# 数理ファイナンスのレポート問題

YI Ran-21122200512

2025 年 1 月 19 日

## 解答

***proof 1.1.*** $\frac{dA_t}{A_t}$ を求めるために、まず、$\log A_t = \log X_i(t) + \log X_j(t)$ と定義すると：

$$d(\log A_t) = d(\log X_i(t)) + d(\log X_j(t))$$

伊藤の公式により、$\log X_i(t)$ については：

$$d(\log X_i(t)) = \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{\sigma_i^2}{2}dt$$

同様に、$\log X_j(t)$ については：

$$d(\log X_j(t)) = \frac{dX_j(t)}{X_j(t)} - \frac{\sigma_j^2}{2}dt$$

したがって：

$$d(\log A_t) = \left(\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} + \frac{dX_j(t)}{X_j(t)}\right) - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2}dt$$

ここで、$\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \beta_i dt + \sigma_i dW_i(t)$ および $\frac{dX_j(t)}{X_j(t)} = \beta_j dt + \sigma_j dW_j(t)$ を代入すると：

$$d(\log A_t) = (\beta_i + \beta_j)dt + \sigma_i dW_i(t) + \sigma_j dW_j(t) - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2}dt$$

整理すると：

$$d(\log A_t) = \left(\beta_i + \beta_j - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2}\right)dt + \sigma_i dW_i(t) + \sigma_j dW_j(t)$$

$\frac{dA_t}{A_t}$ を得るために、$d(\log A_t)$ に対して指数変換により、

$$\frac{dA_t}{A_t} = d(\log A_t) + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)dt$$

これにより：

$$\frac{dA_t}{A_t} = \left(\beta_i + \beta_j - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2}\right)dt + \sigma_i dW_i(t) + \sigma_j dW_j(t) + \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2}dt$$

ドリフト項を整理すると：

$$\beta_i + \beta_j - \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2} + \frac{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}{2} = \beta_i + \beta_j$$

最終的に：

$$\frac{dA_t}{A_t} = (\beta_i + \beta_j)dt + \sigma_i dW_i(t) + \sigma_j dW_j(t)$$

□

***proof* 1.2.** 次に、$\frac{dY_t}{Y_t}$ を求める。$\log Y_t = \sum_{i=1}^n \log X_i(t)$ と定義すると：

$$d(\log Y_t) = \sum_{i=1}^n d(\log X_i(t))$$

伊藤の公式により、各 $\log X_i(t)$ について：

$$d(\log X_i(t)) = \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{\sigma_i^2}{2}dt$$

したがって：

$$d(\log Y_t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{\sigma_i^2}{2}dt \right) = \sum_{i=1}^n \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 dt$$

ここで $\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \beta_i dt + \sigma_i dW_i(t)$ を代入すると：

$$d(\log Y_t) = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_i(t)$$

$\frac{dY_t}{Y_t}$ を得るために、$d(\log Y_t)$ に対して指数変換より、

$$\frac{dY_t}{Y_t} = d(\log Y_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 dt$$

これにより：

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 dt$$

ドリフト項を整理すると：

$$\sum_{i=1}^n \beta_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

最終的に：

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_i(t)$$

□

***proof* 1.3**. まず、$Z_t = X_i(t)X_j^{-1}(t)$ について、$d(X_j^{-1}(t))$ を求める。

$f(X_j(t)) = X_j(t)^{-1}$を 伊藤の公式により、

$$df = f'(X_j(t))dX_j(t) + \frac{1}{2}f''(X_j(t))(dX_j(t))^2$$

導関数を計算すると：

$$f'(X_j(t)) = -X_j(t)^{-2}$$
$$f''(X_j(t)) = 2X_j(t)^{-3}$$

したがって：

$$d(X_j^{-1}(t)) = -X_j(t)^{-2}dX_j(t) + \frac{1}{2} \cdot 2X_j(t)^{-3}(dX_j(t))^2$$

これを簡略化すると：

$$d(X_j^{-1}(t)) = -X_j(t)^{-2}dX_j(t) + X_j(t)^{-3}(dX_j(t))^2$$

ここで $dX_j(t) = \beta_j X_j(t)dt + \sigma_j X_j(t)dW_j(t)$ および $(dX_j(t))^2 = \sigma_j^2 X_j(t)^2 dt$ を代入すると：

$$d(X_j^{-1}(t)) = -X_j(t)^{-2}(\beta_j X_j(t)dt + \sigma_j X_j(t)dW_j(t)) + X_j(t)^{-3}(\sigma_j^2 X_j(t)^2 dt)$$

