Введемо розділені різниці, які задовольняють наступним рекурентним співвідношенням. Розділена різниця нульового порядку співпадає зі значенням функції

$$f(x_i) = f(x_i).$$

Розділена різниця першого порядку

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Розділена різниця другого порядку

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

В загальному ми можемо записати рекурентну формулу для обчислення розділених різниць k-го порядку через розділені різниці $(k-1)$ порядку:

$$f(x_i, \ldots x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots x_{i+k}) - f(x_i, \ldots x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}.$$

Можна показати, що

$$f(x_0, \ldots x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=0,n}} (x_i - x_j)}.$$

Доведення цього твердження зробимо методом математичної індукції. При $n = 0$ отримаємо очевидну тотожність $f(x_0) = f(x_0)$. Покажемо, що зі справедливості нашого твердження при n випливає його справедливість при $n+1$. Враховуючи властивості скінченних різниць, запишемо вираз

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - f(x_0, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}$$

Підставимо сюди вираз для розділеної різниці $n-$порядку:

$$f\left(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\right) = \frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f\left(x_i\right)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1,n+1}} \left(x_i - x_j\right)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{f\left(x_i\right)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=0,n}} \left(x_i - x_j\right)}\right)$$

Знайдемо значення коефіцієнта при $f\left(x_i\right)$. Окремо розглянемо випадки $i = 1 \ldots n$ та $i = 0,\ i = n + 1$.

У випадку $i = 1 \ldots n$ отримаємо

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left(\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=1,n+1}} \left(x_i - x_j\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=0,n}} \left(x_i - x_j\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left(\frac{\left(x_i - x_0\right) - \left(x_i - x_{n+1}\right)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=0,n+1}} \left(x_i - x_j\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ j=0,n+1}} \left(x_i - x_j\right)}$$

Аналогічно для випадку $i = 0$ отримаємо

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left(-\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq 0 \\ j=0,n}} \left(x_0 - x_j\right)}\right) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq 0 \\ j=0,n+1}} \left(x_0 - x_j\right)}$$

Для випадку $i = n+1$ знаходимо, що

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left(\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j\neq n+1\\ j=1,n+1}}\left(x_{n+1} - x_j\right)}\right) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j\neq n+1\\ j=0,n+1}}\left(x_{n+1} - x_j\right)}$$

Якщо підсумувати отримані результати, ми отримаємо, що розділена різниця $(n+1)-$порядку визначається виразом

$$f\left(x_0,\dots x_{n+1}\right) = \sum_{i=0}^{n+1}\frac{f\left(x_i\right)}{\prod\limits_{\substack{j\neq i\\ j=0,n+1}}\left(x_i - x_j\right)}$$

який випливає з постульованого виразу для розділеної різниці $n-$ порядку. Таким чином наше твердження доведено

Так як розділена різниця являє собою лінійну комбінацію значень функції у вузлах, тому значення розділеної різниці не змінюється при перестановці її аргументів.

Можна показати, що розділена різниця $n-$порядку по порядку величини визначається похідною від функції $n-$ порядку (доведення цього твердження буде дане при розгляді чисельного диференціювання):

$$f\left(x_0,\dots,x_n\right) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

де $\xi \in \left[x_0, x_n\right]$

Розглянемо іншу форму запису інтерполяційного многочлена. Але спочатку виконаємо ряд проміжних перетворень. Знайдемо значення різниці

$$f(x)-L_n(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0,n}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\left(\frac{f(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}-\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\prod\limits_{\substack{j\neq i\\ j=0,n}}(x_i-x_j)}\right)=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\left(\frac{f(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}+\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\prod\limits_{\substack{j\neq i\\ j=0,n}}(x_i-x_j)}\right)=$$

$$=f(x,x_0,\ldots x_n)w_n(x)$$

Обчислимо тепер різницю двох інтерполяційних многочленів Лагранжа $L_n(x)-L_{n-1}(x)$. Це є алгебраїчний многочлен степені n, який перетворюється в нуль у вузлах $0,1,\ldots,n-1$. Тому ми його можемо записати у вигляді

$$L_n-L_{n-1}=A_{n-1}w_{n-1}(x),$$

де A_{n-1} – деяка стала.

