



2025年8月

羚課文科数学月考

解答

問題 I

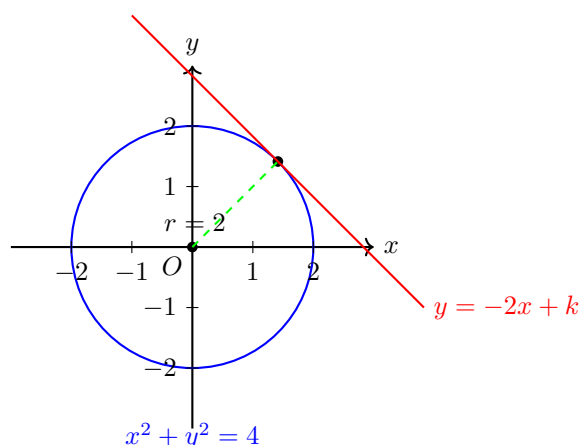
問 1 $x^2 + y^2 = 4$ のとき、 $2x + y$ の最大値は $\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}$

2 次関数 $y = x^2 + 6x + 5$ のグラフを原点 $(0, 0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

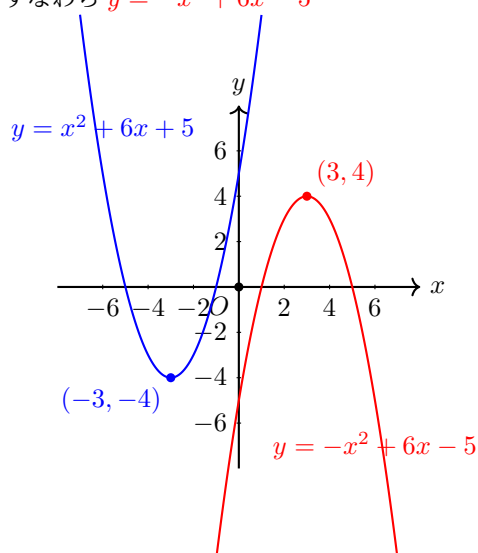
$$y = \boxed{\text{C}}x^2 + \boxed{\text{D}}x - \boxed{\text{E}}$$

解答

(1) $x^2 + y^2 = 4$ によって、これは円の中心が $(0, 0)$ 、半径 r が 2 の円である。 $2x + y$ の最大値を k とすると、 $2x + y = k \Rightarrow y = -2x + k \Rightarrow 2x + y - k = 0$ ここで、円の上に $2x + y$ の最大値を得られる点 (x_0, y_0) が存在する。よって、直線 $2x + y - k = 0$ は円との関係は接する場合と交わる場合の 2 ケースだけである。したがって、点と直線の距離の公式によって、円の中心座標を $2x + y - k = 0$ に代入すると $d = \frac{|2 \times 0 + 0 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \leq 2 = r \Rightarrow |-k| \leq 2\sqrt{5}$ となる。 $|-k| = |k|$ により、 $|k| \leq 2\sqrt{5} \Rightarrow -2\sqrt{5} \leq k \leq 2\sqrt{5}$ 。以上より、 $2x + y$ の最大値は $2\sqrt{5}$ である。



(2) 原点に関して対称移動: x を $-x$ に、 y を $-y$ に変える。したがって、 $y = -f(-x) \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 5$
すなわち $y = -x^2 + 6x - 5$



問2 $3a+1$ が a^2+6 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+6 = \frac{b^2 - \boxed{\text{F}} b + \boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}}} \dots\dots ①$$

である。また、 b は a^2+6 の約数であるから、 a^2+6 はある自然数 c を用いて

$$a^2+6 = bc \dots\dots ②$$

と表される。①、② から

$$b(\boxed{\text{J}} c - b + \boxed{\text{K}}) = \boxed{\text{LM}}$$

を得る。したがって、 b は $\boxed{\text{LM}}$ の約数である。この中で、 a が自然数となるのは $b = \boxed{\text{NO}}$

