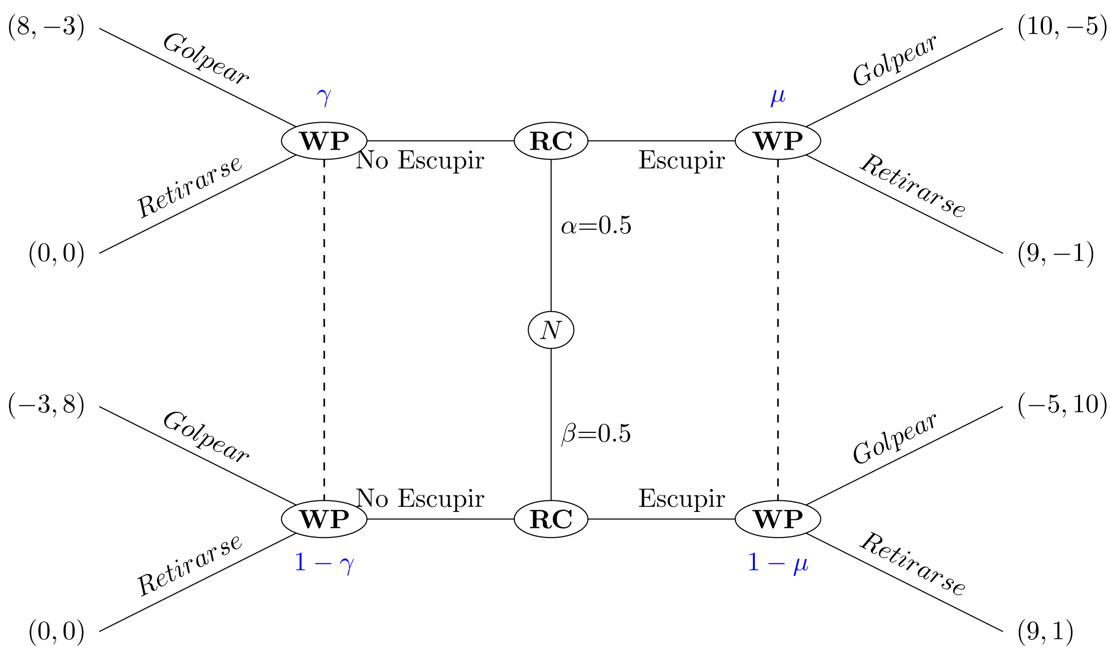
# 2nda Propuesta de Examen - Teoría de Juegos

Andro Asatashvili

Junio 2022

## 1 1er problema

En el CIDE, Robinson Crusoe (**RC**) y Winnie the Pooh (**WP**) son estudiantes de la licenciatura en Economía. Un día, **WP** escupe a **RC** porque éste comió su miel sin permiso. Para vengarse del escupitajo, **RC** entrena, pero **WP** desconoce qué tanto entrena. **RC** obtiene una fuerza ($\alpha$) o se lastima entrenando ($\beta$), pero **WP** desconoce el tipo (mientras que **RC** lo sabe). De este modo, **RC** quiere pelear contra **WP**, pero además, quiere escupirle de vuelta. De este modo:




1. Encuentra (si hay) el equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto (PBNE) tipo *separador* para la venganza de **RC**
2. Encuentra (si hay) el equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto (PBNE) tipo *pooling* para la venganza de **RC**

TIP: Para estas preguntas, haz uso de la forma extendida para que no te confundas con la resolución del problema

