

Министерство науки и высшего образования  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---



Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Высшая математика»

**КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ:  
ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ДИНАМИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ**

Студент группы ФН1–41Б

\_\_\_\_\_  
*подпись, дата*

Сафонов А. А.

Руководитель курсового проекта

\_\_\_\_\_  
*подпись, дата*

Филиновский А. В.

Консультант

\_\_\_\_\_  
*подпись, дата*

Филиновский А. В.

Москва  
2020

Министерство науки и высшего образования  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_  
(Индекс)

\_\_\_\_\_  
(Ф. И. О.)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

**ЗАДАНИЕ  
ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ**

По дисциплине дифференциальные уравнения

Студент группы ФН1–41Б, Сафонов Андрей Александрович

Вариант задания: 16

Тема: «Построение фазового портрета динамической системы на плоскости»

Направленность: учебная

Источник тематики: кафедра «Высшая математика» (ФН1)

График выполнения: 25% к\_\_нед. , 50% к\_\_нед. , 75% к\_\_нед. , 100% к\_\_нед.

Техническое задание: Исследовать динамическую систему и построить ее фазовый портрет

Оформление: расчетно–пояснительная работа на 20–ти листах А4

Перечень графического материала(чертежи, плакаты, слайды и т. п.):

графики фазовых портретов, программный код

Дата выдачи задания «1» марта 2020 г.

Руководитель курсового проекта \_\_\_\_\_ Филиновский А. В.  
*подпись, дата*

Студент группы ФН1–41Б \_\_\_\_\_ Сафонов А. А.  
*подпись, дата*

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>5</b>
2.1	Первая теорема Ляпунова . . . . .	5
2.2	Вторая теорема Ляпунова . . . . .	5
2.3	Критерий устойчивости . . . . .	6
2.4	Фазовые траектории положения равновесия линейной однородной системы ДУ с постоянными коэффициентами . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>9</b>
3.1	Первая задача . . . . .	9
3.1.1	Решение: . . . . .	9
3.1.2	Графическое представление . . . . .	10
3.1.3	Представление программного кода . . . . .	12
3.2	Вторая задача . . . . .	13
3.2.1	Решение: . . . . .	13
3.2.2	Графическое представление . . . . .	16
3.2.3	Представление программного кода . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Замечания к построению фазовых портретов</b>	<b>18</b>
4.1	Для линейной системы ДУ . . . . .	18
4.2	Для нелинейной системы ДУ . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>19</b>

# 1 Введение

Дифференциальные уравнения(ДУ) — раздел математики, в котором изучаются теория и способы решения уравнений, содержащих искомую функцию и ее производные разных порядков от одного аргумента(обыкновенные ДУ) или от нескольких аргументов(ДУ в частных производных). В самом уравнении может находиться не только неизвестная функция, но и различные ее производные. Такими уравнениями описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Подобные связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике и т. д. Дифференциальные уравнения применяются для описания природных явлений математическим способом. Так, например, в биологии ДУ применяются для описания популяции; в физике многие законы можно описать с помощью различных ДУ.

Также множество задач таких как расчет траекторий движения, управления движением, оценка стабильности динамического процесса, предполагает исследование конкретного или нескольких решений системы ДУ, описывающих некоторый процесс, на устойчивость или поиск положений устойчивого и неустойчивого равновесия системы. Достаточное представление об устойчивости решений системы в координатной области(где координаты – переменные, записанные от  $t$ ) дает фазовый портрет или множество интегральных кривых системы в этой области.

Графическая и кодовая реализация решений ДУ будет представлена при помощи соответствующих библиотек языка программирования Python.

В данной работе рассмотрены 2 системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и построены фазовые портреты соответствующих систем в области, содержащей их особые точки.



## 2 Теоретическая часть

Система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}), \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)^T$ , называется нормальной системой ДУ. Решение  $x = g(t)$  называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|x(t_0) - g(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - g(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0.$$

Решение  $x = g(t)$  называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\exists \varphi > 0 : \|x(t_0) - g(t_0)\| < \varphi \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - g(t)\| = 0.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения, входящие в систему вида (1), называют уравнениями возмущенного движения. Решение системы (1), исследуемое на устойчивость, называют невозмущенным движением.

Особая точка – решение системы дифференциальных уравнений или точка, в которой функция является *const.* Пусть дана система дифференциальных уравнений  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$ ,  $\vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$ , где вектор-функция  $\vec{F}(\vec{x})$  дважды непрерывно дифференцируема в окрестности 0. Эта функция в силу непрерывной дифференцируемости представима в виде

$$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{F}_0(\vec{x}), \quad (2)$$

причем  $\|\vec{F}_0(\vec{x})\|$  является Б.М. более высокого порядка, чем  $\|\vec{x}\|$ . Преобразовывая уравнение (2), отбросив Б.М. слагаемые, получим:

$$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} \quad (3)$$

### 2.1 Первая теорема Ляпунова

Если все корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (4)$$

системы уравнений первого приближения (3) имеют отрицательную действительную часть, то невозмущенное движение  $\vec{x}(t) \equiv 0$  асимптотически устойчиво, каковы бы ни были слагаемые  $\vec{F}(\vec{x})$ .

