2025年8月

羚課文科数学月考

解答

問題 I

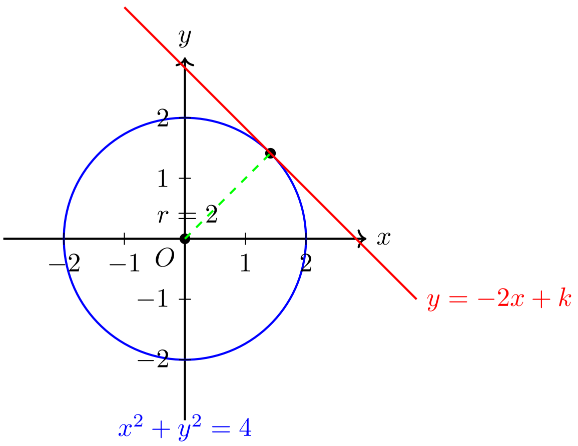
問 1　$x^2+y^2=4$ のとき、 $2x+y$ の最大値は $\boxed{\textbf{A}}\sqrt{\boxed{\textbf{B}}}$

2 次関数 $y=x^2+6x+5$ のグラフを原点 $(0,0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

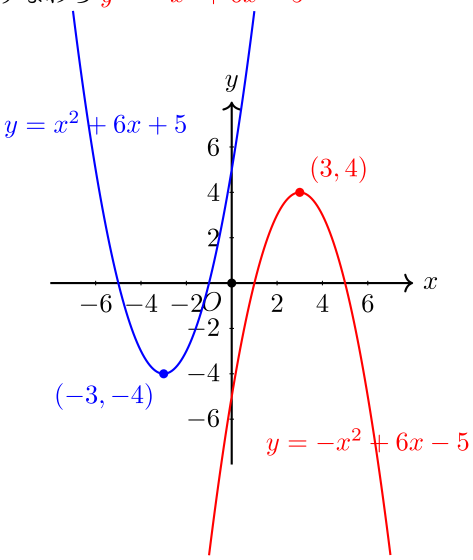
$$y=\boxed{\textbf{C}}\,x^2+\boxed{\textbf{D}}\,x-\boxed{\textbf{E}}$$

解答

(1)　$x^2+y^2=4$ によって、 これは円の中心が $(0,0)$、半径 r が 2 の円である。 $2x+y$ の最大値を k とすると、$2x+y=k \Longrightarrow y=-2x+k \Longrightarrow 2x+y-k=0$ ここで、円の上に $2x+y$ の最大値を得られる点 (x_0,y_0) が存在する。よって、直線 $2x+y-k=0$ は円との関係は接する場合と交わる場合の 2 ケースだけである。したがって、点と直線の距離の公式によって、円の中心座標を $2x+y-k=0$ に代入すると $d=\dfrac{|2\times 0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leq 2=r \Longrightarrow |-k|\leq 2\sqrt{5}$ となる。$|-k|=|k|$ により、 $|k|\leq 2\sqrt{5} \Longrightarrow -2\sqrt{5}\leq k\leq 2\sqrt{5}$。以上より、 $2x+y$ の最大値は $2\sqrt{5}$ である。



(2)　原点に関して対称移動: x を $-x$ に、y を $-y$ に変える。したがって、$y=-f(-x) \Longrightarrow y=-x^2+6x-5$ すなわち $y=-x^2+6x-5$



問 2　$3a+1$ が a^2+6 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+6=\frac{b^2-\boxed{\text{F}}\,b+\boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。また、b は a^2+6 の約数であるから、a^2+6 はある自然数 c を用いて

$$a^2+6=bc \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される。①、② から

$$b\left(\boxed{\text{J}}\,c-b+\boxed{\text{K}}\right)=\boxed{\text{LM}}$$

を得る。したがって、b は $\boxed{\text{LM}}$ の約数である。この中で、a が自然数となるのは $b=\boxed{\text{NO}}$

である。したがって、$a=\boxed{\text{PQ}}$ である

解 答

(1)　$3a+1=b$ とすると、$a=\dfrac{b-1}{3}$ となって、a を a^2+6 に代入すると、$a^2+6=\dfrac{(b-1)^2}{9}+6=\dfrac{b^2-2b+1+54}{9}=\dfrac{b^2-2b+55}{9}$ となる。

