Задачи к лекции 6

В этом листке используется обозначение $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, где K — некоторое поле. При сравнении одночленов от нескольких переменных всегда используется лексикографический порядок.

1. Пусть $M_0 \subset R$ — множество всех одночленов с коэффициентом 1. Найдите все одночлены $m \in M_0$, для которых существует лишь конечное число одночленов $m' \in M_0$ с условием $m' \prec m$.

2. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in R$ называется *симметрическим*, если

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всякой перестановки $\sigma \in S_n$. Докажите, что если $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ — старший член некоторого симметрического многочлена, то $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

3. Проверьте, что операция редукции заданного монома относительно заданного многочлена является линейным оператором на векторном пространстве R.

4. Пусть $F = \{x_1 + x_2, x_3 + x_4\}$ и $g = x_2x_3^2x_4 - x_1x_3x_4^2$. Найдите (какой-нибудь один) остаток многочлена g относительно системы F.

5. Покажите, что остаток многочлена g относительно системы F определён неоднозначно, если
(а) $F = \{xy + 1, y^2 - 1\}$ и $g = xy^2 - x$;
(б) $F = \{xy - 1, y^2 - 1\}$ и $g = x^2y + xy^2 + y^2$.

6. Докажите, что если для некоторых многочленов $g_1, g_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ их разность $g_1 - g_2$ редуцируется к нулю относительно системы $F \subset R \setminus \{0\}$, то многочлены g_1 и g_2 можно редуцировать к одному и тому же многочлену.

7. Пусть F — произвольное непустое множество. Докажите, что все многочлены, обладающие единственным остатком относительно F, образуют подпространство в $K[x_1, \ldots, x_n]$ и что операция взятия остатка линейна на данном подпространстве.

8. Пусть $F \subset R \setminus \{0\}$ — некоторая система многочленов и $S(F)$ — множество всех S-многочленов системы F. Для каждого $f \in S(F)$ найдём какой-нибудь один остаток многочлена f относительно F. Докажите, что
(1) если все найденные остатки равны 0, то F является системой Грёбнера;
(2) если хотя бы один из остатков отличен от нуля, то F не является системой Грёбнера.

9. Выясните, какие из следующих множеств многочленов являются системами Грёбнера:
(а) система F из задачи 4;
(б) $\{x^2y - y^2, x^2z - z^2\}$;
(в) $\{x^2y - y^2, x^2z - z^2, y^2z - yz^2\}$.

Домашнее задание

1. Какие значения может принимать длина убывающей (в лексикографическом порядке) цепочки одночленов от переменных x_1, x_2, x_3, начинающейся с одночлена $x_1x_2^3x_3^2$ и заканчивающейся одночленом $x_1x_2^2x_3^3$?

2. Найдите остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$, где

$$g = x_2^4x_3^6 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2, \quad f = x_2^4x_3 - x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2.$$

3. Выясните, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера, где

$$f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2, \quad f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4, \quad f_3 = x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3.$$

4. Докажите, что множество $F \subseteq K[x] \setminus \{0\}$ является системой Грёбнера тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F.