



2025年8月

鈴課理科数学月考

解答

問題 I

問 1 2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ を考える。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標は $(\boxed{\text{A}}, \boxed{\text{BC}})$ である。

(2) 放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に k , y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = -\left(x - \boxed{\text{D}} - k\right)^2 + \boxed{\text{E}}$$

である。

(3) 次の文中の $\boxed{\text{F}}$ には、この問いの下選択肢 ①～④の中から、また、 $\boxed{\text{G}}$ には、この問いの下選択肢 ⑤～⑨の中から適するものを選びなさい。また、その他の $\boxed{\phantom{\text{F}}}$ には、適する数を入れなさい。

関数 $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値が 3 となるような k の値を求めよう。関数 $g(x)$ の最大値は $\boxed{\text{E}}$ であるから、 k は条件 $\boxed{\text{F}}$ または $\boxed{\text{G}}$ を満たす。

したがって

$$k = -\boxed{\text{H}} - \sqrt{\boxed{\text{I}}}, \quad k = \boxed{\text{J}} + \sqrt{\boxed{\text{K}}}$$

である。

$$\textcircled{0} \quad k < -5 \text{ かつ } k^2 + 6k + 7 = 0 \quad \textcircled{5} \quad k > 2 \text{ かつ } k^2 - 6k + 4 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad k < -5 \text{ かつ } k^2 - 4k + 2 = 0 \quad \textcircled{6} \quad k > 2 \text{ かつ } k^2 + 6k + 7 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad k < -3 \text{ かつ } k^2 + 7k + 6 = 0 \quad \textcircled{7} \quad k > 2 \text{ かつ } k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad k < -3 \text{ かつ } k^2 + 6k + 7 = 0 \quad \textcircled{8} \quad k > 4 \text{ かつ } k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad k < -3 \text{ かつ } k^2 - 4k + 2 = 0 \quad \textcircled{9} \quad k > 4 \text{ かつ } k^2 + 6k + 7 = 0$$

解答

(1) $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ に対して、頂点の x の座標は $-\frac{B}{2A} = -\frac{4}{-2} = 2$ である。その x の座標を代入して、頂点の y 座標は $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 6 = 10$ である。したがって、頂点の座標は **(2, 10)** である。

(2) ある $y = f(x)$ とすると、そのグラフは x 軸方向に a だけ平行移動し、 y 軸方向に b だけ平行移動したものとなる。したがって、 $y - b = f(x - a)$ となる。問題の条件によって、 x 軸方向に k 、 y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $g(x)$ とすると、 $g(x) = -\mathbf{(x - 2 - k)^2} + 10$ である。

(3) (2) の結果により、 $g(x) = -(x - 2 - k)^2 + 5 \leq 5$ なので、 $g(x)$ の最大値は 5 である。すなわち、 $g(x)_{\max} = 5 \Rightarrow x = 2 + k$ 。しかし、 $-1 \leq x \leq 4$ における、 $g(x)_{\max} = 3$ である。すなわち、 $g(x)_{\max} = 5$ となるような x の値は $-1 \leq x \leq 4$ に存在しないことがわかる。したがって、 x の範囲は以下の 2 つの場合から考えればよい。

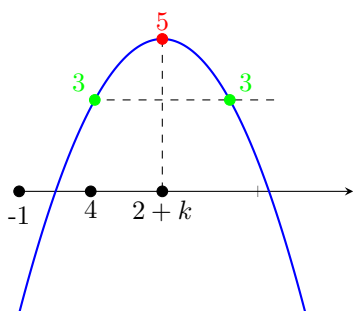


図1 場合1

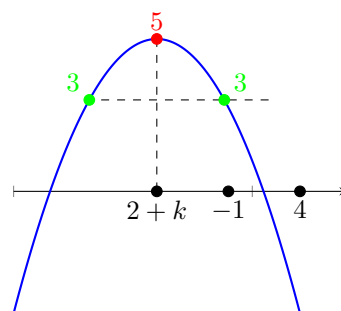


図2 場合2

場合1では、 $x = 2 + k > 4 \Rightarrow k > 2$ である。 $g(x)_{\max} = g(4) = 3$ より、 $g(4) = -(2 - k)^2 + 5 = 3 \Rightarrow k^2 - 4k + 2 = 0$ 。したがって、**⑦** が正しい。