(2)　①と②の式から、$a^2+6=bc=\dfrac{b^2-2b+55}{9}\Longrightarrow 9bc-b^2+2b=55\Longrightarrow b(9c-b+2)=55$。

(3)　b は 55 の約数である。したがって、b は $1,5,11,55$ のいずれかである $(55=55\times 1=5\times 11\times 1)$。$a$ が自然数それと $b=3a+1$ の条件によって、$b\geq 4$ となる。したがって、$b=5$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{4}{3}$ であり、a の条件を満たさない。$b=11$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{10}{3}$ であり、a の条件を満たさない。$b=55$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{54}{3}=18$ であり、a の条件を満たす。したがって、$b=55, a=18$ が求める答えである。

問題 II

問 1　　異なる 4 つの箱がある。これらの箱に赤、黒、緑、黄の色を塗る。ただし、どの箱にも 1 つの色のみを使い、また同じ色の箱が 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\textbf{ABC}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\textbf{DE}}$ 通りある。

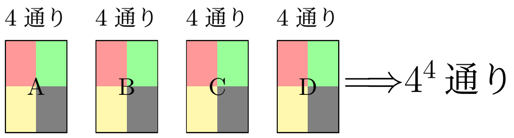
(3)　2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が緑となるような塗り方は $\boxed{\textbf{FJ}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textbf{GHI}}$ 通りある。

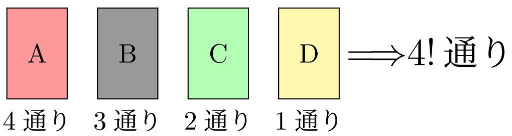
(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textbf{JK}}$ 通りある。

解 答

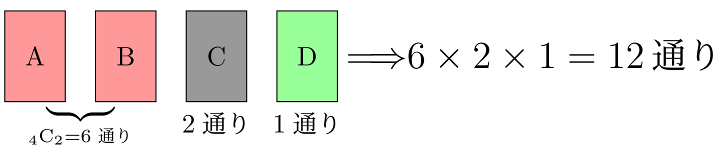
(1)　各箱に 4 色のうち 1 色を塗るので、4 枚の箱に対しては $4^4 = 256$ 通りの塗り方がある。したがって、全部で 256 通りの塗り方がある。



(2)　4 色全てが最低 1 回は使われる塗り分けである。箱を A,B,C,D とすると、最初 A は 4 択を選べられ、まず赤を塗るとする。次の B は赤抜きの 3 色しか選べられないので、3 通りがあって、黒を塗るとする。C は赤と黒抜きの 2 色しか選べられないので、2 通りがあって、ここで緑を塗るとする。最後の黄色を D に塗るしかないので、合計で $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りがある。



(3)　最初は 4 枚の箱から 2 枚を選んで赤を塗ると、${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通りがある。次に、残りの 2 枚箱から 1 枚を選んで黒を塗ると、${}_2C_1 = 2$ 通りがある。最後の 1 枚箱は緑を塗ると、1 通りがある。したがって、合計で $6 \times 2 \times 1 = 12$ 通りである。

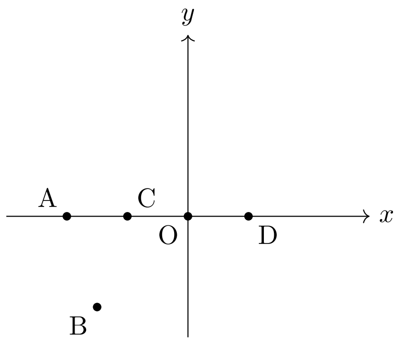


(4)　最初 4 色から 3 色を選んで、${}_4C_3 = 4$ 通りがある。次に、選んだ 3 色の中で 1 つの色が 2 回使われた選び方は ${}_3C_1 = 3$ 通りがある。次の塗り方は (3) と同じであって、合計で $4 \times 3 \times 12 = 144$ 通りである。

