2025年8月

羚課理科数学月考

解答

問題 I

問 1　2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ を考える。

(1)　放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標は $\left(\boxed{\textsf{A}}, \boxed{\textsf{BC}}\right)$ である。

(2)　放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に k，y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = -\left(x - \boxed{\textsf{D}} - k\right)^2 + \boxed{\textsf{E}}$$

である。

(3)　次の文中の $\boxed{\textsf{F}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪〜④ の中から，また，$\boxed{\textsf{G}}$ には，この問いの下の選択肢 ⑤〜⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{\phantom{\textsf{A}}}$ には，適する数を入れなさい。

関数 $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値が 3 となるような k の値を求めよう。関数 $g(x)$ の最大値は $\boxed{\textsf{E}}$ であるから，k は条件 $\boxed{\textsf{F}}$ または $\boxed{\textsf{G}}$ を満たす。
したがって

$$k = -\boxed{\textsf{H}} - \sqrt{\boxed{\textsf{I}}}, \qquad k = \boxed{\textsf{J}} + \sqrt{\boxed{\textsf{K}}}$$

である。

⓪　$k < -5$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$	⑤　$k > 2$ かつ $k^2 - 6k + 4 = 0$
①　$k < -5$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$	⑥　$k > 2$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$
②　$k < -3$ かつ $k^2 + 7k + 6 = 0$	⑦　$k > 2$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
③　$k < -3$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$	⑧　$k > 4$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$
④　$k < -3$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$	⑨　$k > 4$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

解 答

(1)　$f(x) = -x^2 + 4x + 6$ に対して、頂点の x の座標は $-\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ である。その x の座標を代入して、頂点の y 座標は $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 6 = 10$ である。したがって、頂点の座標は $(2, 10)$ である。

(2)　ある $y = f(x)$ とすると、そのグラフは x 軸方向に a だけ平行移動し、y 軸方向に b だけ平行移動したものとなる。したがって、 $y - b = f(x - a)$ となる。問題の条件によって、x 軸方向に k、y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $g(x)$ とすると、$g(x) = -(x-2-k)^2 + 10$ である。

(3)　(2) の結果により、$g(x) = -(x-2-k)^2 + 5 \leq 5$ なので、$g(x)$ の最大値は 5 である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5 \Longrightarrow x = 2 + k$。しかし、 $-1 \leq x \leq 4$ におけると、 $g(x)_{max} = 3$ である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5$ となるような x の値は $-1 \leq x \leq 4$ に存在しないことがわかる。したがって、 x の範囲は以下の 2 つの場合から考えればよい。

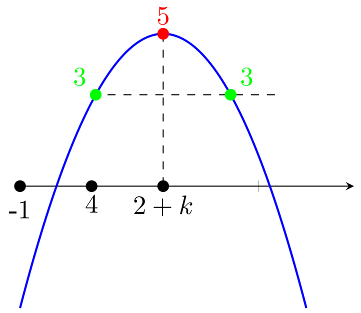


図 1　場合 1

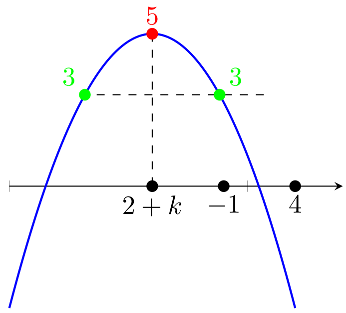


図 2　場合 2

場合 1 では、$x = 2+k > 4 \Longrightarrow k > 2$ である。 $g(x)_{max} = g(4) = 3$ より、$g(4) = -(2-k)^2+5 = 3 \Longrightarrow k^2-4k+2 = 0$。したがって、 7 が正しい。

$k > 2$ におけて、$k^2 - 4k + 2 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ である。$k > 2$ によって $k = 2 + \sqrt{2}$ である。

場合 2 では、 $x = 2 + k < -1 \Longrightarrow k < -3$ である。 $g(x)_{max} = g(-1) = 3$ より、$g(-1) = -(3+k)^2 + 5 = 3 \Longrightarrow k^2 + 6k + 7 = 0$。したがって、 3 が正しい。

