確率過程論のレポート問題

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

2025 年 6 月 26 日

注意事項

A4 で 1 枚にまとめること、提出は 07 月 03 日 (13 回) か 07 月 10 日 (14 回) のいずれかの授業中

問題

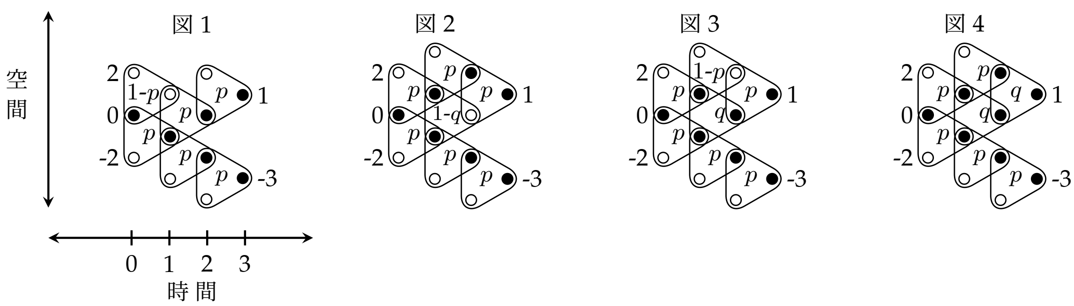
$\sigma_3(\{0\}, \{-3, 1\})$ を確率的手法と格子グラフ的手法のそれぞれにより求めよ。

解答

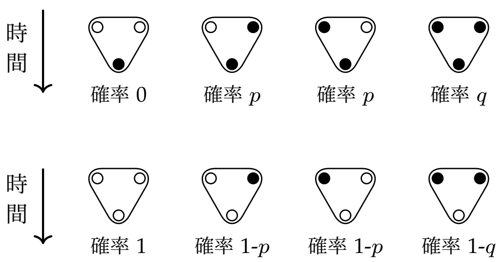
proof. (確率的手法)

$\sigma_3(\{0\}, \{-3, 1\})$ を確率的手法で求めると、以下のようになります。

「$\circ = 0, \bullet = 1$」を表す



次に、Domany-Kinzel モデルのルールは以下のように表している。



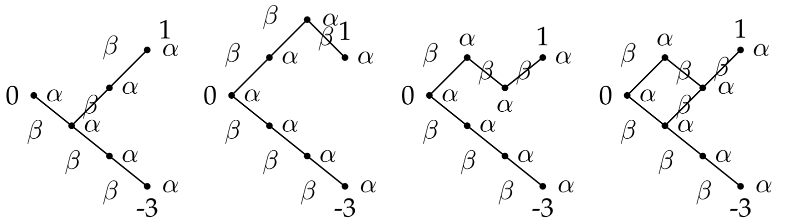
したがって、

図 1 の確率は $p^5(1-p)$, 図 2 の確率は $p^6(1-q)$, 図 3 の確率は $p^5(1-p)q$, 図 4 の確率は p^5q^2 である。

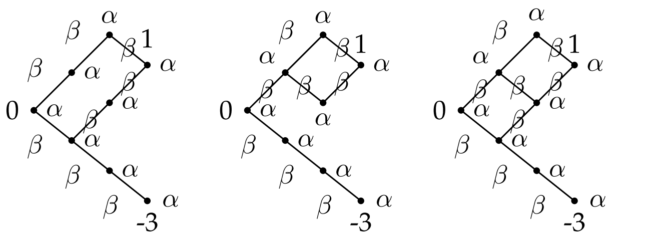
i.e. $\sigma_3(\{0\}, \{-3, 1\}) = p^5\left\{(1-p) + p(1-q) + (1-p)q + q^2\right\} = p^5\left(1 + q - 2pq + q^2\right)$ ■

***proof*.** (格子グラフ的手法)

格子グラフ的手法による $\sigma_3\left(\{0\},\{-3,1\}\right)$ の導出は以下の図の記号を用いる。



G_1 G_2 G_3 $G_1\cup G_3$



$G_1\cup G_2$ $G_2\cup G_3$ $G_1\cup G_2\cup G_3$

しがたって、

$$
\begin{aligned}
\sigma_3\left(\{0\},\{-3,1\}\right) &= \alpha^{-1}W_3\left(\{0\},\{-3,1\}\right)\\
&= \alpha^{-1}\left\{w_3(G_1)+w_3(G_2)+w_3(G_3)+w_3(G_1\cup G_3)+w_3(G_1\cup G_2)+w_3(G_2\cup G_3)+w_3(G_1\cup G_2\cup G_3)\right\}\\
&= \alpha^{-1}\left\{\alpha^6\beta^5+\alpha^7\beta^6+\alpha^7\beta^6+(-1)\alpha^7\beta^7+(-1)\alpha^8\beta^8+(-1)\alpha^8\beta^8+(-1)^2\alpha^8\beta^9\right\}\\
&= (\alpha\beta)^5+2(\alpha\beta)^6-(\alpha\beta)^5(p\beta)-2(\alpha\beta)^6(p\beta)+(\alpha\beta)^5(p\beta)^2\\
&= p^5+2p^6-p^5(2p-q)-2p^6(2p-q)+p^5(2p-q)^2\\
&= p^5\left(1+q-2pq+q^2\right)
\end{aligned}
$$

ここで、 $\alpha\beta=p,\alpha\beta^2=p\beta=2p-q$ を用いた

■