

Программа по теории вероятностей 2020

Глава 1. Случайные события и их вероятности

§ 1.1. Элементарная теория вероятностей

- ☐. Опр. (пространства элементарных исходов), примеры пространств элементарных исходов и событий.
- ☐. Опр. (операций над событиями, несовместных событий).

§ 1.2. Модель дискретной вероятности

- ☐. Аксиомы классической вероятностной модели. Примеры случайных экспериментов, которые одновременно могут быть описаны классической и неклассической вероятностной схемой.
- ☐. Аксиомы дискретной вероятности. Примеры.

§ 1.3. Геометрические вероятности.

- ☐. Аксиомы геометрической вероятностной модели. Примеры.
- ☐. Пример (парадокс Бертрана).

§ 1.4. Аксиоматическое построение теории вероятностей

- ☐. Опр. (сигма – алгебры). Примеры сигма-алгебр.
- ☐. Свойства сигма-алгебр с доказательствами (пустое мно-во, конечное объединение, счетное пересечение). Формула двойственности.
- ☐. Опр. (борелевской сигма-алгебра).
- ☐. Опр. (вероятностной меры).
- ☐. Свойства вероятностной меры с доказательствами (вероятность пустого мн-ва, дизъюнктного объединения, дополнения, объединения двух мн-в, монотонность).
- ☐. Свойства вероятностной меры с доказательством (вероятность объединения счетного набора, непрерывность вер. меры, формула включения/исключения).
- ☐. Опр. (вероятностного пространства). Примеры.

§ 1.5. Условная вероятность, независимость

- ☐. Опр. (условной вероятности). Свойство (о перемножении вероятностей).
- ☐. Опр. (двух независимых событий).
- ☐. Свойства независимых событий с доказательством (несовместность, условная вероятность, теоретико-множественные операции).
- ☐. Опр. (событий, независимых в совокупности).
- ☐. Пример (Бернштейна).

§ 1.6. Схема Бернулли

- ☐. Опр. (Схемы Бернулли). Примеры экспериментов со схемой Бернулли.
- ☐. Теорема (формула Бернулли). (без док-ва).
- ☐. Теорема (формула Бернулли). Доказательство.
- ☐. Теорема Пуассона для схемы Бернулли. Доказательство.
- ☐. Теорема (номер первого успешного испытания в схеме Бернулли). Доказательство.
- ☐. Теорема (полиномиальная схема). Доказательство.

§ 1.7. Формул полной вероятности

- ☐. Опр. (полной группы событий).
 - ☐. Теорема (формула полной вероятности). Доказательство.
 - ☐. Пример (задача о разорении для двух игроков при помощи ФПВ).
 - ☐. Теорема (формула Байеса). Доказательство.
- Примеры случайных экспериментов, описываемых с помощью ФПВ и формулы Байеса.

Глава 2. Случайные величины и их распределения

§ 2.1. Случайные величины

- ☐. Опр. (случайной величины).
- ☐. Примеры вероятностных пространств и функций, которые являются или не являются случайными величинами с доказательством.

§ 2.2. Распределения случайных величин

- ☐ Опр. (распределения случайной величины). Примеры распределений, как вероятностных мер.
- ☐ Опр. (дискретного распределения). Примеры.
- ☐ Опр. (абсолютно непрерывного распределения). Примеры.
- ☐ Теорема (о плотности). Доказательство.
- ☐ Опр. (сингулярного распределения). Примеры.
- ☐ Опр. (смешанного распределения). Примеры.

§ 2.3. Функция распределения

- ☐ Опр. (функции распределения). Примеры.
- ☐ Свойства функций распределения (без док-ва).
- ☐ Свойства функций распределения с доказательствами.
- ☐ Теорема (о классе функций распределения) (без док-ва)

