# §4.3　Kinematic Interpretation

伊 冉 (Andre YI)

2026 年 1 月 22 日

## 1　概要

最適化問題における「関数の最小値を探索する」というプロセスは、物理学において「谷（ポテンシャル関数の形状）の中に置かれたボールが、重力に従って底まで転がり落ちる運動」として解釈することができます。本節では、質量 $m = 1$ のボールの運動を解析することで、最急降下法の物理的な意味と、単純な物理モデル（摩擦なし）では収束しない理由を数学的に解明する。

## 2　運動方程式の導出（ラグランジュ形式）

ボールの状態は、位置 $x$ と速度 $v$ のペア $s = (x, v)$ によって記述される。これを**相空間 (phase space)**[1] と呼ぶ。また、ボールには以下の 2 つのエネルギーが作用する。

- **運動エネルギー (Kinetic Energy):** $E_k = \frac{1}{2}\|v\|^2$　(※質量 $m = 1$ のため )
- **位置エネルギー (Potential Energy):** $E_p = f(x)$　(※目的関数の高さ)

物理学における**ラグランジュ量 (Lagrangian)** $L$ は、運動エネルギーと位置エネルギーの差として定義されます。

$$L(x, \dot{x}) = E_k - E_p = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 - f(x) \tag{1}$$

ここで、速度 $v$ は位置の時間微分 $\dot{x}$ と等しいことに注意してください。

**_Ex_ 1: Euler-Lagrangian 方程式による運動方程式の導出**

ラグランジュ量 $L$ を用いた Euler-Lagrangian 方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

を用いて、ボールの運動方程式 $\ddot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$ を導出しなさい。

*Proof.*
式 [1] を各項について偏微分する
最初は左辺の計算（運動量項）$L$ を $\dot{x}$ で偏微分する。$f(x)$ は $\dot{x}$ に依存しない定数項として扱われる。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^T\dot{x}\right) = \dot{x} = v$$

[1] 相空間とは、全ての可能な状態の集合を指す物理学の用語。

これをさらに時間 $t$ で微分すると

$$\frac{d}{dt}v = \dot{v} = {}^2\ddot{x}$$

次に、右辺の計算（力項）$L$ を $x$ で偏微分する。$\|\dot{x}\|^2$ は $x$ に依存しないため消える。

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}f(x) = -\nabla f(x)$$

これらを等号で結ぶと、以下のようになる。

$$\ddot{x}(t) = -\nabla f(x(t)) \qquad \textbf{[2]}$$

これは、質量 $m = 1$、力 $F = -\nabla f(x)$ とした場合のニュートンの運動方程式 ($F = ma$) そのものである。 ■

# 3　エネルギー保存則とハミルトニアン

次に、運動中の「総エネルギー」の変化を考える。総エネルギー $E_{tot}$ は、運動エネルギーと位置エネルギーの「和」である。

$$E_{tot}(t) = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + f(x(t)) \qquad \textbf{[3]}$$

**Ex 2: エネルギー保存則の証明**

運動方程式 $\ddot{x} = -\nabla f(x)$ に従うとき、総エネルギー $E_{tot}(t)$ が時間変化しないこと、***i.e.*** $\frac{d}{dt}E_{tot}(t) = 0$ を証明しなさい。

*Proof.*
総エネルギー式を時間 $t$ で微分すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{tot}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}(t)^T\dot{x}(t) + f(x(t))\right) \\
&= \frac{1}{2}((\frac{d}{dt}\dot{x}(t))^T\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T\frac{d}{dt}\dot{x}(t)) + \nabla f(x(t))^T\frac{d}{dt}(x(t)) \\
&= \dot{x}(t)^T\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)^T\nabla f(x(t)) \\
&= \dot{x}(t)^T\left(\ddot{x}(t) + \nabla f(x(t))\right)
\end{aligned}$$

