

Билеты на 20 баллов  
Билет №1 (20 баллов)

- ❑. Аксиомы дискретной вероятности. Примеры.
- ❑. Опр. (вероятностного пространства). Примеры.
- ❑. Свойства характеристических функций (значение в нуле, линейное преобразование, сумма независимых, гладкость в нуле) (без док-ва).
- ❑. Теорема (центральная предельная теорема) (без док-ва).
- ❑. Опр. (сходимости по вероятности).

Билет №2 (20 баллов)

- ❑. Опр. (логнормального распределения). Вычисление плотности.
- ❑. Опр. (условной вероятности). Свойство (о перемножении вероятностей).
- ❑. Следствие (о независимости и корреляции для нормального вектора) (без док-ва).
- ❑. Теорема (закон больших чисел Хинчина) (без док-ва).
- ❑. Опр. (гамма распределения). Доказательство, что это действительно распределение.

Билет №3 (20 баллов)

- ❑. Опр. (коэффициента корреляции Спирмена).
- ❑. Опр. (многомерного равномерного распределения).
- ❑. Теорема (критерий сходимости по распределению) (без док-ва).
- ❑. Теорема (закон больших чисел Хинчина) (без док-ва).
- ❑. Опр. (распределения Пуассона). Доказательство, что это действительно распределение.

Билет №4 (20 баллов)

- ❑. Опр. (распределения Бернулли). Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ❑. Опр. (гауссовской копулы).
- ❑. Теорема (с.к.с. vs p vs п.н.) (без док-ва).
- ❑. Теорема (неравенство Маркова). (без док-ва)
- ❑. Опр. (абсолютно непрерывного распределения). Примеры.

Билет №5 (20 баллов)

- ❑. Опр. (математического ожидания для простой случайной величины).
- ❑. Опр. (операций над событиями, несовместных событий).
- ❑. Замечание (о вычисление и существование х.ф.).
- ❑. Замечание (о вычисление математического ожидания для преобразований случайных величин (одномерных и многомерных преобразований)).
- ❑. Опр. (нормального (гауссовского) распределения). Свойство линейных преобразований с доказательством.

Билет №6 (20 баллов)

- ❑. Опр. (сходимости в среднеквадратическом).
- ❑. Опр. (копулы).
- ❑. Теорема (о линейном преобразование для нормального вектора) (без док-ва).
- ❑. Замечание (о вычисление математического ожидания для дискретных, для а.н.р).
- ❑. Опр. (сходимости по вероятности).

Билет №7 (20 баллов)

- ❑. Опр. ( $k$ -ого момента,  $k$ -ого центрального момента). Формулы для вычисления у дискретного и а.н.р.
- ❑. Опр. (полной группы событий).
- ❑. Теорема (формула Бернулли) (без док-ва).
- ❑. Теорема (центральная предельная теорема) (без док-ва).
- ❑. Опр. (функции распределения). Примеры.

### Билет №8 (20 баллов)

- ❑ Опр. (простой случайной величины).
- ❑ Опр. (математического ожидания для случайного вектора и случайной матрицы).
- ❑ Свойства коэффициента корреляции (без док-ва).
- ❑ Теорема (центральная предельная теорема) (без док-ва).
- ❑ Опр. (независимых случайных величин).

### Билет №9 (20 баллов)

- ❑ Опр. (коэффициента корреляции Кендалла).
- ❑ Опр. (пространства элементарных исходов), примеры пространств элементарных исходов и событий.
- ❑ Теорема о непрерывном соответствии (без док-ва).
- ❑ Теорема (закон больших чисел Хинчина) (без док-ва).
- ❑ Опр. (показательного распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Свойство нестационарности. Вычисление функции распределения.

### Билет №10 (20 баллов)

- ❑ Опр. (сингулярного распределения). Примеры.
- ❑ Опр. (распределения случайной величины). Примеры распределений, как вероятностных мер.
- ❑ Свойства функций распределения (без док-ва).
- ❑ Теорема (неравенство Маркова). (без док-ва)
- ❑ Опр. (сходимости почти наверное).

### Билет №11 (20 баллов)

- ❑ Опр. (сигма – алгебры). Примеры сигма-алгебр.
- ❑ Опр. (двух независимых событий).
- ❑ Теорема Слуцкого (без док-ва).
- ❑ Теорема (закон больших чисел Колмогорова) (без док-ва).
- ❑ Опр. (дискретного распределения). Примеры.

### Билет №12 (20 баллов)

- ❑ Аксиомы классической вероятностной модели. Примеры случайных экспериментов, которые одновременно могут быть описаны классической и неклассической вероятностной схемой.
- ❑ Опр. (коэффициентов экстремальной зависимости).
- ❑ Теорема (по вероятности vs слабая) (без док-ва).
- ❑ Теорема (закон больших чисел Колмогорова) (без док-ва).
- ❑ Опр. (равномерного распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.

