情報科学 I の第 12 回講義課題

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

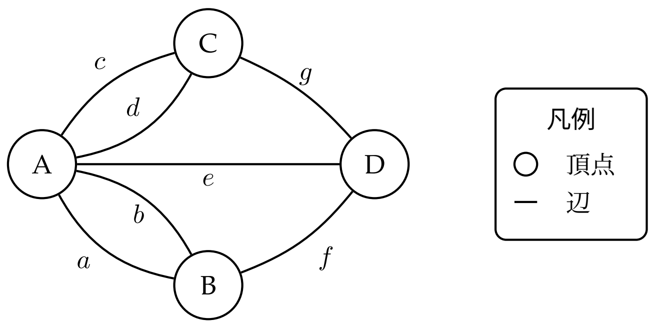
2025 年 12 月 19 日

問 1　オイラー小道について答えよ

(1)　図 1 の「ケーニヒスベルグの橋」を元にして、地域（A〜D）を頂点、橋（a〜g）を辺とするグラフとして簡略化せよ

解答

その結果、次のような連結グラフ $\mathbf{G}$ が得られる。



グラフ $\mathbf{G}$

(2)　ケーニヒスベルグの橋にオイラー小道は存在するか？ 根拠と併せて答えよ。

解答

(i)　ケーニヒスベルグの橋にオイラー小道は存在しない。

(ii)　上の連結グラフ $\mathbf{G} = (V, E)$ がオイラー小道をもつための必要十分条件は、グラフ $\mathbf{G}$ の全頂点の次数が偶数である。(詳しい証明は以下の補足 1 に示す)
i.e. 連結グラフ $\mathbf{G} = (V, E)$ がオイラー小道をもつ $\iff \forall v \in V, \deg_G(v) \equiv 0 \pmod 2$。
しかし、$\mathbf{G}$ の頂点 A、B、C、D の次数はそれぞれ 5、3、3、3 であり、すべて奇数である。したがって、オイラー小道は存在しない。***i.e.*** $\forall v \in V, \deg_G(v) \equiv 1 \pmod 2 \implies$ 連結グラフ $\mathbf{G} = (V, E)$ がオイラー小道をもたない。

補足 1: 連結グラフ $\mathbf{G} = (V, E)$ について、
以下の命題 $P \iff Q$ であることを証明する

命題 P: グラフ $\mathbf{G}$ はオイラー小道をもつ。
命題 Q: グラフ $\mathbf{G}$ のすべての頂点の次数が偶数である。

Proof.
(**1**) $\mathbf{P} \implies \mathbf{Q}$:
オイラー小道を C とする。C はグラフ $\mathbf{G}$ のすべての辺をちょうど一度ずつ通る閉路である。

グラフ $\mathbf{G}$ の $\forall \nu \in V$ について、C が頂点 v を通るたびに、v から出る辺と v に入る。***i.e.*** 頂点 ν を通るたびに、ν の次数が 2 増える。したがって、グラフ $\mathbf{G}$ のすべての頂点の次数は偶数である。***i.e.*** $\deg_G(\nu) \equiv 0 \pmod 2$ となる。

(**2**) $\mathbf{P} \impliedby \mathbf{Q}$:
グラフ $\mathbf{G}$ における最長の小道を W とする。***i.e.*** $W = \nu_0, e_1, \ldots, e_k, \nu_k$

W は最長であるため、これ以上、未通過の辺を使って W を延長することはできないものとする。

(**i**) **W** が閉路であること証明する
終点 ν_k が始点 ν_0 と異なると仮定する ($\nu_0 \neq \nu_k$)
小道 W 上の頂点 ν について、W が ν を通ったときに、ν の次数が 2 増える。その中間点としての ν_k を m 回通ったとすると、ν_k の次数は $2m$ 増える。しかし、ν_k は終点であるため、W 上で ν_k から出る辺は 1 本しかない。よって、ν_k の次数は奇数である ($\nu_0 \neq \nu_k$)。
i.e. $\deg_G(\nu_k) \equiv 1 \pmod 2$ となり、グラフ $\mathbf{G}$ のすべての頂点の次数が偶数であるという仮定に矛盾する。ここで、W は極大であるから、ν_k に接続する辺はすべて W に含まれている。したがって、$\nu_0 = \nu_k$ でなければいけない、W は閉路である。

(**ii**) **W** が G の全ての辺を通ることを証明する
W がグラフ $\mathbf{G}$ のすべての辺を通らない ***i.e.*** $E(W) \subsetneq E(\mathbf{G})$ と仮定する。この時、未通過の辺 $e\{u, w\} \in E(\mathbf{G})$ が存在する。ここで、$u \in V(W)$ であるとする。(**i**) より、W は閉路であるため、始点と終点を自由にシフトできる。そこで、u を始点かつ終点とすると、

$$W = u \to \cdots \to u$$

となり、この閉路 W に、未接続の辺 $e\{u, w\}$ を接続して延長することを考えると

$$W' = w \xrightarrow{e} u \xrightarrow{W'} u$$

となり、よって W' の長さは $|E(W)| + 1$ となり、これは W が最長であるという仮定に矛盾する。
したがって、W はグラフ $\mathbf{G}$ のすべての辺を通る。

以上の (**1**) と (**2**) により、命題 $\mathbf{P} \iff \mathbf{Q}$ が成立する。

■

問 2　四色問題について、図の近畿地方の白地図を四色で塗り分けよ

解答

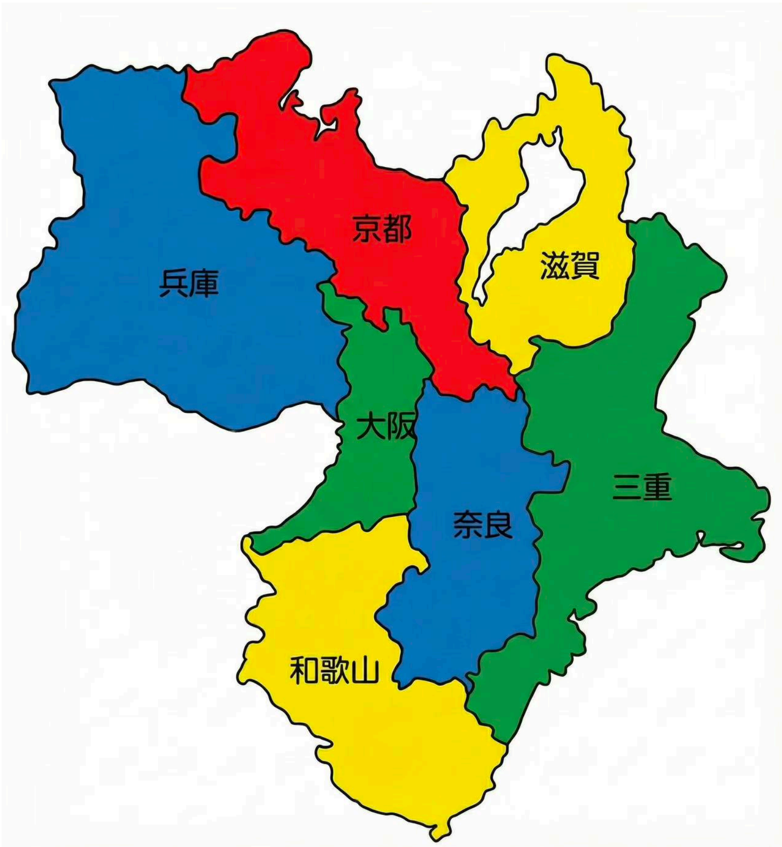


図 1　近畿地方の四色塗り分け図