Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет електроніки та комп’ютерних технологій

Звіт

про виконання лабораторної роботи №11

З курсу “Методи обчислень”

на тему **:**

«Методи Рунге-Кутта розв’язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку»

Виконав

студент групи ФеС-21

Шавало Андрій

Львів 2025 р.

Хід роботи

1. **Я розглянув диференціальне рівняння: dy/dx=f(x,y)**

З Початковою умовою: y(1)=y0, [a,b], p, h, k. Я визначив аналітичний розв'язок: y(x) = x^10

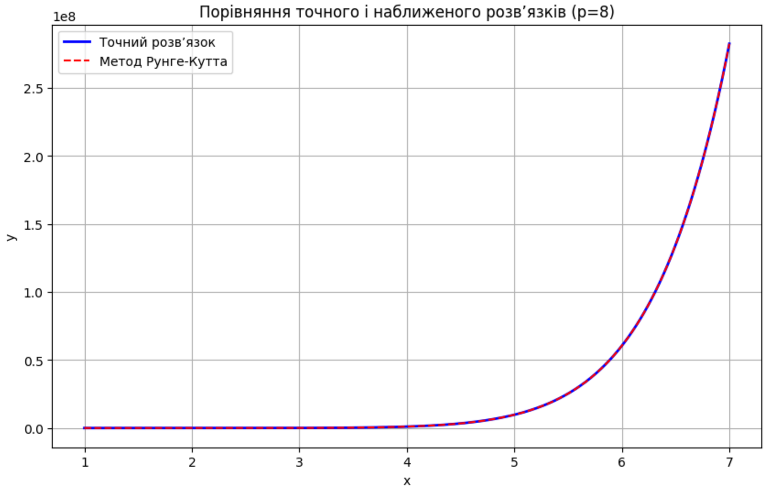
```
a = 1
b = 7
h = 0.01
y0 = 1
p = 8
k = (p + 2) / (p + 1)


def sol(x):
    return x**10


def f(x, y):
    return 10 * y**(9/10)
```

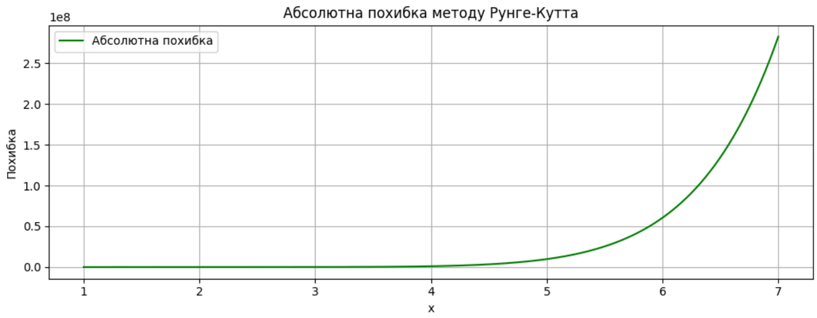
```
solution = x**(p + 2)
solution
print(f"Рішення диференціального рівняння: y = {solution}")

Рішення диференціального рівняння: y = x**10
```

2. **Розв'язок методом Рунге–Кутта 4-го порядку з кроком h = 0.01**

Я реалізував функцію чисельного розв'язання методом Рунге–Кутта 4-го порядку та отримав наближений розв'язок на відрізку [1, 7] з кроком h=0.01, також обрахував абсолютну похибку, та побудував графіки.

```
Перші 5 значень (x, y):
[1.   1.01 1.02 1.03 1.04] [1.         1.10462206 1.21899428 1.34391616 1.48024397]

Останні 5 значень (x, y):
[6.96 6.97 6.98 6.99 7.  ] [2.66742533e+08 2.70599915e+08 2.74507428e+08 2.78465651e+08
 2.82475168e+08]
```