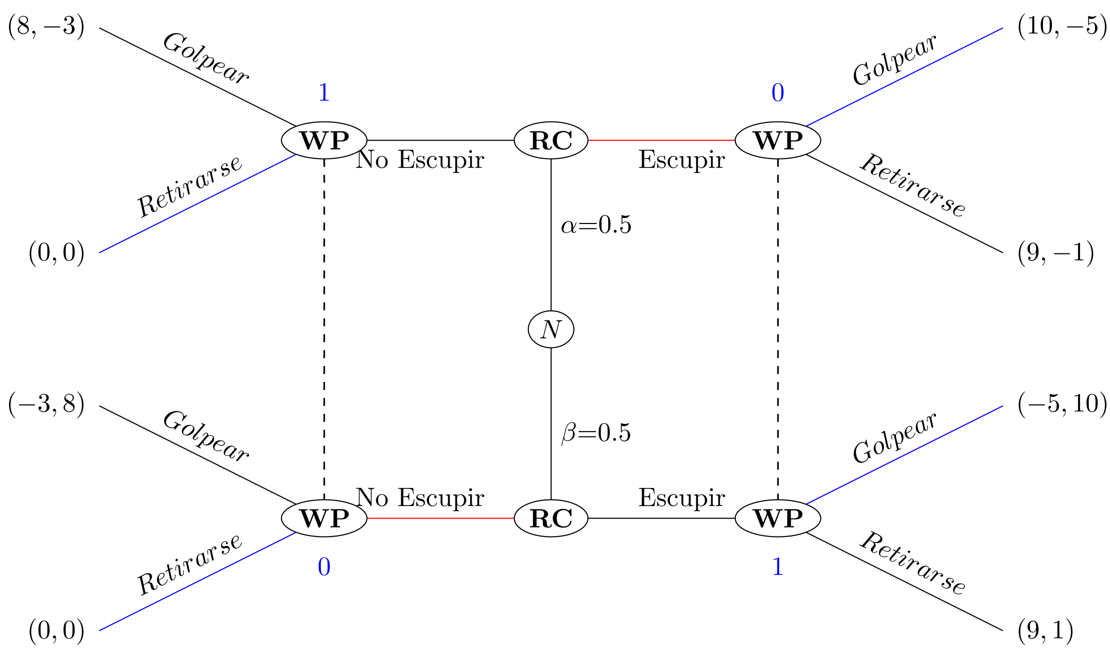
## 1.1 *Separador*

1. $S_1^{\alpha}$ = No escupir, $S_1^{\beta}$ = Escupir

$$\therefore \gamma = 1 \text{ y } \mu = 0$$

- *Br* para **WP** (azul)
    1. Si **RC** es de tipo $\alpha \longrightarrow S_2$ = Retirarse, debido a que $0 > -3$
    2. Si **RC** es de tipo $\beta \longrightarrow S_2$ = Golpear debido a que $10 > 1$

- *Br* para **RC** (rojo)
    1. Si **RC** es de tipo $\alpha \longrightarrow S_1$=Escupir, debido a que $10 > 0$
    2. Si **RC** es de tipo $\beta \longrightarrow S_1$ = No escupir, debido a que $0 > -5$



