1. 1) Обратимые элементы:

Матрица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ обратима $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$

Найдём матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ при условии, что $\begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & c & -b \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \in R$

$\Rightarrow$ любой элемент кольца вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, для которог верно, что $\begin{cases} a \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ обратим

2) Пусть $A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ и $B := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ - левый и правый делители нуля соответственно:

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 = 0 \\ a_1b_2 + b_1c_2 = 0 \\ c_1c_2 = 0 \end{cases}$

Рассмотрим несколько случаев для левого делителя:

– $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ c_1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0$ – получили противоречие

– $a_1 = 0 \Rightarrow$ элементы второй матрицы a_2 и b_2 могут быть отличные от нуля $\Rightarrow$ можем найти такую матрицу $B \neq 0$, что $AB = 0 \Rightarrow$ такая матрица A является делителем нуля

– $c_1 = 0 \Rightarrow$ элемент второй матрицы c_2 может быть отличен от нуля $\Rightarrow$ можем найти такую матрицу $B \neq 0$, что $AB = 0 \Rightarrow$ такая матрица A является левым делителем нуля

Рассмотрим несколько случаев для правого делителя:

– $\begin{cases} a_2 \neq 0 \\ c_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$ – получили противоречие

– $a_2 = 0 \Rightarrow$ элементы второй матрицы a_1 и b_1 могут быть отличные от нуля $\Rightarrow$ можем найти такую матрицу $A \neq 0$, что $AB = 0 \Rightarrow$ такая матрица B является делителем нуля

– $c_2 = 0 \Rightarrow$ элемент второй матрицы c_1 может быть отличен от нуля $\Rightarrow$ можем найти такую матрицу $A \neq 0$, что $AB = 0 \Rightarrow$ такая матрица B является левым делителем нуля

$\Rightarrow$ делителем нуля (и правым, и левым) является любой элемент кольца вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $ac = 0$

3) Рассмотрим матрицу $A := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : A \neq 0, A^n = 0$. Заметим, что $A^n_{1,1} = a^n$, а $A^n_{2,2} = c^n$, но $A^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n = 0 \\ c^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow A$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0 \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ -нильпотент $\Rightarrow$ все элементы кольца вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$

P.S. Докажем, что $A^n_{1,1} = a^n$, а $A^n_{2,2} = c^n$ (что A^n имеет вид $\begin{pmatrix} a^n & * \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$)индукцией по n: Для $n = 1$ - верно. Пусть верно для $n = k$. Докажем для $n = k+1$: $A^{k+1} = A^k \cdot A =$
$= \begin{pmatrix} a^k & * \\ 0 & c^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & * \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$, что и требовалось доказать
Где * – какое-то выражение (может быть разное для всех звёздочек)

---

2. Пусть от противного $\exists f \in R := \mathbb{Q}[x, y] : I = (x, y-1) = (f)$
$\begin{cases} x = 1 \cdot x + 0 \cdot (y-1) \in I \Rightarrow x \in I \\ y - 1 = 0 \cdot x + 1 \cdot (y-1) \in I \Rightarrow (y-1) \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \,\vdots\, f \\ (y-1) \,\vdots\, f \end{cases} \Rightarrow deg(f) \leqslant 1$
Рассмотрим два случая:
   1) $deg(f) = 0 \Rightarrow f = const = c \Rightarrow f$ – обратим $\Rightarrow I = R \Rightarrow 1 = f_1 x + f_2(y-1)$. Возьмём значение в точке (0, 1) $\Rightarrow 1 = 0$ - получили противоречие
   2) $deg(f) = 1 \Rightarrow f = ax+by+c \Rightarrow \begin{cases} x = fg_1 \\ y - 1 = fg_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} deg(g_1) = 0 \\ deg(g_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ag_1x + bg_1y + cg_1 \\ y - 1 = ag_2x + bg_2 + cg_2 \end{cases}$
   $\Rightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a = 0 \\ cg_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow f = 0 \Rightarrow deg(f) = 0 \Rightarrow$ пришли к противоречию

---

3. $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
$f \mapsto (f(0), f(-3))$
$Ker(\varphi)$:чтобы наше отображение переводило многочлен f в (0, 0), необходимо, чтобы многочлен имел корень и 0, и -3, то есть, делился и на x, и на $(x+3)$, то есть, делился на $x^2 + 3x \Rightarrow Ker(\varphi) = (x^2 + 3x)$

$Im(\varphi)$: возьмём многочлен $-\frac{1}{3}(a+bi)x + \frac{1}{3}(c+di)(x+3) \Rightarrow \varphi(-\frac{1}{3}(a+bi)x + \frac{1}{3}(c+di)(x+3)) =$
$= (c+di, a+bi) \forall a, b, c, d \in \mathbb{C} \Rightarrow Im(\varphi) = (\mathbb{C}, \mathbb{C})$

Докажем, что полученное отображение является гомоморфизмом:
$\varphi(f+g) = ((f+g)(0), (f+g)(-3)) = (f(0)+g(0), f(-3)+g(-3)) = (f(0), f(-3))+(g(-0), g(-3)) =$
$= \varphi(f) + \varphi(g)$
$\varphi(fg) = ((fg)(0), (fg)(-3)) = (f(0)g(0), f(-3)g(-3)) = (f(0), f(-3))(g(-0), g(-3)) = \varphi(f)\varphi(g)$

$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме: $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 3x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, что и требовалось доказать

---

4. $\Rightarrow$ Фактор кольцо R/I - поле. R/I - поле $\Rightarrow$ любой ненулевой элемент $r + I : r \in R$ - обратим. Пусть от противного I содержится в каком-то собственном идеале кольца R. То есть, существует такой $J \neq R$, что $I \subset J$. Так как I содержится в J, то в J есть элемент $r \in R$ такой, что $r \notin I \Rightarrow$ элемент $r + I \in J \Rightarrow rR + I \in J$. Идеал J - собственный $\Rightarrow$ не содержит единицу $\Rightarrow rR + I \neq 1 \Rightarrow$ элемент r кольца R/I необратим $\Rightarrow$ получили противоречие.

$\Leftarrow$ $I \neq R$ не содержится ни в каком собственном идеале кольца R. Рассмотрим произвольный элемент $r \in I$. Рассмотрим идеал $J = (r, I) \Rightarrow I \subset J$, но I не содержится ни в каком собственном идеале $\Rightarrow J = R \Rightarrow 1 \in R \Rightarrow 1 = rk + I$, где $k \in R \Rightarrow$ элемент $r + I$ - обратим $\forall r \neq 0 \Rightarrow R/I$ - поле, что и требовалось доказать.
