

# 陳旭銘さんへの質疑応答

Linc - 伊

## III の解答

(1)  $a, b$  を素因数分解する：

$$a = 588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2, \quad b = 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

よって,  $\gcd(a, b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 = 84$  となる。ここで、 $\gcd(a, b)$  は  $a, b$  の公約数のうち最大のものを表す。また,  $\text{lcm}(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 1260$  となる。ここで、 $\text{lcm}(a, b)$  は  $a, b$  の公倍数のうち最小のものを表す。

(2) 下の 2 つの条件を満たす正の整数  $c$  を考える。

(i)  $\gcd(a, b, c) = \gcd(a, b).$

(ii)  $\text{lcm}(a, b, c) = 4\text{lcm}(a, b).$

そこで  $c$  を (ii) の条件より、 $c$  の素因数 2 の個数は 4 個であることがわかる。また、(i) と (ii) の条件より、 $c$  の素因数 3 の個数は 1 個 or 2 個であり、 $c$  の素因数 5 の個数は 0 個 or 1 個であり、 $c$  の素因数 7 の個数は 1 個 or 2 個である。したがって、積の法則により、 $c$  は全部で  $2 \times 2 \times 2 = 8$  通り存在する。そのような  $c$  の中で最小のものは  $2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 = 336$  である。

(3)  $ax - by = 336$  に対し、 $a = 588, b = 1260$  を代入して

$$588x - 1260y = 336. \quad \dots (1)$$

両辺を  $\gcd(588, 1260) = 84$  で割ると  $7x - 15y = 4$  となる。ここで、 $x, y$  は整数解である。よって、 $7x - 15y = 4 \implies 7x = 15y + 4 \implies$

$$\begin{cases} y = 1, 7x = 19 (\text{条件満たさない}) \\ y = 2, 7x = 34 (\text{条件満たさない}) \\ y = 3, 7x = 49 \implies x = 7 \end{cases}$$

となる。よって、 $x = 7, y = 3$  は  $x, y$  の整数解のうち、 $y$  が最小の正整数解である。

$$\text{よって、} \begin{cases} 7x - 15y = 4 \\ 7 \cdot 7 - 15 \cdot 3 = 4 \end{cases} \quad \text{より、} 7(x-7) - 15(y-3) = 0 \implies 7(x-7) = 15(y-3)、$$

$$7 \text{ と } 15 \text{ は互いに素であるから } \begin{cases} x - 7 = 15k \\ y - 3 = 7k \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 + 15k \\ y = 3 + 7k \end{cases} \text{、ただし、} k \text{ は}$$

整数。