である。したがって、 $a = \boxed{\text{PQ}}$ である

解答

(1) $3a+1=b$ とすると、 $a = \frac{b-1}{3}$ となって、 a を a^2+6 に代入すると、 $a^2+6 = \frac{(b-1)^2}{9} + 6 = \frac{b^2 - 2b + 1 + 54}{9} = \frac{b^2 - 2b + 55}{9}$ となる。

(2) ①と②の式から、 $a^2+6 = bc = \frac{b^2 - 2b + 55}{9} \Rightarrow 9bc - b^2 + 2b = 55 \Rightarrow b(9c - b + 2) = 55$ 。

(3) b は 55 の約数である。したがって、 b は 1, 5, 11, 55 のいずれかである ($55 = 55 \times 1 = 5 \times 11 \times 1$)。 a が自然数それと $b = 3a+1$ の条件によって、 $b \geq 4$ となる。したがって、 $b = 5$ の場合は、 $a = \frac{b-1}{3} = \frac{4}{3}$ であり、 a の条件を満たさない。 $b = 11$ の場合は、 $a = \frac{b-1}{3} = \frac{10}{3}$ であり、 a の条件を満たさない。 $b = 55$ の場合は、 $a = \frac{b-1}{3} = \frac{54}{3} = 18$ であり、 a の条件を満たす。したがって、 $b = 55, a = 18$ が求める答えである。

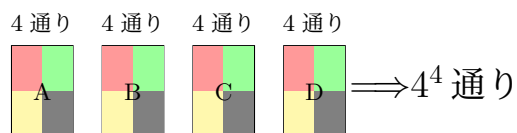
問題 II

問 1 異なる 4 つの箱がある。これらの箱に赤、黒、緑、黄の色を塗る。ただし、どの箱にも 1 つの色のみを使い、また同じ色の箱が 2 枚以上あってもよいものとする。

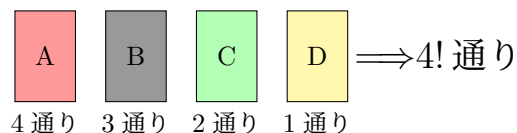
- (1) 全部で \boxed{ABC} 通りの塗り方がある。
- (2) 全部の色を使う塗り方は \boxed{DE} 通りある。
- (3) 2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が緑となるような塗り方は \boxed{FJ} 通りある。
- (4) 3 つの色を使う塗り方は \boxed{GHI} 通りある。
- (5) 2 つの色を使う塗り方は \boxed{JK} 通りある。

解答

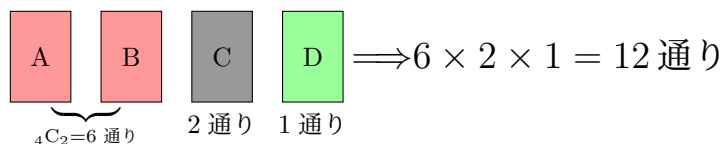
(1) 各箱に 4 色のうち 1 色を塗るので、4 枚の箱に対しては $4^4 = 256$ 通りの塗り方がある。したがって、全部で 256 通りの塗り方がある。



(2) 4 色全てが最低 1 回は使われる塗り分けである。箱を A, B, C, D とすると、最初 A は 4 択を選べられ、まず赤を塗るとする。次の B は赤抜き 3 色しか選べられないので、3 通りがあって、黒を塗るとする。C は赤と黒抜き 2 色しか選べられないので、2 通りがあって、ここで緑を塗るとする。最後の黄色を D に塗るしかないの、合計で $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りがある。



(3) 最初は 4 枚の箱から 2 枚を選んで赤を塗ると、 ${}_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ 通りがある。次に、残りの 2 枚箱から 1 枚を選んで黒を塗ると、 ${}_2C_1 = 2$ 通りがある。最後の 1 枚箱は緑を塗ると、1 通りがある。したがって、合計で $6 \times 2 \times 1 = 12$ 通りである。



(4) 最初 4 色から 3 色を選んで、 ${}_4C_3 = 4$ 通りがある。次に、選んだ 3 色の中で 1 つの色が 2 回使われた選び方は ${}_3C_1 = 3$ 通りがある。次の塗り方は (3) と同じであって、合計で $4 \times 3 \times 12 = 144$ 通りである。