§ 2.4. Примеры распределений

- ☐ Опр. (вырожденного распределения). Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (распределения Бернулли). Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (биномиального распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (геометрического распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Свойство нестарения. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (распределения Пуассона). Доказательство, что это действительно распределение.
- ☐ Опр. (гипергеометрического распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (равномерного распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения. Пример случайных экспериментов и случайной величины с этим распределением.
- ☐ Опр. (показательного распределения). Доказательство, что это действительно распределение. Свойство нестарения. Вычисление функции распределения.
- ☐ Опр. (нормального (гауссовского) распределения). Свойство линейных преобразований с доказательством.
- ☐ Вычисление интеграла от плотности нормального распределения. Свойства нормального распределения с доказательством (лин. преобр., равенства для $\Phi_{0,1}$, правило трех сигм).
- ☐ Опр. (гамма распределения). Доказательство, что это действительно распределение.
- ☐ Опр. (распределения Коши). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения.
- ☐ Опр. (распределения Парето). Доказательство, что это действительно распределение. Вычисление функции распределения.
- ☐ Опр. (логнормального распределения). Вычисление плотности.
- ☐ Пример сингулярного распределения (лестница Кантора).
- ☐ Опр. (смеси распределений). Пример задания смеси двойной рандомизацией.

§ 2.5. Преобразования случайных величин

- Замечание (об измеримости преобразования случайной величины).
- ☐ Теорема (о плотности и линейном преобразование случайных величин). Доказательство.
- ☐ Опр. (квантили для непрерывной функции распределения).
- ☐ Опр. (квантили в общей случае).
- Опр. (медианы). Опр. (моды).
- ☐ Теорема (о квантилях и линейном преобразование случайных величин, обобщенная обратная функция). Доказательство.
- ☐ Теорема (о квантильном преобразование). Доказательство.

§ 2.6. Многомерные распределения

- ☐ Опр. (случайного вектора).

- ☐ Опр. (совместного распределения и совместной функции распределения).
- ☐ Свойства совместной функции распределения. Доказательство.
- ☐ Опр. (дискретного многомерного распределения). Свойства. Примеры.
- ☐ Опр. (многомерного абсолютно непрерывного распределения).
- ☐ Нахождение маргинальных плотностей по многомерной плотности.
- ☐ Опр. (многомерного равномерного распределения).
- ☐ Опр. (многомерного нормального распределения). Вид плотности для многомерного стандартного нормального вектора.
- Опр. (многомерного сингулярного распределения). Пример.
- Опр. (распределения Дирихле).
- ☐ Опр. (независимых случайных величин).
- ☐ Теорема (об эквивалентных определениях независимости) (без док-ва).
- ☐ Теорема (об эквивалентных определениях независимости). Доказательство.
- ☐ Теорема (о сохранение независимости при преобразованиях). Доказательство.
- ☐ Теорема (свертка для дискретных). Доказательство.
- ☐ Теорема (свертка для дискретных). Доказательство.

Глава 3. Числовые характеристики распределений

§ 3.1. Интеграл по вероятностной мере. Математическое ожидание.

- ☐ Опр. (простой случайной величины).
- ☐ Опр. (математического ожидания для простой случайной величины).
- ☐ Свойства математического ожидания для простых случайных величин с доказательством.
- ☐ Опр. (математического ожидания для простой случайной величины по событию).
- ☐ Лемма (о приближение случайной величины простыми). Доказательство.
- ☐ Лемма (о единственности предела для математического ожидания от простых). Доказательство.
- ☐ Опр. (математического ожидания).
- ☐ Основные свойства математического ожидания с доказательством (Однородность, монотонность, нер-во треугольника, аддитивность).
- ☐ Свойство счетной аддитивности математического ожидания. Доказательство.
- ☐ Свойство математического ожидания для независимых случайных величин (без док-ва).
- ☐ Свойство математического ожидания для независимых случайных величин. Доказательство.
- ☐ Замечание (о вычисление математического ожидания для дискретных, для а.н.р).
- ☐ Замечание (о вычисление математического ожидания для преобразований случайных величин (одномерных и многомерных преобразований)).
- ☐ Теорема (о свертке для произвольных распределений). Доказательство. Следствие об а.н.р. суммы.
- ☐ Примеры вычисления математического ожидания (Бернулли, биномиальное (двумя способами), нормальное).

