Вращается гончарный круг,
Преображая все вокруг.
И каждый новый человек
Приходит в свой гончарный век.

Александр Поверин

Во всех заданиях ниже я буду использовать лемму с лекции:
Если $GCD(L(f_1), L(f_2)) = 1$, то $S(f_1, f_2) \xrightarrow{F} 0$

---

1. $f_1 = 2y^2 + yz, f_2 = xy + z$

   $S(f_1, f_2) = 2xy^2 + xyz - 2xy^2 - 2yz = xyz - 2yz \xrightarrow{f_2} xyz - 2yz - xyz - z^2 = -2yz - z^2 = f_3$

   $S(f_1, f_3) = 2y^2z + yz^2 - 2y^2z - yz^2 = 0$

   $S(f_2, f_3) = 2xyz + 2z^2 - 2xyz - xz^2 = 2z^2 - xz^2 = f_4$

   $S(f_1, f_4) \xrightarrow{F} 0$

   $S(f_2, f_4) = xyz^2 + z^3 - xyz^2 + 2yz^2 = z^3 + 2yz^2 \xrightarrow{f_3} z^3 + 2yz^2 - 2yz^2 - z^3 = 0$

   $S(f_3, f_4) = -2xyz^2 - xz^3 - 4yz^2 + 2xyz^2 = -xz^3 - 4yz^2 \xrightarrow{f_2} -xz^3 - 4yz^2 + 4yz^2 + 2z^3 =$

   $= -xz^3 + 2z^3 \xrightarrow{f_4} -xz^3 + 2z^3 + xz^3 - 2z^3 = 0$

   $\Rightarrow f_1, f_2 f_3, f_4$ – базис Грёбнера в I

   $g_1 = xz^3 + 4yz \xrightarrow{f_4} xz^3 + 4yz - xz^3 + 2z^3 = 4yz + 2z^3 \xrightarrow{f_3} 4yz + 2z^3 - 4yz - 2z^3 = 0 \Rightarrow g_1 \in I$

   $g_2 = xz^2 + 4yz^3 \xrightarrow{f_4} xz^2 + 4yz^3 + 2z^2 - xz^2 = 4yz^3 + 2z^2 \xrightarrow{3} 4yz^3 + 2z^2 - 4yz^3 - 2z^4 = 2z^2 - 2z^4$ –

   не редуцируется относительно $F \Rightarrow g_2 \notin I$

   Ответ: g_1 принадлежит идеалу, g_2 не принадлежит идеалу

---

2. $f_1 = y + 3z, f_2 = xy - 2y^3, f_3 = 2xz - y$

   $S(f_1, f_2) = xy + 3xz - xy + 2y^2 = 3xz + 2y^2 \xrightarrow{f_1} 3xz + 2y^2 - 2y^2 - 6yz =$

   $= 3xz - 6yz \xrightarrow{f_1} 3xz - 6yz + 6yz + 18z^2 = 18z^2 + 3xz \xrightarrow{f_3} 18z^2 + 3xz - 3xz + \frac{3}{2}y =$

   $= 18z^2 + \frac{3}{2}y \xrightarrow{f_1} 18z^2 + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}y - \frac{9}{2}z = 18z^2 - \frac{9}{2}z$

   Для удобства в качестве f_4 возьмём $4z^2 - z$

   $S(f_1, f_3) \xrightarrow{F} 0$

   $S(f_1, f_4) \xrightarrow{F} 0$

   $S(f_2, f_3) = 2xyz - 4y^2z - 2xyz + y^2 = y^2 - 4y^2z \xrightarrow{f_1} y^2 - 4y^2z + 4y^2z + 12yz^2 =$

$= y^2 + 12yz^2 \xrightarrow{f_1} y^2 + 12yz^2 - y^2 - 3yz = 12yz^2 - 3yz \xrightarrow{f_4} 12yz^2 - 3yz - 12yz^2 + 3yz = 0$

$S(f_2, f_4) \xrightarrow{F} 0$

$S(f_3, f_4) = 4xz^2 - 2yz - 4xz^2 + xz = -2yz + xz \xrightarrow{f_1} -2yz + xz + 2yz + 6z^2 =$

$= xz+6z^2 \xrightarrow{f_3} xz+6z^2-xz+\frac{1}{2}y = 6z^2+\frac{1}{2}y \xrightarrow{f_1} 6z^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z = 6z^2-\frac{3}{2}z \xrightarrow{f_4} 6z^2-\frac{3}{2}z-6z^2+\frac{3}{2}z = 0$

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3, f_4$ – базис Грёбнера

Так как $L(f_2) \vdots L(f_1)$, можем выкинуть f_2 из системы

Получили: $F = \{f_1, f_3, f_4\}$

Теперь, так сказать, отридуцируем их, отредуцируем их полностью: f_1 – уже является остатком относительно $F \backslash \{f_1\}$

$f_3 \xrightarrow{f_1} 2xz - y + y + 3z = 2xz + 3z = f_3'$ – остаток относительно $F \backslash \{f_3\}$

f_4– уже является остатком относительно $F \backslash \{f_4\}$

В качестве последней экзекуции над f_1, f_3', f_4 отнормируем этих работяг (хотя вроде работяга тут только я)