### Билет №13 (20 баллов)

- ❑ Опр. (матрицы ковариации случайного вектора).
- ❑ Опр. (многомерного абсолютно непрерывного распределения).
- ❑ Теорема (об эквивалентных определениях независимости) (без док-ва).
- ❑ Замечание (о вычислении математического ожидания для дискретных, для а.н.р.).
- ❑ Опр. (абсолютно непрерывного распределения). Примеры.

### Билет №14 (20 баллов)

- ❑ Опр. (условного математического ожидания).
- ❑ Опр. (дисперсии, стандартного отклонения).
- ❑ Теорема (неравенство Йенсена) (без док-ва).
- ❑ Теорема (неравенство Маркова). (без док-ва)
- ❑ Опр. (дискретного распределения). Примеры.

### Билет №15 (20 баллов)

- ❑ Опр. (квантили для непрерывной функции распределения).
- ❑ Опр. (коэффициента корреляции).
- ❑ Теорема (п.н. vs по вероятности) (без док-ва).
- ❑ Теорема (центральная предельная теорема) (без док-ва).
- ❑ Опр. (распределения Коши). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения.

### Билет №16 (20 баллов)

- ❑ Опр. (равномерной интегрируемости).
- ❑ Опр. (распределения Парето). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения.
- ❑ Следствие об устойчивости по суммированию (без док-ва).
- ❑ Теорема (закон больших чисел Колмогорова) (без док-ва).
- ❑ Опр. (многомерного нормального распределения). Вид плотности для многомерного стандартного нормального вектора.

### Билет №17 (20 баллов)

- ❑ Опр. (математического ожидания).
- ❑ Опр. (вырожденного распределения). Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ❑ Теорема (неравенство Берри-Эссена) (без док-ва).
- ❑ Теорема (закон больших чисел Колмогорова) (без док-ва).
- ❑ Опр. (событий, независимых в совокупности).

### Билет №18 (20 баллов)

- ❑ Опр. (ковариации двух случайных величин).
- ❑ Опр. (борелевской сигма-алгебра).
- ❑ Теорема (критерий сходимости математических ожиданий) (без док-ва).
- ❑ Замечание (о вычислении математического ожидания для дискретных, для а.н.р).
- ❑ Опр. (биномиального распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.

### Билет №19 (20 баллов)

- ❑ Опр. (случайного вектора).
- ❑ Опр. (смешанного распределения). Примеры.
- ❑ Лемма (вычисление УМО для а.н.р.) (без док-ва).
- ❑ Замечание (о вычислении математического ожидания для преобразований случайных величин (одномерных и многомерных преобразований)).
- ❑ Опр. (смеси распределений). Пример задания смеси двойной рандомизацией.

### Билет №20 (20 баллов)

- ❑ Опр (носителя случайной величины).
- ❑ Опр. (Схемы Бернулли). Примеры экспериментов со схемой Бернулли.
- ❑ Свойства ковариации (без док-ва).
- ❑ Теорема (неравенство Маркова). (без док-ва)
- ❑ Опр. (слабой сходимости).

### Билет №21 (20 баллов)

- ☐☐ Опр. (вероятностной меры).
- ☐☐ Теорема о существовании УМО (без док-ва).
- ☐☐ Лемма (вычисление УМО для дискретных). (без док-ва).
- ☐☐ Замечание (о вычислении математического ожидания для преобразований случайных величин (одномерных и многомерных преобразований)).
- ☐☐ Опр. (геометрического распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Свойство нестарения. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.

### Билет №22 (20 баллов)

- ☐☐ Опр. (дискретного многомерного распределения). Свойства. Примеры.
- ☐☐ Опр. (гипергеометрического распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐☐ Следствие (о независимости и ортогональном преобразовании нормального вектора) (без док-ва).
- ☐☐ Замечание (о вычислении математического ожидания для дискретных, для а.н.р).
- ☐☐ Опр. (совместного распределения и совместной функции распределения).

### Билет №23 (20 баллов)

- ☐☐ Опр. (случайной величины).
- ☐☐ Опр. (квантили в общем случае).
- ☐☐ Теорема (обобщенное неравенство Чебышёва) (без док-ва).
- ☐☐ Теорема (закон больших чисел Хинчина) (без док-ва).
- ☐☐ Опр. (характеристической функции).

### Билет №24 (20 баллов)

- ☐☐ Аксиомы геометрической вероятностной модели. Примеры.
- ☐☐ Опр. (математического ожидания для простой случайной величины по событию).
- ☐☐ Свойство математического ожидания для независимых случайных величин (без док-ва).
- ☐☐ Замечание (о вычислении математического ожидания для преобразований случайных величин (одномерных и многомерных преобразований)).
- ☐☐ Опр. (слабой сходимости).