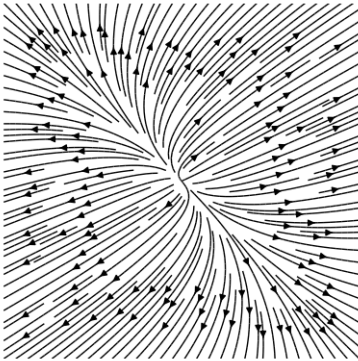
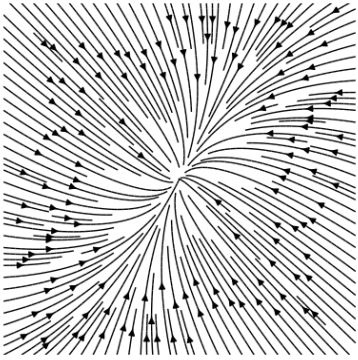
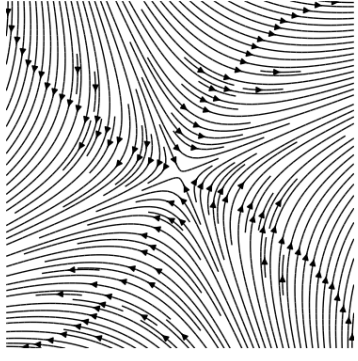
### 2.2 Вторая теорема Ляпунова

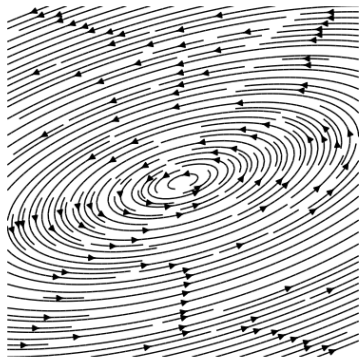
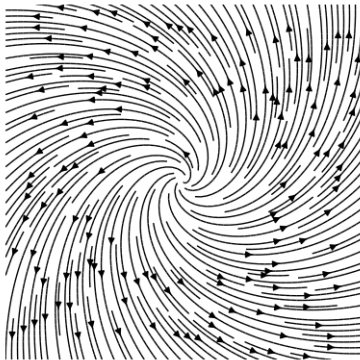
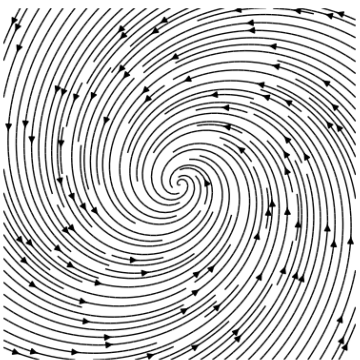
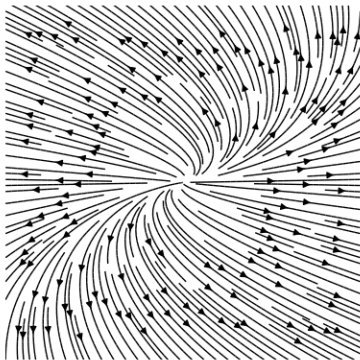
Если среди корней характеристического уравнения (4) системы уравнений первого приближения (3) имеется хотя бы один с положительной действительной частью, то невозмущенное движение  $\vec{x}(t) \equiv 0$  неустойчиво независимо от вида слагаемых  $\vec{F}(\vec{x})$ .

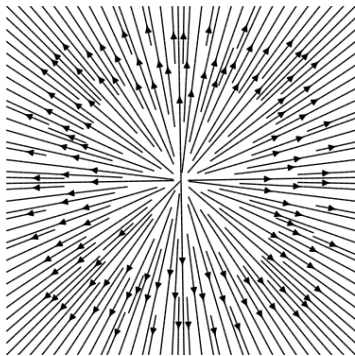
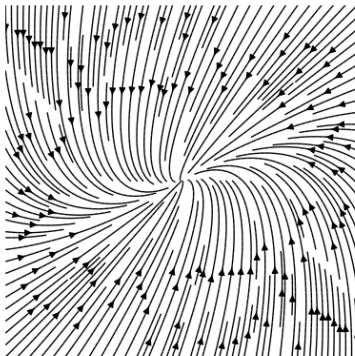
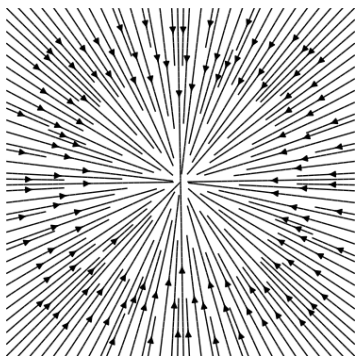
## 2.3 Критерий устойчивости

