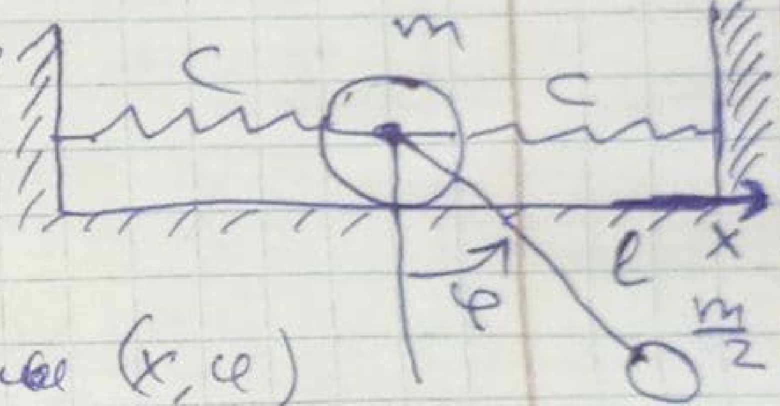
№16.4 По теореме о паре квадратичных форм:

$$\begin{cases} U^T A U = E \\ U^T C U = \Lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\det U)^2 \det A = \det E \\ (\det U)^2 \det C = \det \Lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = \frac{\det C}{\det A} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{\det C}{\omega_1^2 \ldots \omega_{n-1}^2 \det A}$$

№16.42 $r, m, c, l, m/2$ $cl = mg$



Выберем обобщенные координаты (x, φ)

J $x=0$, $\varphi=0$ – положение равновесия

Запишем кинетическую и потенциальную энергию!

$T = T_{диска} + T_{маятника}$

$T_{диска} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{3m\dot{x}^2}{4}$

$T_{маятника} = \frac{m}{4}\left(\dot{x} + \dot{\varphi} l\right)^2 = \frac{m}{4}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} l\cos\varphi + \dot{\varphi}^2 l^2\right)$ (вектора умножим скалярно

$T = \frac{m}{4}\left(4\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} l\cos\varphi\right)$

$\Pi = 2\frac{cx^2}{2} + \frac{mgl}{2}(1-\cos\varphi)$

в окрестности нуля $\cos\varphi \to 1$

$T = \frac{m}{4}(4\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l)$

матрица кинетической энергии имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2m & ml/2 \\ ml/2 & \frac{ml^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & l/2 \\ l/2 & l^2/2 \end{pmatrix} m$$

матрица потенциальной энергии:

$\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2 \Rightarrow \Pi = \frac{cx^2}{\cancel{2}} + \frac{mgl}{2}\frac{\varphi^2}{2}$

$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = 2cx \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} = 2c \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{mgl}{2}\varphi; \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} = \frac{mgl}{2}$

$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial\varphi} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi\partial x} = 0 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & mgl/2 \end{pmatrix}$

по условию $c = mg/l \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2mg/l & 0 \\ 0 & mgl/2 \end{pmatrix}$

$\det\|C - \lambda A\| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - 2\lambda & -\lambda\frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2}\lambda & \frac{gl}{2} - \lambda\frac{l^2}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$(2\frac{g}{l} - 2\lambda)(\frac{gl}{2} - \lambda\frac{l^2}{2}) - \lambda^2\frac{l^2}{4} = 0$

$g^2 - \cancel{\lambda gl} + \cancel{\lambda gl} + \lambda^2 l^2 - \lambda^2\frac{l^2}{4} = 0$

$g^2 + \frac{3l^2}{4}\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2g}{3l}$

$\lambda_2 = \frac{2g}{l}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{2g}{l} - \frac{2g}{3l}\cdot 2 & -\frac{g}{3} \\ -g/3 & \frac{gl}{2} - \frac{gl}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\2/l\end{pmatrix}$

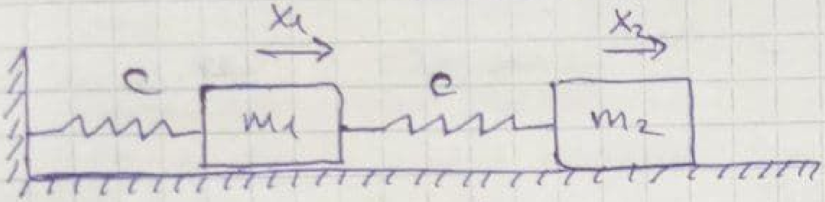
$$\begin{pmatrix}4 & 2l\\ \frac{8}{l} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\-2/l\end{pmatrix}$$

