1. $$Z_2 \times Z_6 \times Z_9 \tag{1}$$

- $$\begin{aligned} &ord = 2 \\ &x = (a,b,c) \in G \\ &ord(x) = 2 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow (2a, 2b, 2c) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

  Кол-во вариантов для a = НОД(2,2) = 2. Аналогично для b,c.

  Итого кол-во вариантов = $(2,2) \cdot (2,6) \cdot (2,9) -$кол-во вариантов $(x=0)$ = 3.

- $$\begin{aligned} &ord = 3 \\ &x = (a,b,c) \in G \\ &ord(x) = 3 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow (3a, 3b, 3c) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

  Итого: $(3,2) \cdot (3,6) \cdot (3,9) - 1 = 8$

- $$\begin{aligned} &ord = 6 \\ &x = (a,b,c) \in G \\ &ord(x) = 6 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow (6a, 6b, 6c) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

  Итого: $(6,2) \cdot (6,6) \cdot (6,9) -$ кол-во вариантов для $(x = 0, 2x = 0, 3x = 0)$ = $36 - 1 - 3 - 8 = 24$.

- $$\begin{aligned} &ord = 9 \\ &x = (a,b,c) \in G \\ &ord(x) = 9 \Rightarrow 9x = 0 \Rightarrow (9a, 9b, 9c) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

  Итого: $(9,2) \cdot (9,6) \cdot (9,9) -$ кол-во вариантов для $(x = 0, 3x = 0)$ = $27 - 1 - 8 = 18$.
  Ответ: $3, 8, 24, 18$.

2. $\mathbb{Z}_{99} \simeq \mathbb{Z}_{33} \times_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ в силу нецикличности абелевой группы $\mathbb{Z}_{99}$.

   Подгруппа порядка 3 задаётся эл-ом порядка 3, найдем из кол-во:

   $$\begin{aligned} &ord = 3 \\ &x = (a,b,c) \in G \\ &ord(x) = 3 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow (3a, 3b, 3c) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

   Итого: $(3,3) \cdot (3,3) \cdot (3,11) - 1 = 8$.

   Найдем кол-во элементов порядка 3 в одной из таких подгрупп. В силу того, что 3 - простое, в такой группе $3 - 1 = 2$ элемента порядка 3. Тогда подгрупп порядка 3: $\frac{8}{2} = 4$

   Аналогично для 33:

$$\begin{aligned} &ord = 33 \\ &x = (a, b, c) \in G \\ &ord(x) = 33 \Rightarrow 33x = 0 \Rightarrow (33a, 33b, 33c) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Итого: $(3, 33) \cdot (3, 33) \cdot (33, 11) - 1 - 8 - 10 = 80$.

$\mathbb{Z}_{33} \simeq \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_3 \Rightarrow$ кол-во элементов порядка 33 в подгруппе = кол-во элементов порядка 3 в подгруппе порядка 3 $\cdot$ кол-во элементов порядка 11 в подгруппе порядка 11 = $2 * 10 = 20$. Тогда групп порядка 4: $\frac{80}{20} = 4$.

Ответ: $4, 4$.

3.

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \simeq (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \times \mathbb{Z}_{36} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}) \tag{8}$$

Предложим разложение на произведение $n = 2$ циклических групп:

$$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \times \mathbb{Z}_{36} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25}) = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{900} \tag{9}$$

Докажем, что получить $n = 1$ невозможно: Рассмотрим все порядки в разложении $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \times \mathbb{Z}_{36} \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{25})$. Заметим, что существуют пары порядков с НОД $\neq 1 \Rightarrow$ невозможно получить разложение с $n = 1$.

Ответ: $n = 2$.

4. A - конечная абелева группа $\Rightarrow A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$, где p_i - простое число. Порядки групп совпадают с порядками элементов в прямом произведении. Пусть k - наибольший порядок элементов, тогда $k = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_t}$. Пусть $a \in A$, тогда a принадлежит некоторой подгруппе группы A. Порядок любого элемента подгруппы t является делителем $t \Rightarrow$ является делителем k.