1. $\alpha = \sqrt[3]{5}$ – корень многочлена $h = x^3 - 5$, h – неприводимый над $\mathbb{Q}$

   $\Rightarrow \beta = \dfrac{51 - 44\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{1 - \sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{25}} \in \mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}[x]/(h)$ (по теореме)

   $\Rightarrow$ (по следствию) β представим в виде $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$

   Формула понижения степени: $\overline{x}^3 = 5$

   $\dfrac{51 - 44\alpha + \alpha^2}{1 - \alpha - 4\alpha^2} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \Rightarrow$

   $51 - 44\alpha + \alpha^2 = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2)(1 - \alpha - 4\alpha^2)$

   $51 - 44\alpha + \alpha^2 = a_0 - a_0\alpha - 4a_0\alpha^2 + a_1\alpha - a_1\alpha^2 - 20a_1 + a_2\alpha^2 - 5a_2 - 20a_2\alpha$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 51 = a_0 - 20a_1 - 5a_2 \\ -44 = -a_0 + a_1 - 20a_2 \\ 1 = -4a_0 - a_1 + a_2 \end{cases}$$

   $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -20 & -5 & 51 \\ -1 & 1 & -20 & -44 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -20 & -5 & 51 \\ 0 & -19 & -25 & 7 \\ 0 & -81 & -19 & 205 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -20 & -5 & 51 \\ 0 & -19 & -25 & 7 \\ 0 & 1539 & 361 & -3895 \end{array}\right)$$

   $$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -19 & 0 & -405 & -829 \\ 0 & -19 & -25 & 7 \\ 0 & 0 & -1664 & -3328 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -19 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & -19 & 0 & 57 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   $\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = 2$

   Ответ: $1 - 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}$

---

2. $\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{5} + 1 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 6 - 2\sqrt{30} + 5 \Rightarrow (\alpha^2 - 2\alpha - 10)^2 = 120$

   $\Rightarrow \alpha^4 + 4\alpha^2 + 100 - 20\alpha^2 + 40\alpha - 4\alpha^3 = 120 \Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 - 16\alpha^2 + 40\alpha - 20 = 0$

   $\Rightarrow h = x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 40x - 20$ – обнуляющий многочлен

   Докажем, что h является минимальным:

   Необходимо доказать, что $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$

   $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}] = 2$, так как $x^2 - \sqrt{6}$ – минимальный многочлен для $\sqrt{6}$

   Базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$: $1, \sqrt{6}$

   $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$, так как $x^2 - \sqrt{5}$ – минимальный многочлен для $\sqrt{5}$

   Базис в $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$: $1, \sqrt{5}$

   Докажем, что $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$:

   Пусть от противного $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{6} = a + b\sqrt{5}, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 6 = a^2 + 2ab\sqrt{5} + 5b^2 \Rightarrow$ $\begin{cases} a^2 + 5b^2 = 6 \\ 2ab\sqrt{5} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ a должно быть равно 0 или b должно быть равно 0, но такие a и b не удовлетворяют равенству – получили противоречие $\Rightarrow \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$F := \mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{6}) \Rightarrow$(по лемме) $F : \mathbb{Q}] = 4$

$\Rightarrow$(по лемме) базис в F: $1, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{30} \Rightarrow \alpha \in F \Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq F$

$\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow 2\alpha + 10 + \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$$\begin{cases} \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \alpha \in \mathbb{Q}(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \alpha\sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} + \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{6} - \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \sqrt{6} - \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\alpha) \end{cases} \Rightarrow F \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$$

$$\begin{cases} F \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \\ \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq F \end{cases} \Rightarrow F = \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4 \Rightarrow h \text{ – минимальный многочлен для } \sqrt{6} - \sqrt{5} + 1$$

Ответ: $x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 40x - 20$

---

3. $|F_8| = 8 = 2^3 \Rightarrow$ можно взять $F_8 = \mathbb{Z}_2/(h)$, где h – неприводимый над $\mathbb{Z}_2$ многочлен степени 3

   Нам подходит $h = x^3 + x + 1$ (поскольку он неприводим над $\mathbb{Z}_2 \Rightarrow \overline{x}^3 = \overline{x} + \overline{1}$

   $\Rightarrow F_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x} + \overline{1}, \overline{x}^2, \overline{x}^2 + \overline{1}, \overline{x}^2 + \overline{x}, \overline{x}^2 + \overline{x} + \overline{1}\}$

   Дальше идёт один из страшных снов техающих. Всем техающим F

   Некрасивая таблица сложения:

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$
$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	0	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2$
$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	0	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$
$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

   Некрасивая таблица умножения:

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$
$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$
$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x}^2$
$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x}^2+\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{x}^2+\overline{x}$	$\overline{x}^2$	$\overline{x}+\overline{1}$

---

4. Заметим, что случай, когда α – алгебраический, мы уже рассматривали на лекции, когда доказывали, что $K[x]/(h) \simeq K(\alpha)$:

   Мы сказали, что $K[x]/(h) \simeq Im(\varphi)$, где φ переводит $f(x) \in K[x]$ в $f(a)$

То есть, $Im(\varphi) = K[\alpha]$. Дальше мы доказали, что $Im(\varphi) = K(\alpha)$. То есть, $K(\alpha) = K[\alpha]$, что нам и требуется.
Сейчас я фактически повторю доказательство с лекции, оформленное в более аккуратном виде (на самом деле это мы тоже уже делали, но на семинаре):

$\alpha \in K[\alpha]$ (просто возьмём многочлен $x \in K[x]$), $K \in K[\alpha]$ (просто возьмём многочлены-константы из $K[x]$) $\Rightarrow K(\alpha) \subseteq K[\alpha]$

Пусть L' – любое поле, содержащее K и α. $\alpha \in L' \Rightarrow \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^i, ... \in L', K \in L' \Rightarrow$
$\forall f(x) \in K[x],\ f(\alpha) \in L' \Rightarrow K[\alpha] \subseteq L' \Rightarrow K[\alpha] \subseteq K(\alpha)$

$$\begin{cases} K(\alpha) \subseteq K[\alpha] \\ K[\alpha] \subseteq K(\alpha) \end{cases} \Rightarrow K[\alpha] = K(\alpha), \text{ что и требовалось доказать}$$

Утверждение: Если $K \subseteq F, \alpha \in F$ и α – трансцендентный, то $[K[\alpha] : K] = \infty$ (то есть, $dim_K K[\alpha] = \infty$)

Доказательство: Пусть от противного $[K[\alpha] : K] = n$ (то есть, расширение конечно). Так как размерность $K[\alpha]$ как векторного пространства над K равна n, то элементы $1, \alpha, ..., \alpha^n$ должны быть линейно зависимы над $K[\alpha]$ (так как элементов $n+1$, что больше $dim_K K[\alpha]$) $\Rightarrow$ существует нетривиальная линейная комбинация данных элементов, равная 0:
$k_0 + k_1\alpha + ... + k_n\alpha^n = 0,\ k_i \in K,\ \forall i \Rightarrow k_0 + k_1 x + ... + k_n x^n \in K[x]$ – ненулевой многочлен, для которого α – корень $\Rightarrow k_0 + k_1 x + ... + k_n x^n$ – аннулирующий многочлен $\Rightarrow \alpha$ – алгебраический, получили противоречие

Таким образом, в случае трансцендентного α $K(\alpha)$ и $K[\alpha]$ конечномерными являться не будут, что протеворечит условиям