アクチュアリーのレポート問題

YI Ran-21122200512

2025 年 1 月 25 日

解答

proof ***1.1.*** 二つの独立なポアソン過程 N^1 と N^2 があり、それぞれのレートが λ^1 と λ^2 です。これらのジャンプ時刻は

$$T_n^i = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^i$$

で与えられ、$\tau_j^1, j \in \mathbb{N}$ と$\tau_j^2, j \in \mathbb{N}$ は独立である。
$X = N_t^1, Y = N_t^2$ とし、それぞれ独立な $\mathrm{Poisson}(\lambda^1 t), \mathrm{Poisson}(\lambda^2 t)$ に従う。このときの合計 $X+Y$ について、確率母関数 G が

$$G_{X+Y}(z) = E[z^{X+Y}] = E[z^X z^Y] = E[z^X]E[z^Y] \quad (|z| < 1)$$

ここで、頻度パラメータ λt のポアソン分布の母関数は、

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^X] &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda^1 t)^k}{k!} e^{-\lambda^1 t} \\ &= e^{-\lambda^1 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^1 t z)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda^1 t} e^{\lambda^1 t z} \\ &= e^{\lambda^1 t(z-1)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}[z^Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} e^{-\lambda^2 t} \\ &= e^{-\lambda^2 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t z)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda^2 t} e^{\lambda^2 t z} \\ &= e^{\lambda^2 t(z-1)} \end{aligned}$$

となる。
したがって、

$$G_{X+Y}(z) = e^{\lambda^1 t(z-1)} \times e^{\lambda^2 t(z-1)} = e^{(\lambda^1 + \lambda^2) t(z-1)}.$$

これは $\mathrm{Poisson}((\lambda^1 + \lambda^2)t)$-分布の確率母関数と同じ形である。したがって、$X+Y$ の分布は $\mathrm{Poisson}((\lambda^1 + \lambda^2)t)$ である。 □

proof ***1.2.*** 倒産理論では、企業や保険会社の収入と支出 (損失) の確率過程をもとにモデル化される。損失の発生をポアソン過程とした場合、ある複数のリスク (複数のクレーム・災害・損害など) がポアソン過程で解析するなら、合計の損失到着はポアソンレートの単純な足し合わせとみなせる。 □

proof *2.* Cramer - Lundberg モデルの設定で、$U \sim e^{\mu^{-1}}$ であるとき、

$$M_U(r) = E[e^{rU}] = \int_0^\infty e^{ru}\frac{1}{\mu}e^{-u/\mu}du = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{(r-\frac{1}{\mu})u}du \quad (r \in \mathbb{R})$$

ここで $\mu > 0$ かつ r が十分小さければ積分は収束し、具体的に計算すると

$$M_U(r) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r-\frac{1}{\mu}}e^{(r-\frac{1}{\mu})u}\right]_0^\infty = \frac{1}{\mu} \times \frac{1}{\frac{1}{\mu}-r} \quad (\text{ただし } r < \frac{1}{\mu}).$$

したがって、指数分布の場合の調整係数を求める方程式は

$$cr = \lambda\left(\frac{1}{1-\mu r} - 1\right),$$

となる。これを解くと

$$cr = \lambda\left(\frac{1-(1-\mu r)}{1-\mu r}\right) = \lambda\left(\frac{\mu r}{1-\mu r}\right).$$

よって、

$$\begin{aligned} cr(1-\mu r) &= \lambda\mu r \\ cr - c\mu r^2 &= \lambda\mu r \\ -c\mu r^2 + cr - \lambda\mu r &= 0 \\ -c\mu r^2 + (c-\lambda\mu)r &= 0 \end{aligned}$$

この 2 次方程式の r^2 項の係数が負なので、正値 $r > 0$ を求めると

$$r\{-c\mu r + (c-\lambda\mu)\} = 0$$

したがって、

$$\begin{cases} r = 0 & \textbf{[1]} \\ -c\mu r + (c-\lambda)\mu = 0 & \textbf{[2]} \end{cases}$$

式 [2] により、

$$-c\mu r = \lambda\mu - c, r = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}$$

$c > \lambda\mu$ を仮定すると、***i.e.*** $\frac{c-\lambda\mu}{c\mu}$ は正になる。
したがって、

$$r = \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}, \quad \ell(r) = cr - \lambda(M_U(r)-1) = 0$$

$\ell(r) = 0$ をみたす 正の解 $r = \gamma$ を調整係数とすると

$$-\gamma = \frac{\lambda\mu - c}{c\mu}$$

となる。

□