$k < -3$ におけて、$k^2 + 6k + 7 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$ である。$k < -3$ によって $k = -3 - \sqrt{2}$ である。

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$\begin{aligned} x = y = z & \quad \text{である事象を } A, \\ x + y + z = 7 & \quad \text{である事象を } B, \\ x + y = z & \quad \text{である事象を } C \end{aligned}$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \text{ が } \boxed{\mathsf{L}}, \quad B \text{ が } \boxed{\mathsf{MN}}, \quad C \text{ が } \boxed{\mathsf{OP}}$$

である。

(2)　事象 $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \cap B \text{ が } \boxed{\mathsf{Q}}, \quad B \cap C \text{ が } \boxed{\mathsf{R}}, \quad C \cap A \text{ が } \boxed{\mathsf{S}}$$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$$

である。

解 答

(1)　さいころの目は $1,2,3,4,5,6$ の 6 通りである。したがって、$x=y=z$ の場合は 6 通りである。したがって、A の事象は 6 通りである。

B の事象: $x+y+z=7$ に関しては、$x+y+z=7$ を満たす組み合わせを考えると、$(1,1,5)$ は $\dfrac{3!}{2!1!}=3$ 通り ,$(1,2,4)$ は $\dfrac{3!}{1!1!1!}=6$ 通り, $(3,3,1)$ は $\dfrac{3!}{2!1!}=3$ 通り, $(2,2,3)$ は $\dfrac{3!}{2!1!}=3$ 通りなどがある。これらの組み合わせを全て列挙すると、B の事象は 15 通りである。

C の事象: $x+y=z$ に関しては、z の範囲を絞っておくと、$2 \leq z \leq 6$ である。よって、z の値ごとに場合分けをすると、
$z=2$ の場合: $x+y=2$ となる組み合わせは $(1,1,2)$ のみである。したがって、1 通りである。
$z=3$ の場合: $x+y=3$ となる組み合わせは $(1,2,3)$ と $(2,1,3)$ である。したがって、2 通りである。
$z=4$ の場合: $x+y=4$ となる組み合わせは $(2,2,4),(1,3,4),(3,1,4)$ である。したがって、3 通りである。
$z=5$ の場合: $x+y=5$ となる組み合わせは $(2,3,5),(3,2,5),(1,4,5),(4,1,5)$ である。したがって、4 通りである。
$z=6$ の場合: $x+y=6$ となる組み合わせは $(3,3,6),(2,4,6),(4,2,6),(1,5,6),(5,1,6)$ である。したがって、5 通りである。以上より、C の事象は 15 通りである。

(2)　$A \cap B$ の事象は 0 通りである。$B \cap C$ の事象は 0 通りである。$C \cap A$ の事象は 0 通りである。

(3)　全ての事象の場合の数は $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ 通りである。したがって、$P(B)=\dfrac{15}{216}$, $P(C)=\dfrac{15}{216}$, $P(B \cap C)=0$ である。$P(B \cup C)=P(B)+P(C)-P(B \cap C)$ によって、$P(B \cup C)=\dfrac{15}{216}+\dfrac{15}{216}-0=\dfrac{30}{216}=\dfrac{5}{36}$

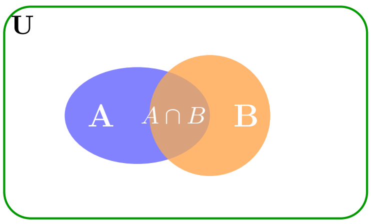
◆◆◆補足◆◆◆

事象 A, B が生じる確率をそれぞれ P(A), P(B) とおくと、和集合の確率について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立つ。

証 明



事象 A, B の関係は上の図のようになります（U は全事象)。

確率を面積として捉えると、$A \cup B$ に相当する面積を求めるためには、A, B の面積を足した後、$A \cap B$ の面積を引けばよいことがわかる。

問題 II

問 1　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $60°$　であり，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ とする。また，実数 x に対して，$\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。$x > 1$ のとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が $45°$　となるような x の値を求めよう。以下，$\vec{u} \cdot \vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表し，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は $45°$　であるから

