

情報科学 I の第 11 回講義課題

YI Ran - 21122200512

andreyi@outlook.jp

2025 年 12 月 10 日

問 1. 以下の命題論理の真偽判定

問題設定

自然数を定義域とする述語 $\text{even}(x)$ と $\text{odd}(x)$ について、

- $\text{even}(x)$: x は偶数である
- $\text{odd}(x)$: x は奇数である

とする。次の命題の真偽を判定せよ。

(1) $\neg \text{even}(3)$

解答

$\text{even}(3)$ は「3 は偶数である」 \implies 3 は奇数なので、 $\text{even}(3)$ は偽
 $\implies \neg \text{even}(3)$ はその否定なので真

したがって、 $\neg \text{even}(3)$ は真である。

(2) $\text{even}(24) \wedge \neg \text{odd}(26)$

解答

$\text{even}(24)$ は「24 は偶数である」 \implies 真
 $\text{odd}(26)$ は「26 は奇数である」 \implies 偽
 $\implies \neg \text{odd}(26)$ は真
 $\implies \text{真} \wedge \text{真} = \text{真}$

したがって、 $\text{even}(24) \wedge \neg \text{odd}(26)$ は真である。

(3) $\neg(\text{even}(24) \wedge \text{odd}(26))$

解答

$\text{even}(24)$ は「24 は偶数である」 \implies 真
 $\text{odd}(26)$ は「26 は奇数である」 \implies 偽
 $\implies \text{even}(24) \wedge \text{odd}(26) : \text{真} \wedge \text{偽} = \text{偽}$
 $\implies \neg(\text{even}(24) \wedge \text{odd}(26)) = \text{真}$

したがって、 $\neg(\text{even}(24) \wedge \text{odd}(26))$ は真である。

問 2. 次の命題または術語を `greater` を含む論理式で表せ

問題設定

自然数 x, y について、述語 $\text{greater}(x, y)$ について、

- $\text{greater}(x, y)$: x は y より大きい

とする。次の命題または述語を `greater` を含む論理式で表せ。

(1) 3 は 2 よりも大きい

解答

$$\text{greater}(3, 2)$$

(2) x が 3 よりも大きいならば、 x は 2 よりも大きい

解答

$$\forall x (\text{greater}(x, 3) \rightarrow \text{greater}(x, 2))$$

(3) x が y よりも大きく、かつ y が z よりも大きいならば、 x は z よりも大きい

解答

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{greater}(x, y) \wedge \text{greater}(y, z)) \rightarrow \text{greater}(x, z))$$

(4) ある x が存在して、 x は 100 よりも大きい

解答

$$\exists x \text{ greater}(x, 100)$$

(5) すべての x について、 x は 100 よりも大きいかまたは 100 よりも大きくない

解答

$$\forall x (\text{greater}(x, 100) \vee \neg \text{greater}(x, 100))$$

問 3. 等式の証明

問題

自然数 n について、次の等式を示せ。

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

解答

Proof. 数学的帰納法により証明する。

$n = 1$ のとき

左辺:

$$1 \cdot 2 = 2$$

右辺:

$$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{6}{3} = 2$$

左辺 = 右辺より、 $n = 1$ のとき成立。

$n = k$ のとき成立すると仮定すなわち、

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

が成り立つと仮定する。

$n = k+1$ のとき左辺を計算する:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \quad (\text{帰納法の仮定を使用}) \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) \\ &= (k+1)(k+2) \cdot \frac{k+3}{3} \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \end{aligned}$$

これは $n = k+1$ のときの右辺:

$$\frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

と一致する。数学的帰納法により、すべての自然数 n について等式が成り立つ。 ■

問 4. 不等式の証明

問題

すべての実数 x について、

$$|x + 1| - |x - 1| \leq 2$$

が成り立つことを示せ。

解答

Proof. 場合分けして考える。

【ケース 1】 $x \geq 1$ のとき

$x + 1 > 0 \implies |x + 1| = x + 1, \quad x - 1 \geq 0 \implies |x - 1| = x - 1$
よって、

$$|x + 1| - |x - 1| = (x + 1) - (x - 1) = 2$$

したがって、 $|x + 1| - |x - 1| = 2 \leq 2$

【ケース 2】 $-1 \leq x < 1$ のとき

$x + 1 \geq 0 \implies |x + 1| = x + 1, \quad x - 1 < 0 \implies |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$
よって、

$$|x + 1| - |x - 1| = (x + 1) - (1 - x) = 2x$$

$-1 \leq x < 1$ より、

$$-2 \leq 2x < 2$$

したがって、 $|x + 1| - |x - 1| < 2$

【ケース 3】 $x < -1$ のとき

$x + 1 < 0 \implies |x + 1| = -(x + 1) = -x - 1, \quad x - 1 < 0 \implies |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$
よって、

$$|x + 1| - |x - 1| = (-x - 1) - (1 - x) = -2$$

したがって、 $|x + 1| - |x - 1| = -2 \leq 2$

以上より、すべての場合において $|x + 1| - |x - 1| \leq 2$ が成り立つ。 ■