

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет електроніки та комп'ютерних технологій

Звіт
про виконання лабораторної роботи №4
З курсу “Методи обчислень”
на тему :
**«Знаходження алгебраїчних многочленів найкращого
квадратичного наближення методом найменших квадратів»**

Виконав
студент групи Фес-21
Шавало Андрій

Львів 2025 р.

Хід роботи

1. Я задав інтервал табуляції x_0, x_n , кількість вузлів n . Згенерував масив вузлів X і обчислив значення функції $f(x)$, після чого зберіг ці дані у файл input.txt

```
n = 30
x0, xn = 8, 18
X = np.linspace(x0, xn, n)
```

```
def f(x):
    return (1 / 8) * np.sin(x + 8)
```

```
[ 8.          8.344828  8.689655  9.034483  9.37931   9.724138 10.068966
 10.413793 10.758621 11.103448 11.448276 11.793103 12.137931 12.482759
 12.827586 13.172414 13.517241 13.862069 14.206897 14.551724 14.896552
 15.241379 15.586207 15.931034 16.275862 16.62069  16.965517 17.310345
 17.655172 18.          ] [-0.035988 -0.074335 -0.10393  -0.121289 -0.124369 -0.112806 -0.087962
 -0.052763 -0.011351  0.031397  0.070448  0.101206  0.120048  0.124757
  0.114777  0.091285  0.057046  0.01609  -0.02676  -0.066459 -0.098334
 -0.118632 -0.124963 -0.116582 -0.094475 -0.061246 -0.020806  0.022084
  0.062374  0.09532  ]
```

2. Для апроксимації заданої табличної функції методом найменших квадратів я побудував систему нормальних рівнянь виду $BA=C$
 - B — матриця суми степенів вузлів X ,

```
[[3.00000000e+01 3.90000000e+02 5.33724137e+03 7.63324134e+04
 1.13209147e+06 1.72881998e+07 2.70222474e+08 4.30260007e+09
 6.95311130e+10 1.13721551e+12 1.87839313e+13]
 [3.90000000e+02 5.33724137e+03 7.63324134e+04 1.13209147e+06
 1.72881998e+07 2.70222474e+08 4.30260007e+09 6.95311130e+10
 1.13721551e+12 1.87839313e+13 3.12817099e+14]
 [5.33724137e+03 7.63324134e+04 1.13209147e+06 1.72881998e+07
 2.70222474e+08 4.30260007e+09 6.95311130e+10 1.13721551e+12
 1.87839313e+13 3.12817099e+14 5.24559375e+15]
 [7.63324134e+04 1.13209147e+06 1.72881998e+07 2.70222474e+08
 4.30260007e+09 6.95311130e+10 1.13721551e+12 1.87839313e+13
 3.12817099e+14 5.24559375e+15 8.84825287e+16]
 [1.13209147e+06 1.72881998e+07 2.70222474e+08 4.30260007e+09
 6.95311130e+10 1.13721551e+12 1.87839313e+13 3.12817099e+14
 5.24559375e+15 8.84825287e+16 1.50012136e+18]
 [1.72881998e+07 2.70222474e+08 4.30260007e+09 6.95311130e+10
 1.13721551e+12 1.87839313e+13 3.12817099e+14 5.24559375e+15
 8.84825287e+16 1.50012136e+18 2.55455761e+19]
 [2.70222474e+08 4.30260007e+09 6.95311130e+10 1.13721551e+12
 1.87839313e+13 3.12817099e+14 5.24559375e+15 8.84825287e+16
 1.50012136e+18 2.55455761e+19 4.36708195e+20]
 ...]
```

- C — вектор скалярних добутків значень функції з відповідними степенями X ,

```
[-5.46218000e-01 -5.83034578e+00 -7.00325886e+01 -9.29998900e+02
-1.30980626e+04 -1.87480272e+05 -2.63427098e+06 -3.51804587e+07
-4.26078642e+08 -4.16363826e+09 -1.61812080e+10]
```

- A — вектор коефіцієнтів апроксимуючого полінома.

```
[-1.60459794e+01 -6.56342587e+00  5.92642989e+00 -1.29322545e+00
 1.06804961e-01  2.50489061e-04 -6.13090392e-04  3.66046196e-05
-4.93688775e-07 -1.97685217e-08  5.25176279e-10]
```

Для розв'язання цієї системи я реалізував метод Гаусса з вибором головного елемента по стовпцю.

