1. a)

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 - x^3 + 0x^2 - 2x - 1 & 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x} & \frac{1}{3}x + \frac{5}{9} \\
\quad \frac{5}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
\quad \underline{\frac{5}{3}x^4 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{9}x - \frac{10}{9}} & \\
\qquad -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} &
\end{array}$$

$$r_1 = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} \Rightarrow f = \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) g + r_1$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 - 2x^3 + x^2 + 0x - 2 & -\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x} & -\frac{27}{2}x + \frac{9}{4} \\
\quad -\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x - 2 & \\
\quad \underline{-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} & \\
\qquad -\frac{9}{4}x^2 + 0x - \frac{9}{4} &
\end{array}$$

$$r_2 = -\frac{9}{4}x^2 + 0x - \frac{9}{4} \Rightarrow g = \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right) r_1 + r_2$$

$$\begin{array}{l|l}
-\frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} & -\frac{9}{4}x^2 + 0x - \frac{9}{4} \\ \cline{2-2}
\underline{-\frac{2}{9}x^3 + 0x^2 - \frac{2}{9}x} & \frac{8}{81}x - \frac{4}{81} \\
\quad \frac{1}{9}x^2 + 0x + \frac{1}{9} & \\
\quad \underline{\frac{1}{9}x^2 + 0x + \frac{1}{9}} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = \left(\frac{8}{81}x - \frac{4}{81}\right) r_2$$

$$GCD(f,g) = -\frac{9}{4}x^2 + 0x - \frac{9}{4}$$

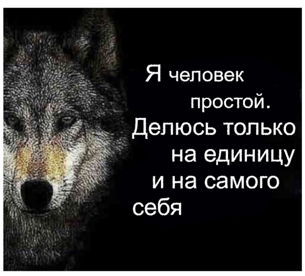
$$r_1 = f - \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) g$$

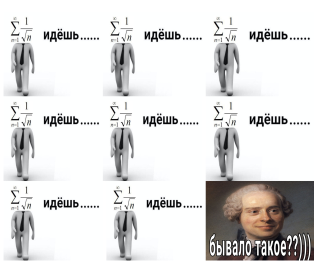
$$r_2 = g - \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right) r_1$$

$$GCD(f,g) = g - \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right)\left(f - \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) g\right) =$$

$$= g + \left(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}\right) f + \left(-\frac{27}{2}x + \frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) g = \left(\frac{27}{2}x - \frac{9}{4}\right) f + \left(-\frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{9}{4}\right) g$$

К сожалению, столбики флексят неистово, поэтому тут куча пустого места. Пользуясь случаем, мемы:





б)

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 0x + 4 & 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^5 + 3x^4 + 3x^3 \quad 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 + 3x + 3 \\ 4x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x \qquad & \\ \underline{4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x} \qquad & \\ 4x^3 + 3x^2 + 2x + 4 & \\ \underline{4x^3 + 2x^2 + 2x + 3} & \\ x^2 + 0x + 1 & \end{array}$$

$r_1 = x^2 + 0x + 1 \Rightarrow f = (2x^2 + 3x + 3)g + r_1$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 & x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3 + 0x^2 + 3x} \qquad & 3x + 4 \\ 4x^2 + x + 1 & \\ \underline{4x^2 + 0x + 4} & \\ x + 2 & \end{array}$$

$r_2 = x + 2 \Rightarrow g = (3x + 4)r_1 + r_2$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x + 1 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^2 + 2x} \qquad & x + 3 \\ 3x + 1 & \\ \underline{3x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$r_3 = 0 \Rightarrow r_1 = (x + 3)r_2$
$GCD(f, g) = x + 2$
$r_1 = f - (2x^2 + 3x + 3)g$
$r_2 = g - (3x + 4)r_1$
$GCD(f, g) = g - (3x + 4)(f - (2x^2 + 3x + 3)g) = (2x + 1)f + (x^3 + 2x^2 + x + 3)g$

