

Задачи к лекции 1

1. Найдите число бинарных операций на множестве из n элементов.
2. Докажите, что
 - (а) группа S_n коммутативна тогда и только тогда, когда $n \leq 2$;
 - (б) группа A_n коммутативна тогда и только тогда, когда $n \leq 3$.
3. Приведите пример счётной коммутативной нециклической группы.
4. Пусть G — группа, $g \in G$ и $\text{ord}(g) = m$. Найдите порядок элемента g^k .
5. Докажите, что во всякой группе элементы ab и ba имеют одинаковый порядок.
6. Приведите пример бесконечной группы, в которой все элементы имеют конечный порядок.
7. Найдите все левые и все правые смежные классы группы $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ по подгруппе
 - (а) всех ненулевых действительных чисел;
 - (б) всех положительных действительных чисел.
8. Найдите все левые и все правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $\langle \sigma \rangle$, где $\sigma = (12)$.
9. Пусть $G = S_n$ и $H \subseteq G$ — подмножество всех перестановок, которые оставляют элемент n на месте. Докажите, что H — подгруппа в G , и опишите все левые и все правые смежные классы G по H .
10. Пусть G — группа и $H \subseteq G$ — непустое конечное множество, замкнутое относительно групповой операции (то есть $ab \in H$ для всех $a, b \in H$). Докажите, что H является подгруппой в G .
11. Докажите, что во всякой конечной группе чётного порядка найдётся элемент порядка 2.
12. Докажите, что если в группе G выполняется тождество $x^2 = e$, то G коммутативна.
13. Докажите, что всякая бесконечная группа содержит бесконечное число подгрупп.

Домашнее задание

1. Докажите, что формула $m \circ n = 2mn + 2m + 2n + 1$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ и что $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$ является группой.
2. Найдите все элементы порядка 6 в группе $(\mathbb{Z}_{48}, +)$.
3. Найдите все левые и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $\langle \sigma \rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Докажите, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.