Задачи к лекции 8

1. Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Докажите, что $(a+b)^p = a^p + b^p$ для любых $a, b \in K$.

Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей. Для каждого элемента $\alpha \in F$ обозначим через $K(\alpha)$ пересечение всех подполей в F, содержащих K и α.

2. Докажите, что $K(\alpha) = \{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \mid f, g \in K[x] \text{ и } g(\alpha) \neq 0\}$.

3. В зависимости от значения параметра $a \in \mathbb{Q}$ найдите степень расширения $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, где α — действительный корень уравнения $x^3 = a$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе выражения $\dfrac{1 - \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}$.

5. Пусть α — комплексный корень многочлена $x^3 - 3x + 1$. Представьте элемент

$$\frac{3\alpha^2 + 4}{\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $\deg f(x) \leqslant 2$.

6. Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

7. Найдите все натуральные числа $n \leqslant 10$, для которых существует конечное поле из n элементов.

8. Составьте таблицы сложения и умножения в поле $\mathbb{F}_4$.

9. Постройте явно поле из 9 элементов.

10. Пусть $K \subseteq F$ — конечное расширение полей. Докажите, что все элементы поля F являются алгебраическими над K.

11. Пусть $K \subseteq F$ — конечное расширение полей. Какие значения может принимать его степень в случаях, когда $K = \mathbb{C}$ и $K = \mathbb{R}$?

12. Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей. Докажите, что все элементы в F, алгебраические над K, образуют подполе в F.

Домашнее задание

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{51 - 44\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{1 - \sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{25}}$ и упростите полученное выражение.

2. Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{6} - \sqrt{5} + 1$ над $\mathbb{Q}$.

3. Постройте явно поле $\mathbb{F}_8$ и составьте для него таблицы сложения и умножения.

4. Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей и $\alpha \in F$. Положим $K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in K[x]\}$. Докажите, что если $K[\alpha]$ конечномерно как векторное пространство над K, то $K[\alpha] = K(\alpha)$.