---

2. а) Над $\mathbb{R}$: $f = x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12 = x^2(x^3 - 6) + 2(x^3 - 6) = (x^3 - 6)(x^2 + 2)$
$x^2 = -2$ не имеет корней в $\mathbb{R} \Rightarrow (x^2 + 2)$ - неприводимый многочлен
$x^3 = 6$ имеет корень $x = \sqrt[3]{6} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ можем разложить $(x^3 - 6)$ на множители

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad - 6 & x - \sqrt[3]{6} \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - \sqrt[3]{6}x^2} \qquad\qquad\qquad & x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{36} \\ \sqrt[3]{6}x^2 \qquad + 0x \qquad & \\ \underline{\sqrt[3]{6}x^2 - \sqrt[3]{36}x} \qquad & \\ \sqrt[3]{36}x - 6 & \\ \underline{\sqrt[3]{36}x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (x^3-6) = (x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})$ Попробуем разложить на множители $(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})$:
$x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36}=0$
$D=-3\sqrt[3]{36}<0 \Rightarrow$ не раскладывается над $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Над $\mathbb{R}: (x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})(x^2+2)$

Над $\mathbb{C}$: $f=(x-\sqrt[3]{6})(x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36})(x^2+2)$
$x^2=-2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}i$
$x^2+\sqrt[3]{6}x+\sqrt[3]{36}=0$
$D=-3\sqrt[3]{36} \Rightarrow x_1=\dfrac{-\sqrt[3]{6}-3^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{2}i}{2}=-\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}-\dfrac{3^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{2}}{2}i, x_2=-\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}+\dfrac{3^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{2}}{2}i \Rightarrow$ Над $\mathbb{C}$:
$f=(x-\sqrt[3]{6})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)(x+\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}-\dfrac{3^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{2}}{2}i)(x+\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}+\dfrac{3^{\frac{5}{6}}\sqrt[3]{2}}{2}i)$

б) Так как мы находимся в $\mathbb{Z}_5$, то вариантов корней у нас не так много (0, 1, 2, 3, 4) $\Rightarrow$ можем их все просто перебрать $x=2$ – подходит: $2+3+3+4+3=0 \Rightarrow$ поделим на $(x-2)=(x+3)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & +x^3 & +x^2 & +0x & +3 & x+3 \\ \cline{7-7}
x^5 & +3x^4 & & & & & x^4+x^2+3x+1 \\ \cline{1-2}
 & & x^3 & +x^2 & & & \\
 & & x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 3x^2 & +0x & & \\
 & & & 3x^2 & -4x & & \\ \cline{4-5}
 & & & & x & +3 & \\
 & & & & x & +3 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f=(x+3)(x^4+x^2+3x+1)$
Снова используем обычный перебор по пяти элементам – находим корень $x=3$: $1+4+4+1=0 \Rightarrow$ поделим на $(x-3)=(x+2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & +x^2 & +3x & +1 & x+2 \\ \cline{6-6}
x^4 & +2x^3 & & & & x^3+3x^2+3 \\ \cline{1-2}
 & 3x^3 & +x^2 & & & \\
 & 3x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & & 3x & +1 & \\
 & & & 3x & +1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Снова используем обычный перебор по пяти элементам – находим корень $x=4$: $4+3+3=0 \Rightarrow$ поделим на $(x-4)=(x+1)$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+0x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+x^2} & x^2+2x+3 \\ \quad 2x^2+0x & \\ \quad \underline{2x^2+2x} & \\ \qquad 3x+3 & \\ \qquad \underline{3x+3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

И последний раз используем обычный перебор по пяти элементам, чтобы убедиться, что данный многочлен уже является неприводимым в $\mathbb{Z}_5 \Rightarrow$

