Министерство науки высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Высшая математика»

ОТЧЕТ

По учебной практике за 2 семестр 2018-2019 учебного года

Руководитель практики ст.преп.кафедры ФН1	____________________ *подпись, дата*	Гордеева Н.М. *фамилия, инициалы*
Студент группы ФН1-21Б	____________________ *подпись, дата*	Сафонов А.А. *фамилия, инициалы*

Москва, 2019 г.

Цели задачи и практики

Цели учебной практики: развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

Задачи учебной практики:

- Демонстрация межпредметных связей, применение на практике знаний фундаментальных наук, в том числе математических дисциплин.
- Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.
- Развитие навыков использования программных сред, предназначенных для наглядного представления результатов исследования.
- Развитие навыков составления отчетов и презентации результатов исследования.

Основная задача учебной практики:

- Найти оптимальный способ разложения матрицы для применения его к изображениям.
- Обосновать решение на приведенном примере.
- Составить отчет.

Задача: дана вещественная матрица размером $m \times n$, где $m = 5$, а $n = 2$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти сингулярное разложение матрицы, представленное в виде:

$$\mathrm{A} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{V}^T$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^T$$

где матрицы U и V^T — это две невырожденные ортогональные матрицы, а матрица S — матрица, равная размеру исходной матрице A и содержащая сингулярные значения, расположенные на ее «главной диагонали».

Дневник практики

№	Название этапа	Время проведения	Кол-во акад. часов
1	Изучение темы «Численные методы для решения задач», решение задачи	Февраль	9
2	Практическая работа выполняется в программной среде C++	Март	9
3	Оформление работы выполняется в программной среде TexStudio	Март	9
4	Презентация проекта, защита проекта	Апрель	9

Отчет

Актуальность темы: применение теоретических знаний для оптимизации широкого класса задач в реальном производстве. Для решения задачи необходимо найти собственные значения, с помощью которых можно потом составить собственные векторы. Затем с помощью собственных векторов можно составить искомые ортогональные матрицы.

Решение задачи

Для начала найдем матрицу $\mathrm{B} = \mathrm{A}^T \cdot \mathrm{A}$:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 151 & 36 \\ 36 & 57 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу вращения T_{12} для нахожнения QR разложения:

$$\cos\alpha = \frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{12}^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{151}{\sqrt{151^2 + 36^2}};$$

$$\sin\alpha = \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{12}^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{36}{\sqrt{151^2 + 36^2}};$$

$$\mathrm{T}_{12} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.972 & 0.232 \\ -0.232 & 0.972 \end{pmatrix}$$

Найдем верхнетреугольную матрицу R:

$$\mathrm{R} = \mathrm{T}_{12} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0.972 & 0.232 \\ -0.232 & 0.972 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 151 & 36 \\ 36 & 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155.12 & 48.21 \\ 0 & 47.05 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{T}_{12} = \begin{pmatrix} 0.972 & 0.232 \\ -0.232 & 0.972 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу, подобную матрице B;

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{R} \cdot \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 155.12 & 48.21 \\ 0 & 47.05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.972 & 0.232 \\ -0.232 & 0.972 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139.6 & 85.8 \\ -10.9 & 45.7 \end{pmatrix}$$

Продолжим подобные преобразования до тех пор, пока матрица B_n не примет диагональный вид:

$$\mathrm{B} \sim \mathrm{B}_1 \sim \dots \sim \mathrm{B}_n = \begin{pmatrix} 163.2 & 0 \\ 0 & 44.8 \end{pmatrix}$$

Отсюда собственные числа: $\lambda_1 = 163.2, \lambda_2 = 44.8$.

Теперь для каждого собственного числа λ_i найдем собственный вектор X_i по формуле $(\mathrm{B} - \lambda_i \cdot \mathrm{E}) \cdot X_i = 0$ путем решения однородной СЛАУ:

$\lambda_1 = 163.2$

$$\begin{cases} -12.2x_1 + 36x_2 = 0 \\ 36x_1 - 106.2x_2 = 0 \end{cases}$$

Из решения следует, что $x_1 = 2.95x_2$. Пусть $x_2 = 1$, тогда $x_1 = 2.95$.