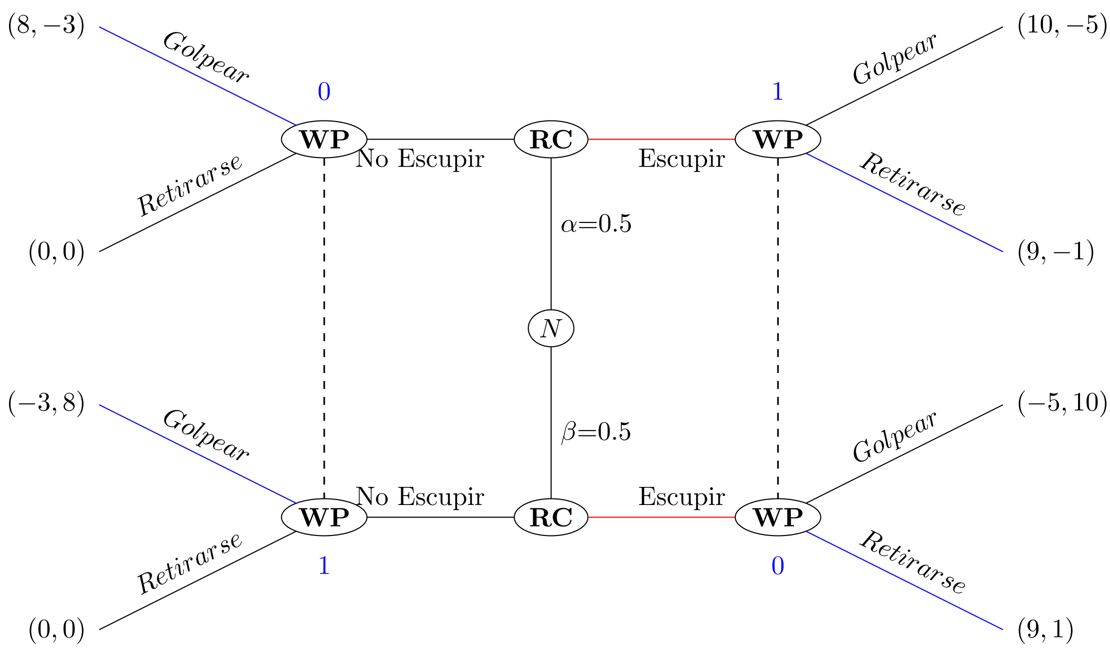

$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Separador* de este tipo

dado que la *Br* de **WP** no coincide con la *Br* de **RC**

2. $S_1^\alpha$ = Escupir, $S_1^\beta$ = No Escupir

$$\therefore \gamma = 0 \text{ y } \mu = 1$$

- *Br* para **WP** (azul)
  1. Si **RC** es de tipo $\alpha \longrightarrow S_2$= Retirarse, debido a que $-1 > -5$
  2. Si **RC** es de tipo $\beta \longrightarrow S_2$ = Golpear debido a que $8 > 0$
- *Br* para **RC** (rojo)
  1. Si **RC** es de tipo $\alpha \longrightarrow S_1$ = Escupir, debido a que $9 > 8$
  2. Si **RC** es de tipo $\beta \longrightarrow S_1$ = Escupir, debido a que $9 > -3$




$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Separador* de este tipo

dado que la *Br* de **WP** no coincide con la *Br* de **RC**

$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Separador*

## 1.2 *Pooling*

1. $S_1^\alpha$ = Escupir, $S_1^\beta$ = Escupir

$$\therefore \gamma \in [0,1]$$

$\longrightarrow$ usando regla de Bayes:

$$\therefore \mu = 0.5$$

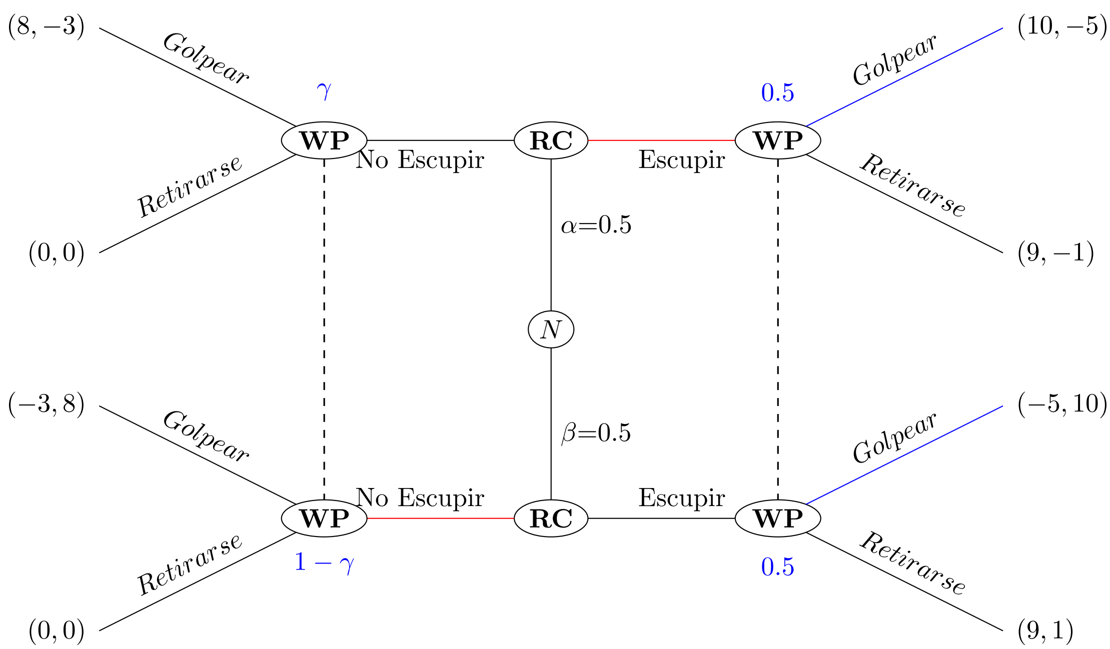
- *Br* para **WP** (azul)

  1. $UE_2$ = (Escupir, Golpear ; $\mu$=0.5) = (-5)(0.5) + (10)(0.5) = 2.5
  2. $UE_2$ = (Escupir, Retirarse ; $\mu$=0.5) = (-1)(0.5) + (1)(0.5) = 0