$k > 2$ において、 $k^2 - 4k + 2 = 0$ を計算すると、 $k = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ である。 $k > 2$ によって $k = \mathbf{2 + \sqrt{2}}$ である。

場合2では、 $x = 2 + k < -1 \Rightarrow k < -3$ である。 $g(x)_{\max} = g(-1) = 3$ より、 $g(-1) = -(3 + k)^2 + 5 = 3 \Rightarrow k^2 + 6k + 7 = 0$ 。したがって、**③** が正しい。

$k < -3$ において、 $k^2 + 6k + 7 = 0$ を計算すると、 $k = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$ である。 $k < -3$ によって $k = \mathbf{-3 - \sqrt{2}}$ である。

問 2 大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$\begin{aligned}x = y = z & \text{ である事象を } A, \\x + y + z = 7 & \text{ である事象を } B, \\x + y = z & \text{ である事象を } C\end{aligned}$$

とする。

(1) 事象 A, B, C の起こる場合の数は、それぞれ

$$A \text{ が } \boxed{\text{L}}, \quad B \text{ が } \boxed{\text{MN}}, \quad C \text{ が } \boxed{\text{OP}}$$

である。

(2) 事象 $A \cap B, B \cap C, C \cap A$ の起こる場合の数は、それぞれ

$$A \cap B \text{ が } \boxed{\text{Q}}, \quad B \cap C \text{ が } \boxed{\text{R}}, \quad C \cap A \text{ が } \boxed{\text{S}}$$

である。

(3) 事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{UV}}}$$

である。

解答

(1) さいころの目は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通りである。したがって、 $x = y = z$ の場合は 6 通りである。したがって、 A の事象は 6 通りである。

B の事象: $x + y + z = 7$ に関しては、 $x + y + z = 7$ を満たす組み合わせを考えると、 $(1, 1, 5)$ は $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 通り、 $(1, 2, 4)$ は $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$ 通り、 $(3, 3, 1)$ は $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 通り、 $(2, 2, 3)$ は $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 通りなどがある。これらの組み合わせを全て列挙すると、 B の事象は 15 通りである。

C の事象: $x + y = z$ に関しては、 z の範囲を絞っておくと、 $2 \leq z \leq 6$ である。よって、 z の値ごとに場合分けをすると、

$z = 2$ の場合: $x + y = 2$ となる組み合わせは $(1, 1, 2)$ のみである。したがって、1 通りである。

$z = 3$ の場合: $x + y = 3$ となる組み合わせは $(1, 2, 3)$ と $(2, 1, 3)$ である。したがって、2 通りである。

$z = 4$ の場合: $x + y = 4$ となる組み合わせは $(2, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(3, 1, 4)$ である。したがって、3 通りである。

$z = 5$ の場合: $x + y = 5$ となる組み合わせは $(2, 3, 5)$, $(3, 2, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(4, 1, 5)$ である。したがって、4 通りである。

$z = 6$ の場合: $x + y = 6$ となる組み合わせは $(3, 3, 6)$, $(2, 4, 6)$, $(4, 2, 6)$, $(1, 5, 6)$, $(5, 1, 6)$ である。したがって、5 通りである。以上より、 C の事象は 15 通りである。

(2) $A \cap B$ の事象は 0 通りである。 $B \cap C$ の事象は 0 通りである。 $C \cap A$ の事象は 0 通りである。

(3) 全ての事象の場合の数は $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ 通りである。したがって、 $P(B) = \frac{15}{216}$, $P(C) = \frac{15}{216}$, $P(B \cap C) = 0$ である。 $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ によって、 $P(B \cup C) = \frac{15}{216} + \frac{15}{216} - 0 = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$

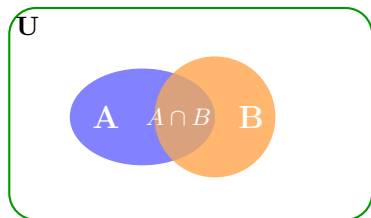
◆◆補足◆◆

事象 A, B が生じる確率をそれぞれ $P(A)$, $P(B)$ とおくと、和集合の確率について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立つ。