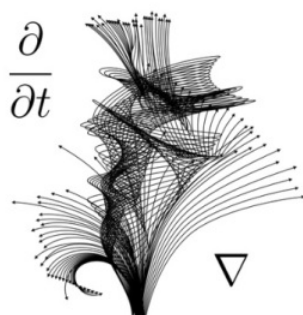
Для асимптотической устойчивости нормальной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (4) системы имели отрицательную действительную часть.

## 2.4 Фазовые траектории положения равновесия линейной однородной системы ДУ с постоянными коэффициентами

№	Корни хар-го уравнения	Точка покоя	Фазовый портрет	Уст./неуст. тривиального решения
1	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Неустойчиво
2	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел		Асимптотически устойчиво
3	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло		Неустойчиво

4	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Центр		Устойчиво по Ляпунову
5	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Неустойчиво
6	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		Асимптотически устойчиво
7.1	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ Искл. 7.2	Неустойчивый вырожденный узел		Неустойчиво

7.2	$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}, a > 0$	Неустойчивый диркритический узел		Неустойчиво
8.1	$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 \\ \lambda_1 &< 0 \\ \text{Искл. 8.2} \end{aligned}$	Устойчивый вырожденный узел		Асимптотически устойчиво
8.2	$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = ay \end{cases}, a < 0$	Устойчивый диркритический узел		Асимптотически устойчиво





## 3 Практическая часть

### 3.1 Первая задача

Исследование положения равновесия линейной однородной системы ДУ с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad (5)$$

#### 3.1.1 Решение:

Для начала вычислим определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0, \quad (6)$$

следовательно  $\exists!$  положение равновесия в начале координат. Характеристическое уравнение системы:

$$\det|A - \lambda E| = \det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 = 0, \quad (7)$$

Найдем решение этого уравнения:

$$(1 - \lambda)^2 + 4 = 0;$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0;$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i; \\ \lambda_2 = 1 - 2i; \end{cases}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \operatorname{Re}(\lambda_1) > 0, \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0. \quad (8)$$

Исходя из (8), можно сделать вывод, что начало координат представляет собой **неустойчивый фокус**. Для матрицы системы уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

найдем для каждого собственного значения  $\lambda_i$  соответствующий ему собственный вектор  $v_i$ .

Для  $\lambda_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Для  $\lambda_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & -2 \\ 2 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Имеем общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$\xi_1(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$  и  $\xi_2(t) = C_2 e^t \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$  — координаты в базисе  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . По 2-ой теореме Ляпунова тривиальное решение является неустойчивым. Фазовые траектории первого приближения в окрестности этой точки имеют вид логарифмических спиралей в базисе  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ , построенном на собственных векторах (10) и (12) системы (5).

