Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет електроніки та комп’ютерних технологій

Звіт

про виконання лабораторної роботи №6

З курсу “Методи обчислень”

на тему **:**

«Точність формул для чисельного диференціювання. Метод Рунге-Ромберга. Метод Ейткена»

Виконав

студент групи ФеС-21

Шавало Андрій

Львів 2025 р.

Хід роботи

1. Я задав параметри x0 , p.Обрахував похідну. Обрахував точне значення в точці x0

```python
p = 8
x0 = 0.5
```

```python
def f(x):
    return p * np.cos(x - p)
```

```python
def y_exact_derivative(x):
    return -p * np.sin(x - p)
```

```
Пункт 1: Точне значення похідної в точці x0 = 0.5 дорівнює 7.503999814197911
```

2. Я дослідив похибку при наближеному обчисленні похідної. Обчислив значення похідної для різних кроків h=10^−2,10^−3,…,10^−10, а також похибку обчислення відносно аналітичного значення.

```
h = 1e-02, апроксимація = 7.5038747482, похибка = 1.25e-04
h = 1e-03, апроксимація = 7.5039985635, похибка = 1.25e-06
h = 1e-04, апроксимація = 7.5039998017, похибка = 1.25e-08
h = 1e-05, апроксимація = 7.5039998138, похибка = 4.24e-10
h = 1e-06, апроксимація = 7.5039998151, похибка = 8.86e-10
h = 1e-07, апроксимація = 7.5039998371, похибка = 2.29e-08
h = 1e-08, апроксимація = 7.5039997549, похибка = 5.93e-08
h = 1e-09, апроксимація = 7.5040005321, похибка = 7.18e-07
h = 1e-10, апроксимація = 7.5039996439, похибка = 1.70e-07
```

3. Серед усіх варіантів я знайшов значення $h_{опт}$, при якому похибка була мінімальною, і зафіксував його як оптимальне.

```
Оптимальне значення h = 1e-05 з похибкою 4.24e-10
```

4. Для прийнятого значення h=10−5h я повторно обчислив наближену похідну, а також її значення для кроку 2h

```
y_h = (f(x0 + h) - f(x0 - h)) / (2 * h)
y_2h = (f(x0 + 2*h) - f(x0 - 2*h)) / (4 * h)
```

```
Апроксимація при h = 7.5039998138
Апроксимація при 2h = 7.5039998137
```

5. Я обчислив абсолютну похибку при кроці h=10−5h

```
R1 = abs(y_h - y0_prime)
print("Похибка при h =", h, "дорівнює", R1)

✔ 0.0s

Похибка при h = 1e-05 дорівнює 4.241025308715507e-10
```

6. Далі я уточнив значення похідної за допомогою методу Рунге–Ромберга:

```
y_RR = y_h + (y_h - y_2h) / 3
RR_error = abs(y_RR - y0_prime)

print(f"Значення за Рунге-Ромбергом = {y_RR:.10f}")
print(f"Похибка методу Рунге-Ромберга = {RR_error:.2e}")

✔ 0.0s

Значення за Рунге-Ромбергом = 7.5039998138
Похибка методу Рунге-Ромберга = 4.13e-10
```

7. Я обчислив значення похідної, використовуючи два різні кроки сітки:

- при 2h:

```
Апроксимація при 2h = 7.5039998137
```

```
y_2h = (f(x0 + 2*h) - f(x0 - 2*h)) / (4 * h)
```

- при 4h:

```
Апроксимація при 4h = 7.5039998122
```

```
y_4h = (f(x0 + 4*h) - f(x0 - 4*h)) / (8 * h)
```

Далі, за допомогою методу Ейткена, я уточнив значення похідної:

```
numerator = (y_2h - y_4h) * h
denominator = 2 * y_h - 4 * y_2h + 2 * y_4h
y_E = y_2h - numerator / denominator
```

```
Метод Ейткена: y_E = 7.5040049278
```

Також обчислив порядок точності методу:

```
p = np.log(abs((y_4h - y_2h) / (y_2h - y_h))) / np.log(2)
```

```
Порядок точності p = 5.4865
```

Остаточно я визначив похибку апроксимації:

```
R3 = abs(y_E - y0_prime)
```

```
Похибка R3 = 5.11e-06
```

Висновок: У ході виконання лабораторної роботи я дослідив чисельне диференціювання функціїю. Я обчислив аналітичне значення похідної та порівняв його з наближеними значеннями, отриманими за формулою центральної різниці. Я проаналізував вплив кроку h на точність апроксимації та визначив оптимальне значення h, при якому похибка була найменшою. Також реалізував метод Рунге–Ромберга для підвищення точності, використовуючи значення похідної при h та 2h. Потім я реалізував метод Ейткена, використовуючи три кроки сітки h,2h,4h, уточнив значення похідної та обчислив порядок точності.