Задачи к лекции 3

1. Докажите, что группа $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ является прямым произведением двух своих подгрупп $\mathbb{R}_{>0}$ и $\{z \mid |z| = 1\}$.

2. Докажите, что группа $(\mathbb{Z}, +)$ не изоморфна прямому произведению никаких двух своих собственных подгрупп.

3. Приведите пример групп G_1, G_2 и подгруппы $H \subseteq G_1 \times G_2$, которая не совпадает с $H_1 \times H_2$ ни для каких подгрупп $H_1 \subseteq G_1$ и $H_2 \subseteq G_2$.

4. Докажите, что для всякого простого p следующие группы неизоморфны:
(а) $\mathbb{Z}_{p^2}$ и $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$; (б) $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{p^2}$ и $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

5. Найдите все с точностью до изоморфизма абелевы группы порядка (а) 100; (б) 200.

6. Изоморфны ли группы (а) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$? (б) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{10}$?

7. Сколько элементов порядков 2, 4 и 5 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?

8. Сколько подгрупп порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

9. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная (а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$? (б) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$?

10. Докажите, что примарная циклическая группа не может быть разложена в прямое произведение двух своих ненулевых подгрупп.

11. Пусть порядок конечной абелевой группы A делится на m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m.

12. *Разбиением* натурального числа n называется неубывающая последовательность натуральных чисел, сумма которых равна n. Докажите, что число попарно неизоморфных абелевых групп порядка p^n, где p — простое число, равно числу разбиений числа n.

13. Докажите, что всякая конечная абелева группа порядка, не делящегося на квадрат целого числа, является циклической.

Домашнее задание

При решении задач можно пользоваться без доказательства теоремой о существовании и единственности разложения конечной абелевой группы в прямое произведение примарных циклических групп.

1. Сколько элементов порядков 2, 3, 6 и 9 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$?

2. Сколько подгрупп порядков 3 и 33 в нециклической абелевой группе порядка 99?

3. При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50}$ изоморфна прямому произведению n циклических групп?

4. Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы A. Докажите, что порядок любого элемента A делит k.