### 3.1.2 Графическое представление

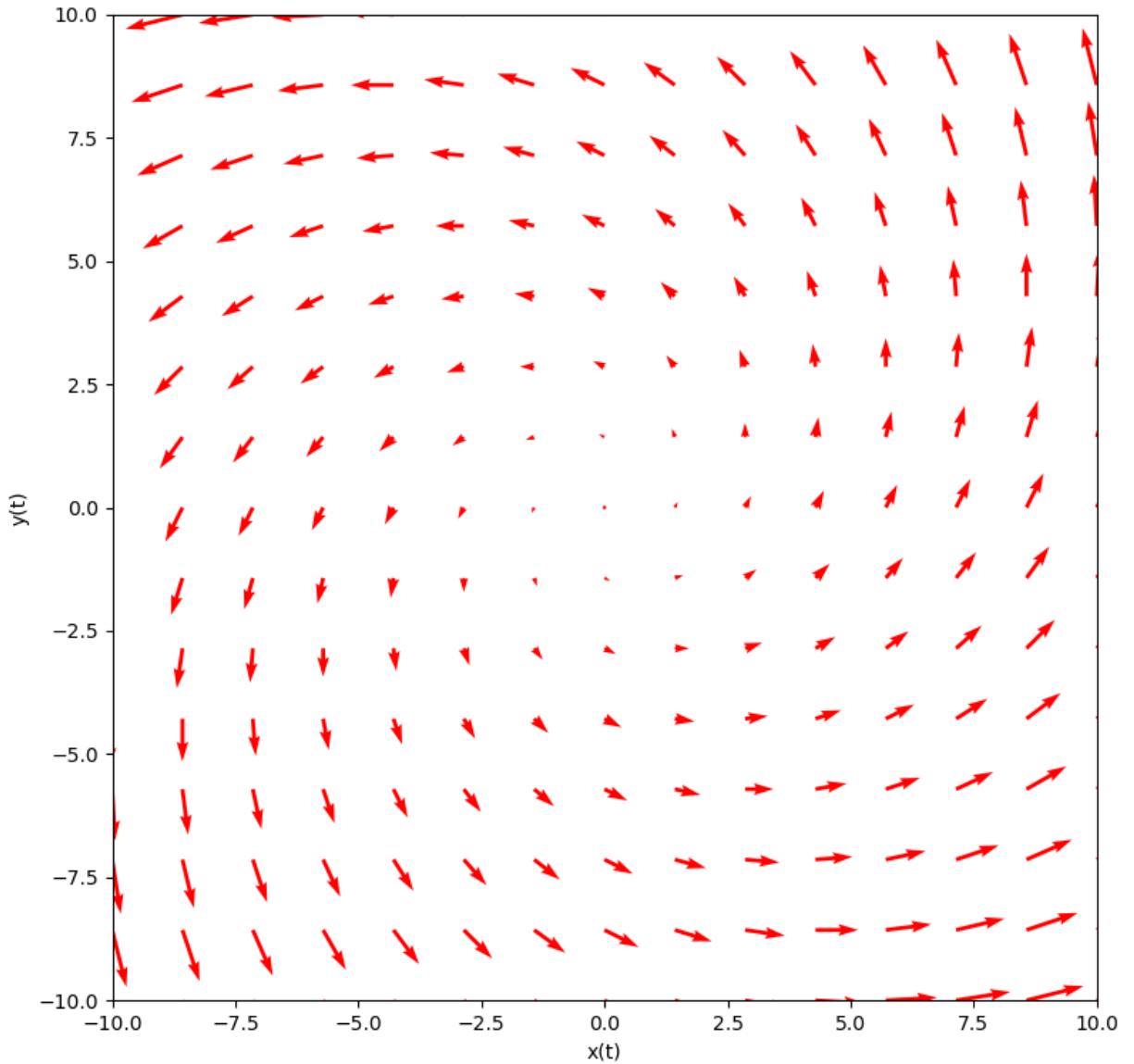


Рис. 1. Фазовый портрет системы (5) в векторном виде

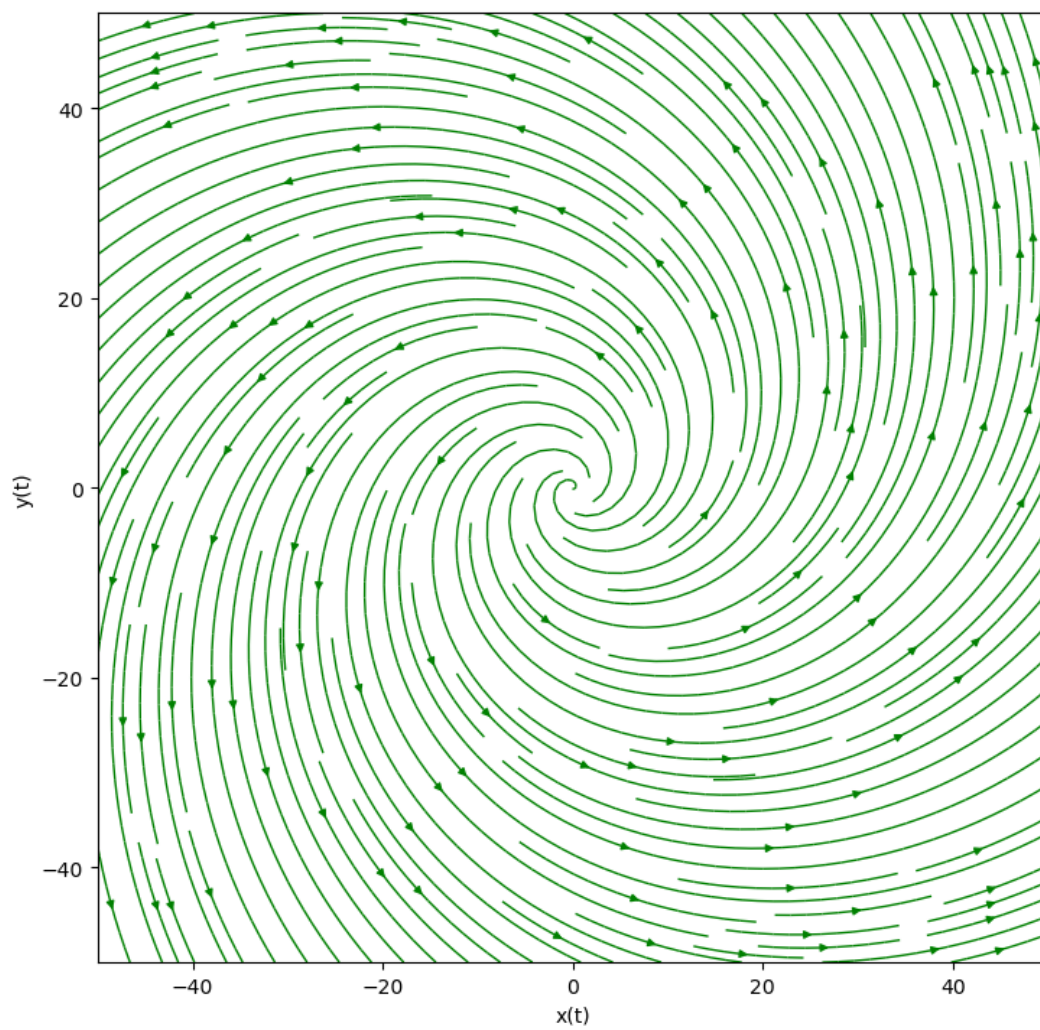


Рис. 2. Фазовый портрет системы (5) в виде потоковых линий

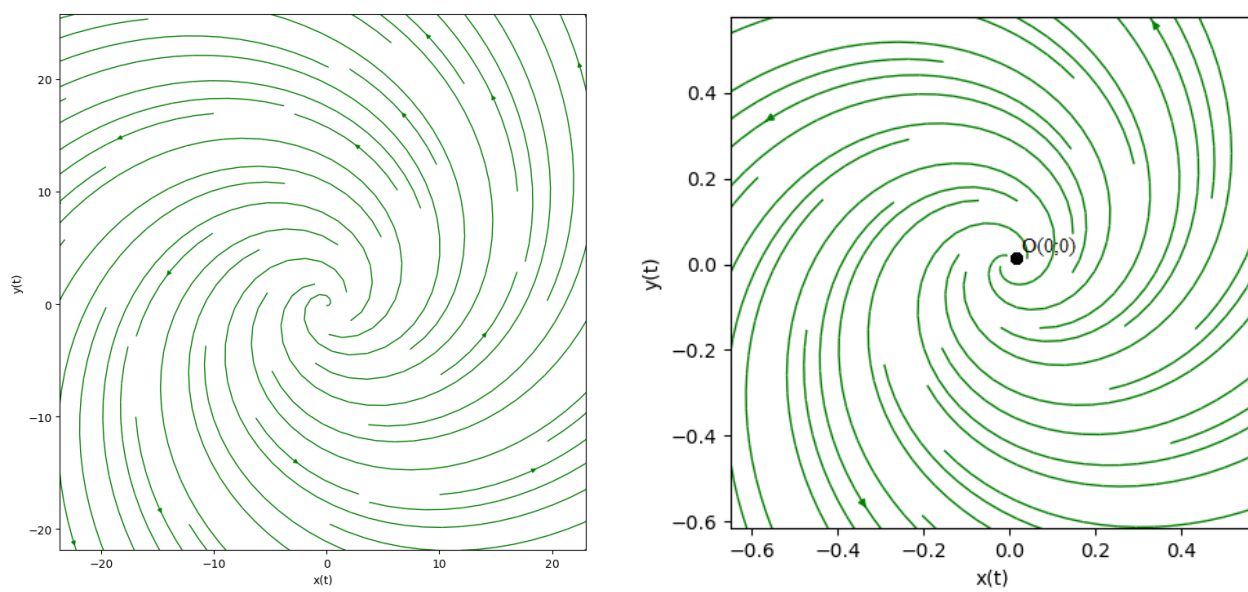


Рис. 3. Увеличенный фазовый портрет

### 3.1.3 Представление программного кода

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  #Drawing vector type phase portrait(figure 1)
5  def df_1(W, t):
6      x, y = W
7      return [x - 2*y, 2*x + y]
8
9  X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-10, 10, 15), np.linspace(-10, 10, 15))
10 t = 0
11 u, v = np.zeros(X.shape), np.zeros(X.shape)
12 n_i, n_j = X.shape
13 for i in range(n_i):
14     for j in range(n_j):
15         x_coordinate, y_coordinate = X[i, j], Y[i, j]
16         f_1 = df_1([x_coordinate, y_coordinate], t)
17         u[i, j] = f_1[0]
18         v[i, j] = f_1[1]
19
20 plt.quiver(X, Y, u, v, color='r')
21 plt.ylabel('y(t)')
22 plt.xlabel('x(t)')
23 plt.axis('square')
24 plt.axis([-10, 10, -10, 10])
25 plt.show()
26
27 #Drawing stream type phase portrait(figure 2)
28 def df_2(x, y):
29     return [x - 2*y, 2*x + y]
30
31 X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-50, 50, 50), np.linspace(-50, 50, 50))
32 u, v = np.zeros(X.shape), np.zeros(Y.shape)
33 n_i, n_j = X.shape
34 for i in range(n_i):
35     for j in range(n_j):
36         x_coordinate, y_coordinate = X[i, j], Y[i, j]
37         x, y = x_coordinate, y_coordinate
38         f_2 = df_2(x, y)
39         u[i, j] = f_2[0]
40         v[i, j] = f_2[1]
41
42 plt.streamplot(X, Y, u, v, color='g', density=2, linewidth=1, arrowsize=0.8)
43 plt.ylabel('y(t)')
44 plt.xlabel('x(t)')
45 plt.axis('square')
46 plt.axis([-50, 50, -50, 50])
47 plt.show()
```

## 3.2 Вторая задача

Построение фазового портрета динамической системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases} \quad (14)$$

### 3.2.1 Решение:

В общем виде система (14) выглядит так:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (15)$$

