



2025年8月

鈴課文科数学月考

I

問 1 $x^2 + y^2 = 4$ のとき、 $2x + y$ の最大値は $\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}$

2 次関数 $y = x^2 + 6x + 5$ のグラフを原点 $(0, 0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

$$y = \boxed{\text{C}}x^2 + \boxed{\text{D}}x + \boxed{\text{E}}$$

問 2 $3a + 1$ が $a^2 + 5$ の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a + 1 = b$ とする。このとき

$$a^2 + 5 = \frac{b^2 - \boxed{\text{F}}b + \boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}}} \dots\dots \textcircled{1}$$

である。また、 b は $a^2 + 5$ の約数であるから、 $a^2 + 5$ はある自然数 c を用いて

$$a^2 + 5 = bc \dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。①、② から

$$b(\boxed{\text{J}}c - b + \boxed{\text{K}}) = \boxed{\text{LM}}$$

を得る。したがって、 b は $\boxed{\text{LM}}$ の約数である。この中で、 a が自然数となるのは $b = \boxed{\text{NO}}$

である。したがって、 $a = \boxed{\text{PQ}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

問 1 大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤、黒、青、黄の色を塗る。ただし、どのカードにも 1 つの色のみを使い、また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

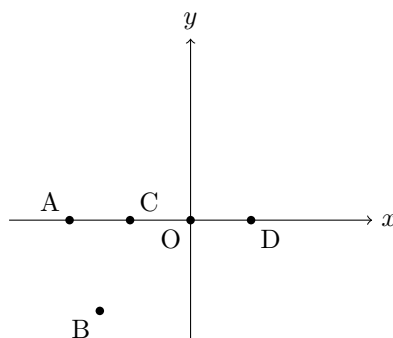
- (1) 全部で ABC 通りの塗り方がある。
- (2) 全部の色を使う塗り方は DE 通りある。
- (3) 2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が青となるような塗り方は FJ 通りある。
- (4) 3 つの色を使う塗り方は GHI 通りある。
- (5) 2 つの色を使う塗り方は JK 通りある。

問 2 2 つの放物線

$$\ell: y = ax^2 + 2bx + c$$

$$m: y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c+3$$

を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。
このとき、この 2 つの放物線のうち、一方は、3 点 A, B, C を通り、もう一方は、3 点 B, C, D を通るとする。



- (1) 3 点 A, B, C を通る放物線は L である。ただし、L には、次の①か②のどちらか適するものを選びなさい。

- ① 放物線 ℓ
- ② 放物線 m

- (2) 2 つの放物線 ℓ, m は、どちらも 2 点 B, C を通るので、点 B, C の座標は、2 次方程式

$$x^2 + \text{M}x + \text{N} = 0$$

の解である。よって、点 B の x 座標は OP、点 C の x 座標は QR である。

- (3) 特に、 $AB = BC$, $CO = OD$ のとき、 a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y 軸に関して対称であるから、 $b = \text{S}$ である。また、 $AB = BC$ より、

直線 $x = \text{TU}$ が L の軸である。したがって、 $a = -\frac{\text{V}}{\text{W}}$ である。よって、

$c = \frac{\text{X}}{\text{Y}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

III

n は 2 桁^{けた}の自然数であり、 n^3 を 66 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と、このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より、 n^3 を 66 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\text{AB}} p + n \quad (0 < n \leq \boxed{\text{CD}})$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\text{AB}} p$$

を得る。

ここで、 $n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\text{E}}$ の倍数、 $n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\text{F}}$ の倍数であり、

$\boxed{\text{E}}$ と $\boxed{\text{F}}$ は互いに素であるから、 $n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\text{G}}$ の倍数である。

ただし、 $1 < \boxed{\text{E}} < \boxed{\text{F}} < \boxed{\text{G}}$ とする。よって、 $n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\text{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま、 $n \leq \boxed{\text{CD}}$ であるから、 $n-1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{J}}$ 、 n が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{K}}$ 、 $n+1$ が $\boxed{\text{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\text{L}}$ である。

よって、求める n の個数は $\boxed{\text{MN}}$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $\boxed{\text{OP}}$ 、 $\boxed{\text{QR}}$ 、 $\boxed{\text{ST}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

IV

2 つの実数 x, y が方程式

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 32 \quad \dots\dots ①$$

を満たしている。このとき、 $x + y$ および xy がとる値の範囲を求めよう。

まず

$$x + y = a \quad \dots\dots ②$$

とおく。①、② より y を消去して、 x の 2 次方程式

$$\boxed{\text{A}} x^2 - \boxed{\text{B}} ax + \boxed{\text{C}} a^2 - 32 = 0$$

を得る。 x は実数であるから

$$\boxed{\text{DE}} \leq a \leq \boxed{\text{F}} \quad \dots\dots ③$$

である。

さらに

$$xy = b \quad \dots\dots ④$$

とおくと、①、②、④ より

$$b = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}} a^2 - \boxed{\text{I}} \quad \dots\dots ⑤$$

を得る。よって、③、⑤ より

$$\boxed{\text{JK}} \leq b \leq \boxed{\text{L}}$$

となる

- 計算欄 (memo) -