独立な２つ確率変数の和の確率密度関数は畳み込みである証明

YI Ran - 21122200512
andreyi@outlook.jp

問題

$W_\sigma(x, x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_k|^2} \sim \mathcal{N}(x_k, \sigma^2)$, $W_\sigma(x, x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-x_j|^2} \sim \mathcal{N}(x_k, \sigma^2)$ とし、window がガウシアンの場合、$W_\sigma(x, x') = \phi_\sigma(x - x')$ であり、$\phi_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ である。$\int \phi_\sigma(x - x_k)\phi_\sigma(x - x_j)dx \overset{t=x-x_k}{=} \int \phi_\sigma(t)\phi_\sigma(t - (x_j - x_k))dt = (\phi_\sigma * \phi_\sigma)(x_j - x_k)$ はなぜ $x_j - x_k$ の確率密度関数になるのか？

解答

Proof. $W = x_j - x_k$, $X = x - x_k$, $Y = x_j - x$, W の密度関数を $f_W(w)$ とすると、$W = ((x - x_k) + (x_j - x)) = X + Y$ となる。したがって、

$$F_W(w) = P(W \leq w) = \int_{-\infty}^{w} f_W(w)dw \implies f_W(w) = \frac{d}{dw}F_W(w)$$

$f_W(w)$ は微積分学の基本原理を用いて $F_W(w)$ を微分する式である。

次に、$F_W(w)$ は同時確率密度関数,X と Y は独立な確率変数であるため、$F_W(w) = P(X+Y \leq w) = \iint_{\{x+y\leq w\}} f_{XY}(x, y)dxdy \overset{indep.}{=} \iint_{\{x+y\leq w\}} f_X(x)f_Y(y)dxdy$ となる。$w \in \mathbb{R}$ であるので、一番外の y の積分の範囲は $-\infty$ から ∞ までであり、内の x の積分の範囲は $x \leq w - y$ により、$-\infty$ から $w - y$ までである。

したがって、以下のように書き換えることができる：

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{w-y} f_X(x)dx \right) dy$$

ここで、$x = w - y$ とおくと、$-\infty < w - y \leq w - y \implies -\infty < w \leq w$ となる。一方で、$\dfrac{dx}{dw} = 1$ である。以下のように書ける：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{w-y} f_X(x) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \left(\int_{-\infty}^{w} f_X(w-y) dw \right) dy$$

したがって、

$$\begin{aligned}
f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \frac{d}{dw} \left(\int_{-\infty}^{w} f_X(w-y) dw \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w-y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(x_j - x) \phi_\sigma(x - x_k) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(x - x_k) \phi_\sigma(x - x_j) dx \quad \Leftarrow (\text{正規分布の密度関数は偶関数なので}) \\
&= (\phi_\sigma * \phi_\sigma)(x_j - x_k) = f_{x+y}(w)
\end{aligned}$$

ここで、$t = x - x_k$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 1$ であるため、$f_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(t)\phi_\sigma(t - (x_j - x_k))dt = (\phi_\sigma * \phi_\sigma)(x_j - x_k)$ となる。***i.e.*** $(\phi_\sigma * \phi_\sigma)(x_j - x_k) \sim \mathcal{N}(x_j - x_k, 2\sigma^2)$

したがって、$(\phi_\sigma * \phi_\sigma)(x_j - x_k) = \phi_{\sigma\sqrt{2}}(x_j - x_k) = W_{\sigma\sqrt{2}}(x_j, x_k)$

■