УДК 51-3

СИНГУЛЯРНОЕ МАТРИЧНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ЕГО ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Сафонов А.А., бакалавр
МГТУ им. Баумана, кафедра ФН «Высшая математика»
tyuira51@list.ru
Научный руководитель: О.В. Кравченко, старший преподаватель,
МГТУ им. Баумана, кафедра ФН «Высшая математика»

Сингулярное матричное разложение (SVD-разложение) [1] — один из способов разложения произвольной матрицы $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ на три матрицы, две из которых — ортогональные невырожденные матрицы размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, а третья представляет собой матрицу того же размера, что и исходная матрица и содержит сингулярные значения на *главной диагонали* в невозрастающем порядке. При этом элементы, находящиеся не на *главной диагонали*, равны 0, а сингулярное значение представляет собой квадратный корень их собственного числа.

Нахождение данного разложения матрицы делится на 3 этапа [2]:

1. Нахождение собственных чисел симметрической матрицы, получающейся в результате перемножения исходной транспонированной и исходной матриц. Один из способов вычисления собственных значений — QR-разложение, в результате которого симметрическая матрица приводится к подобной матрице диагонального вида, на главной диагонали которой стоят собственные числа в убывающем порядке. Затем для каждого собственного числа составляется собственный вектор матрицы путем решения однородной СЛАУ. Из полученных собственных векторов составляется первая ортогональная матрица (собственные векторы расположены по строкам).
2. Нахождение второй ортогональной матрицы (здесь же векторы расположены по столбцам) выполняется с помощью вычисления промежуточной матрицы, получающейся в результате перемножения исходной матрицы на первую транспонированную ортогональную. Затем с помощью ортогонального дополнения вычисляются недостающие ортогональные векторы путем решения однородной СЛАУ, которые ортогонализуются методом Грама-Шмидта.
3. Составляется диагональная матрица того же размера, что и исходная матрица, на *главной диагонали* которой расположены сингулярные значения в невозрастающем порядке. При этом каждая ортогональная матрица состоит из нормированных векторов [3].

Данное разложение и все его вычисления реализованы в программной среде C++. Программа состоит из тех же этапов, каждый из которых содержит набор процедур и функций, отвечающих за нахождение определенных числовых данных.

SVD-разложение успешно используется для обработки и аппроксимации числовых данных, и может быть примерено, например, в сжатии изображений, файлов, аудио и видеозаписей.

Список литературы

1. А.Н. Канатников, А.П. Крищенко Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 — 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. 4).
2. А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994 — 544 с.
3. Ю.П. Власов, В.П. Посвянский Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Численные методы». Раздел «Линейная алгебра». — М.: МИИТ, 2002 — 37 с.