アクチュアリーのレポート問題

YI Ran-21122200512

2025 年 1 月 26 日

解答

proof 1. 問題文の S_t^n により、

$$S_t^n = S_0 + \int_0^t \mu^n(S_s^n)S_s^n ds + \int_0^t \sigma^n(S_s^n)S_s^n dW_s, \quad S_t^n > 0,$$

よって，S_t^n に対し

$$u^n(t, S_0) := \mathbb{E}[f(S_t^n)]$$

と定義すると

$$\partial_t u^n + \mu^n(S_0)S_0\partial_{S_0}u^n + \frac{(\sigma^n(S_0)S_0)^2}{2}\partial_{S_0}^2 u^n = 0$$

を満たす ($u^n(0, S_0) = f(S_0)$)
$\nu(t) = u(T - t, S - t^n)$ とし、伊藤公式によると、

$$\begin{aligned} d\nu(t) = &-\partial_t u(T-t, S_t^n)dt + \partial_{S_0}u(T-t, S_t^n)dS_t^n \\ &+ \frac{1}{2}\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n)(dS_t^n)^2 \end{aligned}$$

ここで、 $dS_t^n = \mu^n(S_t^n)S_t^n dt + \sigma^n(S_t^n)S_t^n dW_t$ なので,

$$(dS_t^n)^2 = (\sigma^n(S_t^n)S_t^n)^2 dt$$

が成り立つ
そして，関数 u は、

$$\partial_t u + \mu S_0 \partial_{S_0} u + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2 \partial_{S_0}^2 u = 0$$

を満たすので,

$$\begin{cases} -\partial_t u(T-t, S_t^n) + \mu^n(S_t^n)S_t^n\partial_{S_0}u(T-t, S_t^n) + \dfrac{1}{2}(\sigma^n(S_t^n)S_t^n)^2\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n) & \textbf{[1]} \\ -\partial_t u(T-t, S_t^n) + \mu S_t^n \partial_{S_0}u(T-t, S_t^n) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(S_t^n)^2\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n) & \textbf{[2]} \end{cases}$$

[1] - **[2]** により、ドリフト部分に

$$\underbrace{\left(\mu^n(S_t^n)S_t^n - \mu(S_t^n)S_t^n\right)\partial_{S_0}u(T-t, S_t^n)}_{\mu^n-\mu\text{の差分}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left((\sigma^n(S_t^n)S_t^n)^2 - (\sigma(S_t^n)S_t^n)^2\right)\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n)}_{\sigma^n-\sigma\text{の差分}}$$

となる
伊藤積分により、

$$\mathbb{E}[\nu(T) - \nu(0)] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\mu^n(S_s^n) - \mu(S_s^n)\right)S_s^n\partial_{S_0}u(T-t, S_t^n) + \frac{1}{2}\left((\sigma^n)^2 - \sigma^2\right)(S_s^n)(S_s^n)^2\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n)\, ds\right].$$

絶対値をとって，$\partial_{S_0} u(T-t, S_t^n)$, $\partial_{S_0}^2 u(T-t, S_t^n)$ の上界 ($\|\cdot\|_\infty$) でまとめると，

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}[f(S_T^n)] - \mathbb{E}[f(S_T)]| = |\mathbb{E}[v(T) - v(0)]| &\leq \int_0^T \mathbb{E}\left[|\mu^n(S_s^n) - \mu(S_s^n)| \|\partial_{S_0} u(T-s, \cdot)\|_\infty\right] ds \\
&+ \int_0^T \mathbb{E}\left[|(\sigma^n)^2(S_s^n) - \sigma^2(S_s^n)| \|\partial_{s_0}^2 u(T-s, \cdot)\|_\infty\right] dS
\end{aligned}
$$

□

proof　2.

$$
\int_0^T \mathbb{E}[|\mu^n(S_s^n) - \mu|S_s^n] \|\partial_{S_0} u(T-s, \cdot)\|_\infty ds
$$

問 (1) によって $|\mu^n(x) - \mu| \leq Cn^{-1}$ を用いると、

$$
|\mu^n(S_s^n) - \mu| \leq Cn^{-1}
$$

したがって、

$$
\mathbb{E}[|\mu^n(S_s^n) - \mu|S_s^n] \leq Cn^{-1}\mathbb{E}[S_s^n]
$$

ここで、S_s^n は S_0 からの確率モデルであり

$$
\int_0^T \mathbb{E}[|(\sigma^n(S_s^n))^2 - \sigma^2|] \|\partial_{S_0}^2 u(T-s, \cdot)\|_\infty ds
$$

同様に、

$$
|(\sigma^n(S_s^n))^2 - \sigma^2| = |\sigma^n(S_s^n) - \sigma| \cdot |\sigma^n(S_s^n) + \sigma|
$$

ここで、σ^n と σ は一様に有界であるため、$|\sigma^n(S_s^n) + \sigma| \leq 2\sigma_{\max}$ とすると

$$
|(\sigma^n(S_s^n))^2 - \sigma^2| \leq 2\sigma_{\max} Cn^{-1}
$$

したがって、

$$
\mathbb{E}[|(\sigma^n(S_s^n))^2 - \sigma^2|] \leq 2\sigma_{\max} Cn^{-1}
$$

問題の条件 $|\mu^n(x) - \mu| + |\sigma^n(x) - \sigma| \leq Cn^{-1}$ により、

$$
\int_0^T Cn^{-1} \|\partial_{S_0} u(T-s, \cdot)\|_\infty ds \leq Cn^{-1} \int_0^T C_f ds = Cn^{-1} C_f T
$$

先ほど、

$$
\mathbb{E}[(\sigma^n(S_s^n))^2 - \sigma^2] \leq 2\sigma_{\max} Cn^{-1}
$$

となった。したがって、

$$\int_0^T 2\sigma_{\max} C n^{-1} \|\partial_{S_0}^2 u(T-s,\cdot)\|_\infty ds \le 2\sigma_{\max} C n^{-1} C_f T$$

以上より、

$$|\mathbb{E}[f(S_T^n)] - \mathbb{E}[f(S_T)]| \le C n^{-1} C_f T + 2\sigma_{\max} C n^{-1} C_f T$$

ここで、$\sigma_{\max}$ は一様有界性から定数と見なせるため、したがって、

$$|\mathbb{E}[f(S_T^n)] - \mathbb{E}[f(S_T)]| \le (C + 2\sigma_{\max} C) n^{-1} C_f T \le 2 C_f C T n^{-1}$$

i.e.

$$|\mathbb{E}[f(S_T^n)] - \mathbb{E}[f(S_T)]| \le 2 C_f C T n^{-1}$$

□