Ответ: $f = (x+1)(x+2)(x+3)(x^2+2x+3)$

---

3. Многочлен $h = z^3 - z^2 - 1$ - неприводим в кольце $\mathbb{Q}$. Докажем: по следствию из теоремы Безу рациональными корнями многочлена могут являться только $\pm 1 \Rightarrow$ просто проверим, являются ли они корнями многочлен h
$h(1) = -1$ - не является корнем, $h(-1) = -3$ - не является корнем
$\Rightarrow h$ - неприводим в кольце $\mathbb{Q} \Rightarrow$ по теореме факторкольцо $\mathbb{Q}/(z^3 - z^2 - 1)$ - поле

$$\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 1$$

$$\Rightarrow \alpha^4 = \alpha^3 + \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = A\alpha^2 + B\alpha + C \Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (\alpha^2 - 3\alpha + 1)(A\alpha^2 + B\alpha + C) =$$
$$= A(\alpha^2 + \alpha + 1) + B(\alpha^2 + 1) + C\alpha^2 - 3A(\alpha^2 + 1) - 3B\alpha^2 - 3\alpha C + C + A\alpha^2 + B\alpha$$

$$\begin{cases} C - 2A + B = 7 \\ A + 1B - 3C = -12 \\ -A - 2B + C = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -12 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 3 & -5 & -17 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 11 & 44 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ответ: $-\alpha^2 + \alpha + 4$

---

4. 1) Пусть h - неприводимый в $K[x]$, тогда по теореме $K[x]/(h)$ – поле, а в поле нет ненулевых необратимых элементов. Доказано.

2) Пусть h - приводимый в $K[x]$, тогда по теореме его можно представить в виде
$h = h_1 \cdot h_2 \cdot ... \cdot h_k$ $(deg(h_i) < deg(h) = n, h_i$ – неприводимый в $K[x], \forall i \leqslant k)$

Утверждение: $\overline{f} = f + (h)(f \in K[x])$ необратим $\Leftrightarrow GCD(f, h) \neq 1$

Доказательство:
$\Rightarrow$ Докажем по контрпозиции: $GCD(f, h) = 1 \Rightarrow$ по соотношению Безу можем записать $1 = uf + vh, u, v \in K[x] \Rightarrow 1 = \overline{u}\overline{f} + \overline{v}0 = \overline{u}\overline{f} \Rightarrow \overline{u}$ – обратный к $\overline{f} \Rightarrow \overline{f}$ – обратим.
Итого: $\overline{f}$ – необратим $\Rightarrow GCD(f, h) \neq 1$

$\Leftarrow$ Пусть $GCD(f, h) = k, k \in K[x], deg(k) \geqslant 1$. Пусть от противного $\overline{f}$ – обратим $\Rightarrow \exists \overline{g} \in K[x]/(h) : \overline{f}\overline{g} = 1 \Rightarrow fg + (h) = 1, fg \vdots k, (h) \vdots k \Rightarrow 1 \vdots k$, но $deg(k) \geqslant 1 \Rightarrow 1 \not\vdots k \Rightarrow$ получили противоречие
Итого: $GCD(f, h) \neq 1 \Rightarrow \overline{f}$ – необратим

Рассмотрим произвольный необратимый элемент $\overline{f}$ из факторкольца $K[x]/(h)$. По доказанному выше $GCD(f, h) \neq 1 \Rightarrow f$ может быть представлен в виде $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_p \cdot h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$ (неприводимые многочлены, в произведение которых раскладывается многочлен h, как известно с лекции, могут быть переставлены в любом порядке $\Rightarrow$ в данном случае мы и переставим их так, чтобы в f входили именно первые m неприводимых многочленов) $m < k$ (если $m = k$, то $\overline{f}$ – нулевой, а это не подходит под условия).
Заметим, что достаточно взять многочлен g кольца $K[x]$ такой, что $g = h_{m+1} \ldots h_k \Rightarrow fg = f_1 \cdot \ldots f_p \cdot h_1 \ldots \cdot h_k = f_1 \ldots \cdot f_p \cdot h \Rightarrow \overline{fg} = \overline{f}\overline{g} = \overline{f_1 \cdot \ldots f_p} \cdot \overline{h} = 0$
$\Rightarrow \overline{f}$ – делитель нуля, что и требовалось доказать.