2025年8月

羚課理科数学月考

I

問 1 　2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ を考える。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標は $\left(\boxed{\mathsf{A}}, \boxed{\mathsf{B}}\right)$ である。

(2) 放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に k，y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = -\left(x - \boxed{\mathsf{C}} - k\right)^2 + \boxed{\mathsf{D}}$$

である。

(3) 次の文中の $\boxed{\mathsf{E}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪〜④ の中から，また，$\boxed{\mathsf{F}}$ には，この問いの下の選択肢 ⑤〜⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{\phantom{\mathsf{X}}}$ には，適する数を入れなさい。

関数 $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値が 3 となるような k の値を求めよう。関数 $g(x)$ の最大値は $\boxed{\mathsf{D}}$ であるから，k は条件 $\boxed{\mathsf{E}}$ または $\boxed{\mathsf{F}}$ を満たす。
したがって

$$k = \boxed{\mathsf{G}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{H}}}, \qquad k = \boxed{\mathsf{I}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{J}}}$$

である。

⓪ $k < -5$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$
① $k < -5$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
② $k < -3$ かつ $k^2 + 7k + 6 = 0$
③ $k < -3$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$
④ $k < -3$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
⑤ $k > 2$ かつ $k^2 - 6k + 4 = 0$
⑥ $k > 2$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$
⑦ $k > 2$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
⑧ $k > 4$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
⑨ $k > 4$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

- 計算欄 (memo) -

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$\begin{aligned} x = y = z &\quad \text{である事象を } A, \\ x + y + z = 7 &\quad \text{である事象を } B, \\ x + y = z &\quad \text{である事象を } C \end{aligned}$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \text{ が } \boxed{\mathsf{J}},\quad B \text{ が } \boxed{\mathsf{KL}},\quad C \text{ が } \boxed{\mathsf{MN}}$$

である。

(2)　事象 $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \cap B \text{ が } \boxed{\mathsf{O}},\quad B \cap C \text{ が } \boxed{\mathsf{P}},\quad C \cap A \text{ が } \boxed{\mathsf{Q}}$$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{TUV}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$

問 1　2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° であり，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ とする。また，実数 x に対して，$\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。$x > 1$ のとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が 45° となるような x の値を求めよう。以下，$\vec{u} \cdot \vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表し，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は 30° であるから

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{\boxed{\textbf{A}}}{\boxed{\textbf{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\textbf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\textbf{DE}}\,x^2 + \boxed{\textbf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\textbf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\textbf{I}}\,x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x > 1$ に注意して，これを解くと

$$x = \boxed{\textbf{J}} + \sqrt{\boxed{\textbf{KL}}}$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1)　上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{M}}}k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\mathsf{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\mathsf{P}}}x$$

で表される 3 直線である。

(2)　C 上に $|z - 1 - i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r = \frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}} - \boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\mathsf{T}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}}{\boxed{\mathsf{V}}}\left(1 + \sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}i\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III

3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx + \frac{2}{3}$$

の区間 $x \leq 4$ における最大値が 6 より大きくなるような実数 t の値の範囲を求めよう。

まず，$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = (x - \boxed{\mathsf{A}})(x - t)$$

であるから，t の値の範囲を次のように分けて考える。

(i) $t > \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極大，$x = t$ で極小となる。また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから $f\left(\boxed{\mathsf{A}}\right) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

(ii) $t = \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，区間 $x \leq 4$ における $f(x)$ の最大値は $f\left(\boxed{\mathsf{C}}\right) = \boxed{\mathsf{D}}$ となり，条件は満たされない。

(iii) $t < \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = t$ で極大，$x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極小となる。また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから，$f(t) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

ここで

$$f(t) - 6 = -\frac{1}{6}\left(t + \boxed{\mathsf{E}}\right)\left(t - \boxed{\mathsf{F}}\right)^2$$

であることに注意する。

以上より，求める t の値の範囲は

$$t > \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \quad \text{または} \quad t < \boxed{\mathsf{JK}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を考える。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathbf{A}}\cos x - \boxed{\mathbf{B}}}{\left(\boxed{\mathbf{C}} - \boxed{\mathbf{D}}\cos x\right)^2}$$

である。したがって，関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を α とおくと

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\mathbf{E}}}{\boxed{\mathbf{F}}}$$

である。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分は直線 $x = \alpha$ によって 2 つの部分に分けられる。

その左側の部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \int_{\frac{\boxed{\mathbf{G}}}{\boxed{\mathbf{H}}}}^{\boxed{\mathbf{I}}} \frac{dt}{\boxed{\mathbf{J}} - \boxed{\mathbf{K}}\,t} dx = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}} \log \frac{\boxed{\mathbf{N}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$$

である。

また，右側の部分の面積を S_2 とおくと

$$S_2 = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{2} \log \boxed{\mathbf{Q}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -