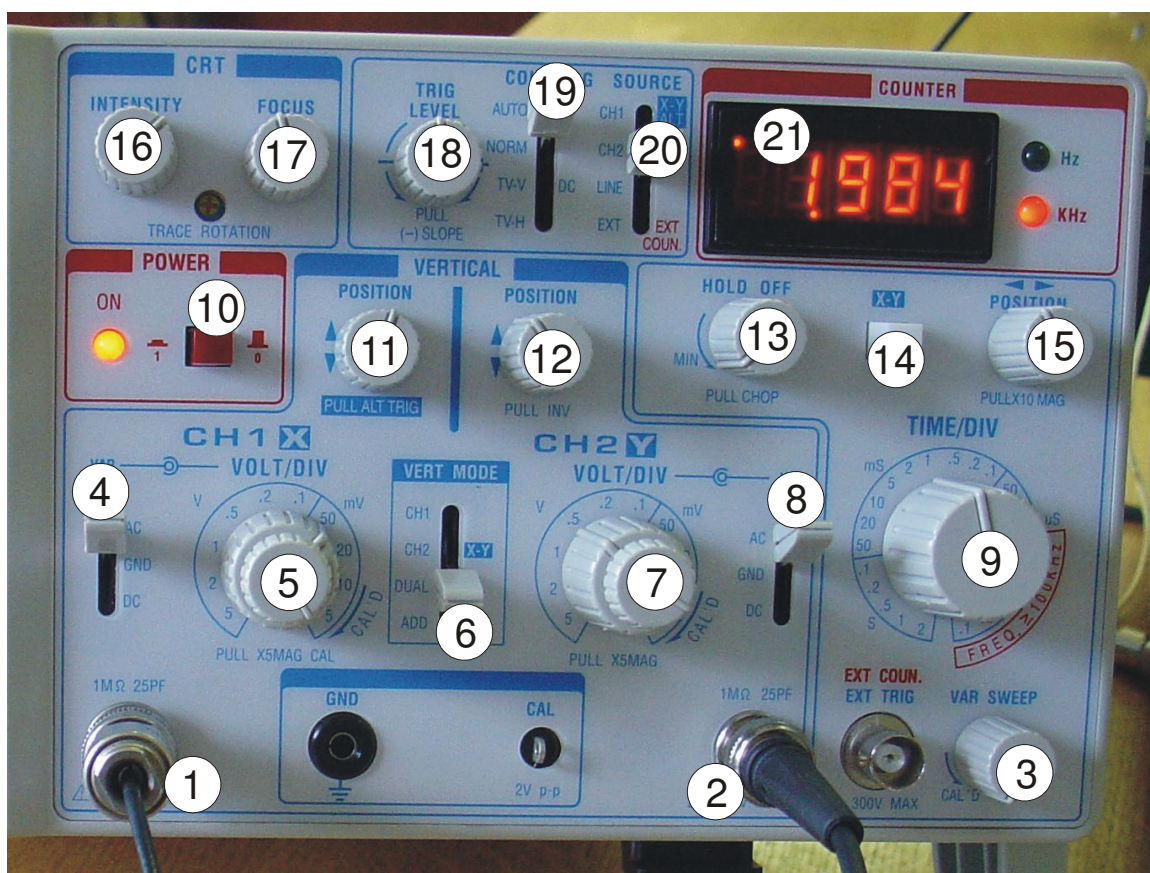


(b)

4-3. att. Eksperimenta piederumi: (a) četras sekcionētas alumīnija caurules ar dažādu sekciju skaitu. (b) alumīnija cilindrs, dzelzs caurule un indukcijas spole.



4-4. att. Oscilogrāfs ar ekrānā redzamiem signāliem no abām ieejām.



