Апроксимація

Апроксимуючі многочлени:
Алгебраїчні многочлени
Тригонометричні функції
Показникові функції
Раціональні дроби

Точкова і неперервна апроксимація

Задачі точкової апроксимації
Локальна інтерполяція
Глобальна інтерполяція
Екстраполяція
Квадратичне наближення (найкраще)
Рівномірне наближення (найкраще)

Інтерполяція кубічними сплайнами.

Кубічний сплайн – математична модель абсолютно гнучкого, пружного та тонкого стержня. Якщо стержень закріпити в двох його кінцях з заданими кутами нахилу α і β, то стержень прийме форму, що мінімізує його потенціальну енергію. Нехай рівняння стержня визначається функцією $S(x)$. Умова рівноваги сплайна визначається рівнянням:

$$S^{(IV)}(x)=0.$$

Легко бачити, що цій умові задовольняє алгебраїчний многочлен третього ступеня.

Нехай нам задана послідовність вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$ і значення деякої функції $y(x)$ в цих вузлах $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Ми можемо записати рівняння кубічного сплайна на інтервалі $\left[x_{i-1}, x_i\right]$

$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3.$$

Так як для кожного інтервалу ми матимемо інше рівняння сплайну, то ми повинні знайти $4n$ значень коефіцієнтів сплайнів. Для їх знаходження ми повинні записати систему $4n$ рівнянь.

Першу групу рівнянь ми отримаємо з умови, що наші сплайни проходять через задану сукупність вузлів:

- з умови $S_i\left(x_{i-1}\right)=y_{i-1}$, знаходимо, що $a_i=y_{i-1}$ для $i=1,n$.
- з умови $S_i\left(x_i\right)=y_i$, знаходимо , що

$$a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=y_i \text{ для } i=1,n, \quad h_i=x_i-x_{i-1}.$$

Наступну групу рівнянь отримаємо з умови гладкості наших сплайнів. Для цього задамо умову неперервності перших і других похідних у вузлах x_i. Виконавши диференціювання, отримаємо вирази для похідних на $i-$інтервалі :

$$S_i'\left(x\right)=b_i+2c_i\left(x-x_{i-1}\right)+3d_i\left(x-x_{i-1}\right)^2,$$

$$S_i''\left(x\right)=2c_i+6d_i\left(x-x_{i-1}\right).$$

Прирівнявши в $i-$му вузлі вирази для похідних сплайнів записаних для інтервалів i та $i+1$,

$$S_i'(x_i)=S_{i+1}'(x_i)$$
$$S_i''(x_i)=S_{i+1}''(x_i)$$

отримаємо $2n-2$ рівняння:

$$b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2=b_{i+1} \text{ для } i=1;n-1,$$
$$2c_i+6d_ih_i=2c_{i+1} \text{ для } i=1;n-1.$$

Ми отримали систему $4n-2$ рівнянь. Ще два рівняння ми отримаємо з умов, що накладаються у крайніх вузлах. Задамо кривизну сплайна в крайніх вузлах рівною нулю, що відповідає випадку вільного кубічного сплайну:

$$S_1''(x_0)=0,\ S_n''(x_n)=0.$$

Отримаємо, що $2c_1=0$ та $2c_n+6d_nh_n=0$.

Перейдемо до розв'язку отриманої системи. Для цього перетворимо її до трьохдіагонального вигляду.

Послідовно знаходимо:

$$a_i = y_{i-1}, \qquad i = \overline{1,n};$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = \overline{1,n-1};$$

$$d_n = \frac{-c_n}{3h_n}.$$

З рівняння

$$y_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_i$$

отримаємо вирази для коефіцієнтів b_i

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(c_{i+1} + 2c_i\right), i = \overline{1,n-1};$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3} h_n c_n.$$

Запишемо систему рівнянь відносно коефіцієнтів c_i. Підставимо вирази для b_i та d_i в рівняння умови неперервності перших похідних. Отримаємо рівняння:

$$h_i c_i + 2h_i c_{i+1} + 2h_{i+1} c_{i+1} + h_{i+1} c_{i+2} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right).$$

Зменшимо на одиницю індекс i:

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2\left(h_{i-1} + h_i\right) c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right),\ i = \overline{2, n-1}.$$

Використовуючи умови в 0-му та n-му вузлах, знаходимо

$$c_1 = 0,$$

$$h_{n-1} c_{n-1} + 2\left(h_{n-1} + h_n\right) c_n = 3\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right).$$

Отже, для знаходження коефіцієнтів $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ми отримали систему n лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_1 = 0$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2) c_2 + h_2 c_3 = 3\left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1}\right)$$

$$\ldots$$

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right).$$

$$\ldots$$

$$h_{n-1} c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n) c_n = 3\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}\right)$$

Система рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_i має так звану трьохдіагональну матрицю і для її розв’язку ми можемо використати метод прогонки.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h_{i-1} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\left(h_{i-1}+h_i\right) \\ 2\left(h_{n-1}+h_n\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h_i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \dfrac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Можна оцінити похибку сплайн-інтерполяції. У загальному випадку

$$R = \frac{5M_4 h^4}{384}$$

де

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

$$h = \max_{i=0\ldots n} h_i$$