2025年8月

羚課理科数学月考

解答

問題 I

問 1　2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ を考える。

(1)　放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標は $\left(\boxed{\textsf{A}}, \boxed{\textsf{BC}}\right)$ である。

(2)　放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に k，y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = -\left(x - \boxed{\textsf{D}} - k\right)^2 + \boxed{\textsf{E}}$$

である。

(3)　次の文中の $\boxed{\textsf{F}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪〜④ の中から，また，$\boxed{\textsf{G}}$ には，この問いの下の選択肢 ⑤〜⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

関数 $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 4$ における最大値が 3 となるような k の値を求めよう。関数 $g(x)$ の最大値は $\boxed{\textsf{E}}$ であるから，k は条件 $\boxed{\textsf{F}}$ または $\boxed{\textsf{G}}$ を満たす。
したがって

$$k = -\boxed{\textsf{H}} - \sqrt{\boxed{\textsf{I}}}, \qquad k = \boxed{\textsf{J}} + \sqrt{\boxed{\textsf{K}}}$$

である。

⓪　$k < -5$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$　　⑤　$k > 2$ かつ $k^2 - 6k + 4 = 0$

①　$k < -5$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$　　⑥　$k > 2$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

②　$k < -3$ かつ $k^2 + 7k + 6 = 0$　　⑦　$k > 2$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$

③　$k < -3$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$　　⑧　$k > 4$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$

④　$k < -3$ かつ $k^2 - 4k + 2 = 0$　　⑨　$k > 4$ かつ $k^2 + 6k + 7 = 0$

$\boxed{\text{解 答}}$

(1)　$f(x) = -x^2 + 4x + 6$ に対して、頂点の x の座標は $-\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ である。その x の座標を代入して、頂点の y 座標は $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 6 = 10$ である。したがって、頂点の座標は $(2, 10)$ である。

(2)　ある $y = f(x)$ とすると、そのグラフは x 軸方向に a だけ平行移動し、y 軸方向に b だけ平行移動したものとなる。したがって、 $y - b = f(x - a)$ となる。問題の条件によって、x 軸方向に k、y 軸方向に -5 だけ平行移動して得られる放物線を $g(x)$ とすると、$g(x) = -(x - 2 - k)^2 + 10$ である。

(3)　(2) の結果により、$g(x) = -(x - 2 - k)^2 + 5 \leq 5$ なので、$g(x)$ の最大値は 5 である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5 \Longrightarrow x = 2 + k$。しかし、 $-1 \leq x \leq 4$ におけると、 $g(x)_{max} = 3$ である。すなわち、 $g(x)_{max} = 5$ となるような x の値は $-1 \leq x \leq 4$ に存在しないことがわかる。したがって、 x の範囲は以下の 2 つの場合から考えればよい。

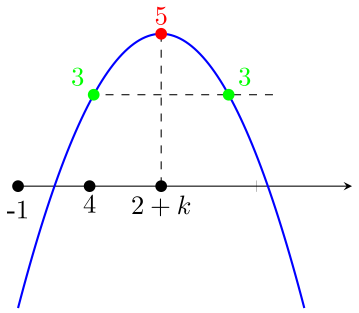


図 1　場合 1

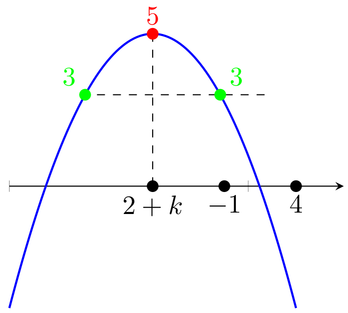


図 2　場合 2

場合 1 では、$x = 2+k > 4 \Longrightarrow k > 2$ である。 $g(x)_{max} = g(4) = 3$ より、$g(4) = -(2-k)^2+5 = 3 \Longrightarrow k^2-4k+2 = 0$。したがって、 7 が正しい。

$k > 2$ におけて、$k^2 - 4k + 2 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ である。$k > 2$ によって $k = 2 + \sqrt{2}$ である。

