確率論のレポート問題

YI Ran-21122200512

2025 年 1 月 25 日

注意事項

A4 で 1 枚にまとめること、提出は 12 月 19 日か 1 月 16 日のいずれかの授業中

問題

問 1

X, Y がそれぞれポアソン分布 $P_o(\lambda), P_o(\mu)$ に従い、独立であるとする。ただし、$\lambda, \mu > 0$ とする。なお、確率変数 X がポアソン分布 $P_o(\lambda)$ に従うとは、確率関数 $f(k) = P(X = k)$ が次で与えられる。

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

この時、以下を示せ

1. 和 $S = X + Y$ はポアソン分布 $P_0(\lambda + \mu)$ に従う
2. 平均 $\mathbb{E}[X] = \lambda$
3. 分散 $\texttt{var}[X] = \lambda$

解答

proof ***1.*** X, Y がそれぞれポアソン分布 $P_o(\lambda), P_o(\mu)$ によって、

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad P(Y = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$$

X と Y は独立なので, $S = X + Y$ と $n = 0, 1, 2, \dots$ により

$$\begin{aligned}
P(S = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!})(e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)}) \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n!}e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}
\end{aligned}$$

二項定理より、$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} = (\lambda + \mu)^n$

したがって

$$P(S = n) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

□

proof ***2***.

$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k)$ により、

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \lambda\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

ここで、$l = k-1$ とすると

$$\mathbb{E}[X] = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l}}{l!} = \lambda\sum_{l=0}^{\infty} P(X=l) = \lambda \qquad \textbf{[2.1]}$$

となる.

i.e. $\mathbb{E}[X] = \lambda$ □

proof ***3***.

$$\begin{aligned}\texttt{var}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \qquad \textbf{[3.1]}\end{aligned}$$

$\because \mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$\therefore \mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^2\lambda^{k-2}}{k(k-1)(k-2)!}$$
$$= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

ここで、$j = k-2$ とすると

$\mathbb{E}[X(X-1)] = \lambda^2\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^j}{j!}$ となる

$\because \sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$

$\therefore \mathbb{E}[X(X-1)] = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$

次に **[2.1]** 式の $\mathbb{E}[X] = \lambda$ と $\mathbb{E}[X(X-1)] = \lambda^2$ を **[3.1]** 式に代入すると

$$\texttt{var}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

となる.

i.e. $\texttt{var}[X] = \lambda$

□