2025年8月

羚課文科数学月考

解答

問題 I

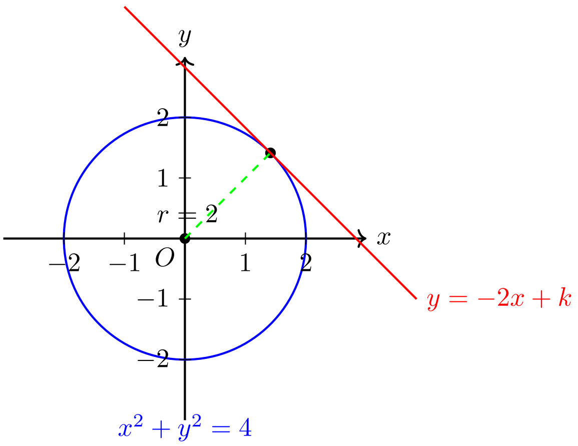
問 1　$x^2+y^2=4$ のとき、 $2x+y$ の最大値は $\boxed{\textbf{A}}\sqrt{\boxed{\textbf{B}}}$

2 次関数 $y=x^2+6x+5$ のグラフを原点 $(0,0)$ に関して対称移動してできるグラフの方程式は

$$y=\boxed{\textbf{C}}\,x^2+\boxed{\textbf{D}}\,x+\boxed{\textbf{E}}$$

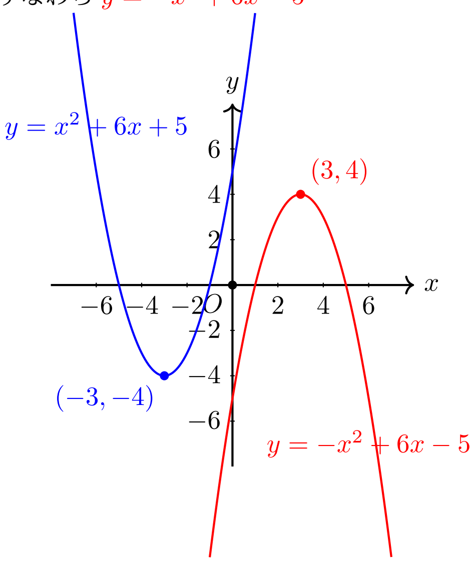
解 答

(1)　$x^2+y^2=4$ によって、 これは円の中心が $(0,0)$、半径 r が 2 の円である。 $2x+y$ の最大値を k とすると、$2x+y=k \Longrightarrow y=-2x+k \Longrightarrow 2x+y-k=0$ ここで、円の上に $2x+y$ の最大値を得られる点 (x_0,y_0) が存在する。よって、直線 $2x+y-k=0$ は円との関係は接する場合と交わる場合の 2 ケースだけである。したがって、点と直線の距離の公式によって、円の中心座標を $2x+y-k=0$ に代入すると $d=\dfrac{|2\times 0+0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leq 2=r \Longrightarrow |-k|\leq 2\sqrt{5}$ となる。$|-k|=|k|$ により、 $|k|\leq 2\sqrt{5}\Longrightarrow -2\sqrt{5}\leq k\leq 2\sqrt{5}$。以上より、 $2x+y$ の最大値は $2\sqrt{5}$ である。



(2)　原点に関して対称移動: x を $-x$ に、y を $-y$ に変える。したがって、$y=-f(-x)\Longrightarrow y=-x^2+6x-5$

すなわち $y=-x^2+6x-5$



問 2　$3a+1$ が a^2+5 の約数となるような自然数 a を求めよう。

$3a+1=b$ とする。このとき

$$a^2+5=\frac{b^2-\boxed{\text{F}}\,b+\boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。また、b は a^2+5 の約数であるから、a^2+5 はある自然数 c を用いて

$$a^2+5=bc \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される。①、② から

$$b\left(\boxed{\text{J}}\,c-b+\boxed{\text{K}}\right)=\boxed{\text{LM}}$$

を得る。したがって、b は $\boxed{\text{LM}}$ の約数である。この中で、a が自然数となるのは $b=\boxed{\text{NO}}$

である。したがって、$a=\boxed{\text{PQ}}$ である。

解答

(1)　$3a+1=b$ とすると、$a=\dfrac{b-1}{3}$ となって、a を a^2+5 に代入すると、$a^2+5=\dfrac{(b-1)^2}{9}+5=\dfrac{b^2-2b+1+45}{9}=\dfrac{b^2-2b+46}{9}$ となる。

(2)　①と②の式から、$a^2+5=bc=\dfrac{b^2-2b+46}{9} \Longrightarrow 9bc-b^2+2b=46 \Longrightarrow b(9c-b+2)=46$。

(3)　b は 46 の約数である。したがって、b は $1,2,23,46$ のいずれかである ($46=46\times1=2\times23\times=1$)。$a$ が自然数と $b=3a+1$ の条件によって、$b\geq4$ となる。したがって、$b=23$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{22}{3}$ であり、a の条件を満たさない。$b=46$ の場合は、$a=\dfrac{b-1}{3}=\dfrac{45}{3}=15$ であり、a の条件を満たす。したがって、$b=46, a=15$ が求める答えである。

問題 II

問 1　大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤、黒、青、黄の色を塗る。ただし、どのカードにも 1 つの色のみを使い、また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\textsf{ABC}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{DE}}$ 通りある。

