Задачи к лекции 5

1. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейное выражение через f и g в следующих случаях:

(а) $K = \mathbb{R}$, $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

(б) $K = \mathbb{R}$, $f = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g = x^2 - x + 1$;

(в) $K = \mathbb{Z}_5$, $f = x^5 + 2x^4 + x^3 + 4x + 1$, $g = 3x^3 + 2x^2 + x + 3$;

(г) $K = \mathbb{Z}_3$, $f = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$, $g = x^3 + 2x^2 + 1$.

2. Опишите все неприводимые многочлены над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

3. Разложите в произведение неприводимых над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$ следующие многочлены:

(а) $x^4 - 4$; (б) $x^4 + 4$.

4. Разложите в произведение неприводимых следующие многочлены:

(а) $x^4 + x^3 + x + 1$ в $\mathbb{Z}_2[x]$; (б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ в $\mathbb{Z}_3[x]$.

5. Перечислите все неприводимые многочлены степеней не выше 4 над полем $\mathbb{Z}_2$ и докажите, что существует ровно 6 неприводимых многочленов степени 5.

6. Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3 - z^2 + 1)$ и обозначим через α класс элемента z в нём. Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 6}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \in F$ в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f \leqslant 2$.

7. Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + x + 2)$ и обозначим через α класс элемента x в нём. Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\frac{\alpha^3 + 2}{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2} \in F$ в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ и $\deg f \leqslant 3$.

8. Пусть K — поле и $h = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, где $n \geqslant 1$ и $a_n \neq 0$. Рассмотрим факторкольцо $K[x]/(h)$ как векторное пространство над K и в нём линейный оператор $a \mapsto a\overline{x}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $(\overline{1}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{n-1})$.

9. Предположим, что многочлен с целыми коэффициентами имеет кратный комплексный корень. Может ли такой многочлен быть неприводимым над полем $\mathbb{Q}$?

10. Пусть $K \subseteq F$ — два поля и $f, g, h \in K[x]$. Докажите, что если h является наибольшим общим делителем для f и g в $K[x]$, то h является таковым и в $F[x]$.

Домашнее задание

1. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейное выражение через f и g в следующих случаях:

(а) $K = \mathbb{R}$, $f = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$;

(б) $K = \mathbb{Z}_5$, $f = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4$, $g = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$.

2. Разложите многочлен f в произведение неприводимых в кольце $K[x]$ в следующих случаях:

(а) $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $f = x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12$;

(б) $K = \mathbb{Z}_5$, $f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3$.

3. Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3 - z^2 - 1)$ и обозначим через α класс элемента z в нём. Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \in F$ в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f \leqslant 2$.

4. Пусть K — поле и $h \in K[x]$ — многочлен положительной степени. Докажите, что всякий ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ является делителем нуля.