2025年8月

羚課理科数学月考

解答

問題 I

問 1　2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ を考える。

(1)　放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標は $\left(\boxed{\mathsf{A}}, \boxed{\mathsf{BC}}\right)$ である。

(2)　放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に k，y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = -\left(x - \boxed{\mathsf{D}} - k\right)^2 + \boxed{\mathsf{E}}$$

である。

(3)　次の文中の $\boxed{\mathsf{F}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪〜④ の中から，また，$\boxed{\mathsf{G}}$ には，この問いの下の選択肢 ⑤〜⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

関数 $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値が 3 となるような k の値を求めよう。関数 $g(x)$ の最大値は $\boxed{\mathsf{E}}$ であるから，k は条件 $\boxed{\mathsf{F}}$ または $\boxed{\mathsf{G}}$ を満たす。
したがって

$$k = -\boxed{\mathsf{H}} - \sqrt{\boxed{\mathsf{I}}}, \qquad k = \boxed{\mathsf{J}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{K}}}$$

である。

⓪　$k < -5$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$　　⑤　$k > 2$ かつ $k^2 - 6k + 4 = 0$

①　$k < -5$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$　　⑥　$k > 2$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

②　$k < -3$ かつ $k^2 + 7k + 6 = 0$　　⑦　$k > 2$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$

③　$k < -3$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$　　⑧　$k > 4$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$

④　$k < -3$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$　　⑨　$k > 4$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

解 答

(1)　$f(x) = -x^2 + 4x + 6$ に対して、頂点の x の座標は $-\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ である。その x の座標を代入して、頂点の y 座標は $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 6 = 10$ である。したがって、頂点の座標は $(2, 10)$ である。

(2)　ある $y = f(x)$ とすると、そのグラフは x 軸方向に a だけ平行移動し、y 軸方向に b だけ平行移動したものとなる。したがって、 $y - b = f(x - a)$ となる。問題の条件によって、x 軸方向に k、y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $g(x)$ とすると、$g(x) = -(x - 2 - k)^2 + 10$ である。

(3)　(2) の結果により、$g(x) = -(x - 2 - k)^2 + 5 \leq 5$ なので、$g(x)$ の最大値は 5 である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5 \Longrightarrow x = 2 + k$。しかし、 $-1 \leq x \leq 4$ におけると、 $g(x)_{max} = 3$ である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5$ となるような x の値は $-1 \leq x \leq 4$ に存在しないことがわかる。したがって、 x の範囲は以下の 2 つの場合から考えればよい。

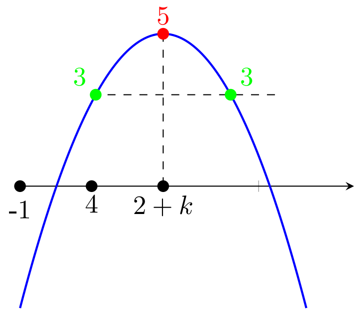


図 1　場合 1

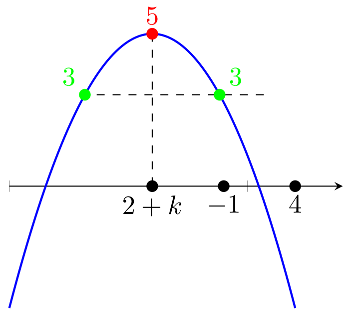


図 2　場合 2

場合 1 では、$x = 2+k > 4 \Longrightarrow k > 2$ である。 $g(x)_{max} = g(4) = 3$ より、$g(4) = -(2-k)^2+5 = 3 \Longrightarrow k^2-4k+2 = 0$。したがって、 7 が正しい。

　$k > 2$ におけて、$k^2 - 4k + 2 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ である。$k > 2$ によって $k = 2 + \sqrt{2}$ である。

場合 2 では、 $x = 2 + k < -1 \Longrightarrow k < -3$ である。 $g(x)_{max} = g(-1) = 3$ より、$g(-1) = -(3 + k)^2 + 5 = 3 \Longrightarrow k^2 + 6k + 7 = 0$。したがって、 3 が正しい。

　$k < -3$ におけて、$k^2 + 6k + 7 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$ である。$k < -3$ によって $k = -3 - \sqrt{2}$ である。

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$\begin{aligned} x = y = z &\quad \text{である事象を } A, \\ x + y + z = 7 &\quad \text{である事象を } B, \\ x + y = z &\quad \text{である事象を } C \end{aligned}$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \text{ が } \boxed{\mathsf{L}}, \quad B \text{ が } \boxed{\mathsf{MN}}, \quad C \text{ が } \boxed{\mathsf{OP}}$$

である。

(2)　事象 $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \cap B \text{ が } \boxed{\mathsf{Q}}, \quad B \cap C \text{ が } \boxed{\mathsf{R}}, \quad C \cap A \text{ が } \boxed{\mathsf{S}}$$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$$

である。

解 答

(1)　さいころの目は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 6 通りである。したがって、$x = y = z$ の場合は 6 通りである。したがって、A の事象は 6 通りである。

B の事象: $x + y + z = 7$ に関しては、$x + y + z = 7$ を満たす組み合わせを考えると、$(1, 1, 5)$ は $\dfrac{3!}{2!1!} = 3$ 通り ,$(1, 2, 4)$ は $\dfrac{3!}{1!1!1!} = 6$ 通り, $(3, 3, 1)$ は $\dfrac{3!}{2!1!} = 3$ 通り, $(2, 2, 3)$ は $\dfrac{3!}{2!1!} = 3$ 通りなどがある。これらの組み合わせを全て列挙すると、B の事象は 15 通りである。

