1. Інтерполяційні многочлени Лагранжа

Якщо потрібно апроксимувати набір даних, яких є багато (наприклад, 300 вузлів), то це здійснюється за допомогою сплайнів. Задача глобальної інтерполяції є менш точною і застосовується в тому випадку, коли потрібно обробляти невелику кількість вузлів.

Інтерполяційні многочлени Лагранжа на практиці використовуються рідко, переважно у випадку, коли потрібно побудувати інтерполяційний многочлен для двох, трьох вузлів.

Розглянемо задачу глобальної інтерполяції. Побудуємо інтерполяційну функцію як комбінацію алгебраїчних многочленів.

Робимо припущення, що глобальний інтерполюючий многочлен можна побудувати як лінійну комбінацію деяких алгебраїчних многочленів. Тобто припускаємо, що многочлен Лагранжа має вигляд:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\left(x\right)$$

де $\varphi\left(x\right)$ деякий алгебраїчний многочлен степені $\boldsymbol{n}$. У випадку побудови алгебраїчних многочленів Лагранжа значення коефіцієнтів a_i задають як

$$a_i = f\left(x_i\right)$$

тобто значення вхідної функції в і-тому вузлі.

Виходячи з умови проходження інтерполяційного многочлена через вузли інтерполяції, многочлен Лагранжа повинні задовольняти умові.

$$\varphi\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}f\left(x_j\right)\varphi_i\left(x_j\right)=f\left(x_j\right)$$

Тобто ми робимо наступні припущення:

Коефіцієнти розкладу рівні $f\left(x_j\right)$

Таким чином функція $\varphi_i(x)$ повинна задовольняти умові інтерполяції, тобто має проходити через всі вузли.

Робимо припущення про вигляд функції $\varphi_i(x_j)$.

$$\varphi_i\left(x_j\right)=\begin{matrix}1,i=j\\0,i\neq j\end{matrix}$$

Цьому співвідношенню задовольняє алгебраїчний многочлен

$$\varphi_i(x)=c_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\left(x-x_j\right)$$

В даній формулі П є множником. Нормуючий множник c_i знайдемо з умови, що при

$$x = x_i$$

$$\varphi_i(x_i) = 1$$

$$c_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Далі підставимо значення функції $\varphi_i(x)$, значення коефіцієнтів c_i, і отримуємо наступний вираз для інтерполяційного многочлена Лагранжа

$$L_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i\right) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\left(x - x_j\right)}{\left(x_i - x_j\right)}$$

Найпростішим випадком є випадок, коли $n = 2$ (число вузлів). Алгебраїчний многочлен Лагранжа для випадку n вузлів є алгебраїчним многочленом в степені n. Коли ж $n = 2$, то він є многочленом 2-го порядку. Запишемо явний вираз інтерполяційного многочлена Лагранжа для випадку трьох вузлів

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Оцінимо похибку інтерполяції многочленом Лагранжа. Похибка – це різниця між точним значенням і наближеним значенням, яке ми дістаємо за допомогою нашої функції. Якщо функція $f(x)$ $n+1$ неперервно диференційована на відрізку $[a, b]$, то

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{\omega_n(x) M_{n+1}}{(n+1)!}$$

Де

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

$\omega_n(x)$ – алгебраїчний многочлен n-того порядку, M_{n+1} – максимальне значення похідної $(n+1)$-го порядку для даної функції.