  $\therefore$ Golpear $\succ$ Retirarse $\longrightarrow S_2$ = Golpear

- *Br* para **RC** (rojo)

  1. Si **RC** es tipo $\alpha \longrightarrow$ Escupir es *Br*
  2. Si **RC** es tipo $\beta \longrightarrow$ No Escupir domina estrictamente a Escupir




$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Pooling* de este tipo

dado que la *Br* de **WP** no coincide con la *Br* de **RC** (cuando este es tipo $\beta$)

2. $S_1^\alpha$ = No Escupir, $S_1^\beta$ = No Escupir

$$\therefore \mu \in [0,1]$$

$\longrightarrow$ usando regla de Bayes:

$$\therefore \gamma = 0.5$$

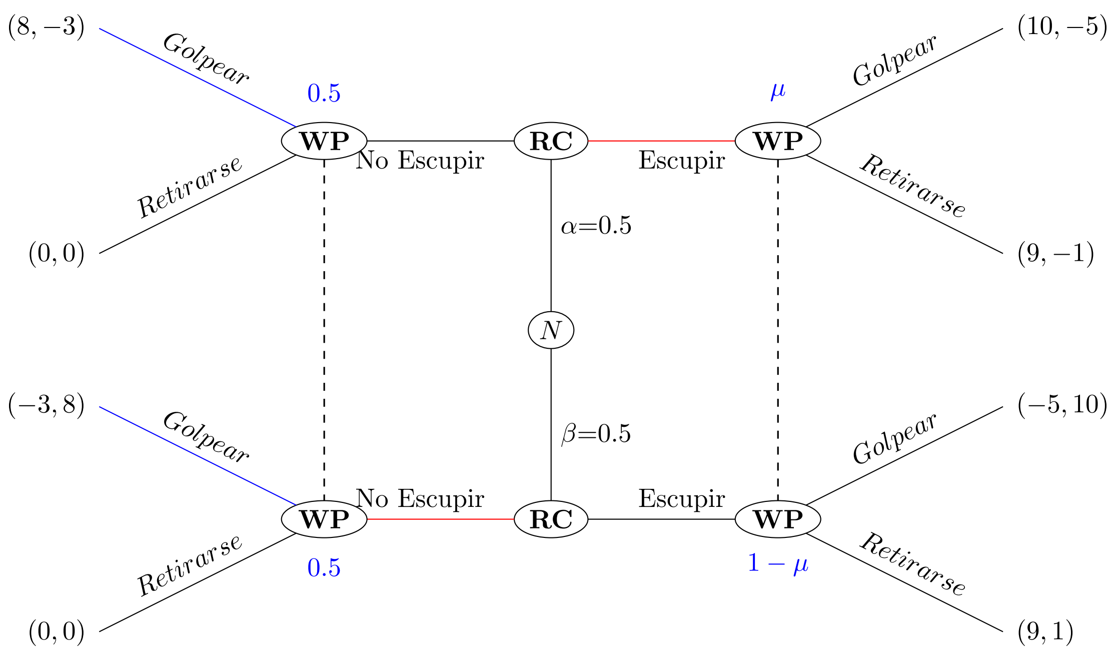
- *Br* para **WP** (azul)

  1. $UE_2$ = (Golpear ; $\gamma$=0.5) = (-3)(0.5) + (8)(0.5) = 2.5
  2. $UE_2$ = (Retirarse ; $\gamma$=0.5) = (0)(0.5) + (0)(0.5) = 0

  $\therefore$ Golpear $\succ$ Retirarse $\longrightarrow S_2$ = Golpear

- *Br* para **RC** (rojo)

  1. Si **RC** es tipo $\alpha \longrightarrow$ Escupir domina estrictamente a No Escupir
  2. Si **RC** es tipo $\beta \longrightarrow$ Escupir puede ser Br si **WP** decide retirarse ($9 > -3$)