Ответ: $q = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \vec{u_j} \sin(\sqrt{\lambda_j}\,t + \alpha_j)$, т.е.

$$\begin{pmatrix}x\\l\varphi\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3l}}\,t + \alpha_1\right) + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t + \alpha_2\right)$$

— суперпозиция двух гармонических колебаний с частотами $\sqrt{2g/3l}$, $\sqrt{2g/l}$

№ 16.34



$$\begin{cases} T = \dfrac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\dot{x}_2^2}{2} \\ П = \dfrac{c(l - x_1)^2}{2} + \dfrac{c(l-(x_2-x_1))^2}{2} \end{cases}$$; l — в полож. равнов.

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2c & -c\\ -c & c\end{pmatrix}$$

$$\det\|C - \lambda A\| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2c - \lambda m_1 & -c \\ -c & c - \lambda m_2\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2c - \lambda m_1)(c - \lambda m_2) - c^2 = 0$$

$$2c^2 - 2c\lambda m_2 - c\lambda m_1 + \lambda^2 m_1 m_2 - c^2 = 0$$

$m_1 m_2 \lambda^2 - (2cm_2 + cm_1)\lambda + c^2 = 0$ — получим кв. ур.

$$D = (2cm_2 + cm_1)^2 - 4c^2 m_1 m_2 = 4c^2 m_2^2 + 4c^2 m_1 m_2 + c^2 m_1^2 -$$
$$- 4c^2 m_1 m_2 = 4c^2 m_2^2 + c^2 m_1^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2cm_2 + cm_1 \pm \sqrt{4c^2m_2^2 + c^2 m_1^2}}{2m_1 m_2}$$; λ_1 с $+$; λ_2 с $-$

из условия $(C - \lambda A)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ получаем: $\lambda = c/(cm_1 - m_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2m_2 + m_1 + \sqrt{4m_2^2 + m_1^2} - \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = 3/2}$$

В итоге $\lambda_1 = \frac{2c}{m_2}$, $\lambda_2 = \frac{c}{m_1 \cdot 2}$

$(C - \lambda_2 A)\vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\vec{u_2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}$

Ответ: $m_1/m_2 = 3/2$; $\vec{u_1} = (1\ \ -1)^T$; $\omega_1^2 = 3c/m_1$, ~~[illegible]~~; $\vec{u_2} = (2\ \ 3)^T$

$\omega_2^2 = c/(2m_1)$

№16.112

$L = T - \Pi \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i$, $i \in \overline{1,2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $i=1$: $\ddot\theta_1 - c\theta_1 - c\theta_2 = Q_1 = b\dot\theta_1 \Rightarrow \ddot\theta_1 - b\dot\theta_1 -$
$- c(\theta_1 \cancel{+\theta_2}) = 0$

$i=2$: $\ddot\theta_2 - b\dot\theta_1 + c\theta_2 = 0$

$\exists\, z := \theta_1 + i\theta_2 \Rightarrow \ddot z - ib\dot z + cz = 0$ мех. ур-ие $\Rightarrow$

$\Rightarrow z = e^{i\omega t}$ вид в котором ищем решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow -\omega^2 + b\omega + c = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = b/2 \pm \sqrt{b^2/4 + c}$

т.о. $z = C_1 \cdot \exp\left\{-i\left(-b/2 + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right)t\right\} +$
$+ C_2 \cdot \exp\left\{i\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right)t\right\}$

Ответ: $z = C_1 \exp\left\{-i\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right)t\right\} +$
$+ C_2 \cdot \exp\left\{i\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}\right)t\right\}$

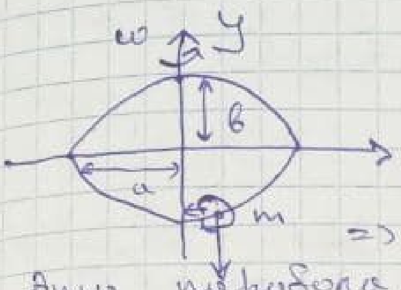
$\dot\theta_1 + \dot\theta_2 = -i\omega_1 C_1 + i\omega_2 C_2$