場合 2 では、 $x = 2 + k < -1 \Longrightarrow k < -3$ である。 $g(x)_{max} = g(-1) = 3$ より、$g(-1) = -(3 + k)^2 + 5 = 3 \Longrightarrow k^2 + 6k + 7 = 0$。したがって、 3 が正しい。

$k < -3$ におけて、$k^2 + 6k + 7 = 0$ を計算すると、$k = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -3 \pm \sqrt{2}$ である。$k < -3$ によって $k = -3 - \sqrt{2}$ である。

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$
\begin{aligned}
x = y = z &\quad \text{である事象を } A, \\
x + y + z = 7 &\quad \text{である事象を } B, \\
x + y = z &\quad \text{である事象を } C
\end{aligned}
$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \text{ が } \boxed{\mathsf{L}}, \quad B \text{ が } \boxed{\mathsf{MN}}, \quad C \text{ が } \boxed{\mathsf{OP}}$$

である。

(2)　事象 $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$$A \cap B \text{ が } \boxed{\mathsf{Q}}, \quad B \cap C \text{ が } \boxed{\mathsf{R}}, \quad C \cap A \text{ が } \boxed{\mathsf{S}}$$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$$

である。

解 答

(1)　さいころの目は $1,2,3,4,5,6$ の 6 通りである。したがって、$x=y=z$ の場合は 6 通りである。したがって、A の事象は 6 通りである。

B の事象: $x+y+z=7$ に関しては、$x+y+z=7$ を満たす組み合わせを考えると、$(1,1,5)$ は $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り ,$(1,2,4)$ は $\frac{3!}{1!1!1!}=6$ 通り, $(3,3,1)$ は $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り, $(2,2,3)$ は $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通りなどがある。これらの組み合わせを全て列挙すると、B の事象は 15 通りである。

C の事象: $x+y=z$ に関しては、z の範囲を絞っておくと、$2\leq z\leq 6$ である。よって、z の値ごとに場合分けをすると、
$z=2$ の場合: $x+y=2$ となる組み合わせは $(1,1,2)$ のみである。したがって、1 通りである。
$z=3$ の場合: $x+y=3$ となる組み合わせは $(1,2,3)$ と $(2,1,3)$ である。したがって、2 通りである。
$z=4$ の場合: $x+y=4$ となる組み合わせは $(2,2,4),(1,3,4),(3,1,4)$ である。したがって、3 通りである。
$z=5$ の場合: $x+y=5$ となる組み合わせは $(2,3,5),(3,2,5),(1,4,5),(4,1,5)$ である。したがって、4 通りである。
$z=6$ の場合: $x+y=6$ となる組み合わせは $(3,3,6),(2,4,6),(4,2,6),(1,5,6),(5,1,6)$ である。したがって、5 通りである。以上より、C の事象は 15 通りである。

(2)　$A\cap B$ の事象は 0 通りである。$B\cap C$ の事象は 0 通りである。$C\cap A$ の事象は 0 通りである。

(3)　全ての事象の場合の数は $6\times 6\times 6=6^3=216$ 通りである。したがって、$P(B)=\frac{15}{216}$, $P(C)=\frac{15}{216}$, $P(B\cap C)=0$ である。$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$ によって、$P(B\cup C)=\frac{15}{216}+\frac{15}{216}-0=\frac{30}{216}=\frac{5}{36}$

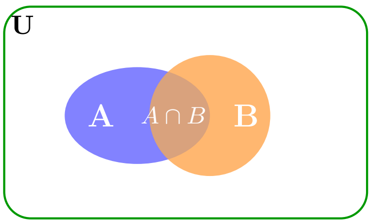
◆◆◆補足◆◆◆

事象 A, B が生じる確率をそれぞれ P(A), P(B) とおくと、和集合の確率について

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

が成り立つ。

証 明



事象 A,B の関係は上の図のようになります（U は全事象)。

確率を面積として捉えると、$A\cup B$ に相当する面積を求めるためには、A,B の面積を足した後、$A\cap B$ の面積を引けばよいことがわかる。

問題 II

問 1　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60°　であり，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ とする。また，実数 x に対して，$\vec{u}=x\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{v}=x\vec{a}-\vec{b}$ とする。$x>1$ のとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が 45°　となるような x の値を求めよう。以下，$\vec{u}\cdot\vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表し，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は 45°　であるから

