1. Докажем, что $m \circ n = 2mn + 2m + 2n + 1$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$. Для этого докажем,что $2mn + 2m + 2n + 1 \neq -1, \forall m, n \neq -1$.

$$\begin{gathered} 2mn + 2m + 2n + 1 = -1 \\ n(2m+2) = -2 - 2m \\ n = \frac{-(2m+2)}{2m+2} = -1 \end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что уравнение $2mn + 2m + 2n + 1 = -1$ имеет решение только при $n = -1 =>$ $m \circ n$ - бинарная операция.

Докажем, что $(\mathbb{R} \backslash \{-1\}, \circ)$ - группа. Заметим, что операция коммутативна: $a \circ e = e \circ a = a$, воспользуемся этим в дальнейшем.

- Ассоциативность :

$$\begin{gathered} (a \circ b) \circ c = (2ab + 2a + 2b + 1) \circ c = 4abc + 4ac + 4bc + \\ +2c + 4ab + 4a + 4b + 2 + 2c + 1 = 4abc + 4ab + 4ac + \\ +2a + 2a + 4bc + 4b + 4c + 2 + 1 = a \circ (2bc + 2b + 2c + 1) = \\ = a \circ (b \circ c) \end{gathered} \tag{10}$$

- Нейтральный элемент:

$$\begin{gathered} a \circ e = e \circ a = a \\ 2ae + 2a + 2e + 1 = 2ae = 2e = 2a = 1 = a \\ 2ae + 2e + 1 = -a \\ e(2a+2) = -a - 1 \\ e = -\frac{(a+1)}{2a+1} = -\frac{1}{2} \end{gathered} \tag{3}$$

- Обратный элемент:

$$\begin{gathered} a \circ a^{-1} = e \\ 2aa^{-1} + 2a + 2a^{-1} + 1 = -\frac{1}{2} \\ 2a^{-1}(a+1) \\ a^{-1} = -\frac{(2a + \frac{3}{2})}{2a+2} \end{gathered} \tag{4}$$

2. Должны выполняться следующие условия:

$$\begin{gathered} k \in [0; 47] \\ k^6 = 0 \\ k^5 \neq 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Для операции $" + "$ $k^6 <=> 6k, k^5 <=> 5k$. Данные условия являются достаточными для того, чтобы элемент группы $(\mathbb{Z}_{48}, +)$ был порядка 6 (Условие $k^5 \neq 0$ необходимо, что порядок элемента был не меньше 6) . Для начала найдём все элементы $k \in [0; 47]$, для которых выполняется $6k\, mod(48) = 0.k = \{0, 8, 16, 24, 32, 40\}$. Теперь для каждого из них проверим, что $5k\, mod(48) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(5*0)\%48 &= 0 \\
(5*8)\%48 &= 40 \\
(5*16)\%48 &= 0 \\
(5*24)\%48 &= 0 \\
(5*32)\%48 &= 0 \\
(5*40)\%48 &= 8
\end{aligned} \tag{6}
$$

Ответ: $k = \{8, 40\}$

3. $$
\begin{aligned}
&\sigma = (243) \\
&\sigma^2 = (234) \\
&\sigma^3 = id \\
&H =< sigma >= \{(243), (234), id\} \\
&A_4 = \{id, (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}
\end{aligned} \tag{7}
$$

   Группа A_4 - всё чётные перестановки длины 4, имеет 12 элементов, а в подгруппе H 3 элемента $=>$ существует 4 различных смежных левых и 4 различных смежных правых классов. В силу того, что различные смежные классы не пересекаются и $id \in H$, можно организовать следующий перебор:

   1) Берем минимальный элемент из текущего множества, выписываем смежный класс, удаляем из множества все выписанные элементы данного смежного класса

   2) Изначально множество = A_4

   - Левые:

$$
\begin{aligned}
idH &= \{id, (243), (234)\} \\
(123)H &= \{(123), (124), (12)(34)\} \\
(132)H &= \{(132), (13)(24), (134)\} \\
(142)H &= \{(142), (143), (14)(23)\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

   - Правые:

$$
\begin{aligned}
Hid &= \{id, (234), (243)\} \\
H(123) &= \{(123), (124), (12)(34)\} \\
H(132) &= \{((132), (13)(24), (142)\} \\
H(134) &= \{(134), (143), (14)(23)\}
\end{aligned} \tag{9}
$$

4. Пусть G - циклическая группа, образуемая элементом g, а H - её подгруппа. Возьмём n такое, что $g^n \in H$ и g минимально, а также $\forall m$, такое, что $g^m \in H$. Представим m в виде $m = nk + r, r = m\%n$. По свойству подгруппы H содержит $h^r = h^{n^{-k}} h^m$. Заметим, что $r < n => r = 0$ (Если $r \neq 0$ n не является минимальным таким, что $g^n \in H$). Следовательно, $H =< g^n >$.