# Лабораторна робота №3

## *Факторіальні многочлени*

**Мета:** вивчити методику розкладу функцій в ряд по факторіальних многочленах.

## Основні теоретичні відомості.

У випадку рівновіддалених вузлів для задачі інтерполяції зручно використовувати скінченні різниці. Нехай ми маємо сукупність рівновіддалених вузлів $\{x_i, f_i\},\ i = 0\ldots n$. Виконаємо заміну змінних $t = {(x - x_0)}/{h}$. Отримаємо, що в нових координатах координати вузлів сітки $t = 0,1,\ldots,n$. Крок сітки рівний одиниці.

**Різницевий оператор.**

Основним оператором, в обчисленні скінченних різниць, є різницевий оператор, який визначається рівністю:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

Розглянемо його основні властивості:

Різницевий оператор є лінійним, тобто

$$\Delta\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) = \alpha\Delta f(t) + \beta\Delta g(t)$$

Дія різницевого оператора на добуток функцій дає

$$\Delta\big(f(t)g(t)\big) = f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t) =$$
$$f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t) =$$
$$f(t+1)\big(g(t+1) - g(t)\big) + g(t)\big(f(t+1) - f(t)\big) =$$
$$f(t+1)\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)$$

Дія різницевого оператора на частку двох функцій дає:

$$\Delta\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t+1)g(t)}$$

Дія різницевого оператора на деякі стандартні функції визначається як

$$\Delta a^t = a^t(a-1)$$
$$\Delta 2^t = 2^t(2-1)$$
$$\Delta \ln(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$
$$\Delta \sin(at+b) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(a\left(t + \frac{1}{2}\right) + b\right)$$
$$\Delta \cos(at+b) = -2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(a\left(t + \frac{1}{2}\right) + b\right)$$

Різницевий оператор можна підносити до степені $\Delta^2 f(t) = \Delta\big(\Delta f(t)\big)$.

В загальному випадку можна записати: $\Delta^n f(t) = \Delta\left(\Delta^{n-1} f(t)\right)$

Розглянемо основну теорему в обчисленні різниць:

Для алгебраїчного многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ різниця $n-$го порядку рівна $a_n n!$, а різниця $(n+1)$ порядку – рівна нулю.

Якщо $f(t)$ - алгебраїчний многочлен степені $n$, то $\Delta f(t)$ є алгебраїчний многочлен степені $n-1$. Щоб довести це твердження, розглянемо випадок $f(t) = t^n$:

$$\Delta\left(t^n\right) = (t+1)^n - t^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k - t^n =$$
$$= t^n + nt^{n-1} + \ldots + 1 - t^n = nt^{n-1} + \ldots$$

Подіявши різницевим оператором на алгебраїчний многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ $n$ раз, ми отримаємо необхідний результат $a_n n!$.

**Оператор зсуву**

Введемо оператор зсуву за допомогою співвідношення

$E\left(f(t)\right) = f(t+1)$

Розглянемо тепер його основні властивості:

Оператор зсуву є лінійним

$$E\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) = aE\left(f(t)\right) + \beta E\left(g(t)\right)$$

Оператор зсуву можна підносити до степені $E^n\left(f(t)\right) = f(t+n)$

$E^0\left(f(t)\right) = f(t)$

$E^{-n}\left(f(t)\right) = f(t-n)$

Між різницевим оператором і оператором зсуву є співвідношення $\Delta = E - 1$. Його правильність випливає з наступного:

$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) = E\left(f(t)\right) - f(t) = (E-1)\left(f(t)\right)$

Використовуючи оператор зсуву, доведемо правильність формули для обчислення скінченних різниць:

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k E^k$$

Отримаємо:

$$\Delta f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k E^k\left(f(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(t+k)$$

**Факторіальні многочлени**

В математичному аналізі важливу роль відіграє функція $x^n$. Це зумовлено тим, що довільна функція може бути розкладена в ряд по степенях $x^n$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Можна показати, що ця властивість функцій $x^n$ в першу чергу визначається тим, що перша похідна задовольняє співвідношення:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

В чисельних методах важливу роль відіграють функції – факторіальні многочлени. Факторіальні многочлени вводять виходячи з умови

$$\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$$

Цій умові задовольняють наступні многочлени $t^{(n)} = t(t-1)\dots(t-n+1)$.

Факторіальні многочлени задовольняють наступним властивостям:

$t^{(0)} = 1$. Звідси випливає, що $0^{(0)} = 1$. Це відповідає такому формальному співвідношенню $0! = 1$.

Факторіальний многочлен $t^{(n)}$ має $n$ множників.

Доведемо основну властивість факторіальних многочленів.

$$\begin{aligned}
&\Delta t^{(n)} = (t+1)^{(n)} - t^{(n)} = \\
&(t+1)t(t-1)\dots(t-(n-2)) - t(t-1)\dots(t-(n-1)) = \\
&= t(t-1)\dots(t-(n-2))(t+1-t+n-1) = \\
&= nt(t-1)\dots(t-(n-2)) = nt^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Доведемо, що довільну функцію можна розкласти в ряд по факторіальних многочленах.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{(k)}$$

При $t = 0$ знаходимо, що $f(0) = b_0$. Подіємо різницевим оператором на обидві сторони рівняння $\Delta f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k t^{(k-1)}$. Аналогічно знаходимо, що при $t = 0$ $\Delta f(0) = b_1$. Подіявши різницевим оператором $n$ раз отримаємо: $\Delta^n f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} b_n k(k-1)\dots(k-(n-1))t^{(k-n)}$ При $t = 0$ $\Delta^n f(0) = n! b_n$.

Отже, ми отримали ряд по факторіальних многочленах:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} t^{(k)}$$

Очевидно, що у випадку скінченної кількості вузлів ми повинні обривати наш факторіальний ряд в залежності від числа вузлів.

## Хід роботи.

1. Скласти програму для табуляції заданої трансцендентної функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ з кроком $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, де $n$ - задане число вузлів. Результати табуляції записати в текстовий файл. Отриману сукупність вузлів $\{x_i, y_i\}$ використати в подальшому як набір вхідних даних.
2. Скласти програму знаходження довільного значення функції $f(t)$ за допомогою ряду по факторіальних многочленах. В програмі записати наступні функції: зчитування вхідних даних з текстового файлу – масиву $f_i,\ i = 0\dots n$, знаходження значення факторіалу $k!$, знаходження значення числа перестановок $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, значення скінченної різниці $\Delta^k f(0)$, значення факторіального многочлена $t^{(k)}$, обчислення наближеного значення функції для довільного $t$ з використанням ряду по факторіальним многочленам $f_{appr}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} t^{(k)}$, обчислення похибки наближення $\varepsilon(t) = \left| f(t) - f_{appr}(t) \right|$.

3. Протабулювати на відрізку $[0, n]$ задану функцію $f(t)$, наближене значення функції $f_{appr}(t)$ та похибку наближення $\varepsilon(t)$ з кроком $0,01$. Побудувати графіки цих залежностей.
4. Розглянути випадки $n = 5, 10, 20$.
5. Результати виконання лабораторної роботи оформити у вигляді звіту.