§ 3.2. Моменты высшего порядка

- ☐ Опр. (k -ого момента, k -ого центрального момента). Формулы для вычисления у дискретного и а.н.р.
- ☐ Теорема (о существование математического ожидания меньших порядков). Доказательство.

§ 3.3. Моментные Неравенства

- ☐ Теорема (неравенство Маркова). (без док-ва)
- ☐ Теорема (неравенство Маркова). Доказательство.
- ☐ Следствие из неравенства Маркова о распределение неотрицательной с.в. с нулевым МО. Доказательство.
- ☐ Теорема (обобщенное неравенство Чебышёва) (без док-ва).
- ☐ Теорема (обобщенное неравенство Чебышёва). Доказательство.
- ☐ Теорема (неравенство Коши-Буняковского). Доказательство.
- ☐ Теорема (неравенство Йенсена) (без док-ва).
- ☐ Теорема (неравенство Йенсена). Доказательство.

§ 3.4. Дисперсия

- ☐ Опр. (дисперсии, стандартного отклонения).
- ☐ Свойства дисперсии с доказательством (альтернативный способ вычисления, критерий вырожденности, линейные преобр. одной случайной величины).

- ☐☐ Свойства дисперсии с доказательством (дисперсия суммы независимых с.в., оптимизационная задача).
- ☐☐ Классическое неравенство Чебышёва. Доказательство.
- ☐☐ Примеры вычисления дисперсии (Бернулли, биномиального и нормального).

§ 3.5. Коэффициент корреляции

- ☐. Опр. (ковариации двух случайных величин).
- ☐. Свойства ковариации (без док-ва).
- ☐☐ Свойства ковариации с доказательством.
- ☐. Опр. (коэффициента корреляции).
- ☐. Свойства коэффициента корреляции (без док-ва).
- ☐☐ Свойства коэффициента корреляции с доказательством.

§ 3.6. Матрица ковариации

- ☐. Опр. (математического ожидания для случайного вектора и случайной матрицы).
- ☐☐ Свойства многомерного математического ожидания (линейность, произведение независимых матриц). Доказательство.
- ☐. Опр. (матрицы ковариации случайного вектора).
- ☐☐ Свойства матрицы ковариации (при линейном преобразовании, для суммы независимых случайных векторов). Доказательство.

§ 3.7. Многомерное нормальное распределение

- ☐. Теорема (о линейном преобразовании для нормального вектора) (без док-ва).
- ☐☐ Теорема (о линейном преобразовании для нормального вектора). Доказательство.
- ☐. Следствие (о независимости и корреляции для нормального вектора) (без док-ва).
- ☐☐ Следствие (о независимости и корреляции для нормального вектора). Доказательство.
- ☐. Следствие (о независимости и ортогональном преобразовании нормального вектора) (без док-ва).
- ☐☐ Следствие (о независимости и ортогональном преобразовании нормального вектора). Доказательство.
- ☐☐ Контрпример не нормального вектора с нормальными одномерными компонентами. Доказательство.

§ 3.8. Копулы

- ☐. Опр. (копулы).
- ☐☐ Теорема (Шкляра). Доказательство в непрерывном случае.
- ☐☐ Примеры базовых копул.
- ☐☐ Теорема (неравенства Frechet-Hoeffding). Доказательство.
- ☐. Опр (носителя случайной величины).
- Опр. (неубывающего множества).
- ☐☐ Теорема (о правой границе неравенства Frechet-Hoeffding). Доказательство.
- ☐☐ Следствие (об идеальной зависимости). Доказательство.
- ☐☐ Теорема (об инвариантности копулы при строго возрастающем преобразовании). Доказательство.
- ☐. Опр. (коэффициента корреляции Спирмена).
- ☐. Опр. (коэффициента корреляции Кендалла).
- ☐☐ Свойства коэффициентов корреляции Спирмена и Кендалла. Доказательство.
- ☐. Опр. (гауссовской копулы).
- ☐. Опр. (коэффициентов экстремальной зависимости).
- ☐☐ Лемма (о коэффициентах экстремальной зависимости в непрерывном случае). Доказательство.