各項を整理すると：

$$-X_j(t)^{-2} \cdot \beta_j X_j(t)dt = -\beta_j X_j(t)^{-1}dt$$
$$-X_j(t)^{-2} \cdot \sigma_j X_j(t)dW_j(t) = -\sigma_j X_j(t)^{-1}dW_j(t)$$
$$X_j(t)^{-3} \cdot \sigma_j^2 X_j(t)^2 dt = \sigma_j^2 X_j(t)^{-1}dt$$

最終的に：

$$d(X_j^{-1}(t)) = X_j(t)^{-1}[(-\beta_j + \sigma_j^2)dt - \sigma_j dW_j(t)]$$

□

***proof* 2.1**. $\Phi_T = (X_T - X_S)^+$ $(S < T)$ の場合

$V_0 = E^{\mathbb{Q}}[(X_T - X_S)^+]$ を求めると。

$X_S = x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}S + \sigma W_S\right)$ および $X_T = x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T\right)$ が与えられている。

$X_T$ は以下のように

$$X_T = X_S\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(T-S) + \sigma(W_T - W_S)\right)$$

与えられた $X_S$ に対して、$X_T$ は平均 $X_S$ 、分散 $\sigma^2(T-S)$ の対数正規分布に従う。

したがって、$(X_T - X_S)^+$ は行使価格 $X_S$ 、満期 $T-S$ の標準的なヨーロピアン・コール・オプションと類似している。

標準的なコール・オプション公式によると

$$C(X_S, X_S, T-S, \sigma) = X_S N\left(d + \sigma\sqrt{T-S}\right) - X_S N(d)$$

ここで、

$$d = \frac{\log\left(\frac{X_S}{X_S}\right)}{\sigma\sqrt{T-S}} - \frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2} = -\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}$$

したがって、

$$C(X_S, X_S, T-S, \sigma) = X_S\left[N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2} + \sigma\sqrt{T-S}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}\right)\right]$$

簡略化すると：

$$C(X_S, X_S, T-S, \sigma) = X_S\left[N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}\right)\right] = X_S\left[2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}\right) - 1\right]$$

$X_S$ は $\mathbb{Q}$ 測度の下でマルチンゲールであり、$E^{\mathbb{Q}}[X_S] = x$ であるため、

$$V_0 = x\left(2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-S}}{2}\right) - 1\right)$$

□

***proof* 2.2.** $\Phi_T = (Y_T - K)^+$ ただし $Y_T = (X_T)^\gamma$ の場合

$V_0 = E^{\mathbb{Q}}[(X_T^\gamma - K)^+]$ を求めると。

まず、$Y_T = (X_T)^\gamma$ は以下のよう

$$Y_T = (X_T)^\gamma = x^\gamma\exp\left(-\frac{\gamma\sigma^2}{2}T + \gamma\sigma W_T\right)$$

これは対数正規分布に従うが、パラメータが異なる。

したがって、$Y_T$ の期待値は：

$$E^{\mathbb{Q}}[Y_T] = x^{\gamma} \exp\left(\frac{\gamma(\gamma-1)\sigma^2 T}{2}\right)$$

ここで、$(Y_T - K)^+$ は行使価格 $K$ の原資産 $Y_T$ に対する標準的なヨーロピアン・コールオプションとみなせる。

標準的なコールオプション公式を適用すると：

$$V_0 = C(Y_T, K, T, \gamma\sigma) = Y_T N\left(d + \gamma\sigma\sqrt{T}\right) - KN(d)$$

ただし、

$$d = \frac{\log\left(\frac{Y_T}{K}\right)}{\gamma\sigma\sqrt{T}} - \frac{\gamma\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$Y_T$ が対数正規分布に従うことから、対数正規分布の期待値の公式を直接適用できる。

したがって、

$$V_0 = x^{\gamma} \exp\left(\frac{\gamma(\gamma-1)\sigma^2 T}{2}\right) N\left(\frac{\log\left(\frac{x}{K^{1/\gamma}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} + \gamma\sigma\sqrt{T}\right) - KN\left(\frac{\log\left(\frac{x}{K^{1/\gamma}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)$$

