2025年8月

羚課文科数学月考

解答

問題 I

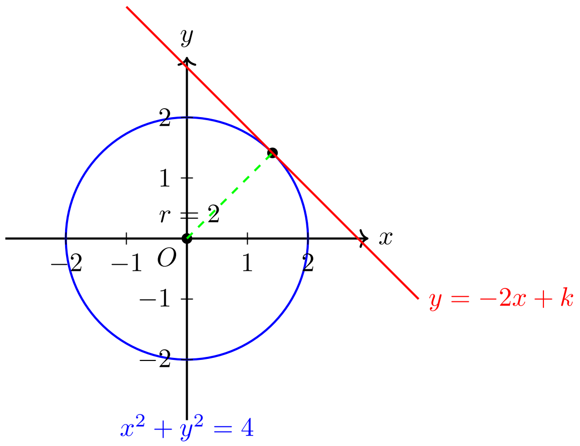
問 1　$x^2+y^2=4$ のとき、 $2x+y$ の最大値は $\boxed{\textbf{A}}\sqrt{\boxed{\textbf{B}}}$

2 次関数 $y=x^2+6x+5$ のグラフを原点 $(0,0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

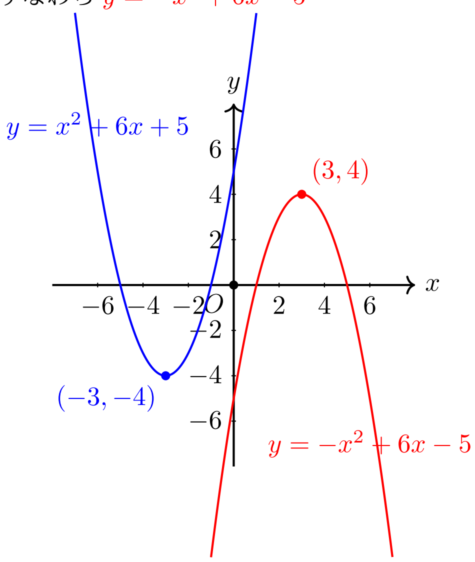
$$y=\boxed{\textbf{C}}\,x^2+\boxed{\textbf{D}}\,x+\boxed{\textbf{E}}$$

解 答

(1)　$x^2+y^2=4$ によって、 これは円の中心が $(0,0)$、半径 r が 2 の円である。 $2x+y$ の最大値を k とすると、$2x+y=k \Longrightarrow y=-2x+k \Longrightarrow 2x+y-k=0$ ここで、円の上に $2x+y$ の最大値を得られる点 (x_0,y_0) が存在する。よって、直線 $2x+y-k=0$ は円との関係は接する場合と交わる場合の 2 ケースだけである。したがって、点と直線の距離の公式によって、円の中心座標を $2x+y-k=0$ に代入すると $d=\dfrac{|2\times 0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leq 2=r \Longrightarrow |-k|\leq 2\sqrt{5}$ となる。$|-k|=|k|$ により、 $|k|\leq 2\sqrt{5} \Longrightarrow -2\sqrt{5}\leq k\leq 2\sqrt{5}$。以上より、 $2x+y$ の最大値は $2\sqrt{5}$ である。



(2)　原点に関して対称移動: x を $-x$ に、y を $-y$ に変える。したがって、$y=-f(-x) \Longrightarrow y=-x^2+6x-5$
すなわち $y=-x^2+6x-5$



問 2　$3a+1$ が a^2+6 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+6=\frac{b^2-\boxed{\mathsf{F}}\,b+\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。また、b は a^2+6 の約数であるから、a^2+6 はある自然数 c を用いて

$$a^2+6=bc \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される。①、② から

$$b\left(\boxed{\mathsf{J}}\,c-b+\boxed{\mathsf{K}}\right)=\boxed{\mathsf{LM}}$$

を得る。したがって、b は $\boxed{\mathsf{LM}}$ の約数である。この中で、a が自然数となるのは $b=\boxed{\mathsf{NO}}$

である。したがって、$a=\boxed{\mathsf{PQ}}$ である

解答

(1)　$3a+1=b$ とすると、$a=\dfrac{b-1}{3}$ となって、a を a^2+6 に代入すると、$a^2+6=\dfrac{(b-1)^2}{9}+6=\dfrac{b^2-2b+1+54}{9}=\dfrac{b^2-2b+55}{9}$ となる。

(2)　①と②の式から、$a^2+6=bc=\dfrac{b^2-2b+55}{9} \Longrightarrow 9bc-b^2+2b=55 \Longrightarrow b(9c-b+2)=55$。

(3)　b は 55 の約数である。したがって、b は $1, 5, 11, 55$ のいずれかである $(55=55\times 1=5\times 11\times 1)$。$a$ が自然数それと $b=3a+1$ の条件によって、$b\geq 4$ となる。したがって、$b=5$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{4}{3}$ であり、a の条件を満たさない。$b=11$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{10}{3}$ であり、a の条件を満たさない。$b=55$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{54}{3}=18$ であり、a の条件を満たす。したがって、$b=55, a=18$ が求める答えである。

問題 II

問 1　異なる 4 つの箱がある。これらの箱に赤、黒、緑、黄の色を塗る。ただし、どの箱にも 1 つの色のみを使い、また同じ色の箱が 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\textsf{ABC}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{DE}}$ 通りある。