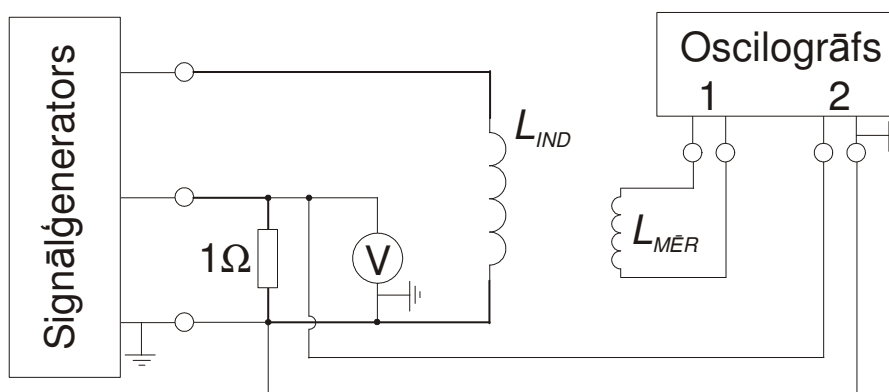
4-5. att. Oscilogrāfa vadības panelis. Apzīmējumi: 1 - 1/X ieeja, 2 - 2/Y ieeja, 4 un 8 - 1. un 2. iejas režīmu pārslēgi (darbā jābūt "AC" režīmā), 5 un 7 - 1. un 2. iejas sprieguma skalas iedaļas vērtības (viena lielā rūtiņa ekrānā vertikālā virzienā) iestādīšana, 6 - attēlojamo signālu izvēle (darbā jābūt "DUAL" režīmā - rādīti tiek signāli no abām ieejām, vai "X-Y" režīmā - attēlojot Lisažū figūras), 9 - laika skalas iedaļas vērtības (viena lielā rūtiņa ekrānā horizontālā virzienā) iestādīšana, 10 - ieslēgšana/izslēgšana, 11 un 12 - 1. un 2. iejas signālu vertikāla pārbīdīšana ekrānā, 15 - signālu horizontāla pārbīdīšana ekrānā, 14 - jāieslēdz attēlojot Lisažū figūras, 16 un 17 - attēla kvalitātes regulēšana, 3, 18 un 20 - izvēršes ģeneratora regulēšana (ļauj stabilizēt signāla attēlu), 21 - signāla frekvences indikators.

5. Darba veikšanas apraksts

5.1. Magnētiskā lauka sadalījuma uz spoles ass mērīšana

Magnētiskā lauka sadalījuma uz spoles ass mērīšanai jāizmanto iekārtu slēgums, kas parādīts 5-1. att. Oscilogrāfam pieslēgtais sensors ir jānovieto aptuveni indukcijas spoles centrā un jāpārvieta vertikālā virzienā, uzņemot tā sprieguma U_M atkarību no vertikālās koordinātes. Spriegumu U_M nolasa uz oscilogrāfa ekrāna: tā amplitūda ir vienāda ar $1/2 \times (\text{sinusoīdas augstumam atbilstošais iedaļu skaits}) \times (\text{iedaļas vērtība (V)})$, bet efektīvā vērtība ir $(\text{amplitūda}) \times 1/\sqrt{2}$. Iestādīto frekvenci f var redzēt uz signāļģeneratora paneļa, kā arī uz oscilogrāfa (Nr. 21, 4-5. att.). Strāva spolē I_{SP} tiek mērīta ar voltmetru, kas mēra sprieguma kritumu uz 1Ω lielas pretestības, t.i. $I_{SP}[A] = U[V]/R[\Omega] = U[V]/1\Omega$. Jāatceras, ka ar voltmetru tiek nomērīta sprieguma krituma (strāvas) efektīvā vērtība. Spriegums uz 1Ω pretestības (strāva) tiek attēlots arī oscilogrāfa ekrānā.

Tā kā sensora spriegums U_M ir proporcionāls indukcijas spoles magnētiskajam laukam, kurš savukārt ir proporcionāls spolē plūstošajai strāvai I_{SP} , lai pārrēķinātu sensora spriegumu 1A liela strāvai spolē, var izmantot formulu: $U_{M,1A} = U_M \frac{1A}{I_{SP}}$. Savukārt lai pārrēķinātu sensora spriegumu 0.001 A/m lineāram strāvas blīvumam spolē, var izmantot formulu $U_{M,0.001A/m} = U_M \frac{0.001 A/m}{I_{SP} \cdot n_{SP}}$, kur n_{SP} - spoles vijumu skaits uz garuma vienību. Sensora spriegumam atbilstošo magnētisko lauku var aprēķināt, izmantojot elektromagnētiskās indukcijas likumu: $B_{SP} = U_M / 2\pi f S_M N_M$, kur S_M - sensora spoles šķērsgriezuma laukums, N_M - vijumu skaits.



5-1. att. Shēma ar eksperimenta iekārtu slēgumu darba uzdevumiem 3.1 un 3.2. Apzīmējumi: L_{IND} - indukcijas spole (4-3. (b) att.), $L_{MĒR}$ - sensora spole (4-1. att.) IEVĒROT!!! Signāļģeneratora, voltmetra un oscilogrāfa iezemētajām spailēm jābūt savstarpēji savienotām.

5.2. Tīģeļa caurlaidības noteikšana

Tīģeļa caurlaidības noteikšanai jāizmanto iekārtu slēgums, kas parādīts 5-1. att. Visiem četriem tīģeļiem jānomēra magnētiskais lauks spoles centrā ar tīģeli un bez tīģeļa. Strāva spolē katrā gadījumā jāizvēlas maksimālā iespējamā, taču strāvai jābūt vienai un tai pašai mērījumā ar tīģeli un mērījumā bez tīģeļa.