証明



事象 A, B の関係は上の図のようになります (U は全事象)。

確率を面積として捉えると、 $A \cup B$ に相当する面積を求めるためには、 A, B の面積を足した後、 $A \cap B$ の面積を引けばよいことがわかる。

問題 II

問 1 2つのベクトル \vec{a} と \vec{b} のなす角は 60° であり、 $|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = 2$ とする。また、実数 x に対して、 $\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。 $x > 1$ のとき、 \vec{u} と \vec{v} のなす角が 45° となるような x の値を求めよう。以下、 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ は \vec{u} と \vec{v} の内積を表し、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は \vec{a} と \vec{b} の内積を表す。

まず、ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角は 45° であるから

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{C}}$ であることに注意して、この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\text{DE}} x^2 + \boxed{\text{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\text{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\text{I}} \sqrt{\boxed{\text{J}}} x\right)^2$$

を得る。

したがって、 $x > 1$ に注意して、これを解くと

$$x = \sqrt{\boxed{\text{K}}} + \sqrt{\boxed{\text{L}}}$$

となる。

解答

(1) 最初は \vec{u} と \vec{v} の内積を求めると、 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{u}| |\vec{v}|$ となる。したがって、 $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{u}| |\vec{v}|)^2 = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$ となる。

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ に関しては、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(60^\circ) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$ となる。

(3) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ を求めると、 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{a} + \vec{b}) \cdot (x\vec{a} - \vec{b}) = x^2(\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{b}) = x^2 |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = x^2 - 4$ となる。

(4) \vec{u} と \vec{v} の大きさを求めると、 $|\vec{u}|^2 = |x\vec{a} + \vec{b}|^2 = |x\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(x\vec{a} \cdot \vec{b}) = x^2 + 4 + 2x(\vec{a} \cdot \vec{b})$ となる。したがって、 $|\vec{u}|^2 = x^2 + 2x + 4$ となる。 \vec{v} の大きさは同様に求めることができ、 $|\vec{v}|^2 = x^2 - 2x + 4$ となる。したがって、

$$\begin{cases} |\vec{u}|^2 = x^2 + 2x + 4 \\ |\vec{v}|^2 = x^2 - 2x + 4 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = x^2 - 4 \end{cases} \quad \text{を } (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \text{ に代入すると、} x^4 - 20x^2 + 16 = 0 \text{ を得る。}$$

(5) $x^4 - 20x^2 + 16 = 0$ を変形すると、 $(x^2 - 4)^2 - 12x^2 = 0 \implies (x^2 - 4)^2 = (2\sqrt{3}x)^2$ となる。したがって、 $x^2 - 4 = \pm 2\sqrt{3}x$ となる。

(6) $x^2 - 4 = 2\sqrt{3}x$ を解くと、 $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ となる。したがって、 $x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 16}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ となる。 $x > 1$ に注意して、 $x = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ となる。 $x^2 - 4 = -2\sqrt{3}x$ を解くと、 $x^2 + 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ となる。

したがって、 $x = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 16}}{2} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ となる。 $x > 1$ に注意して、 $x = -\sqrt{3} + \sqrt{7} < 1$ となるので、これは解ではない。

問2 複素数平面上で、 z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1) 上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\text{M}}}k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので、図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\text{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\text{O}}}x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\text{P}}}x$$

で表される 3 直線である。

(2) C 上に $|z - 2 - 2i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき、 r の値は

$$r = \sqrt{\boxed{\text{Q}}} - \boxed{\text{R}}$$

となる。また、そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\text{S}} + \sqrt{\boxed{\text{T}}}}{\boxed{\text{U}}} \left(1 + \sqrt{\boxed{\text{V}}}i \right)$$

である。

解答

(1) 問題文により、 $z = x + iy$ とすると、極座標に変形し、 $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ となる。その後、極座標の z を用いて z^3 を計算すると、 $z^3 = (r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^3 = r^3(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3$ となる。[ド・モアブル定理](#) により、 $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$ となるので、上の z^3 の式に代入すると、 $z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta))$ となる。問題の条件: z^3 が実数なので、 $r^3\sin(3\theta) = 0$ となる。したがって、 $\sin(3\theta) = 0 \implies 3\theta = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \implies \theta = \frac{k\pi}{3}$ となる。以上より、 $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$ の偏角 $\arg z = \frac{\pi}{3}k$ である。

