Скінченні різниці. Властивості скінченних різниць

Нехай ми маємо сукупність значень деякої функції задані в $(n+1)$ вузлі з кроком h:

$$x_0, x_1, ..., x_n$$

$$f_0, f_1, ..., f_n$$

Де f_n - значення функції в n вузлі, тобто $f(x_n)$.

Припустимо, що всі вузли є рівновіддалені, тобто $x_1 - x_0 = h$ і $x_n - x_{(n-1)} = h$.

Тоді введемо заміну змінних:

$$t = \frac{(x - x_0)}{h}$$

В нульовому вузлі $t = 0$, в першому вузлі $t = 1$, другому $t = 2$ в n-вузлі $t = n$ тобто звідси випливає, що змінна t непотрібна, а достатньо тільки табличне значення f_n. Змінна t у вузлах приймає цілі значення рівні порядковому номеру вузла.

Така замінна змінних полегшує опрацювання даних заданих у рівновіддалених вузлах, а саме, дає зменшити число обчислень на яких базується похибка і покращується точність.

Введемо поняття скінчених різниць.

Скінченна різниця першого порядку визначається як різниця значень функції у сусідніх вузлах

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

Скінченні різниці вищих порядків можна обчислити за допомогою рекурентної формули через розділені різниці нижчих порядків:

$$\Delta^k f_0 = \Delta(\Delta^{k-1} f_0) = \Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$$
$$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

Де індекси k – порядок різниці. Для того, щоб обчислити різницю n-порядку треба мати інфомацію $n+1$ вузол від 0 до n. Наприклад, щоб обчислити різницю 2-порядку треба мати 3 вузли нульовий, перший і другий, щоб знати скільки з таблиці зчитати вузлів.

Скінченна різниця будь-якого порядку являє собою лінійну комбінацію значення функцій в вузлах

Основна теорема скінченних різниць

Скінченна різниця довільного порядку взята в m-вузлі , тобто f_m, f_{m+1}, $f_{m+2}, \ldots$, f_{m+n} виражається по формулі

$$\Delta^n f_m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} f_{m+k}$$

Де C_n^k- число перестановок ,f_{m+k}- значення функції в $m+k$ вузлі.

Розглянемо основні властивості скінченних різниць

Оператор скінченної різниці є лінійним. Скінченну різницю довільного порядку можна обчислити за формулою

$$\Delta^n f_m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} f_{m+k}$$

$$\Delta^n f_0 = f_n - n f_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{n-2} + ... + (-1)^n f_0$$

Скінченна різниця вперед, це коли починаємо в нульовому вузлі і далі за розрахунком скінченних різниць беремо перший вузол, другий і до n,тобто рухаємося по таблиці вперед.

Можна ввести поняття скінченних різниць назад. Коли рухаємося від n- вузла до нульового вузла.

Скінченна різниця вперед позначається як Δ , тоді коли скінченна різниця назад позначається $\bigtriangledown$.

Скінченна різниця назад першого порядку визначається як різниця значень функції у сусідніх вузлах $\bigtriangledown f_n = f_n - f_{n-1}$.

Скінченні різниці назад володіють тими самими властивостями що і скінченні різниці вперед.

Скінченні різниці назад вищих порядків можна обчислити за допомогою рекурентної формули:

$$\bigtriangledown^k f_n = \bigtriangledown(\bigtriangledown^{k-1} f_n) = \bigtriangledown^{k-1} f_n - \bigtriangledown^{k-1} f_{n-1}$$

Скінченна різниця назад будь-якого порядку являє собою лінійну комбінацію значень функцій в вузлах.

Між скінченними різницями вперед і скінченними різницями назад є просте співвідношення $\bigtriangledown^m f_n = \bigtriangledown^m f_m + n$, яке легко дозволяє обчислити значення скінченної різниці назад по відомому значенню відповідної скінченної різниці вперед.

У разі необхідності обчислення скінченної різниці назад, достатньо тільки викликати функцію що обчислює скінченну різницю вперед тільки змінюючи аргументи.

Різницевий оператор.

Різницевий оператор- це такий оператор, який діє на якусь функцію в якомусь вузлі та повертає різницю значень функцій в двох сусідніх вузлах. З точки зору математики, вважається аналогом похідної ,хоч і має деякі відмінності.