Tā kā sensora spriegums ir proporcionāls magnētiskajam laukam, lai aprēķinātu tīģeļa magnētisko caurlaidību, nav nepieciešams aprēķināt spriegumam atbilstošo magnētisko

lauku, pietiek ar attiecību $\eta = \frac{B_T}{B_0} = \frac{U_{MT}}{U_{M0}}$. Zinot magnētisko caurlaidību, var aprēķināt

atbilstošo efektīvo tīģeļa konstanti: $K_{EF} = \frac{\eta}{1-\eta}$. K_{EF} atkarība no spraugu skaita N ir

jāattēlo grafiski un jāaproximē ar taisni. Nosakot tainses slīpuma koeficientu p , var

aprēķināt spraugas efektīvo platumu: $d_{ef} = p \frac{b\pi R^2}{H^2}$, kur H var aptuveni pieņemt

vienādu ar 4 cm. Iegūto efektīvo platumu jāsalīdzina ar ģeometriskā spraugas platumu $d=0.5$ mm un divu skinslāņu biezumu δ summu. Skinslāņa biezumu pie dotās

frekvences aprēķina pēc formulas: $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}}$, izmantojot alumīnija

elektrovadītspēju $\sigma = 1/\rho$, $\rho = 3 \cdot 10^{-7} \Omega m$.

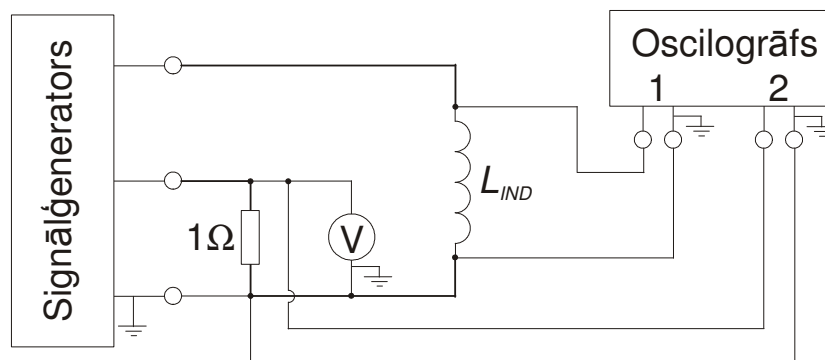
5.3. Spoles impedances mērīšana

Spoles impedances mērīšanai jāizmanto iekārtu slēgums, kas parādīts 5-2. att. Šajā gadījumā gan strāva spolē I_{SP} , gan spriegums uz tās U_{SP} tiek attēlots oscilogrāfa ekrānā. Strāvas efektīvo vērtību var noteikt arī ar voltmetru, kā aprakstīts punktā 5.1. Strāva un spriegums spolē ir jānomēra gadījumam ar tukšu spoli, ar spolē ievietotu alumīnija cilindru un spolē ievietotu dzelzs cauruli. Visos gadījumos spoles impedanci

aprēķina pēc formulas: $Z = \frac{U_{SP}}{I_{SP}}$. Jāievēro, ka gan strāvai, gan spriegumam abiem

jālieto vai nu efektīvās vērtības, vai amplitūdas.

Fāzu nobīdi starp strāvu un spriegumu spolē var noteikt ar oscilogrāfu divos veidos: 1) novietot abu signālu sinusoīdas vienu uz otras un pēc nobīdei atbilstošā iedaļu skaita aprēķināt fāzu starpību; 2) ieslēgt oscilogrāfu Lisažū figūru režīmā (skat. 4-5. att.) un pēc ekrānā redzamās figūras noteikt signālu fāzu nobīdi. Sagaidāmās figūras ir viegli aprēķināt, dažādām φ vērtībām grafiski attēlojot atkarību $y(x)$, kur $x = \sin(2\pi f \cdot t)$ un $y = \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$, $t = 0 \dots 1/f$, $f = \text{const}$.



5-2. att. Shēma ar eksperimenta iekārtu slēgumu darba uzdevumam 3.3. Apzīmējumi: L_{IND} - indukcijas spole (4-3. (b) att.). **IEVĒROT!!!** Signālģeneratora, voltmetra un oscilogrāfa iezemētajām spailēm jābūt savstarpēji savienotām.

6. Darba uzdevumiem atbilstošo nepieciešamo mērījumu, tabulu, grafiku, aprēķinu un pierakstu uzskaitījums

Darba uzdevumi 3.1.

