1. Пусть G – группа невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$, где x, y, z - любые элементы из $\mathbb{R}$,

   H – подгруппа группы G матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix}$, где p - любой элемент из $\mathbb{R}$.

   Заметим, что $\forall h \in H \Rightarrow a \neq 0$, потому что иначе матрица будет вырожденной. Аналогично $\forall g \in G \Rightarrow x, z \neq 0$.

   Докажем, что H - подгруппа:

   1) $E \in H$

   2) $p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \in H, q = \begin{pmatrix} b & 0 \\ q & b^2 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow pq = \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ q & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ bp + a^2 q & (ab)^2 \end{pmatrix} \in H$

   $\Rightarrow \forall p, q \in H \Rightarrow pq \in H$

   3) $p \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \in H$

   Найдём p^{-1}:

   $\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 0 \\ p & a^2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a^3 & -p & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{p}{a^3} & \frac{1}{a^2} \end{array}\right)$

   $\Rightarrow p^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-p}{a^3} & (\frac{1}{a})^2 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow \forall p \in H \Rightarrow p^{-1} \in H$

   $\Rightarrow H$ - подгруппа в G

   Докажем: $H \lhd G$.

   Доказательство: достаточно доказать $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$.

   Возьмём произвольный элемент $g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in G$.

   Найдём g^{-1} : $\left(\begin{array}{cc|cc} x & 0 & 1 & 0 \\ y & z & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} x & 0 & 1 & 0 \\ xy & xz & 0 & x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & xz & -y & x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{y}{xz} & \frac{1}{z} \end{array}\right) \Rightarrow$

   $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{y}{xz} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$

   $$\forall h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow ghg^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ p & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{y}{xz} & \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ ay + pz & a^2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{y}{xz} & \frac{1}{z} \end{pmatrix} =$$

   $$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{-a^2 y + ay + pz}{x} & a^2 \end{pmatrix}, a \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{-a^2 y + ay + pz}{x} & a^2 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow \forall g \in G, h \in H : ghg^{-1} \in H$$

   $$\Rightarrow \forall g \in G : gHg^{-1} \in H \Rightarrow H \lhd G,$$

   что и требовалось доказать.

---

2. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{16}$ гомоморфизм $\Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \Rightarrow \varphi(k) = \varphi(1+1+...+1) = k\varphi(1)$.
   Пусть $\varphi(1) = a$. Проверем корректность:

   $$\forall l, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \equiv (k + 20l)\ (mod 20) \Rightarrow \text{должно соблюдться: } \varphi(k) \equiv \varphi(k + 20l)\ (mod 16)$$

   $$\Rightarrow ak \equiv ak + 20al\ (mod 16) \Rightarrow 20a \equiv 0\ (mod 16) \Rightarrow 5a \equiv 0\ (mod 4) \Rightarrow a \vdots 4$$

   $$\Rightarrow \text{Подходят только: } a = 0, 4, 8, 12$$

Итого получили отображение $\varphi(k) = ak$. Корректно, когда $a \in \{0, 4, 8, 12\}$
Проверка на гомоморфизм: $\varphi(k+l) = (k+l)a \equiv (ka+la) \ (mod 16) = \varphi(k)+\varphi(l)$ - гомоморфизм
Ответ: $0, 4, 8, 12$

---

3. Для начала поймём, что такое H формально. Число $c \in (C\backslash\{0\})$ имеет конечный порядок $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : c^m = e = 1$. Запишем число c в тригонометрической форме: $c = |c|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где α - аргумент комплексного числа c. Теперь c^m можно записать как $|c|^m(\cos(m\alpha)+i\sin(m\alpha))$, а 1 как $|1|(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)), k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что если $|c|\neq 1$, то при возведении в любую степень, отличную от 0 (а именно такие мы рассматриваем $m \neq 0$), оно не будет равно единице. Следовательно, $\forall h \in H \Rightarrow |h|= 1$. Теперь рассмотрим угол. $m\alpha = 2\pi k \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi k}{m}$, но $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha$ – любой угол вида πq, где $q \in \mathbb{Q}$.
Построим гомоморфизм: $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$. Пусть $q \in \mathbb{Q}, \varphi(q) = |1|(\cos(2\pi q) + i\sin(2\pi q))$.
Проверим, что полученное отображение действительно гомоморфизм:
$q, p \in \mathbb{Q}, \varphi(q+p) = |1|(\cos(2\pi(q+p)) + i\sin(2\pi(q+p))) = |1|(\cos(2\pi q + 2\pi p) + i\sin(2\pi q + 2\pi p)) =$
$= |1|(\cos(2\pi q) + i\sin(2\pi q)) \cdot |1|(\cos(2\pi p) + i\sin(2\pi p)) = \varphi(q) \cdot \varphi(p) \Rightarrow \varphi$ - гомоморфизм.
Найдём ядро данного гомоморфизма: $q \in \mathbb{Q}, \varphi(q) = |1|(\cos(2\pi q) + i\sin(2\pi q)) = 1 =$
$= |1|(\cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k)), k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\pi q = 2\pi k$ для какого-то $k \Rightarrow q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Ker(\varphi) = \mathbb{Z}$
Найдём образ этого гомоморфизма: применяя отображение к рациональным числам мы, очевидно, получаем комплексное число с модулем 1 и аргументом вида πq, где $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow Im(\varphi) = H$
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме: $H \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

---

4. (1) $\to$ (2) Пусть от противного $\exists g \in G : g \in A, g \in B, g \neq e$. Тогда по следствию теоремы Лагранжа $\begin{cases} |A| \vdots ord(g) \\ |B| \vdots ord(g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \vdots ord(g) \\ n \vdots ord(g) \end{cases}$ Но m и n - взимно просты $\Rightarrow$ их НОД равен 1 $\Rightarrow$ $ord(g) = 1 \Rightarrow g = e$ - получили противоречие $\Rightarrow$ (1) $\to$ (2)
(2) $\to$ (1) Докажем методом контрпозиции: докажем, что если n и m - не взаимнопросты, то $\exists G : \exists A \subseteq G, |A|= m, \exists B \subseteq G, |B|= n : A \cap B \neq \{e\}$. Возьмём $G = (\mathbb{Z}_{nm}, +)$, в качстве A возьмём подмножество элементов из G, делящихся на n. То есть, $\begin{cases} A \subseteq G \\ A = \langle n \rangle \end{cases} \Rightarrow |A|= \dfrac{mn}{n} = m$.
Аналогично выберем $B : \begin{cases} B \subseteq G \\ B = \langle m \rangle \end{cases} \Rightarrow |B|= \dfrac{mn}{m} = n$. По условию контрпозиции n и m - не взаимнопросты $\Rightarrow \exists p : p > 1, m = pk, k \in \mathbb{Z}$ и $n = pl, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow mn = p^2 lk, plk \vdots m, plk \vdots n$,
$plk < p^2 lk \Rightarrow plk \in Z_{mn} \Rightarrow \begin{cases} plk \in A \\ plk \in B \end{cases} \Rightarrow A \cap B \neq \{e\}$
$\Rightarrow$ доказали $\neg(1) \to \neg(2) \Rightarrow (2) \to (1)$.
$\begin{cases} (1) \to (2) \\ (2) \to (1) \end{cases} \Rightarrow (1) \equiv (2)$, что и требовалось доказать.