Основним оператором, в обчисленні скінченних різниць, є різницевий оператор, який визначається рівністю:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$

Розглянемо його основні властивості:

Різницевий оператор є лінійним, тобто дія різницевого оператора на лінійну комбінацію якихось функцій дорівнює лінійній комбінації дії різницевого оператора на кожну з цих функцій зокрема

$$\Delta(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \Delta f(t) + \beta \Delta g(t)$$

Дія різницевого оператора на добуток функцій

$$\Delta(f(t)g(t)) = f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t) =$$

$$= f(t+1)g(t+1) - f(t+1)g(t) + f(t+1)g(t) - f(t)g(t) =$$
$$= f(t+1)(g(t+1) - g(t)) + g(t)(f(t+1) - f(t)) =$$
$$= f(t+1)\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)$$

Дія різницевого оператора на частку двох функцій дає:

$$\Delta(\frac{f(t)}{g(t)}) = \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t+1)g(t)}$$

Дія різницевого оператора на деякі стандартні функції визначається як

$\Delta a^t = a^t(a-1)$
$\Delta 2^t = 2^t(2-1)$
$\Delta ln(t) = ln(1+\frac{1}{t})$
$\Delta sin(at+b) = 2sin(\frac{a}{2})cos(a(t+\frac{1}{2})+b)$
$\Delta cos(at+b) = -2sin(\frac{a}{2})sin(a(t+\frac{1}{2})+b)$

Різницевий оператор має також властивість, що його можна підносити до степені.

Тобто різницевий оператор другої степені є добутком двох різницевих операторів першої степені $\Delta^2 f(t) = \Delta(\Delta f(t))$.

В загальному випадку можна записати:

$$\Delta^n f(t) = \Delta(\Delta^{n-1} f(t))$$

Розглянемо основну теорему в обчисленні різниць:

Для алгебраїчного многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ різниця n-го порядку рівна $a_n n!$, а різниця $(n+1)$ порядку – рівна нулю.

Якщо $f(t)$ - алгебраїчний многочлен степені n , то $\Delta f(t)$ є алгебраїчний многочлен степені $n-1$ Щоб довести це твердження, розглянемо випадок $f(t) = t^n$:

$$\Delta(t^n) = (t+1)^n - t^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k - t^n =$$

$$= t^n + nt^{n-1} + ... + 1 - t^n = nt^{n-1} + ...$$

Подіявши різницевим оператором на алгебраїчний многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ n раз, ми отримаємо необхідний результат $a_n n!$.

Тобто якщо n раз подіяти дістанемо константу 0 , значення константи в будь –якому вузлі є однаковою .

Оператор зсуву

Якщо подіяти різницевим оператором на функцію в деякому вузлі, тоді ми отримаємо значення функції в сусідному вузлі.

Введемо оператор зсуву за допомогою співвідношення

$$E(f(t)) = f(t+1)$$

Де t- змінна, що нумерує вузли. Тобто якщо є необхідність ввести від 0 до n , то t пробігає від 0 до n.

Звідси випливає, що значення t в n вузлі рівна n, а значення t в нульовому вузлі рівне 0.

Розглянемо тепер його основні властивості:

Оператор зсуву є лінійним

$$E(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha E(f(t)) + \beta E(g(t))$$

Оператор зсуву можна підносити до степені, тобто оператор зсуву в квадраті зсуває значення функції в 2 рази

$$E^n(f(t)) = f(t+n)$$

Формально можна ввести оператор зсуву в нульовій степені повертає те саме значення в тому самому вузлі

$$E^0(f(t)) = f(t)$$

Також формально можна ввести оператор зсуву у від'ємній степені, якщо оператор зсуву в додатній степені то він зсуває значення функції вперед, коли у від'ємній степені- назад.

$$E^{-n}(f(t)) = f(t-n)$$

Між різницевим оператором і оператором зсуву є просте співвідношення $\Delta = E - 1$. Його правильність випливає з наступного:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) = E(f(t)) - f(t) = (E-1)(f(t))$$

Використовуючи оператор зсуву, доведемо правильність формули для обчислення скінченних різниць:

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k E^k$$

Отримаємо:

$$\Delta^k f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k E^k(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(t+k)$$

Факторіальні многочлени

Будь-яку функцію в кластичній математиці можна обчислити за допомогою ряду алгебраїчних многочленів.