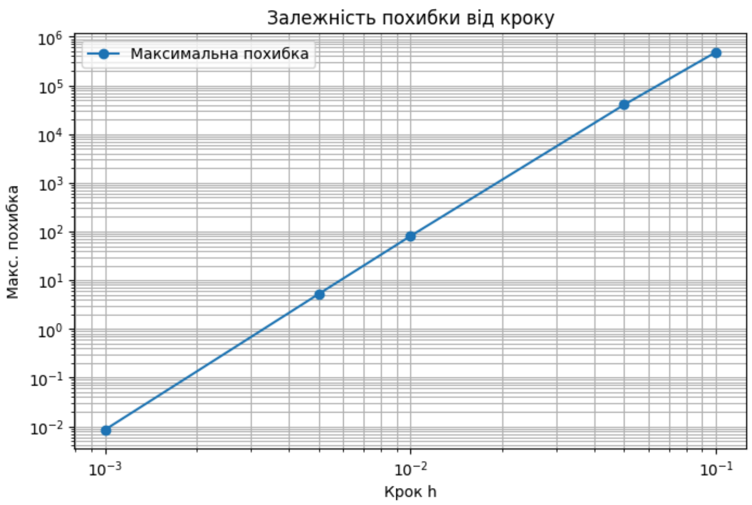




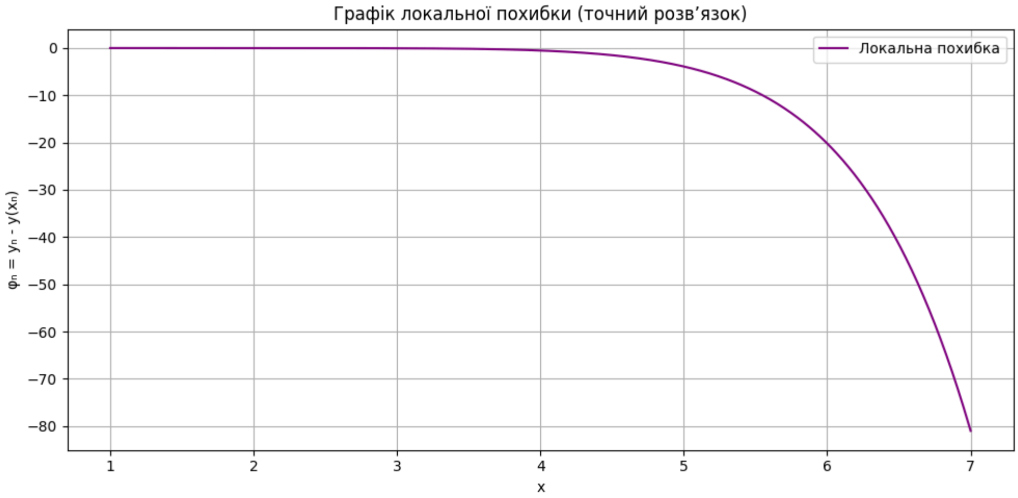
3. **Обчислення,максимальну похибку, локальної похибки $\varphi_n = y_n - y(x_n)$**

Я обчислив максимальну похибку, локальну похибку на кожному кроці як різницю між чисельним і точним значенням. Побудував графік локальної похибки.

```
for h_val in hs:
    xs_h, ys_h = runge_kutta(f, a, b, y0, h_val)
    ys_h_exact = sol(xs_h)
    max_err = np.max(np.abs(ys_h - ys_h_exact))
    max_errors.append(max_err)
```



