蔡さんへのTouch連絡(25/07/24)

Linc - 伊

問題

複素数平面上の3点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする三角形 ABC において

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1-i$$

であるとする。以下，偏角 θ の範囲は $0\leq\theta<2\pi$ とする。

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表すと

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{\boxed{\textbf{N}}}\left(\cos\frac{\boxed{\textbf{O}}}{\boxed{\textbf{P}}}\pi+i\sin\frac{\boxed{\textbf{O}}}{\boxed{\textbf{P}}}\pi\right)$$

である。よって，点 C は，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\boxed{\textbf{Q}}}{\boxed{\textbf{R}}}\pi$ だけ回転し，さらに点 A からの距離を $\sqrt{\boxed{\textbf{S}}}$ 倍した点である。これより，複素数 $w=\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ の絶対値と偏角は

$$|w|=\boxed{\textbf{T}},\quad \arg w=\frac{\boxed{\textbf{U}}}{\boxed{\textbf{V}}}\pi$$

である。

(2) $\alpha+\beta+\gamma=0$ とすると

$$|\alpha|:|\beta|:|\gamma|=\sqrt{\boxed{\textbf{W}}}:\sqrt{\boxed{\textbf{X}}}:\sqrt{\boxed{\textbf{Y}}}$$

である。

解答

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=0$ より，$\gamma=-\alpha-\beta$ である。よって、

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1-i \implies \frac{-2\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=1-i \implies -2\alpha-\beta=(1-i)(\beta-\alpha)$$

$$\implies i\beta-2\beta=\alpha+i\alpha \implies \beta=\frac{(1+i)\alpha}{i-2}$$ となる。

よって、$|\alpha|:|\beta|=|\alpha|:\left|\frac{(1+i)}{i-2}\right|\cdot|\alpha|$ である。

$$\because |i+1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,,\ |i-2|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore |\alpha|:|\beta|=|\alpha|:\left|\frac{(1+i)}{i-2}\right|\cdot|\alpha|=\sqrt{5}:\sqrt{2}$$ となる。***i.e.*** $|\beta|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}|\alpha|$

よって、$\gamma=-\alpha-\beta=-\alpha-\frac{i+1}{i-2}\alpha=\frac{-2i+1}{i-2}\alpha$ である。

次に、$|\alpha|:|\gamma|=|\alpha|:\left|\frac{-2i+1}{i-2}\right|\cdot|\alpha|$ を求めればよい。

$$\because |-2i+1|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}\,,\ |i-2|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\therefore |\alpha|:|\gamma|=|\alpha|:\left|\frac{-2i+1}{i-2}\right|\cdot|\alpha|=1:1$$

したがって、$|\alpha|:|\beta|:|\gamma|=|\alpha|:\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}|\alpha|:|\alpha|=\sqrt{5}:\sqrt{2}:\sqrt{5}$ となる。