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{\boxed{\textbf{A}}}{\boxed{\textbf{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\textbf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\textbf{DE}}\, x^2 + \boxed{\textbf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\textbf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\textbf{I}}\sqrt{\boxed{\textbf{J}}}\, x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x > 1$ に注意して，これを解くと

$$x = \sqrt{\boxed{\textbf{K}}} + \sqrt{\boxed{\textbf{L}}}$$

となる。

解 答

(1)　最初は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(45^\circ\ )=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|$ となる。したがって、$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|)^2=\dfrac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ となる。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ に関しては、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(60^\circ\ )=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$ となる。

(3)　$\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}-\vec{b})=x^2(\vec{a}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{b})=x^2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=x^2-4$ となる。

(4)　$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の大きさを求めると、$|\vec{u}|^2=|x\vec{a}+\vec{b}|^2=|x\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(x\vec{a}\cdot\vec{b})=x^2+4+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})$ となる。したがって、$|\vec{u}|^2=x^2+2x+4$ となる。$\vec{v}$ の大きさは同様に求めることができ、$|\vec{v}|^2=x^2-2x+4$ となる。したがって、

$$\begin{cases}|\vec{u}|^2=x^2+2x+4\\|\vec{v}|^2=x^2-2x+4\\\vec{u}\cdot\vec{v}=x^2-4\end{cases}$$ を $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\dfrac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ に代入すると、$x^4-20x^2+16=0$ を得る。

(5)　$x^4-20x^2+16=0$ を変形すると、$\left(x^2-4\right)^2-12x^2=0\Longrightarrow\left(x^2-4\right)^2=\left(2\sqrt{3}x\right)^2$ となる。したがって、$x^2-4=\pm2\sqrt{3}x$ となる。

(6)　$x^2-4=2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ となる。$x^2-4=-2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2+2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x=\dfrac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x=-\sqrt{3}+\sqrt{7}<1$ となるので、これは解ではない。

問 2　複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1)　上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\mathbf{M}}} k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\mathbf{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\mathbf{O}}}\,x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\mathbf{P}}}\,x$$

で表される 3 直線である。

(2)　C 上に $|z - 2 - 2i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r = \sqrt{\boxed{\mathbf{Q}}} - \boxed{\mathbf{R}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\mathbf{S}} + \sqrt{\boxed{\mathbf{T}}}}{\boxed{\mathbf{U}}} \left(1 + \sqrt{\boxed{\mathbf{V}}}\,i\right)$$

である。

解 答

(1)　問題文により、$z = x + iy$ とすると、 極座標に変形し、$z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$ となる。、その後、極座標の z を用いて z^3 を計算すると、$z^3 = (rcos(\theta) + irsin(\theta))^3 = r^3(cos(\theta) + isin(\theta))^3$ となる。ド・モアブル定理 により、$(cos(\theta)+isin(\theta))^3 = cos(3\theta)+isin(3\theta)$ となるので、上の z^3 の式に代入すると、$z^3 = r^3(cos(3\theta)+isin(3\theta))$ となる。問題の条件: z^3 が実数なので、$r^3 sin(3\theta) = 0$ となる。したがって、 $sin(3\theta) = 0 \Longrightarrow 3\theta = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{3}$ となる。以上より、$z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$ の偏角 $arg\ z = \dfrac{\pi}{3}k$ である。

◆◆◆補足◆◆◆

ド・モアブル定理:$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$

証 明

$n \neq \phi$ とおくと、

$$\begin{aligned}(cos(\theta) + isin(\theta))\,(cos(\phi) + isin(\phi)) &= cos(\theta)cos(\phi) + isin(\theta)cos(\phi) + icos(\theta)sin(\phi) - sin(\theta)sin(\phi)\\ &= cos(\theta)cos(\phi) - sin(\theta)sin(\phi) + i\,(cos(\theta)sin(\phi) + sin(\theta)cos(\phi))\\ &= cos(\theta + \phi) + isin(\theta + \phi)\end{aligned}$$

$\phi = \theta$ のとき、$(cos(\theta) + isin(\theta))\,(cos(\theta) + isin(\theta)) = (cos(\theta) + isin(\theta))^2 = cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta) = cos(2\theta) + isin(2\theta)$ となる。したがって、n のときには、$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(\theta + \cdots + \theta) + isin(\theta + \cdots + \theta) = cos(n\theta) + isin(n\theta)$ が成り立つ。