

蔡さんへの Touch 連絡

Linc - 伊

問題

a, b, c を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(a, 0), B(3, b), C(0, c)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。その三角形 ABC の外接円は原点 $O(0, 0)$ を通り、 $\angle BAC = 60^\circ$ とする。

(1) $\angle AOB = \boxed{AB}^\circ$ であるから、 $b = \sqrt{\boxed{C}}$ である。

(2) 外接円を表す方程式は

$$\left(x - \frac{a}{\boxed{D}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\boxed{E}}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{\boxed{F}}$$

であり、 c は a を用いて $c = \sqrt{\boxed{G}(\boxed{H} - a)}$ と表される。

(3) 線分 OB と線分 AC の交点を D とし、 $\angle OAC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ とおく。

$a = 2\sqrt{3}$ のとき

$$\tan \alpha = \boxed{I} - \sqrt{\boxed{J}}, \quad \tan \beta = \boxed{K}$$

である。

解答

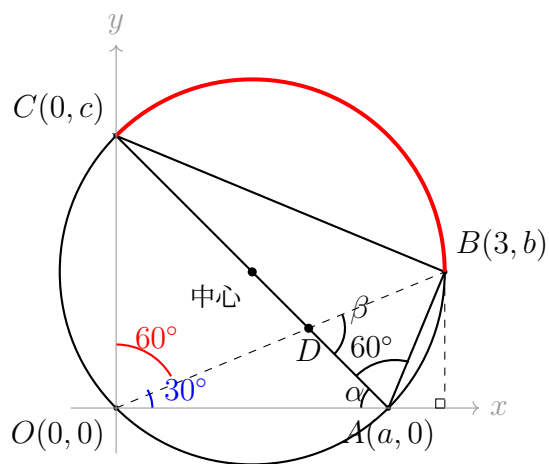


図 1

(1) 円周角の定理によって、 $\angle COB = 60^\circ$ と $\angle COA = 90^\circ$ で、 $\angle AOB = 30^\circ$ となる。それから、図 1 のように、点 B から x 軸までの垂線によって、 $\tan 30^\circ = \frac{b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ となり、 $b = \sqrt{3}$ となる。

◆◆補足◆◆;

円周角の定理:

1. 中心角 は 円周角 の 2 倍である。
2. 同じ弧に対する円周角は全て等しい。

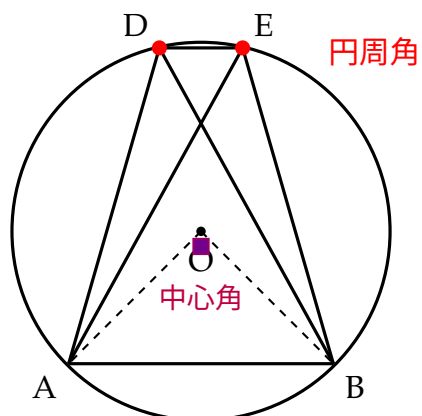


図 2

証明: [円周角の定理 1 が成り立つ前提としての円周角の定理 2 の証明]

「円周角の定理 1」: 円周角=中心角の半分 と図 2 のように、

$$\begin{cases} \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB \\ \angle AEB = \frac{1}{2}\angle AOB \end{cases} \implies \angle ADB = \angle AEB \text{ より、同じ弧に対する}$$

円周角は全て等しい。

(2) 図 1 のように、 AC は外接円の直径であるので、 $AC = 2r = \sqrt{(0-a)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + c^2} \implies r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$ となり、円の中心は $(\frac{a}{2}, \frac{c}{2})$ である。
したがって、この外接円の方程式は $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$ である。
また、点 $B(3, \sqrt{3})$ であり、その点 B を式 $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$ に代入すると

$$\begin{aligned} (3 - \frac{a}{2})^2 + (\sqrt{3} - \frac{c}{2})^2 &= \frac{a^2 + c^2}{4} \\ 9 - 3a + \frac{a^2}{4} + 3 - \sqrt{3}c + \frac{c^2}{4} &= \frac{a^2 + c^2}{4} \\ -\sqrt{3}c + 12 - 3a + \frac{a^2 + c^2}{4} &= \frac{a^2 + c^2}{4} \\ -\sqrt{3}c &= 3a - 12 \\ c &= \frac{3a - 12}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}(4 - a) \end{aligned}$$

と表される。

(3) 線分問題文の条件により、OB と線分 AC の交点を D とし、 $\angle OAC = \alpha$ 、 $\angle ADB = \beta$ とおいて、 $a = 2\sqrt{3}$ のとき、図 1 のように、 $\tan \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}} = \frac{4-a}{2} = 2-\sqrt{3}$ である。 $\angle BDA = \beta = \alpha + 30^\circ$ なので、 $\tan \beta = \tan(\alpha + 30^\circ)$ を計算すればよい、

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan(\alpha + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan 30^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 30^\circ} = \frac{(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 2} = 1\end{aligned}$$

よって、 $\tan \beta = 1$ である。