2025年10月

羚課理科数学月考

Ⅰ

問 1　　2 つの 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + ax - b, \qquad g(x) = -x^2 + cx + b$$

が、次の 2 つの条件 (A), (B) を満たすような a, b, c を求めよう。

(A) グラフ $y = f(x)$ とグラフ $y = g(x)$ は 2 つの直線 $x = -1,\ x = 2$ 上で交わっている。

(B) $g(x)$ の最大値と $f(x)$ の最小値の差は $\dfrac{19}{6}$ である。

条件 (A) より 2 つの 2 次関数のグラフは直線 $x = -1$ 上で交わっているから

$$3a + \boxed{\text{A}}\,b - \boxed{\text{B}}\,c = \boxed{\text{C}} \qquad \cdots ①$$

であり、また、直線 $x = 2$ 上で交わっているから

$$-\boxed{\text{D}}\,a + 3b + \boxed{\text{E}}\,c = 8 \qquad \cdots ②$$

を得る。①と ②より、$b = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$ である。

次に、条件 (B) と $b = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$ より

$$\boxed{\text{H}}\,a^2 + c^2 = \boxed{\text{I}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

問 2　２つの袋 A、B がある。A の袋には白カードが 4 個，赤カードが 1 個入っており，B の袋には白カードが 2 個，赤カードが 3 個入っている。はじめに A の袋から同時に 2 個のカードを取り出し，続いて，B の袋から同時に 2 個のカードを取り出す。

(1)　A から 2 個の白カードを取り出し，B からは白カードと赤カードをそれぞれ 1 個ずつ取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{KL}}}$

(2)　取り出した 4 個のカードの中に，3 個の白カードと 1 個の赤カードが入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$ である。

(3)　取り出した 4 個のカードがすべて同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{PQ}}}$ である。

(4)　取り出した 4 個のカードの中に含まれる白カードが 2 個以下である確率は $\dfrac{\boxed{\text{RS}}}{\boxed{\text{TU}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

正の数からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$
$$(a_n)^2 a_{n-2} = (a_{n-1})^3 \quad (n = 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を満たしている。このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう。

(1) の両辺の常用対数を考えて

$$\boxed{A} \log_2 a_n + \log_2 a_{n-2} = \boxed{B} \log_2 a_{n-1}$$

を得る。いま，$b_n = \log_2 a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，この式は

$$\boxed{A} b_n + b_{n-2} = \boxed{B} b_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

となる。(2) を変形すると

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{\boxed{C}}(b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

となるから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{\boxed{C}}\right)^{n-\boxed{D}} (b_2 - b_1) \quad (n = 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

が成り立つ。

ここで，$b_1 = \boxed{E}$，$b_2 = \boxed{F}$ であるから，(3) より

$$b_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\boxed{C}}\right)^{k-\boxed{G}}$$

を得る。よって

$$b_n = \boxed{H} - \left(\frac{1}{\boxed{C}}\right)^{n-\boxed{I}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{J}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III

x が不等式

$$2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \leq 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を満たすとき，関数

$$f(x) = (\log_3 x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{27}\right) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

の最大値を求めよう。

(1) を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}} \leq x \leq \boxed{\text{CD}}$$

である。
ここで，$\log_3 x = t$ とおくと，t のとる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}} \leq t \leq \boxed{\text{G}}$$

である。
また，(2) の右辺を t で表して，その式が表す関数を $g(t)$ とおくと，その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\text{H}}t^2 - \boxed{\text{I}}t + \boxed{\text{J}}$$

である。したがって，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{KL}}$ で最大値 $\boxed{\text{M}}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

IV

$a>0$ とする。曲線 $y=\sqrt{x}e^{-x}$ と x 軸および x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$ を通る直線 $x=a$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

(1)　V は a の関数として

$$V=-\frac{\pi}{4}\left\{\left(\boxed{\text{A}}a+\boxed{\text{B}}\right)e^{-\boxed{\text{C}}a}-\boxed{\text{D}}\right\}$$

と表される。

(2)　点 A は原点を出発して，x 軸上を正の方向に移動し，その t 秒後の速度を $4t$ とする。(すなわち、$\dfrac{da}{dt}=4t$) このとき，t 秒後の V の変化率を求めると

$$\frac{dV}{dt}=\boxed{\text{E}}\pi t^{\boxed{\text{F}}}e^{-\boxed{\text{G}}t^{\boxed{\text{H}}}}$$

である。また，この変化率が最も大きくなるのは

$$t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{4}$$

のときで，そのときの V の値は

$$V=-\frac{\pi}{8}\left(\boxed{\text{J}}\,e^{-\frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}}-\boxed{\text{M}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -