蔡さんへのTouch連絡

Linc - 伊

問題

a, b, c を正の実数とする。座標平面上の3点 A$(a, 0)$, B$(3, b)$, C$(0, c)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。その三角形 ABC の外接円は原点 O$(0, 0)$ を通り，$\angle \mathrm{BAC} = 60^\circ$　とする。

(1) $\angle \mathrm{AOB} = \boxed{\text{AB}}^\circ$　であるから，$b = \sqrt{\boxed{\text{C}}}$ である。

(2) 外接円を表す方程式は

$$\left(x - \frac{a}{\boxed{\text{D}}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\boxed{\text{E}}}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{\boxed{\text{F}}}$$

であり，c は a を用いて $c = \sqrt{\boxed{\text{G}}}(\boxed{\text{H}} - a)$ と表される。

(3) 線分 OB と線分 AC の交点を D とし，$\angle \mathrm{OAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{ADB} = \beta$ とおく。

$a = 2\sqrt{3}$ のとき

$$\tan \alpha = \boxed{\text{I}} - \sqrt{\boxed{\text{J}}}, \quad \tan \beta = \boxed{\text{K}}$$

である。

解答

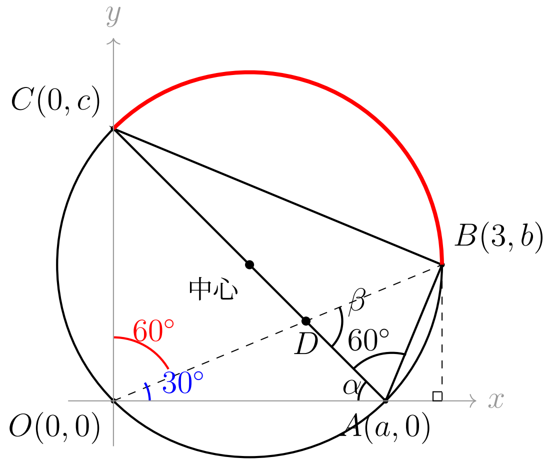

図 1

(1)　円周角の定理によって､$\angle \mathrm{COB} = 60°$　と $\angle \mathrm{COA} = 90°$　で､$\angle \mathrm{AOB} = 30°$　となる。それから、図 1 のように, 点 B から x 軸までの垂線によって、$\tan 30° = \frac{b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ となり、$b = \sqrt{3}$ となる。

◆◆◆補足◆◆◆;

円周角の定理:

1. 中心角 は 円周角 の 2 倍である。
2. 同じ弧に対する円周角は全て等しい。

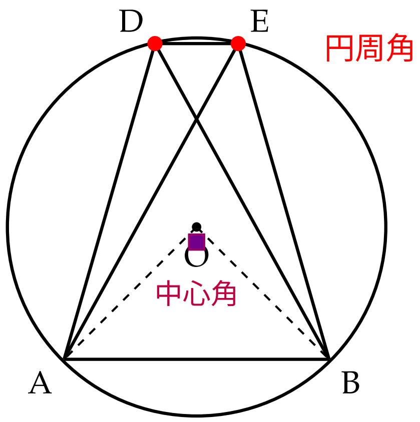

図 2

証明 [円周角の定理１が成り立つ前提としての円周角の定理２の証明]

「円周角の定理 1」：円周角=中心角の半分 と図２のように、

$$\begin{cases} \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB \\ \angle AEB = \frac{1}{2}\angle AOB \end{cases} \implies \angle ADB = \angle AEB$$ より、同じ弧に対する

円周角は全て等しい。

(2)　図１のように、AC は外接円の直径であるので、$AC = 2r = \sqrt{(0-a)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{a^2 + c^2} \implies r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}$ となり、円の中心は $\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ である。
したがって、この外接円の方程式は $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2+c^2}{4}$ である。
また、点 $B(3, \sqrt{3})$ であり、その点 B を式 $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{c}{2})^2 = \frac{a^2+c^2}{4}$ に代入すると

$$\begin{aligned} (3 - \frac{a}{2})^2 + (\sqrt{3} - \frac{c}{2})^2 &= \frac{a^2+c^2}{4} \\ 9 - 3a + \frac{a^2}{4} + 3 - \sqrt{3}c + \frac{c^2}{4} &= \frac{a^2+c^2}{4} \\ -\sqrt{3}c + 12 - 3a + \frac{a^2+c^2}{4} &= \frac{a^2+c^2}{4} \\ -\sqrt{3}c &= 3a - 12 \\ c &= \frac{3a-12}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3}(4-a) \end{aligned}$$

と表される。

(3)　線分 問題文の条件により、OB と線分 AC の交点を D とし、∠OAC $=\alpha$、∠ADB $=\beta$ とおいて、$a=2\sqrt{3}$ のとき、図 1 のように、$\tan\alpha=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}=\dfrac{4-a}{2}=2-\sqrt{3}$ である。$\angle\mathrm{BDA}=\beta=\alpha+30^\circ$ なので、$\tan\beta=\tan(\alpha+30^\circ)$ を計算すればよい、

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \tan(\alpha+30^\circ)\\
&= \frac{\tan\alpha+\tan 30^\circ}{1-\tan\alpha\tan 30^\circ} = \frac{(2-\sqrt{3})+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}\\
&= \frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}\\
&= \frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-2} = 1
\end{aligned}
$$

よって、$\tan\beta=1$ である。