# Разбор контрольной работы по алгебре
# Вариант 1

by Наталья Михненко

Данный разбор не претендует на подробность решения!

## Задание 1

Пере.числите все с точностью до изоморфизма конечные абелевы группы порядка 225, содержащие нециклическую подгруппу порядка 75.

Решение:

1 утверждение: конечная абелева группа $A \sim \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$

2 утверждение: пусть $n \in \mathbb{N}, n = m \cdot l, (m, l) = 1$, тогда $\mathbb{Z}_n \sim \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$

Тогда все конечные абелевы группы порядка 225 с точностью до изоморфизма имеют вид:

$$\mathbb{Z}_{225},\ \mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5,\ \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$$

Любая подгруппа циклической группы циклическая, поэтому в $\mathbb{Z}_{225}$ нециклической подгруппы порядка 75 точно нет.

Нециклическая группа порядка 75 с точностью до изоморфизма равна $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_5$.

Для $\mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$ приведем пример нециклической подгруппы порядка 75.

$\mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5$: подгруппа $< 3 > \times < 1 >$

$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$: подгруппа $< 1 > \times < 3 >$

То, что это действительно подгруппы, можно проверить по определению.

Подгруппы нециклические, так как наибольший порядок элемента $= 15$.

Теперь докажем, что в группе $\mathbb{Z}_{75} \times \mathbb{Z}_3 \sim \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ нет подгруппы вида $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_5 \sim \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$.

Посмотрим на количество элементов порядка 5 в $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

$ord(g_1, g_2, g_3) = \text{НОК}(ord(g_1), ord(g_2), ord(g_3))$, значит, элементы порядка 5 имеют вид $(g_1, 0, 0)$, где $ord(g_1) = 5$. Элементов порядка 5 в $\mathbb{Z}_{25}$ всего 4: 5, 10, 15, 20. Тогда в группе $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ всего 4 элемента порядка 5.

Теперь посмотрим на количество элементов порядка 5 в $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$. Их как минимум 16: $(g_1, g_2, 0)$, где $g_1, g_2 \in 1, 2, 3, 4$. В подгруппе не может быть элементов порядка 5 больше, чем в группе, поэтому в группе $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ нет подгруппы вида $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$.

Ответ: $\mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_5,\ \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$

# Задание 2

Найдите в кольце $\mathbb{Z}_5$ наибольший общий делитель $h(x)$ многочленов $f(x) = x^5+2x^4+2x^3+2x+3$ и $g(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Решение:

Просто алгоритм Евклида.

$$f(x) = g(x) \cdot (3x^2 + 2x + 2) + r_1, \text{ где } r_1 = 3x^2 + 4x + 1$$
$$g(x) = r_1 1 \cdot 4x + r_2, \text{ где } r_2 = 3x + 1$$
$$r_1 = r_2 \cdot (x + 1) + 0$$

Таким образом, $(f(x), g(x)) = r_1 = 3x + 1$.

Найдем линейное выражение:

$$r_1 = f(x) - g(x) \cdot (3x^2 + 2x + 2)$$
$$r_2 = g(x) - r_1 \cdot 4x = g(x) - (f(x) - g(x) \cdot (3x^2 + 2x + 2)) \cdot 4x =$$
$$= -4x \cdot f(x) + (2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot g(x)$$

Ответ: $(f(x), g(x)) = 3x + 1 = -4x \cdot f(x) + (2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \cdot g(x)$

P.S. На контрольной, разумеется, надо писать нормальное деление в столбик.

# Задание 3

Разложите многочлен $x^6 + 2x^4 + x^3 + 1$ на неприводимые множители в кольце $\mathbb{Z}_3$.

Решение:

Заметим, что $x = 2$ - корень многочлена, тогда

$x^6 + 2x^4 + x^3 + 1 = (x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 1)$

Корней больше нет, однако это не означает что многочлен дальше не раскладывается. Нужен перебор неприводимых многочленов степени 2.

$(x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x + 1) = (2x^2 + 2x + 1) \cdot (2x^3 + 2x^2 + 1)$

Многочлен 3 степени если бы раскладывался дальше, то в разложении был бы многочлен степени 1, что означает, что у многочлена $(2x^3 + 2x^2 + 1)$ есть корень в $\mathbb{Z}_3$, но корней нет, поэтому получили разложение на неприводимые множители.

Ответ: $x^6 + 2x^4 + x^3 + 1 = (2x^2 + 2x + 1) \cdot (2x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (x + 1)$

# Задание 4

Выясните, принадлежит ли многочлен $f(x) = 16xz^4 + y^3$ идеалу $I = (2xz - y, x^2 + 2z)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Решение:

Лексикографисечкий порядок $x > y > z$, $g_1 = 2xz - y$, $g_2 = x^2 + 2z$, $F = \{g_1, g_2\}$

Найдем базис Грёбнера идеала $I$ (алгоритм Бухбергера):

$S(g_1, g_2) = (2xz - y) \cdot x - (x^2 + 2z) \cdot 2z = -xy - 4z^2$

Добавляем $g_3 = xy + 4z^2$. $F = \{g_1, g_2, g_3\}$.

