2025年9月

羚課理科数学月考

$\boxed{\text{I}}$

問 1　a, b を定数とし、2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ と 1 次関数 $h(x) = -3x$ を考える。関数 $y = h(x)$ のグラフと直線 $x = 3$ との交点を A、関数 $y = h(x)$ のグラフと直線 $x = -2$ との交点を B とする。関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点 P が線分 AB 上にあるとき

$$L = \{f(3) - h(3)\} + \{f(-2) - h(-2)\}$$

の値の範囲を求めよう。

点 P の座標は

$$\left(-\frac{a}{\boxed{\text{A}}}, -\frac{a^2}{\boxed{\text{B}}} + b\right)$$

である。点 P が線分 AB 上にあるから、a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{C}} \leq a \leq \boxed{\text{D}}$$

である。また、a, b は

$$b = \frac{a^2 + \boxed{\text{E}}a}{\boxed{\text{F}}}$$

を満たす。よって、L は a を用いて

$$L = \frac{1}{2}a^2 + \boxed{\text{G}}a + \boxed{\text{HI}}$$

と表される。

したがって、L の値の範囲は

$$\boxed{\text{J}} \leq L \leq \boxed{\text{KL}}$$

- 計算欄 (memo) -

問 2　１から７までの数字が１つずつ書かれた７枚のカードが、左から小さい順に並んでいる。この中から２枚のカードを選び、その位置を入れ換える操作を２回続けて行う。２回の操作後の７枚のカードの並びを７桁の整数とみなすとき、この整数が偶数になる確率を求めよう。

(1)　まず、１回目、２回目ともカードの入れ換えが７枚のカードの中から２枚を選べるときの確率を考える。

(i)　１回目に７の書かれたカード以外のカードを入れ換える場合、２回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{NO}}}$ である。

(ii)　１回目に７の書かれたカードを他のカードと入れ換える場合、２回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{QR}}}$ である。

したがって、このとき２回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ST}}}{\boxed{\text{UV}}}$ である。

(2)　次に、２回目のカードの入れ換えでは、１回目に入れ換えた２枚を除いた残り７枚から２枚を選んで入れ換えるときの確率を考える。このとき２回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{W}}}{\boxed{\text{X}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

問 1　2 つの複素数 α, β は

$$|\alpha| = 6, \quad |\beta| = 5, \quad |\alpha - \beta| = 6$$

を満たすとする。

このとき

$$\alpha\overline{\alpha} = \boxed{\text{AB}}, \quad \beta\overline{\beta} = \boxed{\text{CD}}, \quad \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = \boxed{\text{EF}}$$

を満たす。これらより

$$|\alpha + \beta| = \sqrt{\boxed{\text{GH}}}$$

となる。

ここで，複素数平面上の 3 点 $O(0)$，$A(\alpha)$，$B(\beta)$ を考えると

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\boxed{\text{IJ}}}{\boxed{\text{K}}}, \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\boxed{\text{LM}}}{\boxed{\text{N}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　円 C と直線 ℓ, m を

$$C : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 - r^2 = 0$$
$$\ell : y = 2x - 2$$
$$m : y = \frac{3}{4}x - 2$$

とし、直線 ℓ に関して円 C と対称な円を C' とする。

(1)　円 C の中心は $\left(\boxed{\text{O}}, \boxed{\text{P}}\right)$、半径は r である。

(2)　円 C' の中心 (a, b) を求めよう。円 C と円 C' は直線 ℓ に関して対称であるから

$$a = \frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$$

である。

(3)　円 C' が直線 m に接するように r を求めよう。

$$r = \frac{\left|\boxed{\text{U}}a - \boxed{\text{V}}b + \boxed{\text{W}}\right|}{\boxed{\text{X}}}$$

であるから

$$r = \boxed{\text{Y}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III

$p>1,\ q>1$ とする。方程式

$$e^{2x}-ae^{x}+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

において、$t=e^x$ とおくとき、t に関する 2 次方程式

$$t^2-at+b=0$$

は解 $\log_{q^2} p$ と $\log_{p^4} q$ をもつとする。

　このとき、a の最小値とそのときの方程式 ①の解を求めよう。

(1)　まず

$$b=\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

であり

$$a=\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\log_q p+\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\log_p q$$

である。

(2)　$p,\ q$ が $p>1,\ q>1$ を満たしながら動くとき、$\log_p q > \boxed{\text{G}}$ である。

したがって、a は最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}}$ を $\log_p q=\sqrt{\boxed{\text{J}}}$ のときにとる。

そのときの方程式 ①の解は

$$x=-\frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}\log_e \boxed{\text{M}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV

$$a_n = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくとき、極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよう。

(1)　まず、$a_0,\ a_1$ を求めてみよう。半径 1 の円の面積は π であるから

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\mathrm{A}}}$$

である。a_1 は部分積分法により

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{\boxed{\mathrm{B}}}{\boxed{\mathrm{C}}}\left[x(1-x^2)^{\frac{\boxed{\mathrm{D}}}{\boxed{\mathrm{E}}}}\right]_0^1 + \frac{\boxed{\mathrm{F}}}{\boxed{\mathrm{G}}}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{\mathrm{H}}}{\boxed{\mathrm{I}}}}\,dx \\ &= \frac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{K}}}\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - x^{\boxed{\mathrm{L}}}\sqrt{1-x^2}\right)dx \end{aligned}$$

となる。よって、$a_1 = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathrm{MN}}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathrm{O}}$ ～ $\boxed{\mathrm{U}}$ には、下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a_1 を求めたのと同様にして、a_n は部分積分法により

$$a_n = \frac{\boxed{\mathrm{O}}}{\boxed{\mathrm{P}}}\int_0^1 \left(x^{\boxed{\mathrm{Q}}}\sqrt{1-x^2} - x^{\boxed{\mathrm{R}}}\sqrt{1-x^2}\right)dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。よって

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\boxed{\mathrm{S}}}{\boxed{\mathrm{T}}}$$

となる。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\mathrm{U}}$$

を得る。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $2n-2$　⑥ $2n-1$　⑦ $2n$　⑧ $2n+1$　⑨ $2n+2$

- 計算欄 (memo) -