### Билеты на 30 баллов

### Билет №1 (30 баллов)

- ☐☐☐ Примеры базовых копул.
- ☐☐☐ Теорема (о сохранении независимости при преобразованиях). Доказательство.
- ☐☐☐ Следствие из неравенства Маркова о распределении неотрицательной с.в. с нулевым МО. Доказательство.

### Билет №2 (30 баллов)

- ☐☐☐ Нахождение маргинальных плотностей по многомерной плотности.
- ☐☐☐ Свойства многомерного математического ожидания (линейность, произведение независимых матриц). Доказательство.
- ☐☐☐ Следствие (об идеальной зависимости). Доказательство.

### Билет №3 (30 баллов)

- ☐☐☐ Свойства вероятностной меры с доказательствами (вероятность пустого мн-ва, дизъюнктивного объединения, дополнения, объединения двух мн-в, монотонность).
- ☐☐☐ Свойство математического ожидания для независимых случайных величин. Доказательство.
- ☐☐☐ Теорема Лебега. Доказательство.

### Билет №4 (30 баллов)

- Примеры вычисления математического ожидания (Бернулли, биномиальное (двумя способами, нормальное)).
- Пример (парадокс Бертрана).
- Теорема (закон больших чисел Хинчина). Доказательство.

### Билет №5 (30 баллов)

- Свойства математического ожидания для простых случайных величин с доказательством.
- Теорема (неравенство Коши-Буняковского). Доказательство.
- Теорема (свертка для дискретных). Доказательство.

### Билет №6 (30 баллов)

- Теорема (формула полной вероятности). Доказательство.
- Свойства ковариации с доказательством.
- Лемма (о единственности предела для математического ожидания от простых). Доказательство.

### Билет №7 (30 баллов)

- Примеры вычисления характеристических функций (вырожденное, Пуассона, нормальное).
- Теорема (центральная предельная теорема). Доказательство.
- Свойства УМО с доказательством (УМО константы, УМО от измеримой с.в., монотонность, линейность, неравенство треугольника, аналог формулы полной вероятности).

### Билет №8 (30 баллов)

- Теорема (формула полной вероятности). Доказательство.
- Теорема (формула Бернулли). Доказательство.
- Теорема (обобщенное неравенство Чебышёва). Доказательство.

### Билет №9 (30 баллов)

- Свойства сигма-алгебр с доказательствами (пустое мно-во, конечное объединение, счетное пересечение). Формула двойственности.
- Примеры вероятностных пространств и функций, которые являются или не являются случайными величинами с доказательством.
- Свойства функций распределения с доказательствами.

### Билет №10 (30 баллов)

- Следствие (из ЦПТ).
- Теорема (номер первого успешного испытания в схеме Бернулли). Доказательство.
- Теорема (неравенство Йенсена). Доказательство.

### Билет №11 (30 баллов)

- Классическое неравенство Чебышёва. Доказательство.
- Следствие (о независимости и корреляции для нормального вектора). Доказательство.
- Теорема Пуассона для схемы Бернулли. Доказательство.

### Билет №12 (30 баллов)

- Замечание (почему так важна формула обращения для характеристических функций?).
- Свойства матрицы ковариации (при линейном преобразование, для суммы независимых случайных векторов). Доказательство.
- Теорема (с.к.с. vs p vs п.н.). Доказательство.

### Билет №13 (30 баллов)

- Классическое неравенство Чебышёва. Доказательство.
- Контрпример не нормального вектора с нормальными одномерными компонентами. Доказательство.
- Лемма (критерий сходимости п.н.). Доказательство.

### Билет №14 (30 баллов)

- Пример (Бернштейна).
- Свойства ковариации с доказательством.
- Теорема (неравенство Маркова). Доказательство.

### Билет №15 (30 баллов)

- Теорема (формула Байеса). Доказательство.
- Пример (задача о разорении для двух игроков при помощи ФПВ).
- Лемма (вычисление УМО для а.н.р.). Доказательство.

### Билет №16 (30 баллов)

- Свойства дисперсии с доказательством (альтернативный способ вычисления, критерий вырожденности, линейные преобр. одной случайной величины).
- Замечание (о неумлучшаемости неравенства Берри-Эссеена).
- Следствие (о независимости и корреляции для нормального вектора). Доказательство.

### Билет №17 (30 баллов)

- Свойства независимых событий с доказательством (несовместность, условная вероятность, теоретико-множественные операции).
- Теорема (неравенства Frechet-Hoeffding). Доказательство.
- Лемма (о приближение случайной величины простыми). Доказательство.

### Билет №18 (30 баллов)

- Теорема (о существование математического ожидания меньших порядков). Доказательство.
- Свойства совместной функции распределения. Доказательство.
- Лемма (сходимость и арифметические операции). Доказательство.