(5)　1 つの色の塗り方は ${}_4C_1 \times {}_4C_4 = 4$ 通り。よって、2 つの色を使う塗り方は $256 - (24 + 144 + 4) = 84$ 通り。

問 2　2 つの 2 次関数

$\ell:\quad y = ax^2 + 2bx + c$
$m:\quad y = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c + 6$



を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの 2 次関数のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。

(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\text{L}}$ である。ただし、$\boxed{\text{L}}$ には，次の⓪か①のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　2 次関数 ℓ
①　2 次関数 m

(2)　2 つの 2 次関数 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{M}}\,x + \boxed{\text{N}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x 座標は $\boxed{\text{OP}}$，点 C の x 座標は $\boxed{\text{QR}}$ である。

(3)　特に，AB = BC, CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y 軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\text{S}}$ である。また，AB = BC より，

直線 $x = \boxed{\text{TU}}$ が $\boxed{\text{L}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}}$ である。よって，

$c = \dfrac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$ である。

解 答

(1)　問題の条件から、 ℓ と m の 2 次関数の傾きの正負は異なる。よって、 $a < 0 < a + 2$ が成り立つ (逆に成り立たない)。したがって、3 点 A, B, C を通る 2 次関数は①の m 関数である。

(2)　3 点 A, B, C を通る 2 次関数は m である。3 点 B, C, D を通る 2 次関数は ℓ である。したがって、m と ℓ の方程式は点 B, C を通るので、$y = ax^2 + bx + c = (a+2)x^2 + 2(b+4)x + c + 6 \Longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ 。この方程式の解は、点 B, C の x 座標であるので、$\Longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x+1)(x+3) = 0$ 図の点の位置によって、点 B の x 座標は -3, 点 C の x 座標は -1 となる。

(3)　点 C, D は y 軸に関して対称であるから、ℓ の頂点 x 座標は $-\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} = 0$ である。したがって、$b = 0$ となる。$AB = BC$ より、直線 $x = -3$ が m の軸である。したがって、m の 2 次関数の頂点 x 座標により、$-\dfrac{2(b+4)}{2(a+2)} = -\dfrac{0+4}{a+2} = -3 \Longrightarrow a = -\dfrac{2}{3}$ である。よって、$c = \dfrac{1}{2}$ である。点 $C : (-1, 0)$ を ℓ の方程式に代入すると、$a \times (-1)^2 + 2 \times 0 \times x + c = 0 \Longrightarrow -\dfrac{2}{3} + c = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{2}{3}$ である。

問題 III

n は 2 桁(けた)の自然数であり、n^3 を 78 で割ったときの余りは n であるという。このような n の個数と、このような n のうち素数であるものを求めよう。

条件より、n^3 を 78 で割ったときの商を p とすると

$$n^3 = \boxed{\mathsf{AB}}\, p + n \qquad \left(0 < n \leq \boxed{\mathsf{CD}}\right)$$

と表せる。これを変形して

$$n(n-1)(n+1) = \boxed{\mathsf{AB}}\, p$$

を得る。

ここで、$n-1, n$ のどちらか一方は $\boxed{\mathsf{E}}$ の倍数、$n-1, n, n+1$ のうち 1 つは $\boxed{\mathsf{F}}$ の倍数であり、

$\boxed{\mathsf{E}}$ と $\boxed{\mathsf{F}}$ は互いに素であるから、$n(n-1)(n+1)$ は $\boxed{\mathsf{G}}$ の倍数である。

ただし、$1 < \boxed{\mathsf{E}} < \boxed{\mathsf{F}} < \boxed{\mathsf{G}}$ とする。よって、$n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数となる場合を考えればよい。

いま、$n \leq \boxed{\mathsf{CD}}$ であるから、$n-1$ が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{J}}$、n が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{K}}$、$n+1$ が $\boxed{\mathsf{HI}}$ の倍数である n の個数は $\boxed{\mathsf{L}}$である。

