情報科学 I の第 10 回講義課題

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

2025 年 12 月 10 日

問 1. 以下の命題論理の真偽判定

問題設定

自然数を定義域とする述語 $\mathrm{even}(x)$ と $\mathrm{odd}(x)$ について、

- $\mathrm{even}(x)$: x は偶数である
- $\mathrm{odd}(x)$: x は奇数である

とする。次の命題の真偽を判定せよ。

(1) $\neg\mathrm{even}(3)$

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{even}(3)\text{ は「3 は偶数である」} &\Longrightarrow \text{ 3 は奇数なので、}\mathrm{even}(3)\text{ は偽}\\ &\Longrightarrow \neg\mathrm{even}(3)\text{ はその否定なので真}\end{aligned}$$

したがって、$\neg\mathrm{even}(3)$ は真である。

(2) $\mathrm{even}(24) \wedge \neg\mathrm{odd}(26)$

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{even}(24)\text{ は「24 は偶数である」} &\Longrightarrow \text{ 真}\\ \mathrm{odd}(26)\text{ は「26 は奇数である」} &\Longrightarrow \text{ 偽}\\ &\Longrightarrow \neg\mathrm{odd}(26)\text{ は真}\\ &\Longrightarrow \text{ 真} \wedge \text{真} = \text{真}\end{aligned}$$

したがって、$\mathrm{even}(24) \wedge \neg\mathrm{odd}(26)$ は真である。

(3) $\neg(\mathrm{even}(24) \wedge \mathrm{odd}(26))$

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{even}(24)\text{ は「24 は偶数である」} &\Longrightarrow \text{ 真}\\ \mathrm{odd}(26)\text{ は「26 は奇数である」} &\Longrightarrow \text{ 偽}\\ &\Longrightarrow \mathrm{even}(24) \wedge \mathrm{odd}(26) : \text{真} \wedge \text{偽} = \text{偽}\\ &\Longrightarrow \neg(\mathrm{even}(24) \wedge \mathrm{odd}(26)) = \text{真}\end{aligned}$$

したがって、$\neg(\mathrm{even}(24) \land \mathrm{odd}(26))$ は真である。

問 2. 次の命題または術語を greater を含む論理式で表せ

問題設定

自然数 x, y について、述語 $\mathrm{greater}(x, y)$ について、

- $\mathrm{greater}(x, y)$: x は y より大きい

とする。次の命題または述語を greater を含む論理式で表せ。

(1) 3 は 2 よりも大きい

解答

$$\mathrm{greater}(3, 2)$$

(2) x が 3 よりも大きいならば、x は 2 よりも大きい

解答

$$\forall x\,(\mathrm{greater}(x, 3) \to \mathrm{greater}(x, 2))$$

(3) x が y よりも大きく、かつ y が z よりも大きいならば、x は z よりも大きい

解答

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,((\mathrm{greater}(x, y) \land \mathrm{greater}(y, z)) \to \mathrm{greater}(x, z))$$

(4) ある x が存在して、x は 100 よりも大きい

解答

$$\exists x\,\mathrm{greater}(x, 100)$$

(5) すべての x について、x は 100 よりも大きいかまたは 100 よりも大きくない

解答

$$\forall x\,(\mathrm{greater}(x, 100) \lor \neg\mathrm{greater}(x, 100))$$

問 3. 等式の証明

問題

自然数 n について、次の等式を示せ。

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$\boxed{\text{解 答}}$

Proof. 数学的帰納法により証明する。

$n = 1$ のとき
左辺:

$$1 \cdot 2 = 2$$

右辺:

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{6}{3} = 2$$

左辺 = 右辺より、$n = 1$ のとき成立。

$n = k$ のとき成立すると仮定すなわち、

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

が成り立つと仮定する。

$n = k + 1$ のとき左辺を計算する:

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \\
&= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \quad \text{(帰納法の仮定を使用)} \\
&= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) \\
&= (k+1)(k+2) \cdot \frac{k+3}{3} \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)
\end{aligned}$$

これは $n = k + 1$ のときの右辺:

$$\frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

と一致する。数学的帰納法により、すべての自然数 n について等式が成り立つ。 ■

問 4. 不等式の証明

問題

すべての実数 x について、

$$|x+1|-|x-1| \leq 2$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{解 答}}$

Proof. 場合分けして考える。

【ケース 1】 $x \geq 1$ のとき

$x+1>0 \implies |x+1|=x+1, \quad x-1 \geq 0 \implies |x-1|=x-1$

よって、

$$|x+1|-|x-1|=(x+1)-(x-1)=2$$

したがって、$|x+1|-|x-1|=2 \leq 2$

【ケース 2】 $-1 \leq x < 1$ のとき

$x+1 \geq 0 \implies |x+1|=x+1, \quad x-1<0 \implies |x-1|=-(x-1)=1-x$

よって、

$$|x+1|-|x-1|=(x+1)-(1-x)=2x$$

$-1 \leq x < 1$ より、

$$-2 \leq 2x < 2$$

したがって、$|x+1|-|x-1|<2$

【ケース 3】 $x<-1$ のとき

$x+1<0 \implies |x+1|=-(x+1)=-x-1, \quad x-1<0 \implies |x-1|=-(x-1)=1-x$

よって、

$$|x+1|-|x-1|=(-x-1)-(1-x)=-2$$

したがって、$|x+1|-|x-1|=-2 \leq 2$

以上より、すべての場合において $|x+1|-|x-1| \leq 2$ が成り立つ。 ■