Ответ: $y + 3z, xz + \frac{3}{2}z, z^2 - \frac{1}{4}z$

---

3. К сожалени, компаратор по умолчанию нам в этой задаче не подходит – придётся писать свой: $z \succ y \succ x$

А теперь ~~снова месим глину~~ ищем базис Грёбнера

$f_1 = xz^3 + 1, f_2 = yz - z^2$

$S(f_1, f_2) = xz^3 + 1 - xz^3 + xyz^2 = xyz^2 + 1 \xrightarrow{f_2} xyz^2 + 1 - xyz^2 + xy^2z = xy^2z + 1 = f_3$

$S(f_2, f_3) = xy^3z - xy^2z^2 + xy^2z^2 + z = xy^3z + z \xrightarrow{f_3} xy^3z + z - xy^3z - y = z - y = f_4$

$S(f_1, f_3) = xy^2z^3 + y^2 - xy^2z^3 - z^2 = y^2 - z^2 \xrightarrow{f_2} y^2 - z^2 + z^2 - yz = y^2 - yz \xrightarrow{f_4} y^2 - yz - y^2 + yz = 0$

$S(f_1, f_4) = xz^3 + 1 - xz^3 + xz^2y = xz^2y + 1 \xrightarrow{f_4} xyz^2 + 1 - xyz^2 + xy^2z$

$= xy^2z + 1 \xrightarrow{f_3} xy^2z + 1 - xy^2z - 1 = 0$

$S(f_2, f_4) = yz - z^2 - yz + z^2 = 0$

$S(f_3, f_4) = xy^2z + 1 - xy^2z + xy^3 = xy^3 + 1 = f_5$

$S(f_1, f_5) = xy^3z^3+y^3-xy^3z^3-z^3 = y^3-z^3 \xrightarrow{f_4} -z^3+y^3+z^3-yz^2 = y^3-yz^2 \xrightarrow{f_4} y^3-yz^2+yz^2-y^2z =$

$= y^3 - y^2z \xrightarrow{f_4} y^3 - y^2z + y^2z - y^3 = 0$

$S(f_2, f_5) \xrightarrow{F} 0$

$S(f_3, f_5)xy^3z + y - xy^3 - z = y - z \xrightarrow{f_4} y - z - y + z = 0$

$S(f_4, f_5) \xrightarrow{F} 0$

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ – базис Грёбнера в идеале $I \Rightarrow$ по задаче с семинара: $F \cap \mathbb{R}[x, y]$ – базис Грёбнера в $I \cap \mathbb{R}[x, y]$

Ответ: $xy^3 + 1$

---

4. Дисклеймер: данное задание неизбежно ведёт к расширению сознания бедного первака

Обозначение: I – идеал из условия

Найдём (глазками) в идеале I два многочлена f_1 и f_2: $f_1 = x - y + 1$, $f_2 = z - y^2 + 3y - 2$

Нетрудно проверить (прямой подстановкой), что оба многочлена лежат в I

Пусть $J = (f_1, f_2)$

$f_1 \in I, f_2 \in I \Rightarrow J \subseteq I$

Осталось доказать, что $I \subseteq J$, то есть, что $\forall f \in I : f = f_1 q + f_2 p,\ p, q \in R[x, y, z]$

Возьмём произвольный f из I

$f \in R[x, y, z] \Rightarrow f \in K[x]$, где $K = R[y, z]$ (вот на этом моменте я поняла, что вселенная шире, чем я думала)

Заметим, что $f_1 \in K[x] \Rightarrow$ Поделим f на f_1 с остатком:

$f = qf_1 + r_1$, где $q, r_1 \in K[x], deg(r_1) < deg(f_1) = 1 \Rightarrow deg(r_1) = 0 \Rightarrow$

r_1 не содержит перемнной $x \Rightarrow r_1 \in F[z]$, где $F = R[y]$ (продолжаем расширять сознание)

Заметим, что $f_2 \in F[z] \Rightarrow$ Поделим r_1 на f_2 с остатком

$r_1 = pf_2 + r_2$, где $p, r_2 \in F[z], deg(r_2) < deg(f_2) = 1 \Rightarrow deg(r_2) = 0 \Rightarrow$

r_2 не содержит перемнной $x \Rightarrow r_2 \in R[y] \Rightarrow r_2 = r(y)$

Утверждение: $r_2 \in I$

Доказательство: $r_1 = f - qf_1, f \in I, f_1 \in I, q \in K[x] \Rightarrow q \in R[x, y, z] \Rightarrow qf_1 \in I \Rightarrow r_1 \in I$

$r_2 = r_1 - pf_2, r_1 \in I, f_2 \in I, p \in F[x] \Rightarrow p \in R[x, y, z] \Rightarrow pf_2 \in I \Rightarrow r_2 \in I$

$\Rightarrow r_2 = 0,\ \forall a \Rightarrow r_2 = r(y) = r(a + 1) = 0,\ \forall a \Rightarrow r_2$ – тождественно равен 0

$\Rightarrow \forall f \in I : f = qf_1 + pf_2 \Rightarrow I \subseteq J \Rightarrow I = J \Rightarrow J$ – искомый идеал

$F = \{f_1, f_2\}$

$S(f_1, f_2) \xrightarrow{F} 0 \Rightarrow F$ – базис Грёбнера в I (то есть, искомый базис)