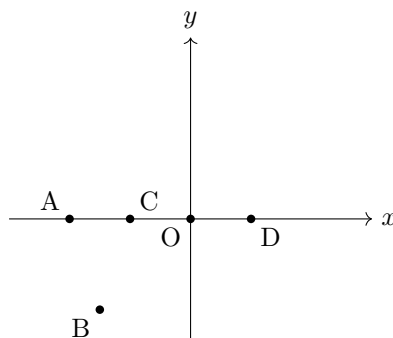
(5) 1 つの色の塗り方は ${}_4C_1 \times {}_4C_4 = 4$ 通り。よって、2 つの色を使う塗り方は $256 - (24 + 144 + 4) = 84$ 通り。

問2 2つの2次関数

$$\ell: y = ax^2 + 2bx + c$$

$$m: y = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c+6$$

を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。
このとき、この2つの2次関数のうち、一方は、3点 A, B, C を
通り、もう一方は、3点 B, C, D を通るとする。



(1) 3点 A, B, C を通る放物線は L である。ただし、
L には、次の①か②のどちらか適するものを選びなさい。

② 2次関数 ℓ

① 2次関数 m

(2) 2つの2次関数 ℓ, m は、どちらも2点 B, C を通るので、点 B, C の座標は、2次方程式

$$x^2 + \text{M}x + \text{N} = 0$$

の解である。よって、点 B の x 座標は OP、点 C の x 座標は QR である。

(3) 特に、 $AB = BC$, $CO = OD$ のとき、 a, b, c の値を求めよう。

2点 C, D は y 軸に関して対称であるから、 $b = \text{S}$ である。また、 $AB = BC$ より、

直線 $x = \text{TU}$ が L の軸である。したがって、 $a = -\frac{\text{V}}{\text{W}}$ である。よって、

$c = \frac{\text{X}}{\text{Y}}$ である。

解答

(1) 問題の条件から、 ℓ と m の2次関数の傾きの正負は異なる。よって、 $a < 0 < a+2$ が成り立つ (逆に成り立たない)。したがって、3点 A, B, C を通る2次関数は①の m 関数である。

(2) 3点 A, B, C を通る2次関数は m である。3点 B, C, D を通る2次関数は ℓ である。したがって、 m と ℓ の方程式は点 B, C を通るので、 $y = ax^2 + bx + c = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c+6 \implies x^2 + 4x + 3 = 0$ 。この方程式の解は、点 B, C の x 座標であるので、 $\implies x^2 + 4x + 3 = 0 \implies (x+1)(x+3) = 0$ 図の点の位置によって、点 B の x 座標は -3 、点 C の x 座標は -1 となる。

(3) 点 C, D は y 軸に関して対称であるから、 ℓ の頂点 x 座標は $-\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} = 0$ である。したがって、 $b = 0$ となる。 $AB = BC$ より、直線 $x = -3$ が m の軸である。したがって、 m の2次関数の頂点 x 座標により、 $-\frac{2(b+4)}{2(a+2)} = -\frac{0+4}{a+2} = -3 \implies a = -\frac{2}{3}$ である。よって、 $c = \frac{1}{2}$ である。点 C: $(-1, 0)$ を ℓ の方程式に代入すると、 $a \times (-1)^2 + 2 \times 0 \times x + c = 0 \implies -\frac{2}{3} + c = 0 \implies c = \frac{2}{3}$ である。

問題 III

n は 2 桁^{けた}の自然数であり、 n^3 を 78 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と、このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より、 n^3 を 78 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\text{AB}} p + n \quad (0 < n \leq \boxed{\text{CD}})$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\text{AB}} p$$

を得る。

ここで、 $n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\text{E}}$ の倍数、 $n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\text{F}}$ の倍数であり、

$\boxed{\text{E}}$ と $\boxed{\text{F}}$ は互いに素であるから、 $n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\text{G}}$ の倍数である。