ここで、前節の [2] で導いた運動方程式より $\ddot{x}(t) + \nabla f(x(t)) = 0$ が成り立つ。したがって、

$$\frac{d}{dt}E_{tot}(t) = \dot{x}(t)^T \cdot 0 = 0$$

となり、エネルギーは保存されることが証明された。 ■

[2] $\dot{v} = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) = \frac{d^2}{dt^2}x = \ddot{x} = -\nabla f(x)$. ここで、$\ddot{x}$ は加速度であり、エックス・ツー・ドットと呼ぶ。

◆◆◆補足◆◆◆

この総エネルギーを相空間 $(x, v)$ 上の関数として定義したものをハミルトニアン **(Hamiltonian)** $H$ と呼ぶ。

$$H(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + f(x)$$

エネルギーが保存されるということは、摩擦のないワンの中のボールは、永遠に転がり続け、決して底（最小値）に静止しないことを示唆している。

# 4　なぜ「摩擦なし」では収束しないのか

運動方程式は以下の 1 階連立常微分方程式 (ODE) 系として書き直せる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = \dfrac{\partial H}{\partial v} & \textbf{[4]} \\ \dot{v}(t) = -\nabla f(x(t)) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & \textbf{[5]} \end{cases}$$

この系におけるベクトル場の発散 (Divergence) を計算することで、収束性がわかる。

**Ex 3: ベクトル場の発散の計算**

相空間上のベクトル場 $X = (\dot{x}, \dot{v}) = \left(\frac{\partial H}{\partial v}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ の発散 **div**$X$ (***i.e.*** $\nabla \cdot X$) を計算しなさい。

解 答

発散の定義に従い、計算すると。

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X &= \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial v}(\dot{v}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \end{aligned}$$

滑らかな関数 $H$ において偏微分の順序交換が可能 ($\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x}$) であるため、

$$\mathrm{div} X = 0$$

となる。

◆◆◆補足◆◆◆

$\mathrm{div}X = 0$ は、この物理系の流れが**非圧縮 (incompressible)** であることを意味する。これは、相空間内の状態の集合（体積）が、時間発展しても**縮小しない**ことを意味する。最小点（平衡点）への収束は、状態空間の体積が一点に収縮することと等しいであるが、非圧縮性によりこれが不可能である。したがって、単純な物理モデル（摩擦なし）では、最適解へ収束せず、その周りを永遠に振動し続ける。収束させるには**摩擦項**の導入が必要不可欠である。

# Appendix A　ハミルトニアン (Hamiltonian) に対する最急降下法

**Ex 4: 補足**

もし、ハミルトニアン $H(x, v)$ 自体を目的関数と見なし、最急降下法を適用するとどうなるかを確認する。ここで、平衡状態 $S^* = (x^*, v^*)$, 初期状態 $S^0 = (x^0, v^0)$ とする。

$H$ の勾配は以下のようになる

$$\nabla_s H(s) = \left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial v} \right) = (\nabla f(x), v)$$

これを用いた更新式 $s_{n+1} = s_n - \delta \nabla_s H(s_n)$ は、成分ごとに書くと以下の通りである。

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \delta \nabla f(x^n) \\ v^{n+1} &= v^n - \delta v^n = (1-\delta) v^n \end{aligned}$$

ここで、$v^n$ とは n 回目の反復のインデックスである。上の結果を解析すると

1. $v^n$ の更新式は $v^{n+1} = (1-\delta)v^n \implies v^n = (1-\delta)^n v^0$ となり、$\delta$ が小さければ $v^n \to v^* = 0$ $(n \to \infty)$ ***i.e.*** 速度は消える。
2. $x$ の更新式は $x^{n+1} = x^n - \delta \nabla f(x^n)$ となり、これは通常の最急降下法と全く同じである。

つまり、エネルギー関数に対して単純に最急降下法を行っても、「速度成分がなくなり、単なる（運動量のない）最急降下法に戻ってしまう」という結果になる。運動量（慣性）の効果を得るには、運動方程式自体に摩擦項を組み込むアプローチが必要である。***i.e.*** $\mathbf{div} < 0$ が必要である。