1. - Докажем, что бинарная операция:
     То есть, для любых m и n, $m \circ n \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$.
     $m \circ n = 2mn + 2m + 2n - 1$
     $n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow n \circ m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ требуется доказать, что $n \circ m \neq -1$
     Пусть от противного $n \circ m = -1 \Rightarrow mn + m + n = -1 \Rightarrow m(n+1) = -(n+1)$
     $n \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow (n+1) \neq 0 \Rightarrow$ поделим на $(n+1) \Rightarrow m = -1$, но $m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow m \neq -1 \Rightarrow$ получили противоречие $\Rightarrow m \circ n \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \forall m, n$, что и требовалось доказать.
   - Докажем, что $(\mathbb{R} \backslash \{-1\}, \circ)$ - группа.
     a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow (a \circ b) \circ c = (2ab + 2a + 2b + 1) \circ c =$
     $= 4abc + 4ac + 4bc + 2c + 4ab + 4b + 4a + 2 + 2c + 1 =$
     $= 2a(2bc + 2c + 2b + 1) + 2a + 2(2bc + 2c + 2b + 1) + 1 = a \circ (b \circ c) \Rightarrow$
     ассоциативность выполняется.
     b) $\forall m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow m \circ e = m \Rightarrow 2me + 2e + 2m + 1 = m \Rightarrow$
     $2me + 2e + m + 1 = 0 \Rightarrow 2e(m+1) + (m+1) = 0$
     $m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow (m+1) \neq 0 \Rightarrow$ поделим на $(m+1) \Rightarrow 2e + 1 = 0 \Rightarrow$
     $e = -\frac{1}{2} \Rightarrow e$ существует.
     Проверим, что этот элемент действительно нейтральный:
     $m \circ e = -m - 1 + 2m + 1 = m$
     $e \circ m = -m - 1 + 2m + 1 = m$
     $\Rightarrow$ найденый элемент e действительно нейтральный и существует.
     c) Заметим, что наша операция $\circ$ на самом деле коммутативна (т.к. $a \circ b = 2ab + 2a + 2b + 1 = 2ab + 2b + 2a + 1 = b \circ a$) $\Rightarrow$ можем использовать это в доказательстве далее:
     $\forall m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \Rightarrow m \circ m^{-1} = e \Rightarrow m \circ m^{-1} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$
     $2mm^{-1} + 2m + 2m^{-1} + 1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2m^{-1}(m+1) = -\dfrac{3}{2} - 2m \Rightarrow m^{-1} = \dfrac{-\frac{3}{4} - m}{m+1} \Rightarrow$ обратный существует $\forall m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
     В силу коммутативности, упомянутой выше: $m \circ m^{-1} = m^{-1} \circ m = e$

   $a, b, c \Rightarrow (\mathbb{R} \backslash \{-1\}, \circ)$ - группа.

---

2. Требуется найти все такие a, что $6a = 48n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a < 48 \Rightarrow 8n < 48 \Rightarrow n < 6$, и $a, 2a, 3a, 4a, 5a \neq 0 (mod\ 48)$
   $a = 8n, n < 6 \Rightarrow$ проверим предполагаемые ответы (0, 8, 16, 24, 32, 40) на второе условие $(a, 2a, 3a, 4a, 5a \neq 0(mod\ 48))$
   $0 = 0(mod\ 48), 16 \cdot 3 = 0(mod\ 48), 24 \cdot 2 = 0(mod\ 48), 32 \cdot 3 = 0(mod\ 48) \Rightarrow$
   подходят только $a = 8$ и $a = 40$
   $\Rightarrow$ **Ответ**: 8, 40.

---

3. $H = \{id, (243), (234)\}$, т.к. $(243)(243) = (234)$, $(234)(243) = id$
   Левые смежные классы:
   1) $idH, (243)H, (234)H = H$
   2) $(12)(34)H, (123)H, (124)H = \{(12)(34), (124), (123)\}$
   3) $(132)H, (134)H, (13)(24)H = \{(134), (132), (13)(24)\}$
   4) $(14)(23)H, (142)H, (143)H = \{(14)(23), (142), (143)\}$

   Правые смежные классы:
   1) $Hid, H(243), H(234) = H$
   2) $H(12)(34), H(132), H(142) = \{(12)(34), (132), (142)\}$
   3) $H(124), H(134), H(14)(23) = \{(124), (134), (14)(23)\}$
   4) $H(13)(24), H(123), H(143) = \{(13)(24), (123), (143)\}$

---

4. Пусть $G =< g >:= \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$ - циклическая группа, а
   $H \subseteq G, H := \{g^k | k \in \{k_0, ...k_i, ...\} \subseteq \mathbb{Z}\}$ - подгруппа группы G.
   Рассмотрим два случая:
   - $H = \{e\} \Rightarrow H = \langle e \rangle$ - циклическая, что и требовалось доказать.
   - $H \neq \{e\} \Rightarrow$ в H $\exists$ минимальный элемент, который больше нейтрального элемента g^k. Докажем, что $H = \langle g^k \rangle$:
     - H - подгруппа $\Rightarrow \forall a, b \in H \Rightarrow ab \in H \Rightarrow \langle g^k \rangle \subseteq H$
     - Выберем произвольный $g^m \in H$. Пусть $m = kq + r$, где $0 \leqslant r \leqslant k - 1 \Rightarrow$
       $g^m = g^{kq+r} = g^{kq} g^r = (g^k)^q g^r$
       $g^m \in H, g^k \in H \Rightarrow (g^k)^q \in H \Rightarrow g^r \in H$, но $r < k \Rightarrow g^r < g^k$, но g^k - минимальный элемент, который больше нейтрального элемента в $H \Rightarrow g^r = e \Rightarrow r = 0 \Rightarrow$
       $g^m = g^k \Rightarrow H \subseteq \langle g^k \rangle$

   $\Rightarrow H = \langle g^k \rangle$ - циклическая, что и требовалось доказать.
