2025年9月

羚課理科数学月考

Ⅰ

問 1　a, b を定数とし、2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ と 1 次関数 $h(x) = -2x$ を考える。関数 $y = h(x)$ のグラフと直線 $x = 3$ との交点を A、関数 $y = h(x)$ のグラフと直線 $x = -2$ との交点を B とする。関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点 P が線分 AB 上にあるとき

$$L = \{f(3) - h(3)\} + \{f(-2) - h(-2)\}$$

の値の範囲を求めよう。

点 P の座標は

$$\left(-\frac{a}{\boxed{\mathrm{A}}}, -\frac{a^2}{\boxed{\mathrm{B}}} + b\right)$$

である。点 P が線分 AB 上にあるから、a の値の範囲は

$$-\boxed{\mathrm{C}} \leq a \leq \boxed{\mathrm{D}}$$

である。また、a, b は

$$b = \frac{a^2}{\boxed{\mathrm{E}}} + a$$

を満たす。よって、L は a を用いて

$$L = \frac{1}{2}a^2 + \boxed{\mathrm{F}}\,a + \boxed{\mathrm{GH}}$$

と表される。

したがって、L の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathrm{IJ}}}{\boxed{\mathrm{K}}} \leq L \leq \boxed{\mathrm{LM}}$$

- 計算欄 (memo) -

問 2　1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードが、左から小さい順に並んでいる。この中から 2 枚のカードを選び、その位置を入れ換える操作を 2 回続けて行う。2 回の操作後の 9 枚のカードの並びを 9 桁の整数とみなすとき、この整数が偶数になる確率を求めよう。

(1)　まず、1 回目、2 回目ともカードの入れ換えが 9 枚のカードの中から 2 枚を選べるときの確率を考える。

(i)　1 回目に 9 の書かれたカード以外のカードを入れ換える場合、2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{OP}}}$ である。

(ii)　1 回目に 9 の書かれたカードを他のカードと入れ換える場合、2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{QR}}}{\boxed{\mathsf{STU}}}$ である。

したがって、このとき 2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{WX}}}$ である。

(2)　次に、2 回目のカードの入れ換えでは、1 回目に入れ換えた 2 枚を除いた残り 7 枚から 2 枚を選んで入れ換えるときの確率を考える。このとき 2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{Y}}}{\boxed{\mathsf{Z}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

問 1　x, y が $x \geq 1, y \geq 1$ であり

$$\log_2 x + \log_2 y = (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たしている。このとき、$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ とおくと

$$X \geq \boxed{\text{A}}, \quad Y \geq \boxed{\text{B}}$$

であり、等式 ①は

$$\left(X - \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\right)^2 + \left(Y - \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right)^2 = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}$$

と変形される。したがって、xy のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{I}} \leq xy \leq \boxed{\text{J}} \quad \text{および} \quad xy = \boxed{\text{K}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　円 C と直線 $\ell,\ m$ を

$$C : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 - r^2 = 0 \tag{1}$$
$$\ell : y = 2x - 1 \tag{2}$$
$$m : y = \frac{3}{4}x - 1 \tag{3}$$

とし、直線 ℓ に関して円 C と対称な円を C' とする。

(1)　円 C の中心は $\left(\boxed{\text{N}}, \boxed{\text{O}}\right)$、半径は r である。

(2)　円 C' の中心 (a, b) を求めよう。円 C と円 C' は直線 ℓ に関して対称であるから

$$a = \frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$$

である。

(3)　円 C' が直線 m に接するように r を求めよう。

$$r = \frac{\left|\boxed{\text{T}}a - \boxed{\text{U}}b - \boxed{\text{V}}\right|}{\boxed{\text{W}}}$$

であるから

$$r = \boxed{\text{X}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$

$p > 1,\ q > 1$ とする。方程式

$$e^{2x} - ae^x + b = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

において、$t = e^x$ とおくとき、t に関する 2 次方程式

$$t^2 - at + b = 0$$

は解 $\log_a p$ と $\log_b q$ をもつとする。

このとき、a の最小値とそのときの方程式 ①の解を求めよう。

(1)　まず

$$b = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

であり

$$a = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\log_a p + \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\log_b q$$

である。

(2)　$p,\ q$ が $p > 1,\ q > 1$ を満たしながら動くとき、$\log_b q > \boxed{\text{G}}$ である。

したがって、a は最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}}$ を $\log_b q = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{J}}}}{\boxed{\text{K}}}$ のときにとる。

そのときの方程式 ①の解は

$$x = -\frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\log_e \boxed{\text{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV

$$a_n = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくとき、極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよう。

(1)　まず、a_0, a_1 を求めてみよう。半径 1 の円の面積は π であるから

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{A}}}$$

である。a_1 は部分積分法により

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}\left[x(1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}}\right]_0^1 + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}}\,dx \\ &= \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}\left\{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{L}}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \end{aligned}$$

となる。よって、$a_1 = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{MN}}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{U}}$ には、下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a_1 を求めたのと同様にして、a_n は部分積分法により

$$a_n = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\left\{\int_0^1 x^{\boxed{\text{Q}}}\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{R}}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。よって

$$\left(\boxed{\text{S}}\right)a_n = \left(\boxed{\text{T}}\right)a_{n-1}$$

となる。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\text{U}}$$

を得る。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $2n-2$　⑥ $2n-1$　⑦ $2n$　⑧ $2n+1$　⑨ $2n+2$