

Задачи к лекции 7

В этом листке используется обозначение $R = K[x_1, \dots, x_n]$, где K — некоторое поле. При сравнении одночленов от нескольких переменных всегда используется лексикографический порядок.

1. Постройте базис Грёбнера в следующих идеалах кольца $K[x, y, z]$:

(а) $(x^2 - 1, xy - y, xz + z)$;

(б) $(x^3 + xy, x^2 + y^2)$.

2. Выясните, принадлежит ли многочлен $2x^2y + y$ идеалу $(x^2 + xy + 1, xy - y^2)$.

3. Пусть многочлены f_1, \dots, f_m составляют базис Грёбнера идеала $I \subseteq R$. Предположим, что $L(f_1) : L(f_i)$ для некоторого $i \geq 2$. Докажите, что тогда многочлены f_2, \dots, f_m по-прежнему составляют базис Грёбнера идеала I .

Базис Грёбнера F идеала $I \subseteq R$ называется *минимальным редуцированным*, если

(1) для любых двух различных многочленов $f_1, f_2 \in F$ никакой одночлен в f_1 не делится на $L(f_2)$;

(2) старшие коэффициенты всех многочленов из F равны 1.

4. Докажите, что всякий ненулевой идеал в R обладает минимальным редуцированным базисом Грёбнера, причём этот базис единствен с точностью до перестановки входящих в него многочленов.

5. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера для идеалов из задач 1 и 2.

6. Пусть $I = (f_1, \dots, f_m)$ и $J = (g_1, \dots, g_k)$ — два идеала в R . Как алгоритмически выяснить, совпадают I и J или нет?

7. Пусть $I \subseteq R$ — ненулевой идеал и F — его базис Грёбнера. Пусть $1 \leq k \leq n - 1$ и $R_k = K[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Докажите, что множество $F \cap R_k$ является базисом Грёбнера идеала $I \cap R_k$ кольца R_k .

8. Пусть $I = (y^2 + 1, x^2 - y) \subseteq K[x, y]$. Найдите $I \cap K[x]$ и $I \cap K[y]$.

9. Пусть $I = (f_1, \dots, f_m)$ и $J = (g_1, \dots, g_k)$ — два идеала в R . Введём новую переменную t и рассмотрим в кольце $K[t, x_1, \dots, x_n]$ идеал $H = (tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_k)$. Докажите, что $I \cap J = H \cap R$. Опишите алгоритм нахождения порождающих идеала $I \cap J$.

10. Найдите порождающую систему для пересечения $(x^3 + y^3 - 1, x - y + 1) \cap (xy)$.

Домашнее задание

1. Выясните, принадлежат ли идеалу $I = (2y^2 + yz, xy + z)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$ многочлены $g_1 = xz^3 + 4yz^2$ и $g_2 = xz^2 + 4yz^3$.

2. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале

$$(y + 3z, xy - 2y^2, 2xz - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$$

относительно стандартного лексикографического порядка (то есть задаваемого условием $x > y > z$).

3. Дан идеал $I = (xz^3 + 1, yz - z^2) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

4. Найдите конечный базис Грёбнера (относительно стандартного лексикографического порядка) для идеала $I \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$, определяемого условием

$$I = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid f(a, a + 1, a^2 - a) = 0 \text{ для всех } a \in \mathbb{R}\}.$$