$\theta_1 + \theta_2 i = C_1 + C_2$

В исходных переменных θ_i оч. долго выписывать ответ

В условии ошибка: $\Pi = \frac{1}{2}c(\theta_1^2 + \theta_2^2)$ + перепутаны индексы Q_i

№16.16

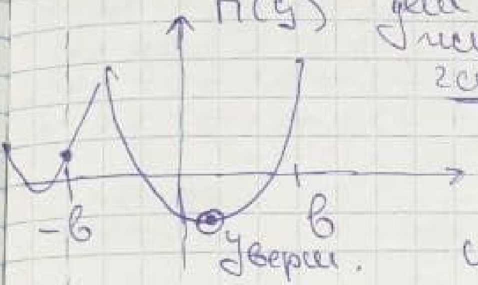


$$\Pi = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi=\Pi(y) = mgy - \frac{m\omega^2 a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Это парабола. Найдем y_{min}? Рассмотрим два случая. 1сл. у вершины лежит от $-b$ до b.



2сл. у вершины лежит левее $-b$ (правее b)

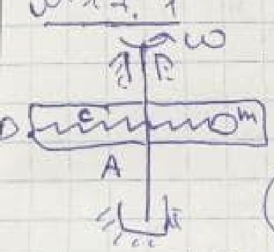
В 1сл. $y_{min} = -gb^2/(\omega^2 a^2) > -b$

$\omega > \frac{\sqrt{gb}}{a} = \omega_0$; $x = \pm a\sqrt{1-\frac{\omega_0^4}{\omega^4}}$

При $\omega<\omega_0$: $y=-b$, $x=0$ продолжение

7. Диссипативные системы и вынужденные колебания

№17.1



Перейдем во вращающуюся СО $\Rightarrow T = \frac{m\dot x^2}{2}$

$m\ddot x = m\omega^2 x - cx - \mu\dot x$, μ — коэф. трения

По критерию Рауса–Гурвица

$m\lambda^2 = m\omega^2 - c - \mu\lambda$

матрица из критерия равна

$\begin{pmatrix}\mu & 0\\ m & c-m\omega^2\end{pmatrix} \Rightarrow$ по крит. Сильвестра $\begin{cases}\mu>0\\ c-m\omega^2>0\end{cases}$

$D = \mu^2 - 4(c-m\omega^2)m$

$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{D}}{2}$

Ответ: $c - m\omega^2 > 0$

№17.11(б)

$$\begin{cases}\ddot x + \dot x + x - \alpha y = 0\\ \ddot y + \beta\dot y - x + y = 0\end{cases}$$

Пусть $\dot x = v$, $\dot y = u \Rightarrow$ получим

$$\begin{cases} \dot v = -v - x + \alpha y \\ \dot u = -\beta u + x - y \end{cases} \qquad \dot \xi = A\xi, \quad \xi = (x, v, y, u)$$

получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\|A - \lambda E\| = -\lambda\left[(1+\lambda)\cdot\lambda(-\beta-\lambda) - (1+\lambda)\right] + (-1)\left[\lambda(-\beta-\lambda) - 1 + \alpha\right] =$$

$$= -\lambda\left[-\lambda\beta + \lambda^2 - \lambda^2\beta + \lambda^3 - 1 - \lambda\right] - \left[-\lambda\beta + \lambda^2 - 1 + \alpha\right] = \lambda^2\beta - \lambda^3 + \lambda^3\beta - \lambda^4 + \lambda + \lambda^2 + \lambda\beta - \lambda^2 + 1 - \alpha = \lambda^4 + \lambda^3(1+\beta) + (\beta+2)\lambda^2 + (1+\beta)\lambda + 1 - \alpha$$

Из критерия Рауса-Гурвица получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \beta+1 & \beta+1 & 0 & 0 \\ 1 & \beta+2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \beta+1 & \beta+1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta+2 & 1-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta+1 > 0 \\ 1-\alpha > 0 \\ \alpha+\beta > 0 \end{cases}$$

Ответ: $\alpha + \beta > 0$; $\beta > -1$; $\alpha < 1$

продолжение задачи 16.16

Для первого случая параметризуем углом $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}m\left(a^2\sin^2(\varphi+\varphi_0) + b^2\cos^2(\varphi+\varphi_0)\right)\cdot\dot\varphi^2 = \frac{m}{2}\left(a^2\sin^2\varphi_0 + b^2\cos^2\varphi_0\right)\dot\varphi^2$$