よって、求める n の個数は $\boxed{\mathsf{MN}}$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $\boxed{\mathsf{OP}}$、$\boxed{\mathsf{QR}}$、$\boxed{\mathsf{ST}}$ である。

解 答

(1) n^3 を 78 で割ったときの商を p とし、その余りは n である。したがって、多項式の割り算 (整式の除法) の定義により、$n^3 = 78p + n$ $(0 < n \leq 77)$ となる。

(2) $n^3 - n = 78p \Longrightarrow n(n^2-1) = 78p \Longrightarrow n(n-1)(n+1) = 78p$ を得る。ここで、$0 < n \leq 77$、$n-1 \leq 76$、$n+1 \leq 78$ であるので、$n-1, n$ のどちらか一方は 2 の倍数であり、$n-1, n, n+1$ のいずれかは 3 の倍数であり、2 と 3 は互いに素である。したがって、$n(n-1)(n+1)$ は $2 \times 3 = 6$ の倍数である。

(3) ただし、$1 < 2 < 3 < 6$ とする。よって、$n-1, n, n+1$ のいずれか 1 つが 13 の倍数である場合を考えればよい。なぜかと言うと、$78 = 1 \times 2 \times 3 \times 13$ だからである。今、$n \leq 77$ であるから、$n-1$ が 13 の倍数であるケースは $n-1 = 13, 26, 39, 52, 65$ である。$\Longrightarrow n = 14, 27, 40, 53, 66$ であり、合わせて n の個数は 5 である。n が 13 の倍数であるケースは $n = 13, 26, 39, 52, 65$ であり、合わせて n の個数は 5 である。$n+1$ が 13 の倍数であるケースは $n+1 = 13, 26, 39, 52, 65, 78$ である。$\Longrightarrow n = 12, 25, 38, 51, 64, 77$ であり、合わせて n の個数は 6 である。

(4) よって、求める n の個数は $5 + 5 + 6 = 16$ であり、このうち、素数である n は小さい順に $13, 51, 53$ である。

問題 IV

2 つの実数 x, y が方程式

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 50 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしている。このとき、$x + y$ および xy がとる値の範囲を求めよう。(結果は既約分数で表せよ。)

まず

$$x + y = a \qquad \cdots\cdots ②$$

とおく。①、② より y を消去して、x の 2 次方程式

$$\boxed{\text{A}}\, x^2 - \boxed{\text{B}}\, ax + \boxed{\text{C}}\, a^2 - 50 = 0$$

を得る。x は実数であるから

$$\boxed{\text{DE}} \leq a \leq \boxed{\text{F}} \qquad \cdots\cdots ③$$

である。

さらに

$$xy = b \qquad \cdots\cdots ④$$

とおくと、①、②、④ より

$$b = \frac{\boxed{\text{G}}\, a^2 - \boxed{\text{IJ}}}{\boxed{\text{H}}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を得る。よって、③、⑤ より

$$\frac{\boxed{\text{KLM}}}{\boxed{\text{N}}} \leq b \leq \frac{\boxed{\text{OP}}}{\boxed{\text{Q}}}$$