Глава 4. Сходимость случайных величин и распределений. Предельные теоремы

§ 4.1. Сходимость последовательностей случайных величин

- ☐☐ Теорема (Бореля-Кантелли). Доказательство.
- ☐. Опр. (сходимости почти наверное).
- ☐. Опр. (сходимости по вероятности).
- ☐. Опр. (слабой сходимости).
- Замечание (о равномерной сходимости, если ф.р. непрерывна). Доказательство.

- ☐ Опр. (сходимости в среднеквадратическом).
- ☐ Лемма (критерий сходимости п.н.). Доказательство.
- ☐ Теорема (п.н. vs по вероятности) (без док-ва).
- ☐ Теорема (п.н. vs по вероятности). Доказательство.
- ☐ Теорема (по вероятности vs слабая) (без док-ва).
- ☐ Теорема (по вероятности vs слабая). Доказательство.
- ☐ Теорема (с.к.с. vs p vs п.н.) (без док-ва).
- ☐ Теорема (с.к.с. vs p vs п.н.). Доказательство.

§ 4.2. Свойства сходимостей

- ☐ Теорема (критерий сходимости по распределению) (без док-ва).
- ☐ Лемма (сходимость при непрерывных преобразованиях). Доказательство.
- ☐ Лемма (сходимость и арифметические операции). Доказательство.
- ☐ Теорема Слуцкого (без док-ва).
- ☐ Теорема Слуцкого. Доказательство.
- ☐ Опр. (равномерной интегрируемости).
- ☐ Теорема (критерий сходимости математических ожиданий) (без док-ва).
- ☐ Теорема Лебега. Доказательство.

§ 4.3. Характеристические функции

- ☐ Опр. (характеристической функции).
- ☐ Замечание (о вычислении и существовании х.ф.).
- ☐ Свойства характеристических функций (значение в нуле, линейное преобразование, сумма независимых, гладкость в нуле) (без док-ва).
- ☐ Свойства характеристических функций с доказательством (значение в нуле, линейное преобразование, сумма независимых, гладкость в нуле).
- ☐ Примеры вычисления характеристических функций (вырожденное, Пуассона, нормальное).
- ☐ Теорема (формула обращения). Доказательство.
- ☐ Замечание (почему так важна формула обращения для характеристических функций?).
- ☐ Следствие об устойчивости по суммированию (без док-ва).
- ☐ Следствие об устойчивости по суммированию. Доказательство.
- ☐ Теорема о непрерывном соответствии (без док-ва).
- ☐ Теорема (закон больших чисел Хинчина) (без док-ва).
- ☐ Теорема (закон больших чисел Хинчина). Доказательство.
- ☐ Теорема (закон больших чисел Колмогорова) (без док-ва).
- ☐ Теорема (закон больших чисел Колмогорова). Доказательство достаточности при 4-ом моменте.

§ 4.4. Центральная предельная теорема

- ☐ Теорема (центральная предельная теорема) (без док-ва).
- ☐ Теорема (центральная предельная теорема). Доказательство.
- ☐ Следствие (из ЦПТ).
- ☐ Теорема (неравенство Берри-Эссеена) (без док-ва).
- ☐ Замечание (о неумлучшаемости неравенства Берри-Эссеена).
- ☐ Теорема (оценка точности в теореме Пуассона). Доказательство.

§ 3.9. Условное математическое ожидание

- ☐ Опр. (условного математического ожидания).
- ☐ Теорема о существовании УМО (без док-ва).
- ☐ Свойства УМО с доказательством (УМО константы, УМО от измеримой с.в., монотонность, линейность, неравенство треугольника, аналог формулы полной вероятности).
- ☐ Свойства УМО с доказательством (УМО по более бедной сигма алгебре, вынос измеримой с.в.).
- ☐ Теорема об ортогональной проекции. Доказательство.
- ☐ Лемма (вычисление УМО для а.н.р.) (без док-ва).
- ☐ Лемма (вычисление УМО для а.н.р.). Доказательство.
- ☐ Лемма (вычисление УМО для дискретных). (без док-ва).
- ☐ Лемма (вычисление УМО для дискретных). Доказательство.
- ☐ Теорема (УМО для гауссовских векторов). Доказательство.