ただし、 $1 < \boxed{\text{E}} < \boxed{\text{F}} < \boxed{\text{G}}$ とする。よって、 $n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\text{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま、 $n \leq \boxed{\text{CD}}$ であるから、 $n-1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{J}}$ 、 n が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{K}}$ 、 $n+1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{L}}$ である。

よって、求める n の個数は $\boxed{\text{MN}}$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $\boxed{\text{OP}}$ 、 $\boxed{\text{QR}}$ 、 $\boxed{\text{ST}}$ である。

解答

(1) n^3 を 78 で割ったときの商を p とし、その余りは n である。したがって、多項式の割り算 (整式の除法) の定義により、 $n^3 = 78p + n$ ($0 < n \leq 77$) となる。

(2) $n^3 - n = 78p \Rightarrow n(n^2 - 1) = 78p \Rightarrow n(n-1)(n+1) = 78p$ を得る。ここで、 $0 < n \leq 77$ 、 $n-1 \leq 76$ 、 $n+1 \leq 78$ であるので、 $n-1, n$ のどちらか一方は 2 の倍数であり、 $n-1, n, n+1$ のいずれかは 3 の倍数であり、2 と 3 は互いに素である。したがって、 $n(n-1)(n+1)$ は $2 \times 3 = 6$ の倍数である。

(3) ただし、 $1 < 2 < 3 < 6$ とする。よって、 $n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが 13 の倍数である場合を考えればよい。なぜかと言うと、 $78 = 1 \times 2 \times 3 \times 13$ だからである。今、 $n \leq 77$ であるから、 $n-1$ が 13 の倍数であるケースは $n-1 = 13, 26, 39, 52, 65$ である。 $\Rightarrow n = 14, 27, 40, 53, 66$ であり、合わせて n の個数は 5 である。 n が 13 の倍数であるケースは $n = 13, 26, 39, 52, 65$ であり、合わせて n の個数は 5 である。 $n+1$ が 13 の倍数であるケースは $n+1 = 13, 26, 39, 52, 65, 78$ である。 $\Rightarrow n = 12, 25, 38, 51, 64, 77$ であり、合わせて n の個数は 6 である。

(4) よって、求める n の個数は $5 + 5 + 6 = 16$ であり、このうち、素数である n は小さい順に 13, 51, 53 である。

問題 IV

2 つの実数 x, y が方程式

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 50 \quad \dots\dots ①$$

を満たしている。このとき、 $x + y$ および xy がとる値の範囲を求めよう。(結果は既約分数で表せよ。)

まず

$$x + y = a \quad \dots\dots ②$$

とおく。①、② より y を消去して、 x の 2 次方程式

$$\boxed{\text{A}} x^2 - \boxed{\text{B}} ax + \boxed{\text{C}} a^2 - 50 = 0$$

を得る。 x は実数であるから

$$\boxed{\text{DE}} \leq a \leq \boxed{\text{F}} \quad \dots\dots ③$$

である。

さらに

$$xy = b \quad \dots\dots ④$$

とおくと、①、②、④ より

$$b = \frac{\boxed{\text{G}} a^2 - \boxed{\text{IJ}}}{\boxed{\text{H}}} \quad \dots\dots ⑤$$

を得る。よって、③、⑤ より

$$\frac{\boxed{\text{KLM}}}{\boxed{\text{N}}} \leq b \leq \frac{\boxed{\text{OP}}}{\boxed{\text{Q}}}$$