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\frac{\boxed{\textbf{A}}}{\boxed{\textbf{B}}}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$$

を得る。$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\textbf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4-\boxed{\textbf{DE}}x^2+\boxed{\textbf{FG}}=0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2-\boxed{\textbf{H}}\right)^2=\left(\boxed{\textbf{I}}\sqrt{\boxed{\textbf{J}}}x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x>1$ に注意して，これを解くと

$$x=\sqrt{\boxed{\textbf{K}}}+\sqrt{\boxed{\textbf{L}}}$$

となる。

解 答

(1)　最初は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|$ となる。したがって、$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|)^2=\frac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ となる。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ に関しては、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(60^\circ)=1\times 2\times\frac{1}{2}=1$ となる。

(3)　$\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求めると、$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}-\vec{b})=x^2(\vec{a}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{b})=x^2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=x^2-4$ となる。

(4)　$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の大きさを求めると、$|\vec{u}|^2=|x\vec{a}+\vec{b}|^2=|x\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(x\vec{a}\cdot\vec{b})=x^2+4+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})$ となる。したがって、$|\vec{u}|^2=x^2+2x+4$ となる。$\vec{v}$ の大きさは同様に求めることができ、$|\vec{v}|^2=x^2-2x+4$ となる。したがって、

$$\begin{cases}|\vec{u}|^2=x^2+2x+4\\|\vec{v}|^2=x^2-2x+4\\\vec{u}\cdot\vec{v}=x^2-4\end{cases}$$
を $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\frac{1}{2}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ に代入すると、$x^4-20x^2+16=0$ を得る。

(5)　$x^4-20x^2+16=0$ を変形すると、$\left(x^2-4\right)^2-12x^2=0\Longrightarrow\left(x^2-4\right)^2=\left(2\sqrt{3}x\right)^2$ となる。したがって、$x^2-4=\pm2\sqrt{3}x$ となる。

(6)　$x^2-4=2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ となる。$x^2-4=-2\sqrt{3}x$ を解くと、$x^2+2\sqrt{3}x-4=0$ となる。したがって、$x=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(2\sqrt{3})^2+16}}{2}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$ となる。$x>1$ に注意して、$x=-\sqrt{3}+\sqrt{7}<1$ となるので、これは解ではない。

問 2　複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1)　上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\textsf{M}}}k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\textsf{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\textsf{O}}}x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\textsf{P}}}x$$

で表される 3 直線である。

(2)　C 上に $|z - 2 - 2i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r = \sqrt{\boxed{\textsf{Q}}} - \boxed{\textsf{R}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\textsf{S}} + \sqrt{\boxed{\textsf{T}}}}{\boxed{\textsf{U}}}\left(1 + \sqrt{\boxed{\textsf{V}}}i\right)$$

である。

解 答

(1)　問題文により、$z = x + iy$ とすると、 極座標に変形し、$z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$ となる。、その後、極座標の z を用いて z^3 を計算すると、$z^3 = (rcos(\theta) + irsin(\theta))^3 = r^3(cos(\theta) + isin(\theta))^3$ となる。ド・モアブル定理 により、$(cos(\theta)+isin(\theta))^3 = cos(3\theta)+isin(3\theta)$ となるので、上の z^3 の式に代入すると、$z^3 = r^3(cos(3\theta)+isin(3\theta))$ となる。問題の条件: z^3 が実数なので、$r^3sin(3\theta) = 0$ となる。したがって、$sin(3\theta) = 0 \Longrightarrow 3\theta = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{3}$ となる。以上より、$z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$ の偏角 $arg\ z = \dfrac{\pi}{3}k$ である。

◆◆◆補足◆◆◆

ド・モアブル定理:$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$

証 明

$n \neq \phi$ とおくと、

$$\begin{aligned}
(cos(\theta) + isin(\theta))\,(cos(\phi) + isin(\phi)) &= cos(\theta)cos(\phi) + isin(\theta)cos(\phi) + icos(\theta)sin(\phi) - sin(\theta)sin(\phi) \\
&= cos(\theta)cos(\phi) - sin(\theta)sin(\phi) + i\,(cos(\theta)sin(\phi) + sin(\theta)cos(\phi)) \\
&= cos(\theta + \phi) + isin(\theta + \phi)
\end{aligned}$$