Получаем собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 2.95 \\ 1 \end{pmatrix}$

Аналогично получаем собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} -0.34 \\ 1 \end{pmatrix}$

Составляем ортогональную матрицу V:

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 2.95 & 1 \\ -0.34 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем вторую ортогональную матрицу U. Для этого вычислим промежуточную матрицу $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}^T$:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.95 & 1 \\ -0.34 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.71 & 11 \\ 20.65 & 7 \\ -7.26 & 2 \\ 8.17 & 5 \\ 23.26 & 9 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся ортогональным дополнением для нахождения 3-х недостающих векторов матрицы и решим однородную СЛАУ $\mathrm{C}^T \cdot X = 0$:

$$\begin{cases} 12.71x_1 + 20.65x_2 - 7.26x_3 + 8.17x_4 + 23.26x_5 = 0 \\ 11x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 0.66x_3 + 0.33x_4 + 0.16x_5 = 0 \\ x_2 - 0.76x_3 + 0.19x_4 + 1.02x_5 = 0 \end{cases}$$

$m - r = 3$ — количество искомых векторов, где r — ранг матрицы, а m — количество переменных системы. Отсюда видно, что x_3, x_4, x_5 — произвольные переменные. Пусть $x_3 = 5, x_4 = 3, x_5 = 2$. Получаем собственный вектор

$$X_1 = \begin{pmatrix} -6.9 \\ 3.4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Аналогичные операции проводим для 2-х других векторов, входящих в ортогональное дополнение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -7.3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -8.2 \\ 1.67 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Заметим, что каждый из 3-х найденных векторов ортогонален каждому вектору из матрицы C, но есть вероятность, что они могут быть не перпендикулярны между собой. Для этого воспользуемся ортогонализацией Грама-Шмидта:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -6.9 \\ 3.4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -7.3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -8.2 \\ 1.67 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = x_1 = \begin{pmatrix} -6.9 \\ 3.4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = x_2 - \frac{(x_2, e_1)}{||e_1||^2} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.24 \\ -0.45 \\ 1.73 \\ -1.18 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = x_3 - \frac{(x_3, e_2)}{||e_2||^2} \cdot e_2 - \frac{(x_3, e_1)}{||e_1||^2} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -1.3 \\ -1.75 \\ -2.04 \\ 1.16 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

С помощью полученных ортогональных векторов дополним матрицу C и получаем матрицу U:

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 12.71 & 11 & -6.9 & 0.2 & -1.3 \\ 20.65 & 7 & 3.4 & 0.24 & -1.75 \\ -7.26 & 2 & 5 & -0.45 & -2.04 \\ 8.17 & 5 & 3 & 1.73 & 1.16 \\ 23.26 & 9 & 2 & -1.18 & 1.9 \end{pmatrix}$$

Теперь векторы полученных матриц V и U необходимо нормировать, а для матрицы S найдем сингулярные значения:

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{163.2} \approx 12.77 \qquad \mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{44.8} \approx 6.69$$

Искомое сингулярное разложение матрицы A:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.61 & -0.7 & 0.096 & -0.35 \\ 0.52 & -0.34 & 0.35 & 0.11 & -0.47 \\ -0.048 & 0.66 & 0.51 & -0.21 & -0.55 \\ 0.27 & 0.14 & 0.3 & 0.8 & 0.31 \\ 0.62 & -0.24 & 0.2 & -0.54 & 0.51 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12.77 & 0 \\ 0 & 6.69 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.95 & 0.32 \\ -0.32 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. ГОСТ 2.004-88 ЕСКД. Общие требования к выполнению конструкторских и технологических документов на печатающих и графических устройствах вывода ЭВМ.

2. ГОСТ 2.105-95 ЕСКД. Общие требования к текстовым документам.

3. ГОСТ 7.32-2001 СИБИД. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

4. А.Н. Канатников, А.П. Крищенко Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 — 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV).

5. А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994 — 544 с.

6. Е. С. Тверская Презентация по теме «Семинары по вычислительной математике» — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ИУ3, весна 2019 — 19 с.

7. Ю.П. Власов, В.П. Посвянский Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Численные методы». Раздел «Линейная алгебра». — М.: МИИТ, 2002 — 37 с.

8. С.К. Соболев Нахождение сингулярного разложения прямоугольной матрицы. — 2 с.

9. Е.В. Колесников, К.К. Абгарян Курсовой проект по курсу «Численные методы». Тема «SVD - разложение и его практические приложения». — М.: МАИ, 2015 — 58 с.

10. Википедия www.wikipedia.org