В первых двух заданиях считаю именно так, как это делалось на семинаре.

1. 1) Порядка 2: элементов x, удовлетворяющих условию $x^2 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_2$ – 2, в группе $\mathbb{Z}_6$ – 2, в группе $\mathbb{Z}_9$ – 1. Итого в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^2 = 0$ – 4. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 3 элемента порядка 2.

   2) Порядка 3: элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_2$ – 1, в группе $\mathbb{Z}_6$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_9$ – 3. Итого в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ – 9. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 8 элементов порядка 3.

   3) Порядка 6: элементов x, удовлетворяющих условию $x^6 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_2$ – 2, в группе $\mathbb{Z}_6$ – 6, в группе $\mathbb{Z}_9$ – 3. Итого в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^6 = 0$ – 36. Из них 3 элемента порядка 2, 8 элементов порядка 3, 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 24 элементов порядка 6.

   4) Порядка 9: элементов x, удовлетворяющих условию $x^9 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_2$ – 1, в группе $\mathbb{Z}_6$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_9$ – 9. Итого в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^9 = 0$ – 27. Из них 8 элементов порядка 3, 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 18 элементов порядка 9.

   Ответ: 3, 8, 24, 18

---

2. Дано: нециклическая абелева группа A порядка 99

   $99 = 3^2 \cdot 11 \Rightarrow A \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ или $A \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11}$, но 11 и 9 - взаимнопросты $\Rightarrow$ группа $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11} \simeq \mathbb{Z}_{99} \Rightarrow$ является циклической, а это не подходит по условиям $\Rightarrow A \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$

   1) В каждой группе порядка 3 ровно два элемента порядка 3 – 1 и 2 (*)

      Найдём количество элементов порядка 3 в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$: элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 1. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ – 9. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 8 элементов порядка 3 (**)

      (*), (**) $\Rightarrow$ в группе порядка 99: $\dfrac{8}{2} = 4$ подгрупп порядка 3

   2) Посчитаем количество элементов порядка 33 в группе порядка 33: $\mathbb{Z}_{33} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$
      Элементов порядка 3: элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 1. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ – 3. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 2 элемента порядка 3.

      Элементов порядка 11: элементов x, удовлетворяющих условию $x^{11} = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 1, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 11. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^{11} = 0$ – 11. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$ 10 элементов порядка 11.

      Элементов порядка 33: элементов x, удовлетворяющих условию $x^{33} = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 11. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$элементов x, удовлетворяющих условию $x^{33} = 0$ – 33. Из них 1 элемент порядка 1, 10 элементов порядка 11, 2 элемента порядка 3 $\Rightarrow$ 33 - 10 - 2 - 1 = 20 элементов порядка 33 (*)

      Найдём количество элементов порядка 33 в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$:

      Элементов порядка 3: элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 1. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^3 = 0$ – 9. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$, 8 элемента порядка 3.

Элементов порядка 11:элементов x, удовлетворяющих условию $x^{11} = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 1, в группе $\mathbb{Z}_3$ – 1, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 11. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^{11} = 0$ – 11. Из них 1 элемент порядка 1 $\Rightarrow$, 10 элементов порядка 11.

Элементов порядка 33: элементов x, удовлетворяющих условию $x^{33} = 0$ в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_3$ – 3, в группе $\mathbb{Z}_{11}$ – 11. Итого в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ элементов x, удовлетворяющих условию $x^{33} = 0$ – 99. Из них 1 элемент порядка 1, 10 элементов порядка 11, 8 элемента порядка 3 $\Rightarrow$
99 - 10 - 8 - 1 = 80 элементов порядка 33 (**)

(*), (**) $\Rightarrow$ в группе порядка 99: $\dfrac{80}{20} = 4$ подгрупп порядка 33

Ответ: 4, 4

---

3. **По теореме:** $\forall n, m, l \in \mathbb{N} : n = m \cdot l \Rightarrow \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$. Воспользуемся этой теоремой:

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{36} \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{60}, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_{450}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{450} \Rightarrow$ ответ максимум $n = 2$. Докажем, что нельзя получить $n = 1$:

Докажем, что нельзя получить $n = 1$: достаточно доказать, что $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50}$ не изоморфно $\mathbb{Z}_{27000}$. В $\mathbb{Z}_{27000}$ $\exists$ элемент порядка 27000 – это 1. По доказанному ниже (в задании 4) порядок любого элемента в $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \leqslant 900$. То есть, в $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50}$ нет элемнта порядка 27000 $\Rightarrow \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50}$ не изоморфна $\mathbb{Z}_{27000}$
(также можно заметить, что 15 и 50, к примеру, невзаимнопросты. Поэтому не выполняется условие теоремы для $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_{27000}$)
Ответ: 2

---

4. **По теореме:** $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$

Утверждение: $k = \text{НОК}(p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t})$ и k кратно порядку любого элемента из A

Доказательство:

1) Докажем, что такое k подойдёт:
   a) Возьём элемент $x = (x_1, ..., x_t) \in A$. Найдём наименьшее $m : x^m = 0 = (0, 0, ...0)$
   $x^m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^m = 0 \\ ... \\ x_t^m = 0 \end{cases}$ Пусть $ord(x_1) = s_1, ..., ord(x_t) = s_t \Rightarrow \begin{cases} m \vdots s_1 \\ ... \\ m \vdots s_t \end{cases}$
   Но m - наименьшее $\Rightarrow m = \text{НОК}(s_1, ..., s_t)$
   b) Утверждение: $\forall x \in A : k \vdots m$
   Доказательство:

Из выбора m следует, что $\begin{cases} m \vdots s_1 \\ ... \\ m \vdots s_t \end{cases}$ и $m = \text{НОК}(s_1, ..., s_t)$

По следствию из теоремы Лагранжа $\forall i : |\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}| \vdots ord(x_i) \Rightarrow |\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}| \vdots s_i \Rightarrow p_i^{k_i} \vdots s_i \Rightarrow k \vdots m$
$\Rightarrow$ такое k подойдёт и хотя бы k будет достаточно $(\forall x \in A \Rightarrow m \leqslant k)$

2) Докажем, что меньше k получить нельзя

Приведём пример: возьмём $x = (1, 1, ..., 1)$.
$\forall i : ord(x_i) = p_i^{k_i} \Rightarrow m = \text{НОК}(p_1^{k_1}, ..., p_t^{k_t}) \Rightarrow m = k$

$max(ord(x)) = k, x \in A$