Особые точки системы (15) можно найти следующим образом:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, преобразуем систему (14) следующим образом:

$$\begin{cases} e^y = e^x \\ \sqrt{3x + y^2} = 2 \end{cases} \quad (17)$$

Прологарифмируем первое уравнение системы, выразим  $x$  и подставим его во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{3y + y^2} = 2 \end{cases} \quad (18)$$

Теперь рассмотрим только второе уравнение системы (18). Для его решения следует определить область допустимых значений (ОДЗ) исходной системы (14).

Тогда ОДЗ имеет вид:

$$x \geq -\frac{y^2}{3} \quad (19)$$

Далее решим уравнение

$$\sqrt{3y + y^2} = 2;$$

$$3y + y^2 = 4;$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} y_1 = 1; \\ y_2 = -4. \end{cases} \quad (20)$$

Замечаем, что условие (19) выполняется, а значит корни (20) являются решением уравнения.

Получаем решение системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \left[ \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -4 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -4 \\ y_2 = -4 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (21)$$

$A(1; 1)$  и  $B(-4; -4)$  — особые точки данной системы. Далее необходимо исследовать характер найденных точек. Для определения характера точки  $(x_0; y_0)$  необходимо сделать замену следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = u \\ y - y_0 = v \end{array} \right. \quad (22)$$

Затем воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Итак, исследуем характер точки  $A(1; 1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{array} \right. \quad (23)$$

Выражая из системы (23)  $x$  и  $y$ , подставим в систему (14).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = e^{v+1} - e^{u+1} \\ \dot{v} = \sqrt{3(u+1) + (v+1)^2} - 2 \end{array} \right. \quad (24)$$

Разложим правые части уравнений системы (24) в ряд Тейлора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = 1 + (v+1) - 1 - (u+1) + \dots \\ \dot{v} = -2 + 1 + \frac{1}{2}(v^2 + 2v + 3u + 4) + \dots \end{array} \right. \quad (25)$$