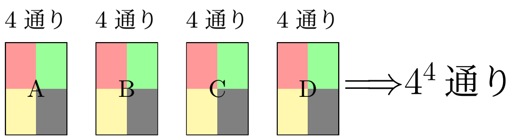
(3)　2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が緑となるような塗り方は $\boxed{\textsf{FJ}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{GHI}}$ 通りある。

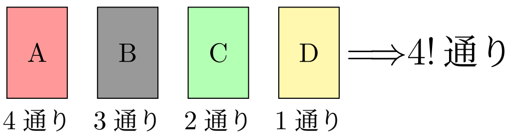
(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{JK}}$ 通りある。

解 答

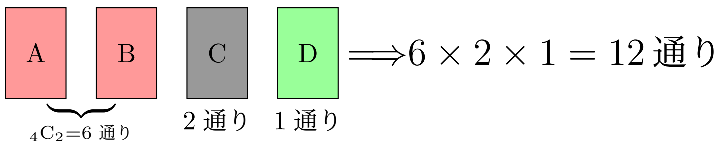
(1)　各カードに 4 色のうち 1 色を塗るので、4 枚のカードに対しては $4^4 = 256$ 通りの塗り方がある。したがって、全部で 256 通りの塗り方がある。



(2)　4 色全てが最低 1 回は使われる塗り分けである。カードを A,B,C,D とすると、最初 A は 4 択を選べられ、まず赤を塗るとする。次の B は赤抜きの 3 色しか選べられないので、3 通りがあって、黒を塗るとする。C は赤と黒抜きの 2 色しか選べられないので、2 通りがあって、ここで緑を塗るとする。最後の黄色を D に塗るしかないので、合計で $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りがある。



(3)　最初は 4 枚のカードから 2 枚を選んで赤を塗ると、${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通りがある。次に、残りの 2 枚カードから 1 枚を選んで黒を塗ると、${}_2C_1 = 2$ 通りがある。最後の 1 枚カードは緑を塗ると、1 通りがある。したがって、合計で $6 \times 2 \times 1 = 12$ 通りである。



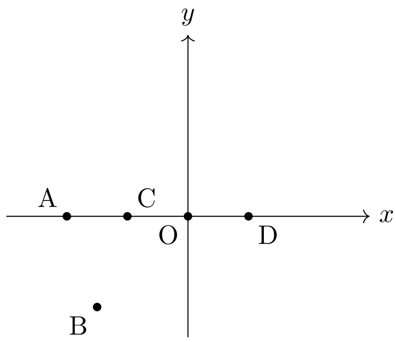
(4)　最初 4 色から 3 色を選んで、${}_4C_3 = 4$ 通りがある。次に、選んだ 3 色の中で 1 つの色が 2 回使われた選び方は ${}_3C_1 = 3$ 通りがある。次の塗り方は (3) と同じであって、合計で $4 \times 3 \times 12 = 144$ 通りである。

(5)　1 つの色の塗り方は ${}_4C_1 \times {}_4C_4 = 4$ 通り。よって、2 つの色を使う塗り方は $256 - (24 + 144 + 4) = 84$ 通り。

問 2　2 つの 2 次関数

$\ell:\quad y = ax^2 + 2bx + c$

$m:\quad y = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c + 6$



を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの 2 次関数のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。

(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\text{L}}$ である。ただし、$\boxed{\text{L}}$ には，次の⓪か①のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　2 次関数 ℓ

①　2 次関数 m

(2)　2 つの 2 次関数 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{M}}\,x + \boxed{\text{N}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x 座標は $\boxed{\text{OP}}$，点 C の x 座標は $\boxed{\text{QR}}$ である。

(3)　特に，AB $=$ BC, CO $=$ OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y 軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\text{S}}$ である。また，AB $=$ BC より，

直線 $x = \boxed{\text{TU}}$ が $\boxed{\text{L}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}}$ である。よって，

$c = \dfrac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$ である。

解 答

(1)　問題の条件から、ℓ と m の 2 次関数の傾きの正負は異なる。よって、$a \leq 0 \leq a+2$ が成り立つ (逆に成り立たない)。したがって、3 点 A, B, C を通る 2 次関数は①の m 関数である。

(2)　3 点 A, B, C を通る 2 次関数は m である。3 点 B, C, D を通る 2 次関数は ℓ である。したがって、m と ℓ の方程式は点 B, C を通るので、$y = ax^2 + bx + c = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c + 6 \Longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ 。この方程式の解は、点 B, C の x 座標であるので、$\Longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x+3) = 0$ 図の点の位置によって、点 B の x 座標は -3, 点 C の x 座標は -1 となる。

(3)　点 C, D は y 軸に関して対称であるから、ℓ の頂点 x 座標は $-\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} = 0$ である。したがって、$b = 0$ となる。$AB = BC$ より、直線 $x = -3$ が m の軸である。したがって、m の 2 次関数の頂点 x 座標により、$-\dfrac{2(b+4)}{2(a+2)} = -\dfrac{0+4}{a+2} = -3 \Longrightarrow a = -\dfrac{2}{3}$ である。よって、$c = \dfrac{1}{2}$ である。点 $C : (-1, 0)$ を ℓ の方程式に代入すると、$a \times (-1)^2 + 2 \times 0 \times x + c = 0 \Longrightarrow -\dfrac{2}{3} + c = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{2}{3}$ である。