Мне очень не хочется этот факт упоминать где-то ниже отдельно, поэтому выпишу тут: по **материалам из лекции** старший член произведения равен произведению старших членов (или $L(fg) = L(f) \cdot L(g)$)

1. - Найдём все одночлены вида $m := x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} : x_1 x_2^2 x_3^3 \prec x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \prec x_1 x_2^3 x_3^2$
   - Заметим, что k_1 определено однозначно ($k_1 = 1$): при $k_1 > 1 \Rightarrow m \succ x_1 x_2^3 x_3^2$, при $k_1 < 1 \Rightarrow m \prec x_1 x_2^2 x_3^3$, а это не удовлетворяет условиям
   - Условия, чтобы выполнялось $x_1 x_2^2 x_3^3 \prec m$: $\left[\begin{array}{l} k_2 > 2 \\ \begin{cases} k_2 = 2 \\ k_3 > 3 \end{cases} \end{array}\right.$
   - Условия, чтобы выполнялось $m \prec x_1 x_2^3 x_3^2$: $\left[\begin{array}{l} k_2 < 3 \\ \begin{cases} k_2 = 3 \\ k_3 < 3 \end{cases} \end{array}\right.$
   - Объединим условия: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k_2 = 2 \\ k_3 > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} k_2 = 3 \\ k_3 < 3 \end{cases} \end{array}\right.$
   - Рассмотрим первое условие: $\begin{cases} k_2 = 2 \\ k_3 > 3 \end{cases}$

     Этому условию удволетворяют все многочлены вида: $x_1 x_2^2 x_3^i$ такие, что $i > 3$. Причём $m_1 = x_1 x_2^2 x_3^i > m_2 = x_1 x_2^2 x_3^j \Leftrightarrow i > j$
   - Таким образом, если мы хотим получить длину цепочки $l > 2$ нам необходимо и достаточно взять $l - 2$ одночлена вида: $x_1 x_2^2 x_3^{3+l-2}, ..., x_1 x_2^2 x_3^{3+2}, x_1 x_2^2 x_3^{3+1}$
   - Длину меньше двух мы получить не сможем (есть как минимум ограничивающие одночлены)

   Ответ: любая длина l такая, что $l \in \mathbb{N}, l \geqslant 2$

---

2. $g \xrightarrow{f} x_2^4 x_3^6 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2 =$
   $= x_2^4 x_3^6 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 \xrightarrow{f} x_2^4 x_3^6 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^3 - x_1 x_2^4 x_3 =$
   $= x_2^4 x_3^6 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^3 \xrightarrow{f} x_2^4 x_3^6 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 + x_1 x_2^3 x_3^3 - x_2^5 x_3^4 + x_1 x_2^2 x_3^5 - x_1 x_2^3 x_3^3 =$
   $= x_2^4 x_3^6 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 - x_2^5 x_3^4 + x_1 x_2^2 x_3^5 \xrightarrow{f}$
   $\xrightarrow{f} x_2^4 x_3^6 + x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 - x_2^5 x_3^4 + x_1 x_2^2 x_3^5 - x_2^4 x_3^6 + x_1 x_2 x_3^7 - x_1 x_2^2 x_3^5 =$
   $= x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 - x_2^5 x_3^4 + x_1 x_2 x_3^7$

   Ответ: $x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 - x_2^5 x_3^4 + x_1 x_2 x_3^7$

---

3. Так как $S(f_i, f_j) = -S(f_j, f_i)\ \forall i, j$ будем проверять только пары $f_i, f_j : i < j$

$S(f_1, f_2) = 4x_1x_2x_3^2 + 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - 4x_1x_2x_3^2 - x_2^2x_3^3 - 4x_2 =$
$= 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 - 4x_2 \xrightarrow{f_3} 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 - 4x_2 + x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3 =$
$= 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 + 8x_3 \xrightarrow{f_2} 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 + 8x_3 - 8x_1x_3^3 - 2x_2x_3^4 - 8x_3 = 0$

$S(f_2, f_3) = 4x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 4x_1x_2^2x_3^3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 =$
$= x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 \xrightarrow{f_1} x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 + 8x_2x_3^2 =$
$= x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 + 8x_2x_3^2 \xrightarrow{f_3} x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 + 8x_2x_3^2 - x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 - 8x_2x_3^2 = 0$

