0.1. Метод прогонки для СЛАР з трьохдіагональною матрицею

У випадку СЛАР великої розмірності якщо матриця A системи рівнянь має специфічний вигляд розроблено ряд методів розв'язування СЛАР.

Зокрема, якщо система рівнянь має так звану трьохдіагональну матрицю то для її розв'язку ми можемо використати метод прогонки.

Знаходження розв'язку методом прогонки вимагає $(n+1)$ операцію.

Розглянемо систему рівнянь з трьохдіагональною матрицею:

$$\begin{cases} \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = \delta_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = \delta_2 \\ \dots \\ \alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i \\ \dots \\ \alpha_n x_{n-1} + \beta_n x_n = \delta_n \end{cases}$$

Метод прогонки складається з двох етапів: прямої та зворотної прогонки.

Розглянемо пряму прогонку. З першого рівняння знаходимо

$$x_1 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1}x_2 + \frac{\delta_1}{\beta_1}.$$

Введемо позначення коефіцієнтів при X_2, $A_1 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1}$;а вільний член $B_1 = \frac{\delta_1}{\beta_1}$.

В цих позначеннях ми можемо записати що x_1 виражається через x_2

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1.$$

Підставляємо x_1 в друге рівняння. З другого рівняння знаходимо

$$\alpha_2 \left(A_1 x_2 + B_1\right) + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = \delta_2$$

$$x_2 = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}x_3 + \frac{\delta_2 - \alpha_2 B_1}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}$$

Аналогічно до першого рівняння ми можемо записати:

$x_2 = A_2 x_3 + B_2$, де$A_2 = -\frac{\gamma_2}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}$; $B_2 = \frac{\delta_2 - \alpha_2 B_1}{\alpha_2 A_1 + \beta_2}$

Можна показати, що в загальному випадку

$x_i = A_i x_{i+1} + B_i$, де$A_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i A_{i-1} + \beta_i}$; $B_i = \frac{\delta_i - \alpha_i B_{i-1}}{\alpha_i A_{i-1} + \beta_i}$

Після того, як ми знайшли всі коефіцієнти A_i та B_i $(i = 1 \ldots n-1)$, можна перейти до етапу зворотної прогонки.

Розглянемо два останні рівняння

$$\begin{cases} x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1} \\ \alpha_n x_{n-1} + \beta_n x_n = \delta_n \end{cases}.$$

Знаходимо:

$$x_n = \frac{\delta_n - \alpha_n B_{n-1}}{\alpha_n A_{n-1} + \beta_n}.$$

Для того, щоб знайти A_2 і B_2, потрібно знати A_1 і B_1. Маючи вираз для A_1 і B_1, A_2 і B_2, можна знайти A_3 і B_3. Далі послідовно знаходимо:

$$x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1}$$

$$\dots$$

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1$$

Тобто пряма прогонка полягає в тому, що починаючи з A_1 і закінчуючи A_{n-1}, і відповідно починаючи з B_1 і закінчуючи B_{n-1}, ми послідовно знаходимо допоміжні коефіцієнти. Знайшовши коефіцієнти і , можна перейти до зворотної прогонки. Тобто знайти спочатку xn через коефіцієнти A_{n-1} і B_{n-1}, і послідовно знайти значення невідомих.

Перевагою такого методу в тому, що обчислювальна похибка не набігає, а також число операцій є суттєво меншим ніж у методі Гауса.

Якщо виконується умова, що $|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i|$ і хоча би для одного i виконується строга рівність, то ділення на нуль не виникає, система має єдиний розв'язок і метод прогонки є стійким відносно похибки округлення (це достатня умова).