3. Обчислив значення апроксимуючого полінома у 7 контрольних точках на відрізку $[8,18]$ та визначив абсолютні похибки. Результати записав у файл errors.txt.

```
x_vals = np.linspace(x0, xn, 7)
y_true = f(x_vals)
y_approx = np.polyval(A[::-1], x_vals)
err = abs(y_true - y_approx)

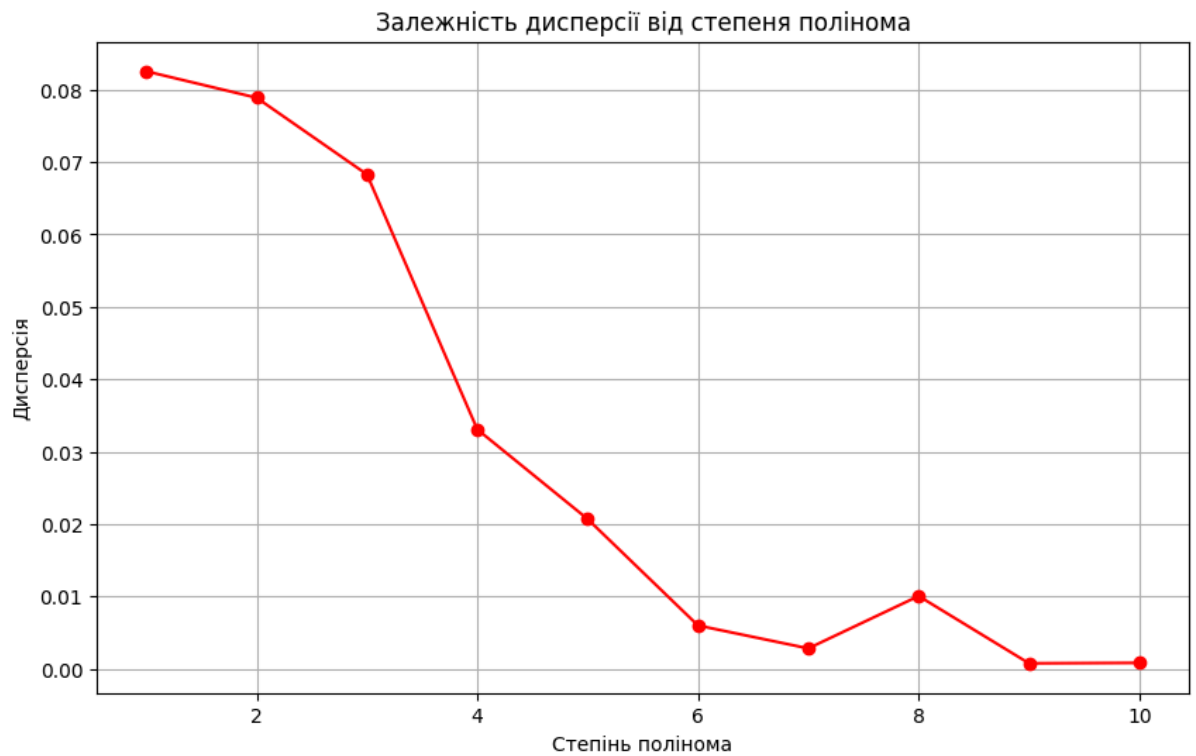
print(err)
```

```
[0.00430741 0.00165006 0.00034734 0.00351295 0.00721753 0.00915267
 0.01090301]
```

