Ιδανική πόλις

Ο Leonardo, όπως πολλοί άλλοι Ιταλοί επιστήμονες και καλλιτέχνες της εποχής του, ενδιαφερόταν πολύ για το σχεδιασμό των πόλεων και τον αστικό σχεδιασμό. Στόχευε να μοντελοποιήσει μια ιδανική πόλη: άνετη, ευρύχωρη και λογική στην χρήση των πόρων, μακράν από τις στενές, κλειστοφοβικές πόλεις του Μεσαίωνα.

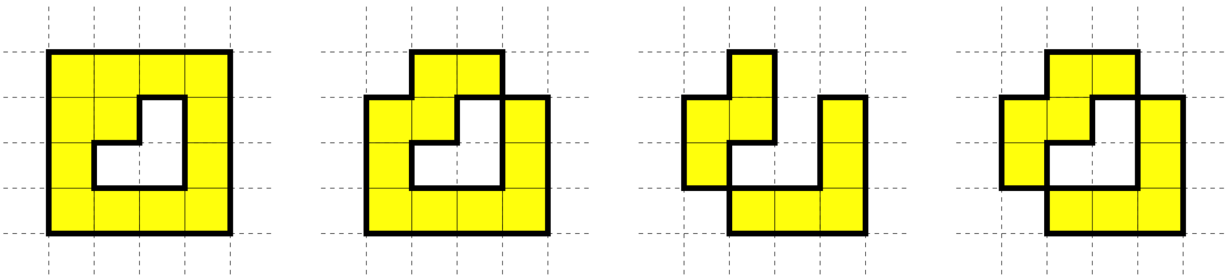
Η ιδανική πόλις

Η πόλη είναι κατασκευασμένη από N οικοδομικά τετράγωνα που έχουν τοποθετηθεί σε ένα άπειρο πλέγμα από κελιά. Κάθε κελί προσδιορίζεται από ένα ζεύγος συντεταγμένων (γραμμή, στήλη). Δοθέντος ενός κελιού (i, j), τα γειτονικά κελιά του είναι: (i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), και (i, j+1). Κάθε οικοδομικό τετράγωνο, όταν τοποθετείται στο πλέγμα, καλύπτει ακριβώς ένα από τα κελιά. Ένα οικοδομικό τετράγωνο μπορεί να τοποθετηθεί στο κελί (i, j) αν και μόνον αν $1 \leq i, j \leq 2^{31} - 2$. Θα χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες των κελιών για να αναφερόμαστε και στα οικοδομικά τετράγωνα που είναι τοποθετημένα πάνω σε αυτές. Δύο οικοδομικά τετράγωνα είναι γειτονικά αν έχουν τοποθετηθεί σε γειτονικά κελιά. Σε μια ιδανική πόλη, όλα τα οικοδομικά τετράγωνα συνδέονται κατά τέτοιο τρόπο που δεν υπάρχουν "τρύπες" μέσα στο όριο της, δηλαδή, τα κελιά πρέπει να ικανοποιούν και τις δυο παρακάτω συνθήκες.

- Για κάθε δύο *κενά* κελιά, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία από *κενά* κελιά που τα συνδέουν.
- Για κάθε δύο *μη κενά* κελιά, υπάρχει τουλάχιστον μια ακολουθία από διαδοχικά *μη κενά* κελιά που τα συνδέουν.

Παράδειγμα 1

Κανένας από τους παρακάτω σχηματισμούς οικοδομικών τετραγώνων δεν παριστά μια ιδανική πόλη: τα δύο πρώτα αριστερά δεν ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη, το τρίτο δεν ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη, και το τέταρτο δεν ικανοποιεί καμιά από τις συνθήκες.

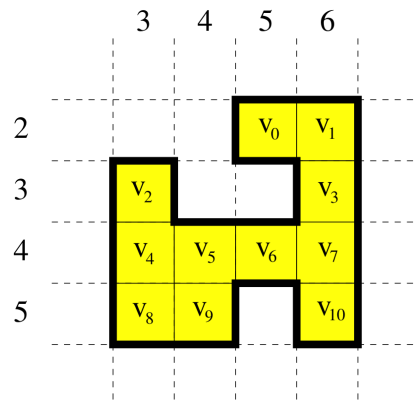


Απόσταση

Όταν διασχίζεται η πόλη, ένα *πήδημα* υποδεικνύει μετάβαση από ένα οικοδομικό τετράγωνο σε ένα γειτονικό. Τα κενά κελιά δεν μπορούν να διασχιστούν. Έστω v_0, v_1, …, v_{N-1} οι συντεταγμένες των N οικοδομικών τετραγώνων που έχουν τοποθετηθεί στο πλέγμα. Για οποιαδήποτε διακριτά κελιά στις συντεταγμένες v_i και v_j, η απόστασή τους $d(v_i, v_j)$ είναι το μικρότερο πλήθος πηδημάτων που απαιτούνται για να μεταφερθούμε από το ένα από αυτά τα οικοδομικά τετράγωνα στο άλλο.