Signālģeneratora frekvence: $f = \dots$ (50 kHz)

Tabula: sensora sprieguma atkarība no vertikālās koordinātes tukšai spolei.

Nr.	$z \pm \Delta z$, cm	$U_M \pm \Delta U$, mV	$B_0 \pm \Delta B$, T
1.			
....			

Tīģeļa spraugu skaits: $N = \dots$ (12)

Tabula: sensora sprieguma atkarība no vertikālās koordinātes ar spolē ievietotu tīģeli.

Nr.	$z \pm \Delta z$, cm	$U_M \pm \Delta U$, mV	$B_T \pm \Delta B$, T
1.			
....			

Darba uzdevumi 3.2.

Signālģeneratora frekvence: $f = \dots$ (10 kHz)

Tabula: tīģeļa magnētiskā caurlaidība atkarībā no spraugu skaita.

Nr.	N	$U_{MT} \pm \Delta U$, mV	$U_{M0} \pm \Delta U$, mV	$\eta \pm \Delta \eta$	$K_{EF} \pm \Delta K$,
1.					
....					

Signālģeneratora frekvence: $f = \dots$ (200 kHz)

Tabula: tīģeļa magnētiskā caurlaidība atkarībā no spraugu skaita.

Nr.	N	$U_{MT} \pm \Delta U$, mV	$U_{M0} \pm \Delta U$, mV	$\eta \pm \Delta \eta$	$K_{EF} \pm \Delta K$,
1.					
.....					

Grafiks: η atkarība no N (divām frekvencēm).

Grafiks: K_{EF} atkarība no N (divām frekvencēm). Abām frekvencēm: aproksimācija ar taisni un efektīvā spraugas platuma aprēķins, salīdzinājums ar sagaidāmo vērtību.

Darba uzdevumi 3.3.

Signālģeneratora frekvence: $f = \dots$ (10 kHz)

Tabula: spoles impedance un fāzu nobīde starp strāvu un spriegumu dažādos gadījumos.

Nr.	gad.	$I_{SP} \pm \Delta I$, A	$U_{SP} \pm \Delta U$, V	$Z \pm \Delta Z$ Ω	$\varphi \pm \Delta \varphi$ deg
1.	tukša spole				
2.	ar Fe				
3.	ar Al				

7. Literatūra

1. Muižnieks A. Laboratorijas darba apraksts „Virpuļstrāvas plānā elektrovadošā plāksnē”. Latvijas Universitāte, Fizikas un matemātikas fakultāte, Fizikas nodaļa, Maģistra studiju programma, Laboratorijas darbu cikls “NEPĀRTRAUKTAS VIDES LABORATORIJA”.
2. Halliday, Resnick, Walker, "Fundamentals of Physics", 6th edition, John Wiley & Sons Inc., 2001.
3. E. Šilters, G. Sermons, J. Miķelsons. „Elektrodinamika” Rīga, Zvaigzne, 1984.

8. Kontroljautājumi

Katram jautājumam ir jāizvēlas viena pareizā atbilde. Skaitliskas atbildes gadījumā rezultāts ir jānoapaļo.

1. Aukstā tīģeļa metodē tīģelis tiek izgatavots no
 - a) keramikas,
 - b) metāla,

- c) paša kausējamā materiāla.
2. Aukstā tīģeļa metodē spraugas tīģelī ir nepieciešamas, lai
- a) aizvadītu lieko siltumu,
 - b) samazinātu virpuļstrāvas tīģeļa sienīnās,
 - c) palielinātu magnētisko lauku tīģeļa iekšienē.
3. Tīģeļa konstante ir:
- a) proporcionāla spraugu skaitam un spraugas platumam,
 - b) apgriezti proporcionāla spraugu skaitam un spraugas platumam,
 - c) proporcionāla spraugu skaitam un apgriezti proporcionāla spraugas platumam,
 - d) proporcionāla spraugas platumam un apgriezti proporcionāla spraugu skaitam.
4. Skinslānī pie nemagnētiska vadītāja virsmas, magnētiskā lauka indukcija:
- a) lēcienveidīgi samazinās līdz nullei,
 - b) dīkst lineāri,
 - c) dīkst eksponenciāli.
5. Solenoīdā ievietojot feromagnētiska materiāla cauruli, tā induktivitāte:
- a) nemainās,
 - b) pieaug,
 - c) samazinās.
6. Aukstā tīģeļa konstante ir 2. Magnētiskais lauks tīģeļa iekšpusē, salīdzinot ar lauku tā ārpusē, ir aptuveni:
- a) 1.5 reizes lielāks,
 - b) 1.5 reizes mazāks.
 - c) 2 reizes mazāks,
 - d) 2 reizes lielāks,