1. Минимальная длина этой цепочки = 2 (возьмём только $x_1x_2^3x_3^2$ и $x_1x_2^2x_3^3$). Заметим, что данную цепочку можно взять любой одночлен вида $x_1x_2^2x_3^n$, где $n > 3$, так как он лексикографически больше одночлена $x_1x_2^2x_3^3$ и меньше чем $x_1x_2^3x_3^2$. Построим цепочку $x_1x_2^2x_3^3,\ x_1x_2^2x_3^{k_1}, x_1x_2^2x_3^{k_2}, \ldots,\ x_1x_2^2x_3^{k_m}, x_1x_2^2x_3^3$. $\forall k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} k \in \mathbb{N}, k_i \neq k_j : i \neq j$. Длина данной цепочки может быть бесконечной. Ответ: от двух до бесконечности.

(2)

$g = x^4x_3^6 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2$

$f = x_2^4x_3 - x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2$

$x_1x_2^2 \leftarrow$ старший член

$x_1^2x_2^2 = x_1 \cdot (x_1x_2)$

$g \to x^4x_3^6 + 2x_1x_2^4x_3 + \cancel{x_1^2x_2^2} - x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2x_3^2 - \cancel{x_1^2x_2^2} =$

$= \cancel{x^4}x_3^6 - x_1\cancel{x_2^4}x_3 + 2x_1\cancel{x_2^4}x_3 - \cancel{x_1x_2^4x_3} + \cancel{x_1^2}x_2x_3^2$

$= x^4x_3^6 + x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2x_3^2 \longrightarrow$

старший, $\vdots\, x_1x_2^2$

2. $\to x^4x_3^6 + x_1\cancel{x_2^4}x_3 + x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 + x_1x_2^3x_3^3 - \cancel{x_1x_2^4x_3} =$

$= x^4x_3^6 - x_2^6x_3^2 + x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2^3x_3^3 \longrightarrow$

старший $\vdots\, x_1x_2^2$

$\to x^4x_3^6 - x_2^6x_3^2 + x_1^2\cancel{x_2x_3^2} + \cancel{x_1x_2^3}x_3^3 - x_2^5x_3^4 + x_1x_2^2x_3^5 - \cancel{x_1x_2^3}x_3^3 =$

$= x^4x_3^6 - x_2^6x_3^2 + \cancel{x_1x_2^3x_3^3} - x_2^5x_3^4 + x_1x_2^2x_3^5 + x_1^2x_2x_3^2 \to$

старший $\vdots\, x_1x_2^2$

$\to x_1^2x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^1 - x_2^6x_3^2 - x_2^5x_3^4 \leftarrow$ нет кратных $x_1x_2^2 \leftarrow$ неполный остаток

③ Система является системой Грёбнера, если

$\forall f_1, f_2 \in F \quad S(f_1,f_2) \xrightarrow{F} 0$

$f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2$ старший член: $\cancel{2x_1x_3^2}$ $2x_1x_2$

$f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4$ старший член: $4x_1x_3^2$

$f_3 = x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3$ старший член: $x_2^2x_3^3$

НОК $(L(f_1), L(f_2)) = 4x_1x_2x_3^2 \Rightarrow S(f_1,f_2) = 2x_3^2 f_1 - x_2 f_2$

НОК $(L(f_2, L(f_3)) = 4x_1x_2^2x_3^3 \Rightarrow S(f_2,f_3) = x_2^2x_3 f_2 - 4x_1 f_3$

НОК $(L(f_1, L(f_3)) = 2x_1x_2^2x_3^3 \Rightarrow S(f_1,f_3) = x_2x_3^3 f_1 - 2x_1 f_3$

Редуцируем:

$S(f_1,f_2) = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_2^3 - 4x_2 \to -8x_3 - x_2^2x_3^3 - 4x_3 \to 0$

3. $S(f_2,f_3) = x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 \to -8x_2x_3^2 - 32x_1x_3 - 16x_1x_2 \to 0$

$S(f_1,f_3) = -\cancel{x_2x_3^2 f}\ 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 \to -8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 4x_2x_3^2 \to$

$\to -16x_1x_3 - 4x_2x_3^2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 \to 0$

Все редуцировались к 0 $\Rightarrow$ эта система система Грёбнера.