Якщо $x=x_n$, то значення інтерполяційного многочлена Лагранжа співпадає зі значенням функції в цьому вузлі $L_n(x_n)=f(x_n)$. Тому

$$f(x_n)-L_{n-1}(x_n)=A_{n-1}w_{n-1}(x_n)$$

З іншого боку, якщо ми використаємо результати попереднього випадку, то при $x=x_n$ отримаємо

$$\begin{aligned}f(x_n)-L_{n-1}(x_n)&=f(x_n,x_0,x_1,\ldots x_{n-1})w_{n-1}(x_n)=\\&=f(x_0,x_1,\ldots x_{n-1},x_n)w_{n-1}(x_n)\end{aligned}.$$

Порівнявши ці два вирази, отримаємо значення константи $A_{n-1}=f(x_0,x_1,\ldots x_n)$. Таким чином

$$L_n(x) - L_{n-1}(x) = f(x_0, x_1, \dots x_n) w_{n-1}(x).$$

Представимо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді тотожності:

$$L_n(x) = L_0(x) + \left(L_1(x) - L_0(x)\right) + \left(L_2(x) - L_1(x)\right) + \dots + \left(L_n(x) - L_{n-1}(x)\right)$$

Врахуємо, що

$$L_0(x) = f(x_0)$$

$$L_1(x) - L_0(x) = f(x_0, x_1) w_0(x) = (x - x_0) f(x_0, x_1)$$

$$L_2(x) - L_1(x) = f(x_0, x_1, x_2) w_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2)$$

$$\dots$$

$$L_n(x) - L_{n-1}(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) w_{n-1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

В результаті отримаємо представлення інтерполяційного многочлена Лагранжа через розділені різниці. Отриманий таким чином многочлен називається інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \dots$$

$$\dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Аналогічно ми можемо отримати вираз для інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції назад

$$N_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots$$

$$\dots + (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1) f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)$$

В процесі проміжних перетворень ми отримали вираз, який дає нам змогу оцінити точність інтерполяції

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, \dots x_n) w_n(x)$$

Врахувавши, що для розділених різниць справедливо співвідношення, що

$$f(x_0, ..., x_n) \approx \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}$$

де $\xi \in [x_0, x_n]$, отримаємо граничну оцінку величини похибки

$$R_n = w_n(x) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[x_0,x_n]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

Як ми бачимо інтерполяційний многочлен Ньютона має $(n+1)$ порядок точності інтерполяції.

Поліном $w_n(x)$ рівномірно обмежений по *x*. Тому справедлива оцінка:

$$\left|w_n(x)\right| < (nh)^{n+1}$$

Це нам дає змогу для отримання заданої точності інтерполяції при фіксованому числі вузлів визначити крок сітки з умови

$$(nh)^{n+1} \le \frac{\varepsilon(n+1)!}{M_{n+1}}$$

Використовувати формулу Стірлінга для оцінки значення $n!$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ми можемо оцінити число вузлів при відомому кроці сітки необхідне для отримання заданої точності

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\cdot M_{n+1}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < \varepsilon$$

При інтерполяції на рівномірній сітці потрібно вибирати з таблиці вузли так, щоб задане значення x потрапляло у центр конфігурації розміщення цих вузлів.

Якщо ми хочемо інтерполювати функцію $f(x) = \sin x$, то для досягнення точності $\varepsilon = 5\cdot 10^{-7}$ у випадку $n=1$ крок має задовольнити умові $h \le 0.002$. У випадку $n=2$ для досягнення цієї ж точності, отримаємо оцінку величини кроку $h \le 0.02$