Отбросим все нелинейные значения правых частей и получим систему уравнений первого приближения в окрестности исследуемой точки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = -u + v \\ \dot{v} = \frac{3}{2}u + v. \end{array} \right. \quad (26)$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$ :

$$\det|A - \lambda E| = \det \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda^2) - \frac{3}{2} = 0,$$

$$\lambda^2 - \frac{5}{2} = 0;$$

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}; \\ \lambda_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array} \right.$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0. \quad (27)$$

Собственные вектора соответственно:

$$u = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Исходя из (27), точка  $A(1; 1)$  — **седло**, по 2-ой теореме Ляпунова тривиальное решение в ней неустойчиво. Фазовые траектории первого приближения в окрестности этой точки имеют гиперболический вид в базисе  $\{u, v\}$ , построенном на собственных векторах (28) системы (26).

А теперь исследуем характер точки  $B(-4; -4)$ :

$$\begin{cases} u = x + 4 \\ v = y + 4 \end{cases} \quad (29)$$

Выражая из системы (29)  $x$  и  $y$ , подставим в систему (14).

$$\begin{cases} \dot{u} = e^{v-4} - e^{u-4} \\ \dot{v} = \sqrt{3(u-4) + (v-4)^2} - 2 \end{cases} \quad (30)$$

Разложим правые части уравнений системы (30) в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \dot{u} = 1 + (v-4) - 1 - (u-4) + \dots \\ \dot{v} = -2 + 1 + \frac{1}{2}(v^2 - 8v + 3u + 3) + \dots \end{cases} \quad (31)$$

Отбросим все нелинейные значения правых частей и получим систему уравнений первого приближения в окрестности исследуемой точки.

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v \\ \dot{v} = \frac{3}{2}u - 4v. \end{cases} \quad (32)$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$ :