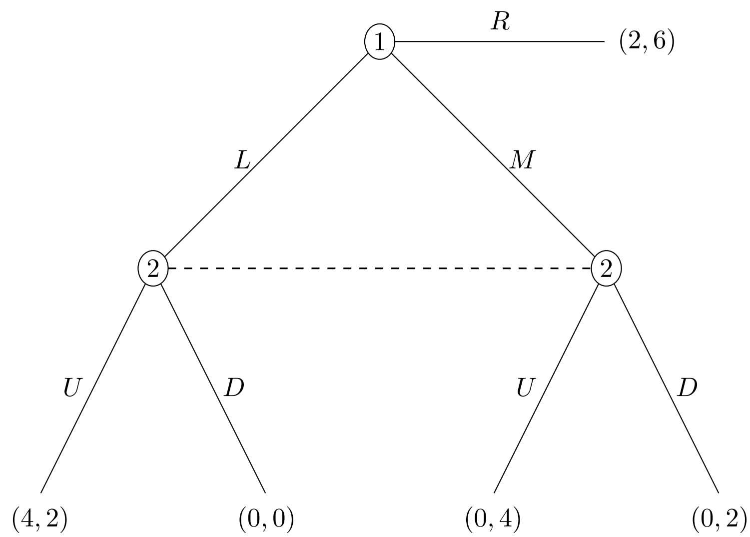



$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Pooling* de este tipo dado que la *Br* de **WP** no coincide con la *Br* de **RC** (cuando este es tipo $\alpha$)

$\therefore$ **NO** hay un PBNE *Pooling*

# 2 2ndo problema

Resuelve el siguiente juego con los Jugadores 1 y Jugadores 2:

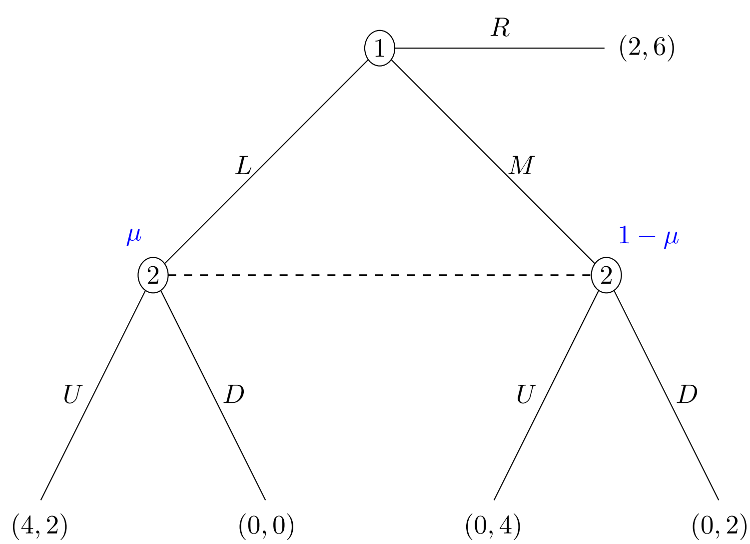



## 2.1 Resolución

Creamos una matriz de pagos en donde las estrategias del Jugador 1 están en las filas y las del Jugador 2 están en las columnas:

| | U | D |
|---|---|---|
| L | $(4, 2)$ | $(0, 0)$ |
| M | $(0, 4)$ | $(0, 2)$ |
| R | $(2, 6)$ | $(2, 6)$ |

De este modo, podemos ver que hay 2 NE: (L,U) y (R,D). Esto implica que una de los PBNE será uno de estos NE. De tal forma, comenzamos a solucionar el juego al buscar un PBNE.



Procedemos a calcular las $UE$ del Jugador 2:

$$UE_2(U) = (2)(\mu) + (4)(1-\mu) = 4 - 2\mu \quad \longrightarrow \quad 2 - \mu$$
$$UE_2(D) = (0)(\mu) + (2)(1-\mu) = 2 + 2\mu \quad \longrightarrow \quad 1 - \mu$$

De esta forma:

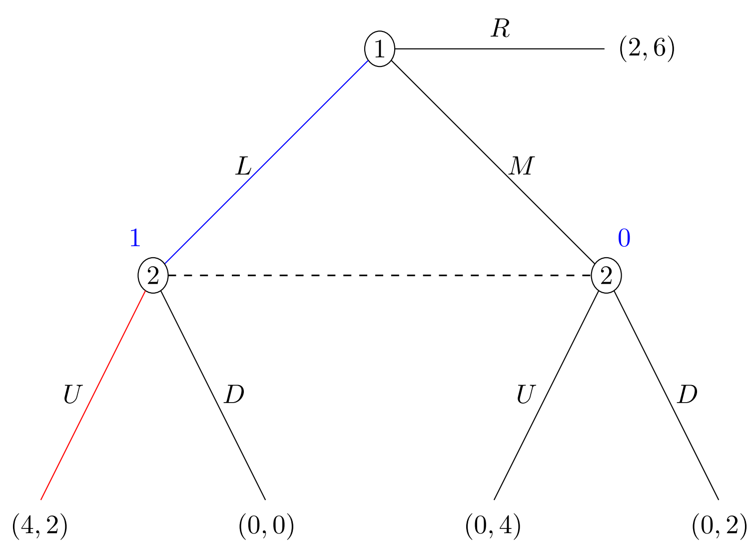
$$UE_2(U) > UE_2(D) \qquad \text{para cualquier} \qquad \mu \in [0,1]$$
$$\therefore \;\; \mathrm{S}_2 = U$$

Ahora calculamos las $UE$ del Jugador 1:

$$UE_1(L,U) = 4$$
$$UE_1(M,U) = 0$$
$$UE_1(R,U) = 2$$
$$\therefore \;\; \mathrm{S}_1 = L$$

Esto implica que:

$$\mu = 1$$




Por tanto:

$$\text{PBNE Único en estrategias puras: } [S_1, S_2, \mu] = [L, U, \mu = 1]$$

# 3 3er problema

Tomando en cuenta el siguiente juego:

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 6,6 | 3,8 | -4,10 |
| $\beta$ | 8,3 | 5,5 | 2,2 |
| $\gamma$ | 10,-4 | 2,2 | 0,0 |

En donde las estrategias del Jugador 1 están en las filas y las estrategias del Jugador 2 están en las columnas:

1. Propón 2 acuerdos diferentes en los cuales ambos jugadores reaccionan a un desvío de dichos acuerdos

## 3.1 Resolución

1era propuesta:

- en $t = 0 \longrightarrow \alpha\alpha$
- Si no hay desvío $\longrightarrow \alpha\alpha \quad \forall\ t = 1, 2, 3...\infty$
- Si hay desvío $\longrightarrow \beta\beta$ para el resto de los periodos

2nda propuesta:

- en $t = 0 \longrightarrow \alpha\alpha$
- Si no hay desvío $\longrightarrow \beta\beta \quad \forall\ t = 1, 2, 3...\infty$
- Si hay desvío $\longrightarrow \gamma\gamma$ para el resto de los periodos

Solución a la primera propuesta:

- Pagos descontados al seguir estrategia de no desvío $\longrightarrow \frac{6}{1-\delta}$
- Pagos descontados al seguir estrategia de desvío (tomando en cuenta que el pago más alto posible se encuentra en $\gamma\alpha$ para el Jugador 1 y $\alpha\gamma$ para el Jugador 2) $\longrightarrow 10 + \frac{5\delta}{1-\delta}$
- $\frac{6}{1-\delta} \geq 10 + \frac{5\delta}{1-\delta}$

  $6 \geq 10(1-\delta) + 5\delta$
  $6 \geq 10 - 10\delta + 5\delta$
  $6 \geq 10 - 5\delta$
  $5\delta \geq 4$
  $\therefore \quad \delta \geq \frac{4}{5}$
- Los jugadores seguirán jugando $\alpha\alpha$ si $\delta \geq \frac{4}{5}$ $\forall t = 0, 1, 2...\infty$

Solución a la segunda propuesta:

- Pagos descontados al seguir estrategia de no desvío $\longrightarrow 6 + \frac{5}{1-\delta}$
- Pagos descontados al seguir estrategia de desvío (tomando en cuenta que el pago más alto posible se encuentra en $\gamma\alpha$ para el Jugador 1 y $\alpha\gamma$ para el Jugador 2) $\longrightarrow 10 + \frac{2\delta}{1-\delta}$
- $6 + \frac{5}{1-\delta} \geq 10 + \frac{2\delta}{1-\delta}$

  $\frac{3\delta}{1-\delta} \geq 4$
  $3\delta \geq 4(1-\delta)$
  $3\delta \geq 4 - 4\delta$
  $7\delta \geq 4$
  $\therefore \quad \delta \geq \frac{4}{7}$
- Los jugadores seguirán jugando $\beta\beta$ si $\delta \geq \frac{4}{7}$ $\forall t = 1, 2, 3...\infty$