$S(f_1, f_3) = 2x_1x_2^2x_3^3 + 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 2x_1x_2^2x_3^3 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 =$
$= 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 \xrightarrow{f_1} 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 + 4x_2x_3^2 =$
$= 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 4x_2x_3^2 \xrightarrow{f_2} 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 4x_2x_3^2 - 4x_1x_2x_3^4 - x_2^2x_3^5 - 4x_2x_3^2 = 0$

$\Rightarrow$ По критерию Бухбергераа: **Ответ:** Да, является

---

4. Дисклеймер: в этом задании формалист во мне окончательно умер и я буду использовать понятие, которое используют все ВЕЛИКИЕ математики "многочлен в скобочках"

   Замечание: так как все многочлены из F делятся на многочлен $f \in F$, то $deg(f) \leqslant deg(f_i)$, $\forall f_i \in F$

   Замечание: на лекции было, что система $F = f$ автоматически является системой Грёбнера (поэтому далее можем считать, что многочленов в системе несколько и всё не так очевидно)

   1. $\Rightarrow$

      - Пусть F – система Грёбнера
      - Рассмотрим множество G, состоящее из всех многочленов $g \in F$ таких, что $deg(g)$ – минимальна среди всех многочленов из F
      - Пусть от противного $\forall g \in G\ \exists f \in F : f \not\vdots g$
      - Рассмотрим произвольный $g \in G$ и такой $f \in F$, что $f \not\vdots g$
      - Так как $deg(g)$ – минимальна среди всех многочленов из F, то мы можем записать f в виде $f = gq + r$, где $r \neq 0$ и $deg(r) < deg(g)$, $q \in K[x]$
      - Пусть $g = a_nx^n + ... + a_0, q = q_mx^m + ... + q_0 \Rightarrow L(f) = L(g)L(q) = a_nx^nq_mx^m \Rightarrow$
        $S(f, g) = gq + r - q_mx^mg = g(q_{m-1}x^{m-1} + ... + q_0) + r$ (заметим, что в скобочках у нас записан тот же многочлен q, но без одной или нескольких старших степеней. Иными словами, многочлен степени не больше, чем $m - 1$)
      - Пока степень многочлена в скобочках не 0 (то есть, пока в скобочках не константа)редуцируем текущий (изначально S) многочлен по g: $g(q_ix^i + ... + q_0) + r \xrightarrow{g} g(q_ix^i + ... + q_0) + r - q_ix^ig = g(q_{i-1}x^{i-1} + ... + q_0) + r$
      - Заметим, что с каждым шагом степень многочлена в скобочках уменьшается как минимум на 1

- Завершаем редуцирование на моменте: $S(f, g) = gq + r - q_m x^m g \xrightarrow{g} ... \xrightarrow{g} g \cdot const + r$
- Последний раз проредуцируем по g: $g \cdot const + r \xrightarrow{g} g \cdot const + r - g \cdot const = r$
- Так как $deg(r) < deg(g)$, а степень g минимальна из всех степеней многочленов в F, то в F нет многочленов, по которым мы бы могли средуцировать полученный остаток
- По следствию из критерия Бухбергера F – не система Грёбнера, получили противоречие

2. $\Leftarrow$

- Пусть $\forall f_i \in F$ выполняется $f_i \vdots f$ и $f \in F$
- Рассмотрим произвольные многочлен f_i и f_j из F
- Пусть $f_i = fg_i$, $f_j = fg_j$
- Пусть $g_i = b_m x^m + ... + b_0$, $g_j = c_l x^l + ... + c_0$, $f = a_n x^n + ... + a_0$
- Без ограничений общности $m \geqslant l$
- $LCM(L(f_i), L(f_j)) = a_n x^n LCM(c_l, b_m) x^m \Rightarrow$
- Рассмотрим $S(f_i, f_j) = f \cdot (p_{m-1} x^{m-1} + ... + p_0)$. Заметим, что в скобках будет стоять многочлен степени не больше, чем $m - 1$
- Пока степень многочлена в скобочках не 0 (то есть, пока в скобочках не константа) редуцируем текущий (изначально S) многочлен по f: $f(p_i x^i + ... + p_0) \xrightarrow{f} f(p_i x^i + ... + p_0) - p_i x^i f = f(p_{i-1} x^{i-1} + ... + p_0)$
- Заметим, что с каждым шагом степень многочлена в скобочках уменьшается как минимум на 1
- Завершаем редуцирование на моменте: $S(f_i, f_j) = fp \xrightarrow{f} ... \xrightarrow{f} f \cdot const$
- Последний раз проредуцируем по f: $f \cdot const \xrightarrow{f} f \cdot const - f \cdot const = 0$
- По критерию Бухбергера F – система Грёбнера