$$\det|A - \lambda E| = \det \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ \frac{3}{2} & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)(4 + \lambda) - \frac{3}{2} = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + \frac{5}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}; \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}; \end{cases}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0. \quad (33)$$

Собственные вектора соответственно:

$$u = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{15}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{15}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Исходя из (33), точка  $B(-4; -4)$  — **устойчивый узел**, по 1-ой теореме Ляпунова тривиальное решение в ней асимптотически устойчиво. Фазовые траектории первого приближения в окрестности этой точки имеют параболический вид в базисе  $\{u, v\}$ , построенном на собственных векторах (34) системы (32).

### 3.2.2 Графическое представление

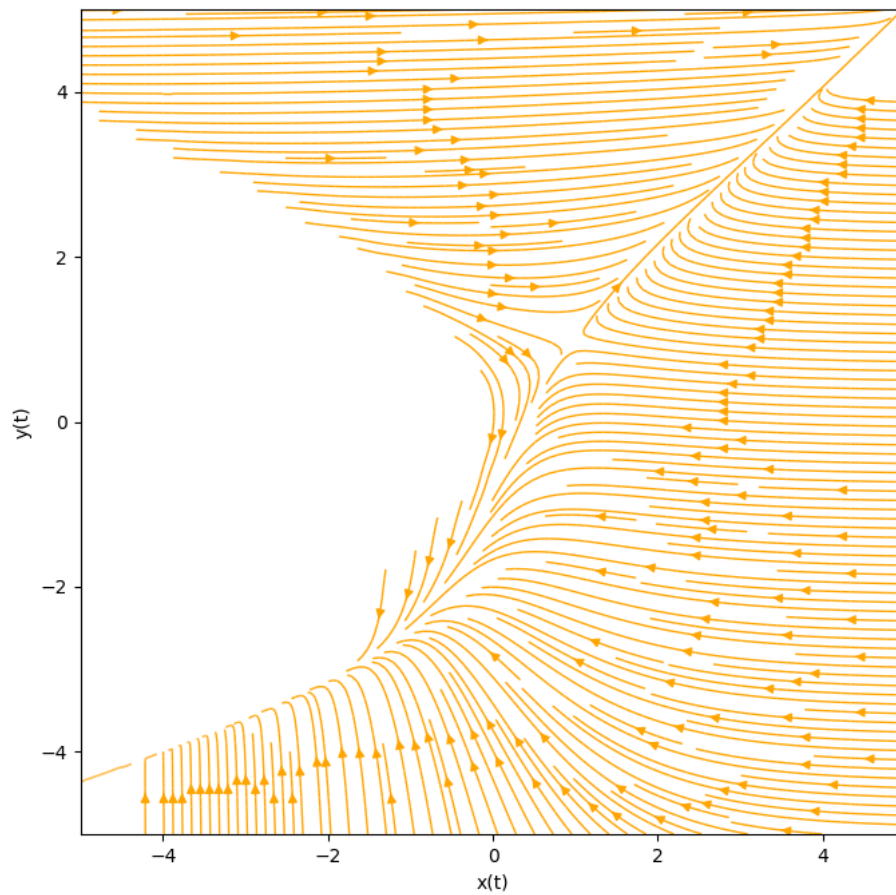


Рис. 4. Фазовый портрет динамической системы (14)

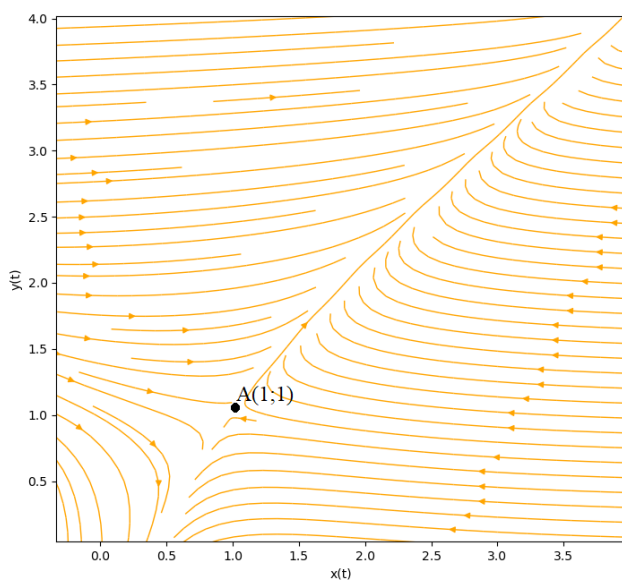


Рис. 5. Точка А — седло

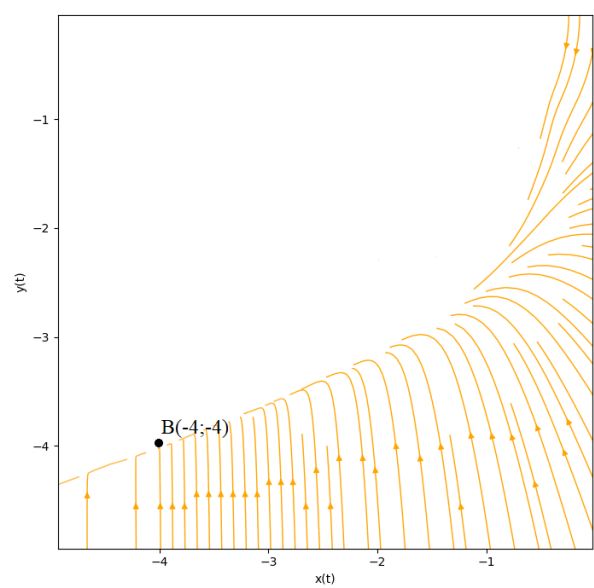


Рис. 6. Точка В — устойчивый узел



### 3.2.3 Представление программного кода

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5  #Drawing stream type phase portrait(figure. 5)
6  def df_2(x, y):
7      return [np.exp(y) - np.exp(x), np.sqrt(3*x+pow(y,2)) - 2]
8
9  X, Y = np.meshgrid(np.linspace(-3, 3, 25), np.linspace(-3, 3, 25))
10 u, v = np.zeros(X.shape), np.zeros(Y.shape)
11 n_i, n_j = X.shape
12
13 for i in range(n_i):
14     for j in range(n_j):
15         x_coordinate, y_coordinate = X[i, j], Y[i, j]
16         x, y = x_coordinate, y_coordinate
17         if x >= -pow(y, 2)/3.0:
18             f_2 = df_2(x, y)
19             u[i, j] = f_2[0]
20             v[i, j] = f_2[1]
21
22 plt.streamplot(X, Y, u, v, color='orange', density=3, linewidth=1, arrowsize=1)
23 plt.ylabel('y(t)')
24 plt.xlabel('x(t)')
25 plt.axis('square')
26 plt.axis([-3, 3, -3, 3])
27 plt.show()
```