Παράδειγμα 2

Ο παρακάτω σχηματισμός αναπαριστά μια ιδανική πόλη με N = 11 οικοδομικά τετράγωνα στις συντεταγμένες $v_0 = (2, 5)$, $v_1 = (2, 6)$, $v_2 = (3, 3)$, $v_3 = (3, 6)$, $v_4 = (4, 3)$, $v_5 = (4, 4)$, $v_6 = (4, 5)$, $v_7 = (4, 6)$, $v_8 = (5, 3)$, $v_9 = (5, 4)$, και $v_{10} = (5, 6)$. Για παράδειγμα, $d(v_1, v_3) = 1$, $d(v_1, v_8) = 6$, $d(v_6, v_{10}) = 2$, και $d(v_9, v_{10}) = 4$.



Πρόβλημα

Το πρόβλημά σας είναι, δεδομένης μιας ιδανικής πόλης να γράψετε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει το άθροισμα των αποστάσεων όλων των δυνατών ζευγών οικοδομικών τετραγώνων. v_i and v_j για τα οποία $i < j$. Τυπικά, το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει την τιμή του παρακάτω αθροίσματος:

$$\sum d(v_i, v_j), \text{ όπου } 0 \leq i < j \leq N - 1$$

Συγκεκριμένα, πρέπει να υλοποιήσετε μια ρουτίνα `DistanceSum`(N, X, Y) που όταν δίδονται το N και δύο πίνακες X και Y που περιγράφουν την πόλη, υπολογίζει τον παραπάνω τύπο. Τα X και Y έχουν και τα δύο μέγεθος N. Το οικοδομικό τετράγωνο i είναι στις συντεταγμένες (X[i], Y[i]) για $0 \leq i \leq N - 1$, και $1 \leq X[i], Y[i] \leq 2^{31} - 2$. Επειδή το αποτέλεσμα μπορεί να είναι πολύ μεγάλο για να παρασταθεί με χρήση 32 bits, θα πρέπει να το παρουσιάσετε modulo (υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσης) 1 000 000 000 (ένα δις).

Στο Παράδειγμα 2, υπάρχουν $11 \times 10 / 2 = 55$ ζεύγη οικοδομικών τετραγώνων. Το άθροισμα όλων των ζευγών αποστάσεων είναι 174.

Υποπρόβλημα 1 [11 βαθμοί]

Μπορείτε να υποθέσετε ότι $N \leq 200$.

Υποπρόβλημα 2 [21 βαθμοί]

Μπορείτε να υποθέσετε ότι $N \leq 2\ 000$.

Υποπρόβλημα 3 [23 βαθμοί]

Μπορείτε να υποθέσετε ότι $N \leq 100\ 000$.

Επιπλέον, ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες: δοθέντων δυο οποιονδήποτε μη κενών κελιών i και j έτσι ώστε X[i] = X[j], κάθε κελί μεταξύ τους είναι επίσης μη κενό. Δοθέντων οποιονδήποτε δύο μη κενών κελιών i και j έτσι ώστε Y[i] = Y[j], κάθε κελί μεταξύ τους είναι επίσης μη κενό.

Υποπρόβλημα 4 [45 βαθμοί]

Μπορείτε να υποθέσετε ότι $N \leq 100\ 000$.

Λεπτομέρειες υλοποίησης

Πρέπει να υποβάλετε ακριβώς ένα αρχείο, με όνομα `city.c`, `city.cpp` ή `city.pas`. Αυτό το αρχείο πρέπει να υλοποιεί το υποπρόγραμμα που περιγράφεται παραπάνω χρησιμοποιώντας τις παρακάτω επικεφαλίδες.

Προγράμματα C/C++

```
int DistanceSum(int N, int *X, int *Y);
```

Pascal προγράμματα

```
function DistanceSum(N : LongInt; var X, Y : array of LongInt) : LongInt;
```

Αυτό το υποπρογράμμα πρέπει να συμπεριφέρεται όπως περιγράφεται παραπάνω. Φυσικά είστε ελεύθεροι να υλοποιήσετε και άλλα υποπρογράμματα για εσωτερική του χρήση. Οι υποβολές σας δεν θα πρέπει να επικοινωνούν με κανένα τρόπο με το standard input/output, ούτε με οποιοδήποτε άλλο αρχείο.

Ενδεικτικός διορθωτής

Ο ενδεικτικός διορθωτής που παρέχεται με αυτό το πρόβλημα θα αναμένει είσοδο στην παρακάτω μορφή:

- γραμμή 1: N;
- γραμμές 2, …, N + 1: X[i], Y[i].

Περιορισμοί χρόνου και μνήμης

- Όριο χρόνου: 1 δευτερόλεπτο.
- Όριο μνήμης: 256 MiB.