φ — малое отклонение по сравнению с φ_0

$$\Pi = mgb\sin(\varphi+\varphi_0) - \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2(\varphi+\varphi_0) =$$

$$= mgb\left(\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\cdot\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi_0\cdot\varphi^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2a^2\ldots$$

$\cdot(\cos^2\varphi_0 - \sin^2\varphi_0\cdot\varphi - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cos 2\varphi_0\cdot\varphi^2)$

Тогда:

$C = m(\omega^2a^2\cos 2\varphi_0 - gb\sin\varphi_0)$; $A = m(a^2\sin^2\varphi_0 + b^2\cos^2\varphi_0) \Rightarrow \lambda = \frac{C}{A} = \frac{\omega^2a^2\cos 2\varphi_0 - gb\sin\varphi_0}{a^2\sin^2\varphi_0 + b^2\cos^2\varphi_0}$

Для случая, когда $y=-b$, $x=0$, имеем:

$\varphi_0 = -\pi/2 \Rightarrow \lambda = \frac{gb-\omega^2a^2}{a^2} = \omega_0^2-\omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = \varphi_0\sin(\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}\,t+\alpha_0)$

В первом случае:

$$\begin{cases}\cos\varphi_0 = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4} \\ \sin\varphi_0 = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\end{cases} \Rightarrow \cos 2\varphi_0 = 1-2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4$$

$$\lambda = \frac{\omega^2a^2\left(1-2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right)+\omega_0^2a^2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{a^2(\omega_0/\omega)^4+b^2(1-(\omega_0/\omega)^4)} =$$

$$= \frac{\omega^2a^2(\omega^4-2\omega_0^4)+\omega_0^4a^2\omega^2}{b^2\omega^4+(a^2-b^2)\omega_0^4} = \frac{a^2\omega^2(\omega^4-\omega_0^4)}{b^2\omega^4+(a^2-b^2)\omega_0^4}$$

$$\varphi = \varphi_0\sin\left(\omega a\sqrt{\frac{\omega^4-\omega_0^4}{b^2\omega^4+(a^2-b^2)\omega_0^4}}\,t+\alpha_0\right)$$

№18.25

Необходимо, чтобы под действием силы F на m_1 вынужденные колебания груза m_2 компенсировали колебания груза m_1.

Т.е.

$F + c_2x = 0$; $m_2\ddot{x} + c_2x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c_2}{m_2}x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -a\sin(\sqrt{c_2/m_2}\,t) \Rightarrow a\sin pt = a\sin(\sqrt{c_2/m_2}\,t) \Rightarrow$

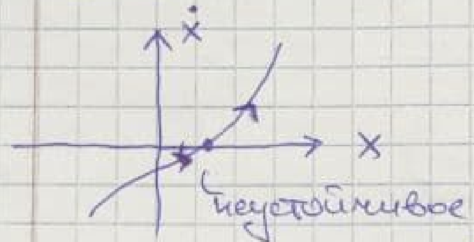
Метод Барабашина – Красовского – Узнать что это

$\Rightarrow p=\sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \Leftrightarrow m_2p^2 = c_2$