## 4 Замечания к построению фазовых портретов

### 4.1 Для линейной системы ДУ

Так как единственная особая точка системы — **неустойчивый фокус** в начале координат, представленный на рис. (2), то можно задать произвольную область построения и любым способом выбрать на ее границе множество точек, из которых будут проведены к фокусу фазовые траектории.

### 4.2 Для нелинейной системы ДУ

В случае точки  $A$  система будет неустойчива, значит направление касательного вектора в ее окрестности будет соответствовать движению от положения равновесия, а вот в случае с точкой  $B$  ситуация обстоит иначе — направление любого касательного вектора, находящегося в окрестности точки  $B$ , будет соответствовать движению к положению равновесия, так как тривиальное решение в ней асимптотически устойчиво.

Также можно заметить, что система определена не на всей плоскости. Необходимо определить область определения нелинейной системы, и исключить эту область при построении фазового портрета. В данной работе для нелинейной системы ДУ область представлена в формуле (19), а графическое представление фазового портрета с исключением этой области изображено на рис. (4).

## 5 Заключение

Найдя особые точки линейной (5) и нелинейной (14) систем дифференциальных уравнений и построив их фазовые портеты в области, содержащей эти точки, получили представление о поведении решений этих систем вблизи положений равновесия и какую форму приобретают при тех или иных начальных условиях и при малых отклонениях от точки равновесия траектории материальных точек, движение которых могут описывать данные уравнения.

Также эта работа дала нам четкое представление о решении дифференциальных уравнений при помощи библиотек символьной математики, а также о графическом представлении решений систем ДУ при помощи графических библиотек, представленных в Python.



## Список литературы

- [1] Асташова И. В., Никишкин В. А., *Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения»*. Учебное пособие, Изд. 3-е, исправленное.—М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. —94 с., ил.
- [2] NumPy, URL: <https://numpy.org/>. (Дата обращения: 10.05.2020)
- [3] Matplotlib: Visualization with Python, URL: <https://matplotlib.org/>. (Дата обращения: 10.05.2020)
- [4] Wolfram Alpha, URL: <https://www.wolframalpha.com/>. (Дата обращения: 09.05.2020)
- [5] MPlotting system of differential equations in Python, URL: <https://stackoverflow.com/questions/42868971/plotting-system-of-differential-equations-in-python>. (Дата обращения: 10.05.2020)

Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X