となる

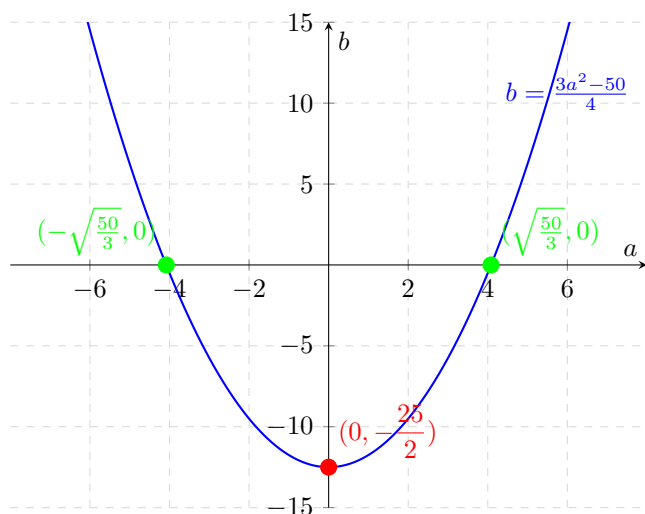
解答

(1) ①と②により、 $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 50 \\ x + y = a \end{cases}$ によって、 $y = a - x$ とおいて、①の式に代入すると、 $3x^2 + 2x(a - x) + 3(a - x)^2 = 50 \Rightarrow 3x^2 + 2ax - 2x^2 + 3a^2 - 6ax + 3x^2 = 50 \Rightarrow 4x^2 - 4ax + 3a^2 - 50 = 0$ となる。

(2) したがって、 x は実数であるから、関数 $Ax^2 + Bx + C$ の判別式 ($\Delta = B^2 - 4AC$) は非負である。したがって、 $(-4a)^2 - 4 \times 4 \times (3a^2 - 50) \geq 0 \Rightarrow 16a^2 - 16(3a^2 - 50) \geq 0 \Rightarrow -32a^2 + 800 \geq 0 \Rightarrow a^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq a \leq 5$ となる。

(3) さらに、 $xy = b$ とおくと、①、②、④より、 $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 50 \\ x + y = a \\ xy = b \end{cases}$ となる。 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ により、 $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$ となる。したがって、①の式に代入すると、 $3(x^2 + y^2) + 2xy = 50 \Rightarrow 3(a^2 - 2b) + 2b = 50 \Rightarrow 3a^2 - 6b + 2b = 50 \Rightarrow 3a^2 - 4b = 50 \Rightarrow b = \frac{3a^2 - 50}{4}$ となる。

(4) よって、③、⑤より、 $\begin{cases} -5 \leq a \leq 5 \\ b = \frac{3a^2 - 50}{4} \end{cases}$ となる。 $b = \frac{3a^2 - 50}{4}$ の図は以下のようです。



したがって、 $-5 \leq a \leq 5$ より、

$$b = \frac{3a^2 - 50}{4} \text{ の最小値は } a = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2 \times \frac{3}{4}} = 0 \text{ の時、} b = -\frac{50}{4} = -\frac{25}{2}。$$

$$b = \frac{3a^2 - 50}{4} \text{ の最大値は端点 } a = \pm 5 \text{ の時、} b = \frac{3 \times (\pm 5)^2 - 50}{4} = \frac{75 - 50}{4} = \frac{25}{4}。$$

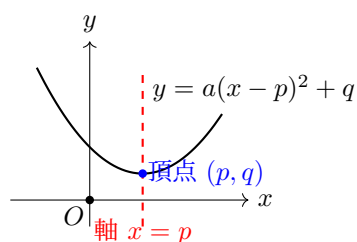
従って、 b の範囲は $-\frac{25}{2} \leq b \leq \frac{25}{4}$ となる。

付録

◆◆補足◆◆

1.1 2次関数の軸と頂点の求め方

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ という形にすれば、軸と頂点がわかります。具体的には、軸は $x = p$ で頂点は (p, q) になります。



例題 1: 二次関数の軸の方程式と頂点の座標

2 次関数 $y = 2x^2 + 3x - 1$ の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

解答

$y = 2x^2 + 3x - 1$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} y &= 2 \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x \right) - 1 \\ &= 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{8} - 1 \\ &= 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{17}{8} \end{aligned}$$

よって,

- 軸の方程式は $x = -\frac{3}{4}$
- 頂点の座標は $(-\frac{3}{4}, -\frac{17}{8})$

1.2 2次関数の軸と頂点を求める公式

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において,

軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$

頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$

証明

これは証明できます。まず、二次関数の一般形 $y = ax^2 + bx + c$ を考えます。平方完成を用いると、次のように変形できます。

$$\begin{aligned} y &= a \left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x \right) - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \end{aligned}$$

よって、軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$ 、頂点の座標が $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$ であることがわかります。