1. $\beta = \frac{51 - 44\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{1 - \sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{25}}$
   $\alpha = \sqrt[3]{5}$, $\alpha$ - корень многочлена $h = x^3 - 5$, $h$ - неприводим.

$$\beta = \frac{51 - 44\alpha + \alpha^2}{1 - \alpha - 4\alpha^2} = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 \tag{1}$$
$$51 - 44\alpha + \alpha^2 = (1 - \alpha - 4\alpha^2)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2) =$$
$$= b_0 + b_1\alpha + b^2\alpha^2 - b_0\alpha - b_1\alpha^2 - b_2\alpha^3 - 4b_0\alpha^2 - 4b_1\alpha^3 - 4b_2\alpha^4$$
$$b_0 - 20b_1 - 5b_2 = 51$$
$$b_0 - b_1 + 20b_2 = -44$$
$$-4b_0 - b_1 + b_2 = 1$$

   Решим эту СЛУ:

$$b_0 = 1, b_2 = -3, b_3 = 2 \tag{2}$$
$$\beta = 1 - 3\alpha + 2\alpha^2 = 1 - 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}$$

2. 

$$\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{5} + 1 \tag{3}$$
$$\alpha - 1 = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$
$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 6 - 2\sqrt{30} + 5$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^3 - 16\alpha^2 + 40\alpha - 20 = 0$$

   $h = x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 40x - 20 = 0$ - аннулирующий многочлен. Докажем, что $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$.
   $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 1$. Тривиально.
   $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$.

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{6}) = F \tag{4}$$
$$x^2 - 5 :$$
$$\sqrt{6} = a + b\sqrt{5} \to 6 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2$$
$$6 = a^2 + 5b^2$$
$$0 = b^2$$

   Не имеет решения, т.к $b! = 0 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$. Базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : 1, \sqrt{5}$. Базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : 1, \sqrt{6} \Rightarrow$ Базис в $F : 1, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{3}0$.

   Утверждение: $\mathbb{Q}(\alpha) = F$.
   $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{5}, \sqrt{6}, 1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

   $F$ - искомый многочлен.

3. Хотим построить поле из $2^3 = 8$ элементов:
   Возьмем неприводимый в $\mathbb{Z}_2[X]$ многочлен $h = x^3 + x^2 + 1 = 0$. Тогда $F = \mathbb{Z}_2[X]/(h)$ - поле из $2^3$ элементов. $F = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Таблицы сложения и умножения:

| \ | 0 | 1 | x | x+1 | x^2 | x^2+1 | x^2+x | x^2+x+1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | x | x+1 | x^2 | x^2+1 | x^2+x | x^2+x+1 |
| 1 | 1 | 0 | x+1 | x | x^2+1 | x^2 | x^2+x+1 | x^2+1 |
| x | x | x+1 | 0 | 1 | x^2+x | x^2+x+1 | x^2 | x^2+1 |
| x+1 | x+1 | x | 1 | 0 | x^2+x+1 | x^2+x | x^2+1 | x^2 |
| x^2 | x^2 | x^2+1 | x^2+x | x^2+x+1 | 0 | 1 | x | x+1 |
| x^2+1 | x^2+1 | x^2 | x^2+x+1 | x^2+x | 1 | 0 | x+1 | x |
| x^2+x | x^2+x | x^2+x+1 | x^2 | x^2+1 | x | x+1 | 0 | 1 |
| x^2+x+1 | x^2+x+1 | x^2+x | x^2+1 | x^2 | x+1 | x | 1 | 0 |

| \ | 0 | 1 | x | x+1 | x^2 | x^2+1 | x^2+x | x^2+x+1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | x | x+1 | x^2 | x^2+1 | x^2+x | x^2+x+1 |
| x | 0 | x | x^2 | x^2+x | x+1 | 1 | x^2+x+1 | x^2+1 |
| x+1 | 0 | x+1 | x^2+x | x^2+1 | 1 | x^2+x+1 | 1 | 1 |
| x^2 | 0 | x^2 | x+1 | 1 | x^2 + x + 1 | x+1 | x^2+x+1 | x+1 |
| x^2+1 | 0 | x^2+1 | 1 | x^2+x+1 | x+1 | x^2 + x | x^2+1 | x^2 |
| x^2+x | 0 | x^2+x | x^2+x+1 | 1 | x^2+x+1 | x^2+1 | x+1 | x^2+1 |
| x^2+x+1 | 0 | x^2+x+1 | x^2+1 | 1 | x+1 | x^2 | x^2+1 | x |