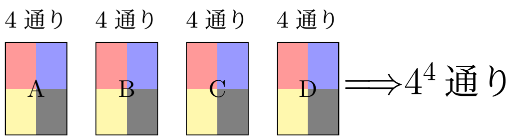
(3)　2 枚は赤で、1 枚が黒、1 枚が青となるような塗り方は $\boxed{\textsf{FJ}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{GHI}}$ 通りある。

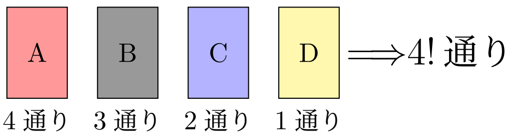
(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\textsf{JK}}$ 通りある。

解 答

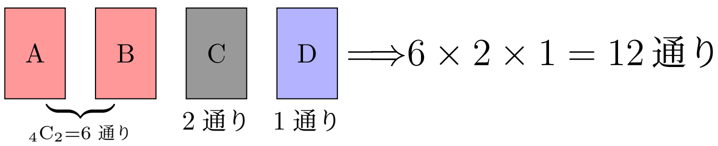
(1)　各カードに 4 色のうち 1 色を塗るので、4 枚のカードに対しては $4^4 = 256$ 通りの塗り方がある。したがって、全部で 256 通りの塗り方がある。



(2)　4 色全てが最低 1 回は使われる塗り分けである。カードを A,B,C,D とすると、最初 A は 4 択を選べられ、まず赤を塗るとする。次の B は赤抜きの 3 色しか選べられないので、3 通りがあって、黒を塗るとする。C は赤と黒抜きの 2 色しか選べられないので、2 通りがあって、ここで青を塗るとする。最後の黄色を D に塗るしかないので、合計で $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りがある。



(3)　最初は 4 枚のカードから 2 枚を選んで赤を塗ると、${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通りがある。次に、残りの 2 枚カードから 1 枚を選んで黒を塗ると、${}_2C_1 = 2$ 通りがある。最後の 1 枚カードは青を塗ると、1 通りがある。したがって、合計で $6 \times 2 \times 1 = 12$ 通りである。

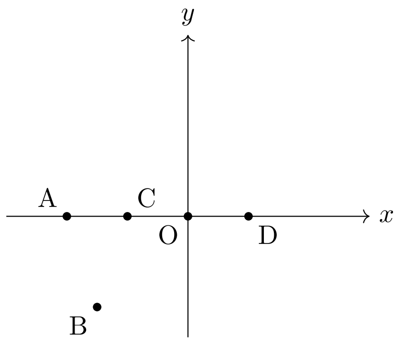


(4)　最初 4 色から 3 色を選んで、${}_4C_3 = 4$ 通りがある。次に、選んだ 3 色の中で 1 つの色が 2 回使われた選び方は ${}_3C_1 = 3$ 通りがある。次の塗り方は (3) と同じであって、合計で $4 \times 3 \times 12 = 144$ 通りである。

(5)　1 つの色を使う塗り方は 4 色がある。したがって、2 つの色を使う塗り方は $256 - (24 + 144 + 4) = 84$ 通り。

問 2　2 つの放物線

ℓ :　$y = ax^2 + 2bx + c$
m :　$y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 3$



を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの放物線のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。

(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\mathsf{L}}$ である。ただし、$\boxed{\mathsf{L}}$ には，次の⓪か①のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　放物線 ℓ
①　放物線 m

(2)　2 つの放物線 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\mathsf{M}}\,x + \boxed{\mathsf{N}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x 座標は $\boxed{\mathsf{OP}}$，点 C の x 座標は $\boxed{\mathsf{QR}}$ である。

(3)　特に，AB = BC, CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y 軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\mathsf{S}}$ である。また，AB = BC より，

直線 $x = \boxed{\mathsf{TU}}$ が $\boxed{\mathsf{L}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}}$ である。よって，

$c = \dfrac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}$ である。

解 答

(1)　問題の条件から、 ℓ と m の放物線の傾きの正負は異なる。よって、 $a \leq 0 \leq a+1$ が成り立つ。したがって、3 点 A, B, C を通る放物線は①の放物線 m である。

(2)　3 点 A, B, C を通る放物線は m である。3 点 B, C, D を通る放物線は ℓ である。したがって、m と ℓ の方程式は点 B, C を通るので、$y = ax^2 + bx + c = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 3 \Longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ 。この方程式の解は、点 B, C の x 座標である。$x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow (x+4)(x+3) = 0$ したがって、点 B の x 座標は -3, 点 C の x 座標は -1 となる。

(3)　点 C, D は y 軸に関して対称であるから、ℓ の頂点 x 座標は $-\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} = 0$ である。したがって、$b = 0$ となる。$AB = BC$ より、直線 $x = -3$ が m の軸である。したがって、m の放物線の頂点 x 座標により、$-\dfrac{2(b+2)}{2(a+1)} = -\dfrac{0+2}{a+1} = -3 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{3}$ である。よって、$c = \dfrac{1}{2}$ である。点 $C : (-1, 0)$ を ℓ の方程式に代入すると、$a \times (-1)^2 + 2 \times 0 \times x + c = 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{3} + c = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{1}{3}$ である。