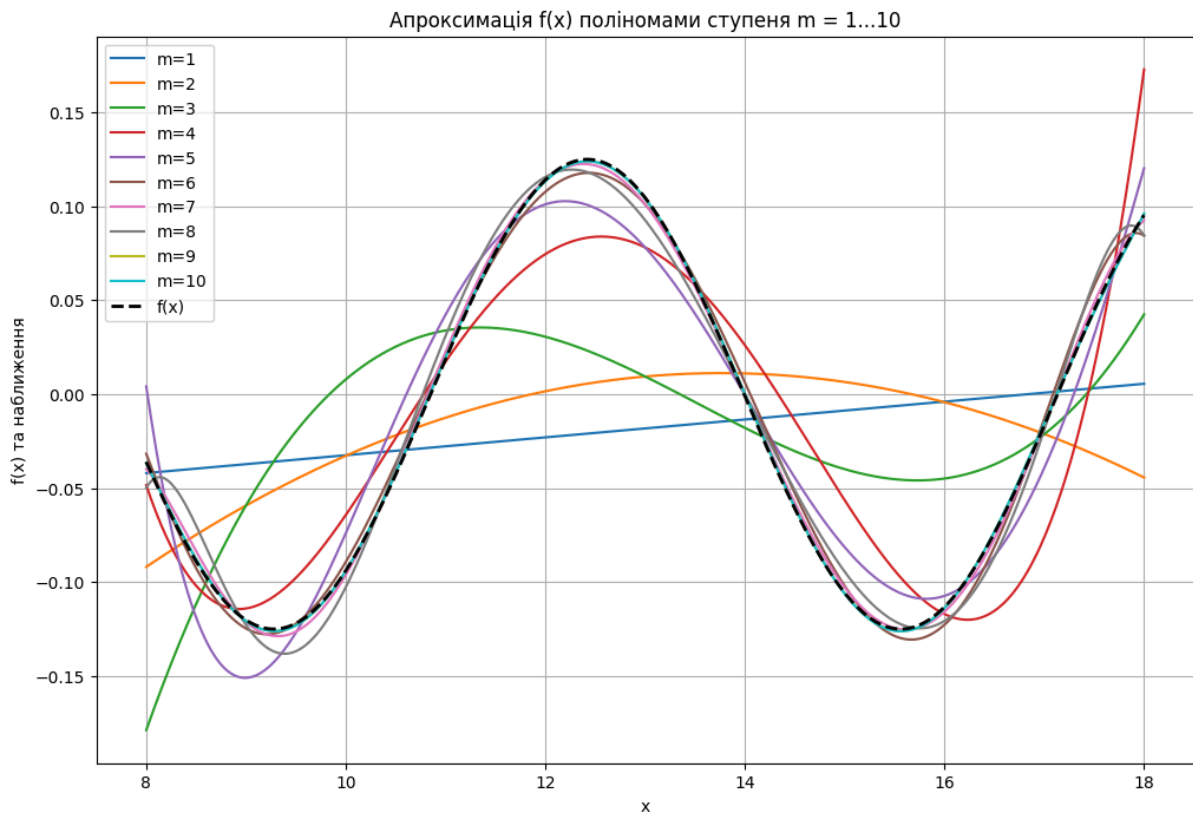
4. Для вибраного ступеня полінома $m=8$ я обчислив середньоквадратичну похибку (дисперсію)

```
Дисперсія (m=8): 1.006572e-02
```

5. Далі я побудував залежність дисперсії від ступеня апроксимуючого полінома для $m=1,2,\dots,10$. З цієї залежності обрав оптимальне значення ступеня як таке, що дає мінімальну дисперсію.



6. Для всіх ступенів $m=1$ до 10 я побудував апроксимаційні поліноми. Також розрахував похибки для кожного ступеня і побудував відповідний графік.



Висновок: У ході виконання лабораторної роботи я реалізував метод найменших квадратів для апроксимації заданої функції табличними даними. Було сформовано систему нормальних рівнянь, яку я розв'язав методом Гаусса. Отримані апроксимуючі поліноми перевірені на тестових значеннях. Я дослідив залежність дисперсії від ступеня полінома і встановив, що для даної функції найкращу точність забезпечує поліном з мінімальною дисперсією .