C の事象: $x + y = z$ に関しては、z の範囲を絞っておくと、$2 \leq z \leq 6$ である。よって、z の値ごとに場合分けをすると、
$z = 2$ の場合: $x + y = 2$ となる組み合わせは $(1, 1, 2)$ のみである。したがって、1 通りである。
$z = 3$ の場合: $x + y = 3$ となる組み合わせは $(1, 2, 3)$ と $(2, 1, 3)$ である。したがって、2 通りである。
$z = 4$ の場合: $x + y = 4$ となる組み合わせは $(2, 2, 4), (1, 3, 4), (3, 1, 4)$ である。したがって、3 通りである。
$z = 5$ の場合: $x + y = 5$ となる組み合わせは $(2, 3, 5), (3, 2, 5), (1, 4, 5), (4, 1, 5)$ である。したがって、4 通りである。
$z = 6$ の場合: $x + y = 6$ となる組み合わせは $(3, 3, 6), (2, 4, 6), (4, 2, 6), (1, 5, 6), (5, 1, 6)$ である。したがって、5 通りである。以上より、C の事象は 15 通りである。

(2)　$A \cap B$ の事象は 0 通りである。$B \cap C$ の事象は 0 通りである。$C \cap A$ の事象は 0 通りである。

(3)　全ての事象の場合の数は $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ 通りである。したがって、$P(B) = \dfrac{15}{216}$, $P(C) = \dfrac{15}{216}$, $P(B \cap C) = 0$ である。$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ によって、$P(B \cup C) = \dfrac{15}{216} + \dfrac{15}{216} - 0 = \dfrac{30}{216} = \dfrac{5}{36}$

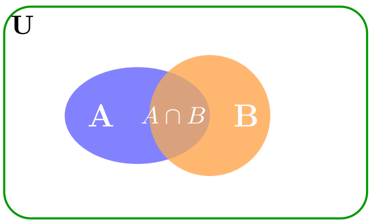
◆◆◆補足◆◆◆

事象 A, B が生じる確率をそれぞれ P(A), P(B) とおくと、和集合の確率について

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立つ。

証 明



事象 A, B の関係は上の図のようになります（U は全事象)。

確率を面積として捉えると、$A \cup B$ に相当する面積を求めるためには、A, B の面積を足した後、$A \cap B$ の面積を引けばよいことがわかる。

問題 II

問 1　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° であり，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ とする。また，実数 x に対して，$\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。$x > 1$ のとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が 45° となるような x の値を求めよう。以下，$\vec{u} \cdot \vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表し，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は 45° であるから

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \frac{\boxed{\textsf{A}}}{\boxed{\textsf{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\textsf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\textsf{DE}}\, x^2 + \boxed{\textsf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\textsf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\textsf{I}} \sqrt{\boxed{\textsf{J}}}\, x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x > 1$ に注意して，これを解くと

$$x = \sqrt{\boxed{\textsf{K}}} + \sqrt{\boxed{\textsf{L}}}$$

となる。

解 答

(1)　最初は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(45^\circ\ ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|$ となる。したがって、$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|)^2 = \dfrac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ となる。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ に関しては、$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(60^\circ\ ) = 1\times 2\times\dfrac{1}{2} = 1$ となる。

(3)　$\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}-\vec{b}) = x^2(\vec{a}\cdot\vec{a}) - (\vec{b}\cdot\vec{b}) = x^2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = x^2 - 4$ となる。

(4)　$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の大きさを求めると、$|\vec{u}|^2 = |x\vec{a}+\vec{b}|^2 = |x\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(x\vec{a}\cdot\vec{b}) = x^2+4+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})$ となる。したがって、$|\vec{u}|^2 = x^2+2x+4$ となる。$\vec{v}$ の大きさは同様に求めることができ、$|\vec{v}|^2 = x^2-2x+4$ となる。したがって、

$\begin{cases} |\vec{u}|^2 = x^2+2x+4 \\ |\vec{v}|^2 = x^2-2x+4 \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = x^2-4 \end{cases}$ を $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \dfrac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ に代入すると、$x^4-20x^2+16=0$ を得る。

(5)　$x^4-20x^2+16=0$ を変形すると、$\left(x^2-4\right)^2 - 12x^2 = 0 \Longrightarrow \left(x^2-4\right)^2 = \left(2\sqrt{3}x\right)^2$ となる。したがって、$x^2-4 = \pm 2\sqrt{3}x$ となる。

(6)　$x^2-4 = 2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x = \dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2} = \sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x = \sqrt{3}+\sqrt{7}$ となる。$x^2-4 = -2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2+2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x = \dfrac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2} = -\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x = -\sqrt{3}+\sqrt{7} < 1$ となるので、これは解ではない。

問 2 複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1) 上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{M}}}k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\mathsf{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}\,x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\mathsf{P}}}\,x$$

で表される 3 直線である。

(2) C 上に $|z - 2 - 2i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r = \sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}} - \boxed{\mathsf{R}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\mathsf{S}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{T}}}}{\boxed{\mathsf{U}}}\left(1 + \sqrt{\boxed{\mathsf{V}}}\,i\right)$$

である。