Сингулярное матричное разложение

Сафонов Андрей

Студент ФН1-21Б

18 апреля 2019 г.

Теоретическая часть

Сингулярное разложение — это разложение определенного типа для произвольной прямоугольной матрицы.

$$A = U \cdot S \cdot V^T,$$

где матрицы U и V^T — это две ортогональные матрицы, причем в U векторы расположены по столбцам, а в V — по строкам.

Матрица S — матрица, равная размеру исходной матрице A и содержащая сингулярные значения, расположенные на главной диагонали ($\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, где λ — собсвтенное число матрицы $B = A^T \cdot A$).

Возможный вариант разложения матрицы

m, n — кол-во строк и столбцов соответственно

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

При $m > n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}^T$$

где в матрице S размера $m \times n$ расположены сингулярные значения в невозрастающем порядке.

Нахождение элементов разложения

Для начала вычислим матрицу $B = A^T \cdot A$. Матрица B — квадратная симметричная матрица размера $n \times n$. Значит данная матрица будет содержать n собственных чисел, каждому из которых будет соответствовать собственный вектор.

QR - разложение — один из методов нахождения собственных чисел путем разложения матрицы на произведение ортогональной и верхней треугольной матриц.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Причем матрица Q представляет собой произведение матриц вращения

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \dots & \sin\alpha & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\sin\alpha & \dots & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нахождение элементов разложения

где $\cos\alpha = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{aii^2 + aij^2}}$, а $\sin\alpha = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{aii^2 + aij^2}}$

Получая QR - разложение, находим матрицу $\mathrm{B}_1 = \mathrm{R} \cdot \mathrm{Q}$.
Повторяем для матрицы B_i аналогичные преобразования n раз, пока матрица не будет диагональной,

$$\mathrm{B}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где λ_i — есть собственные числа матрицы, расположенные в неубывающем порядке.
Соответственно, для каждого собственного числа λ_i находим собственный вектор b_i, решая однородную СЛАУ.

$$\mathrm{B} - \lambda_i \cdot \mathrm{E} = 0$$

Нахождение элементов разложения

Далее решаем однородную систему методом Гаусса

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Отсюда и получаем собственный вектор

$$b_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Таким образом мы получаем матрицу V, в строках которой расположены собственные векторы

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Нахождение элементов разложения

Для нахождения матрицы U необходимо найти промежуточную матрицу $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}^T$, где матрица C будет размером $m \times n$.

Затем воспользуемся ортогональным дополнением для матрицы C (доведем матрицу до квадратной), где $(m - n)$ — количество векторов, входящих в ортогональное дополнение.

Из уравнения $\mathrm{C} \cdot \mathrm{X} = 0$ составим СЛАУ и решим ее методом Гаусса. Аналогично получаем векторы и добавляем их матрицу C.

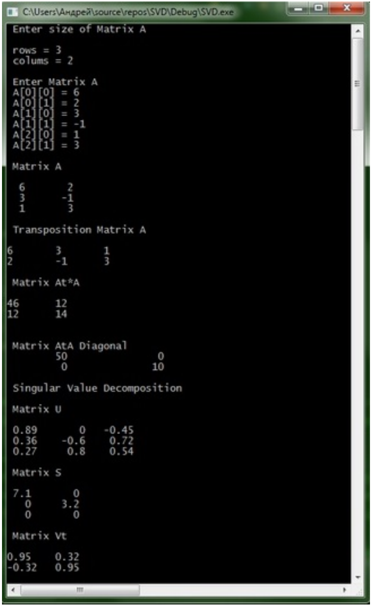
$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1m} & \cdots & y_{mm} \end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет вид

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n & 0 \end{pmatrix}$$

После нахождения матриц U и V^T их векторы небходимо нормировать.

Практическая часть


C:\Users\Андрей\source\repos\SVD\Debug\SVD.exe

```
 Enter size of Matrix A

 rows = 3
 colums = 2

 Enter Matrix A
 A[0][0] = 6
 A[0][1] = 2
 A[1][0] = 3
 A[1][1] = -1
 A[2][0] = 1
 A[2][1] = 3

 Matrix A

  6       2
  3      -1
  1       3

 Transposition Matrix A

6       3       1
2       -1      3

 Matrix At*A

46      12
12      14


 Matrix AtA Diagonal
        50              0
         0             10

 Singular Value Decomposition

 Matrix U

 0.89       0   -0.45
 0.36    -0.6    0.72
 0.27     0.8    0.54

 Matrix S

 7.1      0
   0    3.2
   0      0

 Matrix Vt

0.95    0.32
-0.32   0.95
```

Заключение

С помощью SVD - разложения возможна быстрая аппроксимация матрицы произвольного размера с наименьшей потерей числовых данных.

Литература

- А.А. Амосов., Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова "Вычислительные методы для инженеров"543 с.
- Е.С. Тверская "Семинары по вычислительной математике"19 с.
- Ю.П. Власов, В.П. Посвянский "Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине Численные методы"36 с.
- С. К. Соболев "Сингулярное разложение матрицы"2 с.

Спасибо за внимание!