□

***proof* 2.3**. $\Phi_T = (A_T - K)^+$ の場合

ここで、$A_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \log X_t\,dt\right)$ と定義する。

まず、$\log A_T = \frac{1}{T}\int_0^T \log X_t\,dt$

$X_t = x\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$ により、

$$\log X_t = \log x - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t$$

したがって：

$$\log A_T = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\log x - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right) dt = \log x - \frac{\sigma^2}{4}T + \frac{\sigma}{T}\int_0^T W_t\,dt$$

ここで、$\int_0^T t\,dt = \frac{T^2}{2}$ により、

また、$\int_0^T W_t\,dt$ はガウス確率変数であり、平均値 0、分散 $\frac{T^3}{3}$ がある。

したがって：

$$\log A_T = \log x - \frac{\sigma^2}{4}T + \sigma \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{T^3}{3} Z = \log x - \frac{\sigma^2}{4}T + \sigma T Z$$

ここで、$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ 。

したがって：

$$A_T = x \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}T + \sigma T Z\right)$$

これは $X_T$ に似ていますが、パラメータが異なる。

コールオプションの評価により、

$(A_T - K)^+$ は行使価格 $K$、基礎資産 $A_T$ の標準的なヨーロピアン・コールオプションと類似している。

標準的なコールオプション公式を使用すると：

$$V_0 = C(A_T, K, T, \sigma) = A_T N\left(d + \sigma\sqrt{T}\right) - KN(d)$$

ここで：

$$d = \frac{\log\left(\frac{A_T}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$A_T$ が対数正規分布に従うことから、対数正規分布の期待値の公式を直接適用できる。

したがって：

$$V_0 = x \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4}T\right) N\left(\frac{\log\left(\frac{x}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{4}\right) - KN\left(\frac{\log\left(\frac{x}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{3\sigma\sqrt{T}}{4}\right)$$

□

***proof* 3.1.** まず、

$$\mathbf{RND}[\frac{d\mathbb{Q}^f}{d\mathbb{Q}^d}] = e^{-\frac{\nu^2}{2}t + \nu W_X(t)}$$

Girsanov の定理により、

$$\tilde{W}_X(t) = W_X(t) - \langle W_X, \cdot \rangle_t$$

ここで、$\langle W_X, \cdot \rangle_t$ はドリフト項であり、RND により決定される。
この場合、ドリフト項は：

$$\langle W_X, \cdot \rangle_t = \nu t$$

したがって、$\mathbb{Q}^f$ の下では、$W_X(t)$ は以下のように表す

$$\tilde{W}_X(t) = W_X(t) - \nu t$$

次に、測度 $\mathbb{Q}^f$ の下での $X(t)$ の確率微分方程式（SDE）を導出する

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = (r_d(t) - r_f(t))dt + \nu dW_X(t)$$

したがって、

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = (r_d(t) - r_f(t))dt + \nu d\tilde{W}_X(t)$$

□

***proof* 3.2**. 次に、測度 $\mathbb{Q}^d$ の下で $r_f(t)$ の SDE を導出する必要がある。測度 $\mathbb{Q}^f$ の下では、$r_f(t)$ の SDE は以下のように表す

$$dr_f(t) = (\theta_f(t) - \phi_f r_f(t))dt + \sigma_f dW_f(t)$$

RND より、ブラウン運動 $W_f(t)$ は $\mathbb{Q}^d$ 測度下で以下のドリフト項を持つ

$$\langle W_f, \cdot \rangle_t = \rho \nu t$$

ここで、$\rho$ は $W_f(t)$ と $W_X(t)$ の間の相関係数を表す
したがって、$\mathbb{Q}^d$ 測度下では、$W_f(t)$ は以下のように変換される

$$\tilde{W}_f(t) = W_f(t) - \rho \nu t$$

ここで、$\mathbb{Q}^d$ 測度下での $r_f(t)$ の SDE を導出すると

$$dr_f(t) = (\theta_f(t) - \phi_f r_f(t))dt + \sigma_f dW_f(t)$$

したがって、

$$dr_f(t) = (\theta_f(t) - \phi_f r_f(t) + \sigma_f \rho \nu)dt + \sigma_f d\tilde{W}_f(t)$$

□