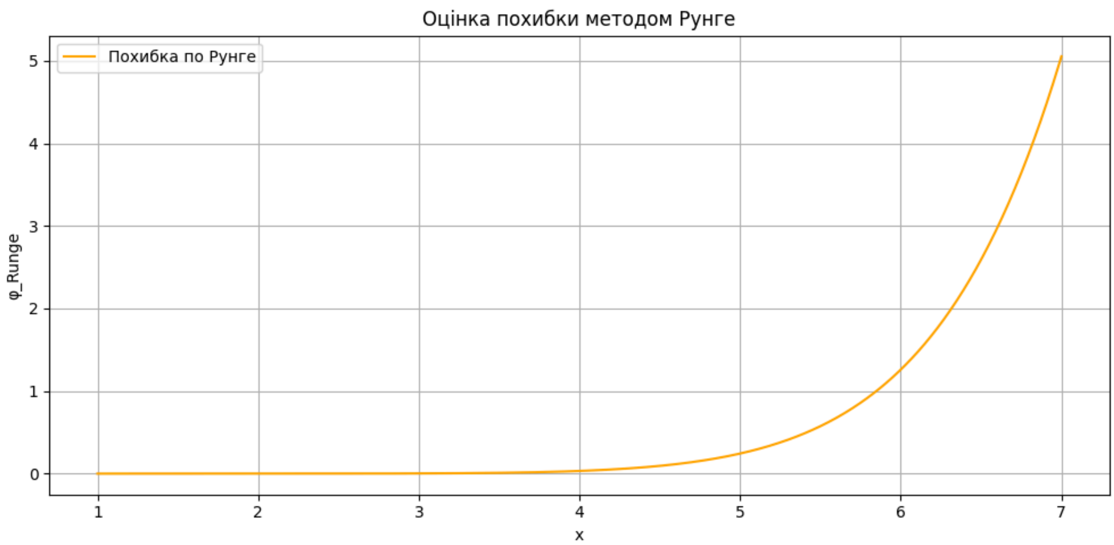
```
local_error = y_rk - sol(x_rk)
```



4. **Обчислення похибки по Рунге**

Я обчислив похибку за методом Рунге для оцінки точності чисельного розв'язку. Для цього я порівняв рішення на кроках h та h/2, побудував графік

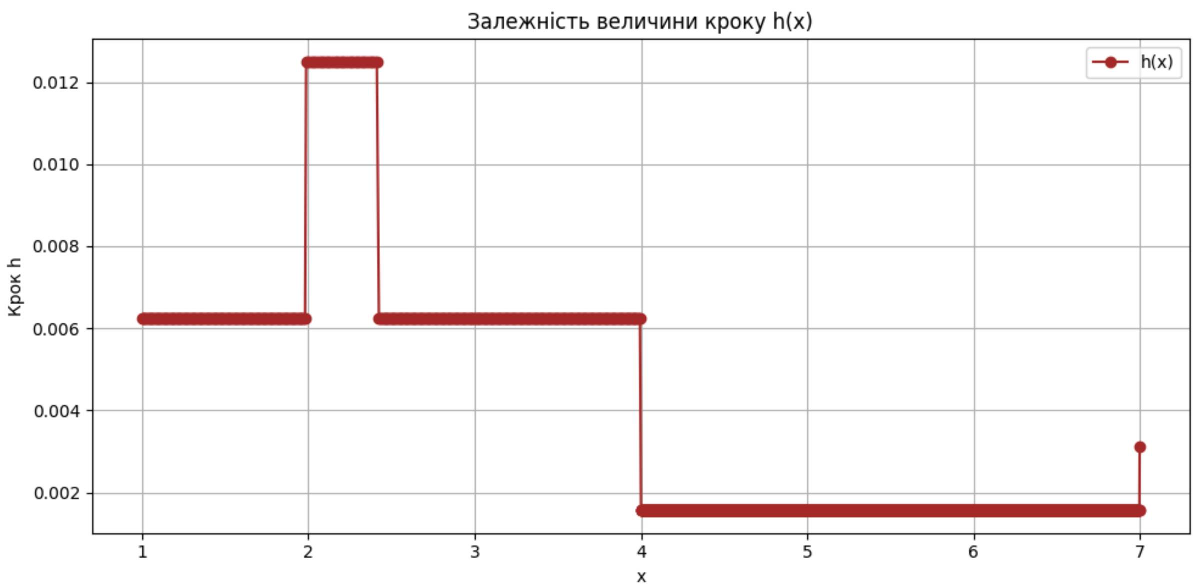
```
y_h = runge_kutta(f, a, b, y0, h)

y_h2_full = runge_kutta(f, a, b, y0, h / 2)

y_h2 = y_h2_full[::2]

runge_error = np.abs((y_h2 - y_h) / 15)
```



5. Адаптивний вибір кроку h(x)

Я реалізував адаптивний метод Рунге–Кутта, який автоматично змінює величину кроку залежно від локальної похибки. Побудував графік залежності h(x)

```python
while x < b:
    if x + h > b:
        h = b - x
    _, yh = runge_kutta(f, x, x + h, y, h)
    _, yh2 = runge_kutta(f, x, x + h, y, h / 2)

    err = abs((yh2[-1] - yh[-1]) / 15)
    if err > eps:
        h /= 2
    elif err < eps / 2:
        x += h
        y = yh2[-1]
        x_vals.append(x)
        y_vals.append(y)
        h_vals.append(h)
        h *= 2
    else:
        x += h
        y = yh2[-1]
        x_vals.append(x)
        y_vals.append(y)
        h_vals.append(h)
```



Висновок: У ході лабораторної роботи я дослідив задачу Коші для звичайного диференціального рівняння. Я побудував аналітичний розв’язок, а також реалізував чисельний метод Рунге–Кутта 4-го порядку. Я обчислив максимальну та локальну похибку та оцінив точність методу за формулою Рунге. Крім того, я реалізував адаптивний алгоритм з автоматичним вибором кроку та побудував графік залежності h(x).