1.
$$H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ * & a^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$g = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$, иначе матрица H вырождена
Приведен общий вид матрицы g. $b, c \neq 0$, иначе матрица g вырождена.
H - нормальная $<=> gHg^{-1} \in H$.

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{c}{bd} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \tag{2}$$
$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ * & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{c}{bd} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ ac + d* & da^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{c}{bd} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{ac+d*-a^2c}{b} & a^2 \end{pmatrix}$$

$a, b, c \neq 0 =>$ матрица $gHg^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{ac+d*-a^2c}{b} & a^2 \end{pmatrix}$ существует, невырожденная и нижнетреугольная $=> gHg^{-1} \in H => H$ - нормальная.

2. $\varphi : \mathbb{Z}_{20} -> \mathbb{Z}_{16}$.
Любое число из $\mathbb{Z}_{20}$ и Z_{16} представим как сумму единиц:
$$x = x \cdot 1 \tag{3}$$
$$\varphi(x) = x\varphi(1)k = \varphi(1)$$
Тогда отображение имеет вид: $\varphi(x) = kx$. Докажем, что отображение - гомоморфизм, $\forall x \in \mathbb{Z}_{20}$ x представимо в виде: $x = (x + 20a)mod(20)$.
$$\varphi(x + y) = k(x + y) = k(x) + k(y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{4}$$
$$x = (x + 20a)mod(20)$$
$$\varphi(x) = \varphi(x + 20a)mod(16)$$
$$\varphi(x) = \varphi(x) + (k20a)mod(16)$$
Тогда
$(k20a)mod(16) = 0, k \in \mathbb{Z}_{16}, \forall a \in \mathbb{Z}_{20} => \varphi(20)mod(16) = 0 => (20k)mod(16) = 0$.
Найдем все решения этого уравнения:
$$k \in 0, 4, 8, 12 \tag{5}$$
$\varphi(x) = kx =>$ существует 4 гомоморфизма $\varphi : \mathbb{Z}_{20} -> \mathbb{Z}_{16}$.

3. Построим отображение $\varphi : \mathbb{Q} -> \mathbb{C}, \varphi(x) = |1|(cos(2\pi x) + isin(2\pi y))$. Докажем, что это - гомоморфизм:
$$\varphi(x, y) = |1|(cos(2\pi(x + y)) + isin(2\pi(x + y))) = cos(2\pi x)cos(2\pi y) - (sin(2\pi x)sin(2\pi y)) + \tag{6}$$
$$+i(sin(2\pi x)cos(2\pi y) + sin(2\pi y)cos(2\pi x)) = (cos(2\pi x) + isin(2\pi y))(cos(2\pi y) + isin(2\pi x) =$$
$$= \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$
Найдем $ker(\varphi)$:
Найдем все такие x, что
$\varphi(x) = e = 1 = |1|(cos(2\pi k) + isin(2\pi k)), \forall k \in \mathbb{Z} => x = \mathbb{Z} => ker(\varphi) = \mathbb{Z}$.
Рассмотрим подгруппу $H = (\mathbb{C} \backslash \{0\}, \times)$. Из того, что каждый элемент $h \in H$ имеет

конечный порядок следует
$\exists n \in \mathbb{N} : h^n = e = 1 => |h|^n(cos(n\alpha) + isin(n\alpha)) = |1|(cos(2\pi k) + isin(2\pi k)), \forall k \in \mathbb{Z}$,
что справедливо только если $|h| = 1 => \forall h \in H : |h| = 1$. При этом $n\alpha = 2\pi k, \alpha = \frac{2\pi k}{n}$
- рациональное число.
Теперь рассмотрим $Im(\varphi)$:
К каким бы $x \in \mathbb{Q}$ мы бы не применили наше отображение, мы получим комплексное числе с модулем 1 и некоторым рациональным аргументом $\alpha => H = Im(\varphi)$.
Воспользуемся теоремой о гомоморфизме. У нас есть гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Q} -> \mathbb{C} =>$
$\mathbb{Q}/ker(\varphi) \simeq Im(\varphi) => \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq H => H \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (В силу биекции между H и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

4. $(1) => (2)$
$|A| = n, |B| = m$, предположим, что сущ-ет $g \in G, g \in A \cap B$. Воспользуемся следствием из теоремы Лагранжа:
$g^{|G|} = e => g^n = g^m = e =>$ НОД$(m, n) \neq 1$, что невозможно в силу того, что n и m взаимно просты.