推定関数 $\hat{p}$ は確率密度関数の証明

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

問題

$W_\sigma(x, x_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_k|^2}$ とし、その推定関数を $\hat{p}(x) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} W_\sigma(x, x_k)$ とする。$\hat{p}(x)$ は密度関数になることを証明せよ。

解答

Proof. 非負化と正規化から証明します。

非負化の証明:

$W_\sigma(x, x_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_k|^2} \sim \mathcal{N}(x_k, \sigma^2)$ なので、正規分布の密度関数の定義によって、 $W_\sigma(x, x_k) \geq 0$ が成り立つことがわかる。したがって、 $\hat{p}(x) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} W_\sigma(x, x_k) \geq 0$ となる。

正規化の証明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} W_\sigma(x, x_k) \right) dx \overset{N \leq \infty}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} W_\sigma(x, x_k) dx$$

ここで、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} W_\sigma(x, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_k|^2} = 1$ であるので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} W_\sigma(x, x_k) = \frac{1}{N} \cdot N = 1$ となる。***i.e.*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x)dx = 1$ である。

以上より、推定関数 $\hat{p}(x)$ は確率密度関数の性質を満たすことがわかる。 ■