

2025年10月 羚課理科数学月考

問1 2つの2次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + ax - b,$$
 $g(x) = -x^2 + cx + b$

が、次の2つの条件(A),(B)を満たすようなa,b,cを求めよう。

- (A) グラフ y = f(x) とグラフ y = g(x) は 2 つの直線 x = -1, x = 2 上で交わっている。
- (\mathbf{B}) g(x) の最大値と f(x) の最小値の差は $\frac{19}{6}$ である。

条件 (A) より 2 つの 2 次関数のグラフは直線 x = -1 上で交わっているから

$$3a + \boxed{\mathbf{A}}b - \boxed{\mathbf{B}}c = \boxed{\mathbf{C}} \cdots \bigcirc$$

であり、また、直線 x=2 上で交わっているから

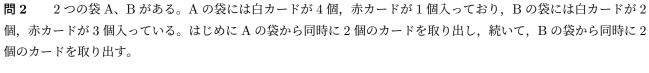
$$-$$
 D $a + 3b +$ E $c = 8$ ··· ②

を得る。①と②より、 $b = {\color{red} {\color{red} {\color{blue} {\color{b} {\color{blue} {\color{b} {\color{blue} {\color{b} {\color{b}} {\color{b} {\color{b} {\color{b} {\color{b} {\color{b} {\color{b}} {\color{b} {\color{b} {\color{b} {\color{b}$

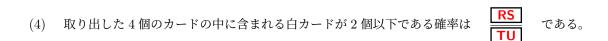
次に、条件 (B) と
$$b = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{G}}$$
 より

$$\boxed{\mathbf{H}} a^2 + c^2 = \boxed{\mathbf{I}}$$

を得る。



(1)	A から 2 個の白カードを取り出し,B からは白カードと赤カードをそれぞれ 1 個ずつ取	り出す確率	は <mark>KL</mark>
(2)	取り出した4個のカードの中に、3個の白カードと1個の赤カードが入っている確率は	N	である。



(3) 取り出した4個のカードがすべて同じ色である確率は

|II|

正の数からなる数列 a_1, a_2, a_3, \cdots は

を満たしている。このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう。

(1) の両辺の常用対数を考えて

を得る。いま、 $b_n = \log_2 a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと、この式は

となる。(2) を変形すると

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{\mathbb{C}} (b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

となるから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{C}\right)^{n-D} (b_2 - b_1) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad \dots \dots (3)$$

が成り立つ。

ここで、 $b_1 = \boxed{\mathbf{E}}$, $b_2 = \boxed{\mathbf{F}}$ であるから、(3) より

$$b_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\mathbf{C}} \right)^{k-\mathbf{G}}$$

を得る。よって

$$b_n = \boxed{\mathbf{H}} - \left(\frac{1}{\boxed{\mathbf{C}}}\right)^{n-\boxed{\mathbf{I}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\mathsf{J}}$$

である。

x が不等式

$$2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \le 0 \quad \cdots (1)$$

を満たすとき, 関数

$$f(x) = (\log_3 x) \left(\log_3 \frac{x}{3}\right) \left(\log_3 \frac{x}{27}\right) \quad \cdots (2)$$

の最大値を求めよう。

(1) を満たす x の値の範囲は

である。

ここで、 $\log_3 x = t$ とおくと、t のとる値の範囲は

$$E$$
 $\leq t \leq G$

である。

また,(2) の右辺を t で表して,その式が表す関数を g(t) とおくと,その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\mathbf{H}} t^2 - \boxed{\mathbf{I}} t + \boxed{\mathbf{J}}$$

である。したがって、f(x) は $x = \boxed{\mathsf{KL}}$ で最大値 $\boxed{\mathsf{M}}$ をとる。

IV

a>0 とする。曲線 $y=\sqrt{x}e^{-x}$ と x 軸および x 軸上の点 $\mathbf{A}(a,0)$ を通る直線 x=a で囲まれた部分を,x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

(1) V は a の関数として

$$V = -\frac{\pi}{4} \left\{ \left(\boxed{\mathbf{A}} a + \boxed{\mathbf{B}} \right) e^{-\boxed{\mathbf{C}} a} - \boxed{\mathbf{D}} \right\}$$

と表される。

(2) 点 A は原点を出発して、x 軸上を正の方向に移動し、その t 秒後の速度を 4t とする。(すなわち、 $\frac{da}{dt}=4t$) このとき、t 秒後の V の変化率を求めると

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{E} \pi t \mathbf{F} e^{-\mathbf{G}t}$$

である。また、この変化率が最も大きくなるのは

$$t = \frac{\sqrt{\boxed{1}}}{4}$$

のときで、そのときの V の値は

$$V = -\frac{\pi}{8} \left(\boxed{\mathbf{J}} e^{-\boxed{\mathbf{K}}} - \boxed{\mathbf{M}} \right)$$

である。