В математичному аналізі важливу роль відіграє функція x^n.Це зумовлено тим, що довільна функція може бути розкладена в ряд по степенях x^n.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Можна показати, що ця властивість функцій x^n в першу чергу визначається тим, що перша похідна задовольняє співвідношення:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

В чисельних методах важливу роль відіграють функції – факторіальні многочлени. Факторіальні многочлени вводять виходячи з умови $\Delta t^{(n)} = nt^{(n-1)}$ Де $t^{(n)} = t(t-1)...(t-n+1)$.

Факторіальні многочлени задовольняють наступним властивостям:

Факторіальний многочлен в нульовій степені рівний одиниці $t^{(0)} = 1$.Звідси випливає, що $0^{(0)} = 1$.Це відповідає такому формальному співвідношенню $0! = 1$.

Факторіальний многочлен $t^{(n)}$ має n множників.

Доведемо основну властивість факторіальних многочленів.

$$\Delta t^{(n)} = (t+1)^{(n)} - t^{(n)} =$$

$$(t+1)t(t-1)...(t-(n-2)) - t(t-1)...(t-(n-1)) =$$

$$= t(t-1)...(t-(n-2))(t+1-t+n-1) =$$

$$= nt(t-1)...(t-(n-2)) = nt^{(n-1)}$$

Доведемо, що довільну функцію можна розкласти в ряд по факторіальних многочленах.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{(k)}$$

При $t = 0$ знаходимо, що $f(0) = b_0$. Подіємо різницевим оператором на обидві сторони рівняння

$$\Delta f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k t^{(k-1)}$$

. Аналогічно знаходимо, що при $t = 0$ $\Delta f(0) = b_1$. Подіявши різницевим оператором n раз отримаємо:

$$\Delta f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} b_n k(k-1)...(k-(n-1))t^{(k-n)}$$

. При $t = 0$ $\Delta^n f(0) = n! b_n$

Отже, ми отримали ряд по факторіальних многочленах:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} t^{(k)}$$

Числа Стирлінга

Числа Стирлінга встановлюють взаємозв'язок між алгебраїчними та факторіальними многочленами.

Визначимо коефіцієнти розкладу факторіальних многочленів по алгебраїчних многочленах:

$$t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)t^k$$

, де $S(n,k)$ -числа Стирлінга першого роду.

Для $n = 1$ знаходимо:

$$t^{(1)} = t = S(1,0) + S(1,1)t$$

Отже,$S(1,0) = 0$,$S(1,1) = 1$

Врахуємо, що $t^{(n+1)} = (t-n)t^{(n)}$. Отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)t^k = (t-n)\sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (S(n,k-1) - nS(n,k))t^k + S(n,n)t^{(k+1)} - nS(n,0)$$

Врахуємо, що

$$S(n, n) = 1$$

$$S(n, 0) = 0$$

, де $n > 0$

Таким чином отримаємо рекурентне співвідношення для знаходження чисел Стирлінга першого роду:

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) - nS(n, k)$$

,де $1 \leq k \leq n$

$$S(0, 0) = 1$$

$S(0, k) = 1$,де $k > 0$

Розглянемо зворотнє співвідношення:

$$t^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \varphi(n, k) t^{(k)}$$

Для $n = 1$

$$t = \varphi(1, 0) + \varphi(1, 1)t$$

Звідси:

$$\varphi(1, 0) = 0$$

$$\varphi(1,1) = 0$$

Для $n = 2$

$$t^2 = \varphi(2,0) + \varphi(2,1) + \varphi(2,2)t(t-1)$$

Звідси знаходимо:

$$\phi(2,0) = 0;$$

$$\phi(2,2) = 1;$$

$$\phi(2,1) = 1;$$

Врахуємо, що $t^{n+1} = t * t^n$, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \varphi(n+1,k)t^{(k)} = t\sum_{k=0}^{n} \varphi(n,k)t^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \varphi(n,k)(t-k)t^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \varphi(n,k)kt^{(k)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi(n,k)t^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} k\varphi(n,k)t^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} (\varphi(n,k-1) + k\varphi(n,k))t^{(k)} + \varphi(n,n)t^{(n+1)}$$

Врахуємо, що

$$\varphi(n,n) = 1$$

$$\varphi(n,0) = 0$$

, де $n > 0$

Отримаємо наступні рекурентні співвідношення для знаходження чисел Стирлінга другого роду:

$$\varphi(n+1,k) = \varphi(n,k-1) + k\varphi(n,k)$$