### Билет №19 (30 баллов)

- Теорема (формула Байеса). Доказательство.
- Следствие об устойчивости по суммированию. Доказательство.
- Теорема (формула Бернулли). Доказательство.

### Билет №20 (30 баллов)

- Следствие (из ЦПТ).
- Теорема (свертка для дискретных). Доказательство.
- Теорема (о плотности). Доказательство.

### Билет №21 (30 баллов)

- Свойства дисперсии с доказательством (дисперсия суммы независимых с.в., оптимизационная задача).
- Основные свойства математического ожидания с доказательством (Однородность, монотонность, нер-во треугольника, аддитивность).
- Пример сингулярного распределения (лестница Кантора).

### Билет №22 (30 баллов)

- ▣ Свойства дисперсии с доказательством (альтернативный способ вычисления, критерий вырожденности, линейные преобр. одной случайной величины ).
- ▣ Следствие (о независимости и ортогональном преобразование нормального вектора). Доказательство.
- ▣ Лемма (о коэффициентах экстремальной зависимости в непрерывном случае). Доказательство.

### Билет №23 (30 баллов)

- ▣ Примеры вычисления дисперсии (Бернулли, биномиального и нормального).
- ▣ Теорема (о плотности и линейном преобразование случайных величин). Доказательство.
- ▣ Теорема (Шкляра). Доказательство в непрерывном случае.

### Билет №24 (30 баллов)

- ▣ Свойства дисперсии с доказательством (дисперсия суммы независимых с.в., оптимизационная задача).
- ▣ Лемма (сходимость при непрерывных преобразованиях). Доказательство.
- ▣ Лемма (вычисление УМО для дискретных). Доказательство.

### Билеты на 40 баллов

#### Билет №1 (40 баллов)

- ▣ Свойства характеристических функций с доказательством (значение в нуле, линейное преобразование, сумма независимых, гладкость в нуле).

#### Билет №2 (40 баллов)

- ▣ Теорема (об эквивалентных определениях независимости). Доказательство.

#### Билет №3 (40 баллов)

- ▣ Теорема Слуцкого. Доказательство.

#### Билет №4 (40 баллов)

- ▣ Теорема (полиномиальная схема). Доказательство.

#### Билет №5 (40 баллов)

- ▣ Вычисление интеграла от плотности нормального распределения. Свойства нормального распределения с доказательством (лин. преобр., равенства для  $\Phi_{0,1}$ , правило трех сигм).

#### Билет №6 (40 баллов)

- ▣ Теорема (п.н. vs по вероятности). Доказательство.

#### Билет №7 (40 баллов)

- ▣ Теорема (закон больших чисел Колмогорова). Доказательство достаточности при 4-ом моменте.

#### Билет №8 (40 баллов)

- ▣ Свойство счетной аддитивности математического ожидания. Доказательство.

#### Билет №9 (40 баллов)

❖ Теорема (оценка точности в теореме Пуассона). Доказательство.

### Билет №10 (40 баллов)

❖ Свойства коэффициентов корреляции Спирмена и Кендалла. Доказательство.

### Билет №11 (40 баллов)

❖ Свойства коэффициента корреляции с доказательством.

### Билет №12 (40 баллов)

❖ Теорема (о квантильном преобразование). Доказательство.

### Билет №13 (40 баллов)

❖ Теорема (формула обращения). Доказательство.

### Билет №14 (40 баллов)

❖ Теорема (по вероятности vs слабая). Доказательство.

### Билет №15 (40 баллов)

❖ Свойства УМО с доказательством (УМО по более бедной сигма алгебре, вынос измеримой с.в. ).

### Билет №16 (40 баллов)

❖ Теорема (Бореля-Кантелли). Доказательство.

### Билет №17 (40 баллов)

❖ Теорема (УМО для гауссовских векторов). Доказательство.

### Билет №18 (40 баллов)

❖ Теорема (об инвариантности копулы при строго возрастающем преобразовании). Доказательство.

### Билет №19 (40 баллов)

❖ Теорема (о линейном преобразование для нормального вектора). Доказательство.

### Билет №20 (40 баллов)

❖ Теорема (о квантилях и линейном преобразование случайных величин, обобщенная обратная функция). Доказательство.

### Билет №21 (40 баллов)

❖ Свойства вероятностной меры с доказательством (вероятность объединения счетного набора, непрерывность вер. меры, формула включения/исключения).

### Билет №22 (40 баллов)

❖ Теорема об ортогональной проекции. Доказательство.

### Билет №23 (40 баллов)

❖ Теорема (о правой границе неравенства Frechet-Hoeffding). Доказательство.

### Билет №24 (40 баллов)

❖ Теорема (о свертке для произвольных распределений). Доказательство. Следствие об а.н.р. суммы.