1. $I = (f_1, f_2)$
   $f_1 = 2y^2 + yz, f_2 = xy + z$
   $g_1 = xz^3 + 4yz^2, g_2 = xz^2 + 4yz^3$
   Построим базис Грёбнера данного идеала. Если многочлен редуцируется по этому базису к 0, он лежит в идеале.

$$
\begin{gathered}
S(f_1, f_2) = 2xy^2 + xyz - 2xy^2 - 2yz \xrightarrow{f_2} xyz - 2yz - xyz - z^2 = -2yz - z^2 \\
f_3 = -2yz - z^2 \\
S(f_1, f_3) = 2y^2z + yz^2 - 2y^2z - yz^2 = 0 \\
S(f_2, f_3) = -2xyz - 2z^2 + 2xyz + xz^2 \\
f_4 = xz^2 - 2z^2 \\
S(f_1, f_4) = 2xy^2z^2 + xyz^3 - 2xy^2z^2 + 4y^2z^2 \xrightarrow{f_1} xyz^3 - 2yz^3 \xrightarrow{f_2} 0 \\
S(f_2, f_4) = 2yz^2 + z^3 \xrightarrow{f_3} 0 \\
S(f_3, f_4) = -2xxyz^2 - xyz^2 + 2xyz^2 - 4yz^2 \xrightarrow{f_3} 0
\end{gathered} \tag{1}
$$

$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - базис Грёбнера. Проверим принадлежность многочленов идеалу

$$
\begin{gathered}
g_1 \xrightarrow{f_4} 4yz^2 + 2z^3 \xrightarrow{f_3} 0 \Rightarrow g_1 \in I \\
g_2 \xrightarrow{f_4} 4yz^3 + 2z^2 \xrightarrow{f_3} 2z^2 - 2z^4 \Rightarrow g_1 \notin I
\end{gathered} \tag{2}
$$

2. $f_1 = y + 3z, f_2 = xy - 2y^2, f_3 = 2xz - y.$
   Найдем полный базис Грёбнера:

$$
\begin{gathered}
S(f_1, f_2) = xy + 3xz - xy + 2y^2 = 3xz + 2y^3 \xrightarrow{f_3} 2y^2 + \frac{3}{2}y \xrightarrow{f_1} \frac{3}{2}y - 6yz \xrightarrow{f_1} \\
\xrightarrow{f_1} \frac{3}{2}y + 18z^2 \xrightarrow{f_1} 4z^2 - z \\
f_4 = 4z^2 - z \\
S(f_1, f_3) \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_1} 0 \\
S(f_2, f_3) = y^2 - 4y^2z \xrightarrow{f_1} -4y^2z - 3yz \xrightarrow{f_4} 0 \\
S(f_1, f_4) = 12z^3 + yz \xrightarrow{f_1} 12z^3 - 3z^2 \xrightarrow{f_4} 0 \\
S(f_2, f_4) = xyz - 8y^2z^2 \xrightarrow{f_2} 2y^2z - 8y^2z^2 \xrightarrow{f_4} \xrightarrow{f_1} 0 \\
S(f_3, f_4) = xz - 2yz \xrightarrow{f_3} y - 4yz \xrightarrow{f_1} 4yz + 3z \xrightarrow{f_1} 12z^2 + 3z \xrightarrow{f_4} 0
\end{gathered} \tag{3}
$$

$\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ - полный базис Грёбнера.

Заметим, что $L(f_2)\vdots L(f_1) \Rightarrow f_2$ можно выбросить. $f_4 \to \frac{1}{4}f_4$. Редуцируем f_3 по f_1, f_3' = $xz + \frac{3}{2}z$.

Искомый базис: $\{f_1, f_3', \frac{1}{4}f_4\}$

3. $f_1 = xz^3 + 1, f_2 = yz - z^2$.
Изменим лексикографический порядок на обратный. Найдем базис Грёбнера, выбросим из него все многочлены, у которых есть z в записи, все оставшиеся многочлены образуют искомую порождающую систему.

$$\begin{gathered}
S(f_1, f_2) = zy^2x + 1 \\
f_3 = zy^2x + 1 \\
S(f_1, f_3) = y^2 - z^2 \xrightarrow{f_2} y^2 - zy \\
f_4 = y^2 - zy \\
S(f_2, f_3) = zy^3x + z \xrightarrow{f_3} z - y \\
f_5 = z - y \\
S(f_3, f_4) = y^3x + 1 = f_6
\end{gathered} \tag{4}$$

Я выписал вывод всех, которые нам нужны, док-во того, что это система Грёбнера очень громозкое для теха, если надо, я вышлю черновики фотками.
Ответ: $y^3x + 1$.