独立な２つ確率変数の和の確率密度関数は畳み込みである証明

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

問題

$W_\sigma(x,x_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_k|^2}\sim\mathcal{N}(x_k,\sigma^2)$, $W_\sigma(x,x_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_j|^2}\sim\mathcal{N}(x_k,\sigma^2)$ とし、window がガウシアンの場合、$W_\sigma(x,x')=\phi_\sigma(x-x')$ であり、$\phi_\sigma(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ である。$\int\phi_\sigma(x-x_k)\phi_\sigma(x-x_j)dx\overset{t=x-x_k}{=}\int\phi_\sigma(t)\phi_\sigma(t-(x_j-x_k))dt=(\phi_\sigma*\phi_\sigma)(x_j-x_k)$ はなぜ x_j-x_k の確率密度関数になるのか？

解答

Proof. $W=x_j-x_k$,$X=x-x_k$,$Y=x-x_j$ とすると、$W=((x-x_k)-(x-x_j))=X-Y$ となる。したがって、

$$F_W(w)=P(W\le w)=\int_{-\infty}^{w}f_W(w)dt\implies f_W(w)=\frac{d}{dw}F_W(w)$$

$f_W(w)$ は微積分学の基本原理を用いて $F_W(w)$ を微分する式である。

次に、$F_W(w)$ は同時確率密度関数,X と Y は独立な確率変数であるため、
$F_W(w)=P(X-Y\le w)=\iint_{\{x-y\le w\}}f_{XY}(x,y)dxdy\overset{indep.}{=}\iint_{\{x-y\le w\}}f_X(x)f_Y(y)dxdy$
となる。$w\in\mathbb{R}$ であるので、一番外の y の積分の範囲は $-\infty$ から ∞ までであり、内の x の積分の範囲は $x\le w+y$ により、$-\infty$ から $w+y$ までである。

したがって、以下のように書き換えることができる：

$$F_W(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f_Y(y)\left(\int_{-\infty}^{w+y}f_X(x)dx\right)dy$$

ここで、$x = w + y$ とおくと、$-\infty < w + y \le w + y \implies -\infty < w \le w$ となる。一方で、$\dfrac{dx}{dw} = 1$ である。以下のように書ける：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{w+y} f_X(x) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{w} f_X(w+y) dy \right) dy$$

したがって、

$$\begin{aligned} f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \, \frac{d}{dw} \left(\int_{-\infty}^{w} f_X(w+y) dy \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w+y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w-(-y)) dx dy \\ &= (f_X * f_Y)(w) = f_{X-Y}(w) \end{aligned}$$

ここで、$f_W(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(x - x_j) \phi_\sigma(w - (x_j - x)) dx$ となる。***i.e.*** $(\phi_\sigma * \phi_\sigma)(w) \sim \mathcal{N}(x_j - x_k, 2\sigma^2)$

したがって、$(\phi_\sigma * \phi_\sigma)(w) = W_{\sigma\sqrt{2}}(x_k, x_j)$

■