$S(g_1, g_3) = (2xz - y) \cdot y - (xy + 4z^2) \cdot 2z = -y^2 - 8z^3$

Добавляем $g_4 = y^2 + 8z^3$. $F = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

$S(g_2, g_3) = (x^2 + 2z) \cdot y - (xy + 4z^2) \cdot x = 2yz - 4xz^2 \xrightarrow{g_1} 0$

$S(g_2, g_4) = (x^2 + 2z) \cdot y^2 - (y^2 + 8z^3) \cdot x^2 = 2y^2z - 8x^2z^3 \xrightarrow{g_1} 2y^2z - 4xyz^2 \xrightarrow{g_3} 2y^2z + 16z^4 \xrightarrow{g_4} 0$

$S(g_3, g_4) = (xy + 4z^2) \cdot y - (y^2 + 8z^3) \cdot x = 4yz^2 - 8xz^3 \xrightarrow{g_1} 0$

$F = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ - базис Грёбнера в $I$.

Многочлен $f(x) = 16xz^4 + y^3$ принадлежит идеалу $I$, если редуцируется относительно базиса Грёбнера этого идеала к 0.

$f(x) = 16xz^4 + y^3 \xrightarrow{g_4} 16xz^4 - 8yz^3 \xrightarrow{g_1} 0$. Многочлен редуцируется к 0 $\Rightarrow f(x) \in I$.

Ответ: $f(x) \in I$

# Задание 5

Пусть $\alpha$ - комплексный корень многочлена $z^3 - z - 1$. Представьте элемент $\frac{\alpha^4+2\alpha^3-8}{2\alpha^2-\alpha-2} \in \mathbb{Q}[a]$ в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $deg(f(z) \leq 2$.

Решение:

$\alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha + 1,\ \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha.$

$\frac{\alpha^4+2\alpha^3-8}{2\alpha^2-\alpha-2} = a\alpha^2 + b\alpha + c \Rightarrow \alpha^4 + 2\alpha^3 - 8 = (2\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot (a\alpha^2 + b\alpha + c)$

1. $\alpha^4 + 2\alpha^3 - 8 = \alpha^2 + \alpha + 2(\alpha + 1) - 8 = \alpha^2 + 3\alpha - 6$

2. $(2\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot (a\alpha^2 + b\alpha + c) = 2a\alpha^4 - a\alpha^3 - 2a\alpha^2 + 2b\alpha^3 - b\alpha^2 - 2b\alpha + 2c\alpha^2 - c\alpha - 2c = 2a(\alpha^2 + \alpha) - a(\alpha + 1) - 2a\alpha^2 + 2b(\alpha + 1) - b\alpha^2 - 2b\alpha + 2c\alpha^2 - c\alpha - 2c = (2c - b)\alpha^2 + (a - c)\alpha - a + 2b - 2c$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2c - b = 1 \\ a - c = 3 \\ -a + 2b - 2c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2c - 1 \\ a = c + 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\alpha^4+2\alpha^3-8}{2\alpha^2-\alpha-2} = 2\alpha^2 - 3\alpha - 1$

## Задание 6

Реализуем поле $K = \mathbb{F}_9$ в виде $\mathbb{Z}_3[A]/(A^2+2A+2)$ и обозначим через $a$ класс элемента $A$. Решите в поле $K$ систему уравнений

$$\begin{cases}(a+2)x+2ay=2a\\(2a+1)x+(a+1)y=1\end{cases}$$

Ответ представьте в виде многочленов от $a$ степени 1.

Решение:

В факторкольце $a^2+2a+2=0 \Rightarrow a^2=a+1,\ 2a^2=2a+2$

Метод Крамера решения систем линейных уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+2 & 2a \\ 2a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2+3a+2-4a^2-2a = a+2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2a & 2a \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2+2a-2a = 2a^2 = 2a+2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a+2 & 2a \\ 2a+1 & 1 \end{vmatrix} = a+2-4a^2-2a = a^2 = a+1$$

Тогда

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2a+2}{a+2} = ka+b$

$$2a+2 = ka^2+2ka+ba+2b = k(a+1)+2ka+ba+2b = ba+k+2b \Rightarrow \begin{cases}b=2\\k=1\end{cases}$$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a+1}{a+2} = ka+b$

$$a+1 = ka^2+2ka+ba+2b = k(a+1)+2ka+ba+2b = ba+k+2b \Rightarrow \begin{cases}b=1\\k=2\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x=a+2\\y=2a+1\end{cases}$