となる

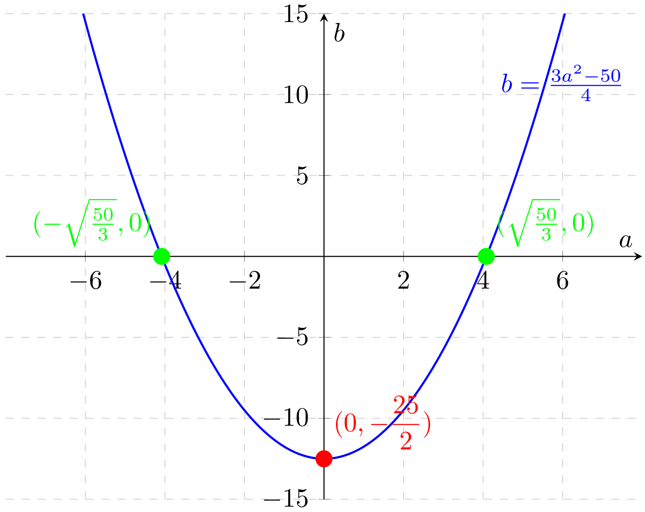
解答

(1)　①と②により、$\begin{cases} 3x^2+2xy+3y^2=50 \\ x+y=a \end{cases}$ によって、$y=a-x$ とおいて、①の式に代入すると、$3x^2+2x(a-x)+3(a-x)^2=50 \Longrightarrow 3x^2+2ax-2x^2+3a^2-6ax+3x^2=50 \Longrightarrow 4x^2-4ax+3a^2-50=0$ となる。

(2)　したがって、x は実数であるから、関数 Ax^2+Bx+C の判別式（$\Delta=B^2-4AC$）は非負である。したがって、$(-4a)^2-4\times4\times(3a^2-50)\geq 0 \Longrightarrow 16a^2-16(3a^2-50)\geq 0 \Longrightarrow -32a^2+800\geq 0 \Longrightarrow a^2\leq 25 \Longrightarrow -5\leq a\leq 5$ となる。

(3)　さらに、$xy=b$ とおくと、①、②、④より、$\begin{cases} 3x^2+2xy+3y^2=50 \\ x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ となる。$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ により、$x^2+y^2=a^2-2b$ となる。したがって、①の式に代入すると、$3(x^2+y^2)+2xy=50 \Longrightarrow 3(a^2-2b)+2b=50 \Longrightarrow 3a^2-6b+2b=50 \Longrightarrow 3a^2-4b=50 \Longrightarrow b=\dfrac{3a^2-50}{4}$ となる。

(4)　よって、③、⑤より、$\begin{cases} -5\leq a\leq 5 \\ b=\dfrac{3a^2-50}{4} \end{cases}$ となる。$b=\dfrac{3a^2-50}{4}$ の図は以下のようです。



したがって、$-5\leq a\leq 5$ より、

$b=\dfrac{3a^2-50}{4}$ の最小値は $a=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{0}{2\times\frac{3}{4}}=0$ の時、$b=-\dfrac{50}{4}=-\dfrac{25}{2}$。

$b=\dfrac{3a^2-50}{4}$ の最大値は端点 $a=\pm5$ の時、$b=\dfrac{3\times(\pm5)^2-50}{4}=\dfrac{75-50}{4}=\dfrac{25}{4}$。

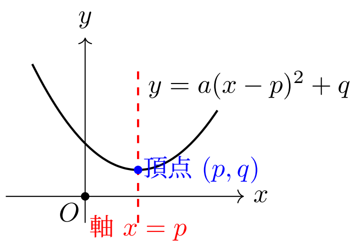
従って、b の範囲は $-\dfrac{25}{2}\leq b\leq \dfrac{25}{4}$ となる。

付録

◆◆補足◆◆

1.1 2次関数の軸と頂点の求め方

二次関数 $y=ax^2+bx+c$ を平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ という形にすれば，軸と頂点がわかります。具体的には，軸は $x=p$ で頂点は (p,q) になります。



例題 1: 二次関数の軸の方程式と頂点の座標

2次関数 $y=2x^2+3x-1$ の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

解答

$y=2x^2+3x-1$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} y &= 2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x\right)-1 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}-1 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8} \end{aligned}$$

よって，

- 軸の方程式は $x=-\frac{3}{4}$
- 頂点の座標は $\left(-\frac{3}{4},-\frac{17}{8}\right)$

1.2 2次関数の軸と頂点を求める公式

二次関数 $y=ax^2+bx+c$ において，

軸の方程式は $x=-\frac{b}{2a}$

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

証明

　これは証明できます。まず、二次関数の一般形 $y = ax^2 + bx + c$ を考えます。平方完成を用いると、次のように変形できます。

$$
\begin{aligned}
y &= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

よって、軸の方程式は $x = -\dfrac{b}{2a}$、頂点の座標が $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ であることがわかります。