1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Обратимые элементы:

  Матрица A обратима, если $\exists A^{-1} : AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \tag{2}$$

  Заметим, что матрица A^{-1} существует, если $a \neq 0 \wedge c \neq 0$.

- Делители нуля:
  A - делитель нуля, если $A \neq 0 \wedge \exists B_1, B_2 \neq 0 : AB_1 = B_2A = 0$
  Заметим, что для общего вида матрицы A ответа нет, рассмотрим 2 случая:

  - $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \neq 0 \tag{3}$$

    Тогда сущ-ет матрица $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : AB_1 = B_1A = 0$

  - $$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, b, c \neq 0 \tag{4}$$

    Тогда сущ-ет матрица $B_1 = \begin{pmatrix} \text{c} & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : AB_1 = B_1A = 0$

  Ответ: все матрицы вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a \vee c \neq 0, A \neq 0$ - Делители нуля.

- Нильпотенты:

  $$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & f(a,b,c) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

  Где f - сумма нескольких слагаемых, состоящих из a, b, c. Чтобы матрица была нильпотентом $a^n = 0 \wedge c^n = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge c = 0$. Заметим, что в таком случае $f(a,b,c)$ = 0 при $n >= 3$. Также заметим, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не является нильпотентом по определению.
  Ответ: матрицы вида B = $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \neq 0$ - нильпотенты

2. Если данный идеал главный - он порождается некоторым элементом. Пусть f - порождающий элемент данного идеала, тогда x и $y - 1$ делятся на $f \Rightarrow$ степень f не превосходит 1. Разберем 2 случая:

   - Пусть f - $const$. Тогда f обратим в $\mathbb{Q}[x, y] \Rightarrow$ единица входит в данных идеал. Попробуем её представить: $ax + b(y - 1) = 1, deg(a, b) = 0$. Данное уравнение решений не имеет.
   - Пусть $deg(f)$ = 1, тогда $x = a \cdot f, y = b \cdot f$, $deg(a) = deg(b) = 0 \Rightarrow a, b = const$.
     $f = \alpha x + \beta y + c => x = a(\alpha x + \beta y + c) \Rightarrow \beta = c = 0, y = b(\alpha x + \beta y + c) \Rightarrow \alpha = 0$.
     Тогда $f = 0 \Rightarrow f - const \Rightarrow deg(f) = 0$.

3. Установим следующее отображение $\phi : f(x) \to (f(0), f(-3))$. Докажем что оно - гомоморфизм.

$$\begin{gathered}\phi(f(x)+g(x)) = \phi((f+g)(x)) = \\ = ((f+g)(0), (f+g)(-3)) = (f(0)+f(-3), g(0)+g(-3)) = \\ = \phi(f(x)) + \phi(g(x))\end{gathered} \tag{6}$$

(Используется свойство линейности сложения многочленов)

$$\begin{gathered}\phi(f(x)g(x)) = \phi((fg)(x)) = (fg(0), fg(-3)) = \\ = \phi(f(x)) \cdot \phi(g(x))\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим идеал (x^2+3x). Заметим, что все элементы из этого идеала имеют 2 корня: 0 и -3, при этом никакой другой элемент, не лежащий в этом идеале не переходит в $(0,0)$ (т.к не имеет оба этих корня) $\Rightarrow Ker\phi = (x^2+3x)$. $Im\phi = C \bigoplus C \Rightarrow$ Все условия для изоморфизма выполняются.