2025年8月

羚課文科数学月考

I

問 1　$x^2+y^2=4$ のとき、 $2x+y$ の最大値は $\boxed{\textsf{A}}\sqrt{\boxed{\textsf{B}}}$

2 次関数 $y=x^2+6x+5$ のグラフを原点 $(0,0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

$$y=\boxed{\textsf{C}}\,x^2+\boxed{\textsf{D}}\,x-\boxed{\textsf{E}}$$

問 2　$3a+1$ が a^2+6 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+6=\frac{b^2-\boxed{\textsf{F}}\,b+\boxed{\textsf{GH}}}{\boxed{\textsf{I}}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。また、b は a^2+6 の約数であるから、a^2+6 はある自然数 c を用いて

$$a^2+6=bc \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される。①、② から

$$b\left(\boxed{\textsf{J}}\,c-b+\boxed{\textsf{K}}\right)=\boxed{\textsf{LM}}$$

を得る。したがって、b は $\boxed{\textsf{LM}}$ の約数である。この中で、a が自然数となるのは $b=\boxed{\textsf{NO}}$

である。したがって、$a=\boxed{\textsf{PQ}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

問 1　異なる 4 つの箱がある。これらの箱に赤、黒、緑、黄の色を塗る。ただし、どの箱にも 1 つの色のみを使い、また同じ色の箱が 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\textsf{ABC}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{DE}}$ 通りある。

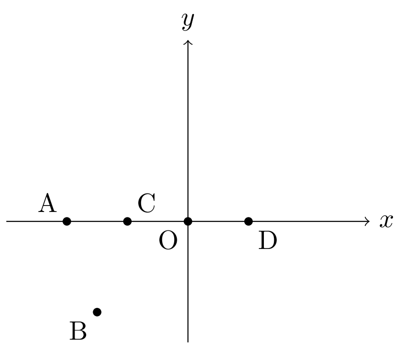
(3)　2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が緑となるような塗り方は $\boxed{\textsf{FJ}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{GHI}}$ 通りある。

(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{JK}}$ 通りある。

問 2　2 つの 2 次関数

ℓ :　$y = ax^2 + 2bx + c$
m :　$y = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c + 6$



を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの 2 次関数のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。

(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\textsf{L}}$ である。ただし、$\boxed{\textsf{L}}$ には，次の⓪か①のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　2 次関数 ℓ
①　2 次関数 m

(2)　2 つの 2 次関数 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\textsf{M}}\,x + \boxed{\textsf{N}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x 座標は $\boxed{\textsf{OP}}$，点 C の x 座標は $\boxed{\textsf{QR}}$ である。

(3)　特に，AB = BC, CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y 軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\textsf{S}}$ である。また，AB = BC より，

直線 $x = \boxed{\textsf{TU}}$ が $\boxed{\textsf{L}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\textsf{V}}}{\boxed{\textsf{W}}}$ である。よって，

$c = \dfrac{\boxed{\textsf{X}}}{\boxed{\textsf{Y}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

III

n は 2 桁(けた)の自然数であり、n^3 を 78 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と、このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より、n^3 を 78 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\mathsf{AB}}\,p + n \qquad \left(0 < n \leq \boxed{\mathsf{CD}}\right)$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\mathsf{AB}}\,p$$

を得る。

ここで、$n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\mathsf{E}}$ の倍数、$n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\mathsf{F}}$ の倍数であり、

$\boxed{\mathsf{E}}$ と $\boxed{\mathsf{F}}$ は互いに素であるから、$n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\mathsf{G}}$ の倍数である。

ただし、$1 < \boxed{\mathsf{E}} < \boxed{\mathsf{F}} < \boxed{\mathsf{G}}$ とする。よって、$n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま、$n \leq \boxed{\mathsf{CD}}$ であるから、$n-1$ が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{J}}$、n が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{K}}$、$n+1$ が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{L}}$ である。

よって、求める n の個数は $\boxed{\mathsf{MN}}$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $\boxed{\mathsf{OP}}$、$\boxed{\mathsf{QR}}$、$\boxed{\mathsf{ST}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

IV

2 つの実数 x, y が方程式

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 50 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしている。このとき、$x + y$ および xy がとる値の範囲を求めよう。(結果は既約分数で表せよ。)

まず

$$x + y = a \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく。①、② より y を消去して、x の 2 次方程式

$$\boxed{\mathbf{A}}\, x^2 - \boxed{\mathbf{B}}\, ax + \boxed{\mathbf{C}}\, a^2 - 50 = 0$$

を得る。x は実数であるから

$$\boxed{\mathbf{DE}} \leq a \leq \boxed{\mathbf{F}} \qquad \cdots\cdots ③$$

である。

さらに

$$xy = b \qquad \cdots\cdots ④$$

とおくと、①、②、④ より

$$b = \frac{\boxed{\mathbf{G}}\, a^2 - \boxed{\mathbf{IJ}}}{\boxed{\mathbf{H}}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を得る。よって、③、⑤ より

$$\frac{\boxed{\mathbf{KLM}}}{\boxed{\mathbf{N}}} \leq b \leq \frac{\boxed{\mathbf{OP}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}$$

となる

- 計算欄 (memo) -