◆◆補足◆◆

[ド・モアブル定理](#): $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

証明

$n \neq \phi$ とおくと、

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) &= \cos(\theta)\cos(\phi) + i\sin(\theta)\cos(\phi) + i\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) \\ &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) + i(\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\theta)\cos(\phi)) \\ &= \cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

$\phi = \theta$ のとき、 $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = \cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta) = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ となる。したがって、 n のときには、 $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(\theta + \dots + \theta) + i\sin(\theta + \dots + \theta) = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ が成り立つ。

(2) 図形 C の x, y の方程式を求める前に、その方程式の傾きを求めないといけないので、以下の図 1 のように、傾き $= \tan \theta = \frac{y}{x}$, $\arg z = \theta = \frac{y}{x}$ により、

場合 1 $k = 0 \implies \theta = 0 \implies \theta = k\pi \implies y = 0$

場合 2 $k = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{3} \implies \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \implies y = \sqrt{3}x$

場合 3 $k = 2 \implies \theta = \frac{2\pi}{3} \implies \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi \implies y = -\sqrt{3}x$

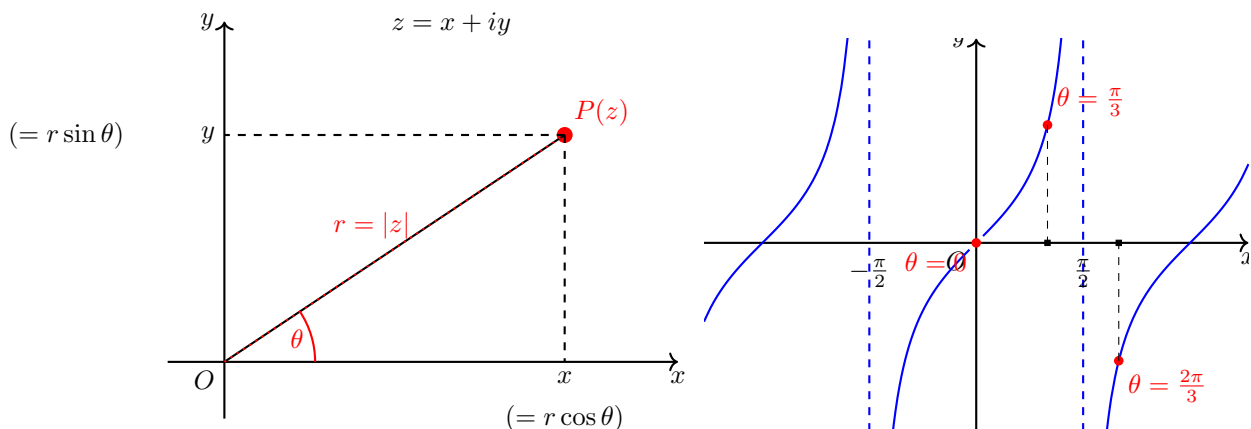


図 1

(2) C 上に $|z - 2 - 2i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するためには、 C の直線と円は 1 点で交わる (接する) ことである、このとき、 $|x - 2 - 2i| = r$ は中心を $2 + 2i$ 、半径 r の円となり、その円は $y = \sqrt{3}$ の直線と接するので、点 $(2 + 2i)$ から直線 $(y - \sqrt{3}x = 0)$ までの距離公式を使うと $r = d = \frac{|2 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{|2 - 2\sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3} - 1$ となる。したがって、 $r = \sqrt{3} - 1$ である。

(3) z の値は直線 $y = \sqrt{3}x$ 上にあるので、 $z = x + i\sqrt{3}x = (1 + i\sqrt{3})x$ となるので、 x の具体値を求めればよい。
 円と直線の接点と円の中心の直線は直線 $y = \sqrt{3}x$ と直交するので、接点と円の中心の直線の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。
 よって、接点と円の中心の直線の方程式は、 $y - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ となる。したがって、接点 $(x, \sqrt{3}x)$ を代入すると、 $\sqrt{3}x - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ となる。これを解くと、 $3x - 2\sqrt{3} = -x + 2 \implies 4x = 2 + 2\sqrt{3} \implies x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ となる。したがって、 $z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$ である。