$\phi = \theta$ のとき、$(cos(\theta) + isin(\theta))\,(cos(\theta) + isin(\theta)) = (cos(\theta) + isin(\theta))^2 = cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta) = cos(2\theta) + isin(2\theta)$ となる。したがって、n のときには、$(cos(\theta) + isin(\theta))^n = cos(\theta + \cdots + \theta) + isin(\theta + \cdots + \theta) = cos(n\theta) + isin(n\theta)$ が成り立つ。

(2)　図形 C の x, y の方程式を求める前に、その方程式の傾きを求めないといけないので、以下の図 1 のように、傾き $= \tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\arg z = \theta = \dfrac{y}{x}$ により、

場合 1　$k = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \Longrightarrow \theta = k\pi \Longrightarrow y = 0$

場合 2　$k = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Longrightarrow y = \sqrt{3}x$

場合 3　$k = 2 \Longrightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \Longrightarrow y = -\sqrt{3}x$

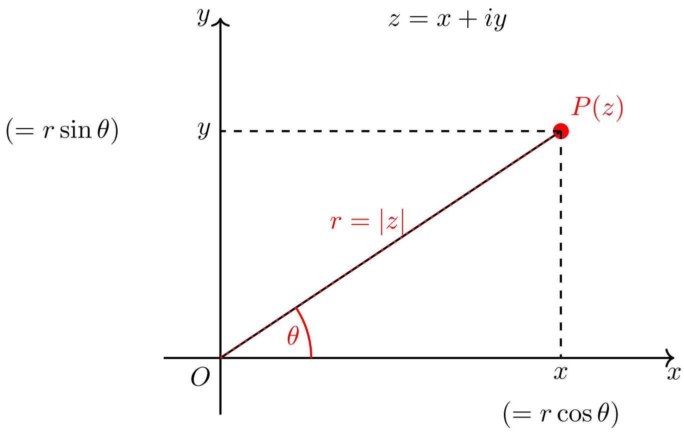
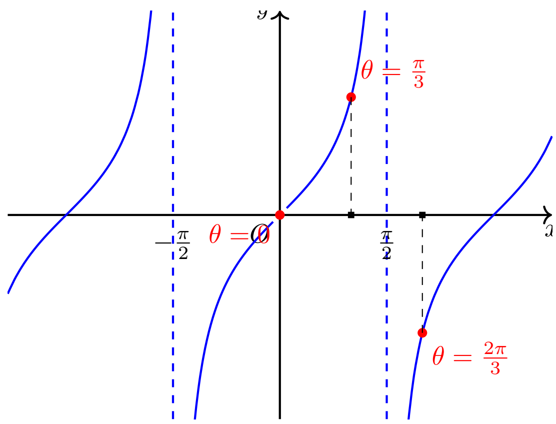


図 1



(2)　C 上に $|z-2-2i|=r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するためには、C の直線と円は 1 点で交わる (接する) ことである、このとき、$|x-2-2i|=r$ は中心を $2+2i$、半径 r の円となり、その円は $y=\sqrt{3}$ の直線と接するので、点 $(2+2i)$ から直線 $(y-\sqrt{3}x=0)$ までの距離公式を使うと $r=d=\dfrac{|2-2\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{|2-2\sqrt{3}|}{2}=\sqrt{3}-1$ となる。したがって、$r=\sqrt{3}-1$ である。

(3)　z の値は直線 $y=\sqrt{3}x$ 上にあるので、$z=x+i\sqrt{3}x=(1+i\sqrt{3})x$ となるので、x の具体値を求めればよい。円と直線の接点と円の中心の直線は直線 $y=\sqrt{3}x$ と直交するので、接点と円の中心の直線の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。よって、接点と円の中心の直線の方程式は、$y-2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ となる。したがって、接点 $(x,\sqrt{3}x)$ を代入すると、$\sqrt{3}x-2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ となる。これを解くと、$3x-2\sqrt{3}=-x+2 \Longrightarrow 4x=2+2\sqrt{3} \Longrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる。したがって、$z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$ である。