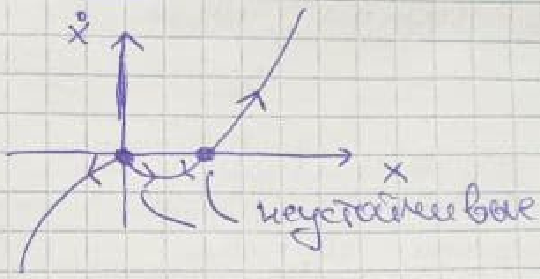
Ответ: $c_2 - m_2p^2 = 0$

Т.2 $\dot{x} = (x-1)(x^2-a)$

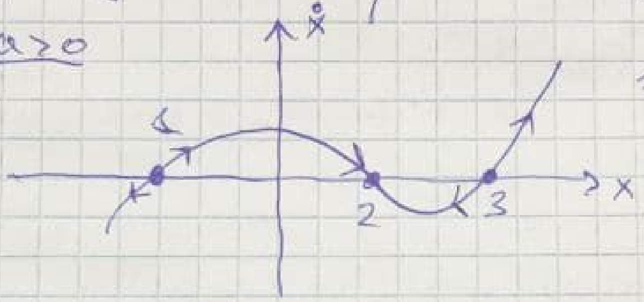
$a<0$



$a=0$



$a>0$



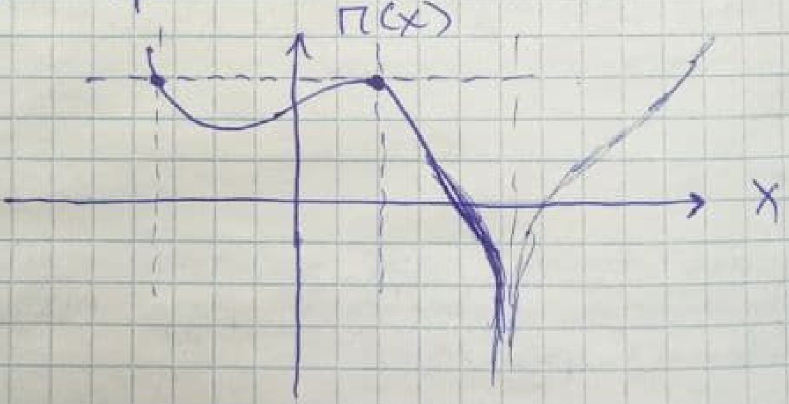
1, 3 – неустойчивые

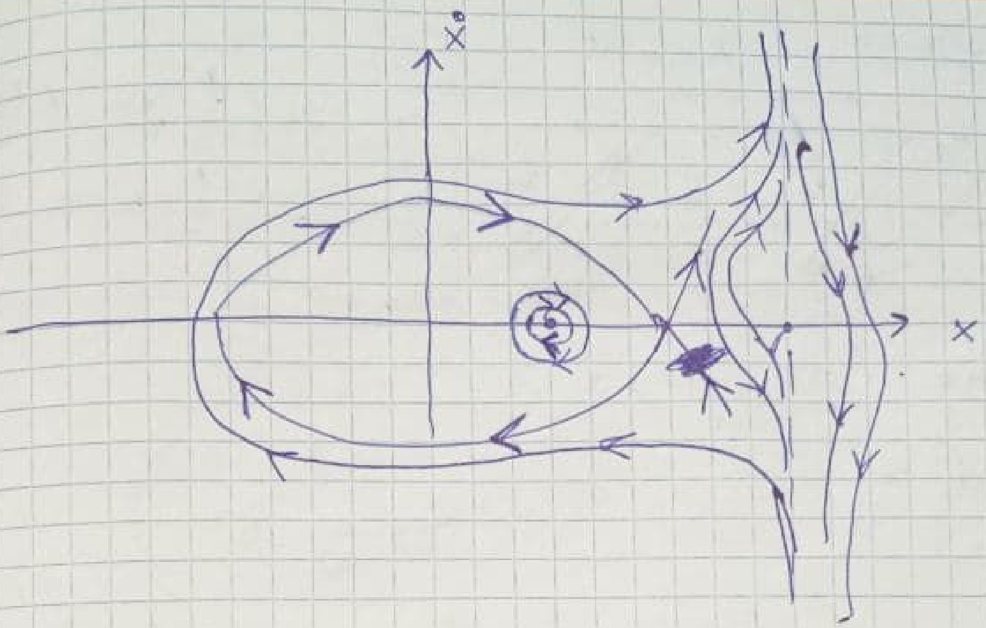
2 – устойчивое

Т.3 Найдем потенциальную энергию

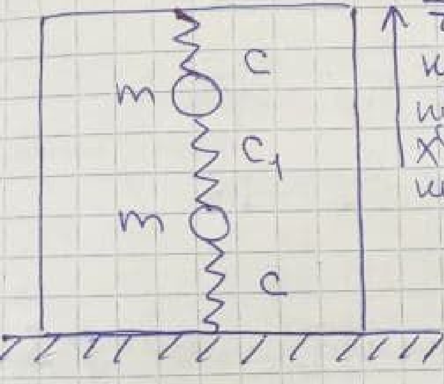
$П = \int \left(x - \frac{b}{x-a}\right)dx = \frac{x^2}{2} + b\ln(a-x) + const$

$П=П(x)$ построим





№18.29



z
ку
пусть x будут координаты

$$\begin{cases} \Pi = \dfrac{cx_1^2}{2} + \dfrac{cx_2^2}{2} + \dfrac{c_1}{2}(x_2 - x_1)^2 \\ T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} c + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c + c_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 = (c + c_1 - \lambda m)^2 - c_1^2$$

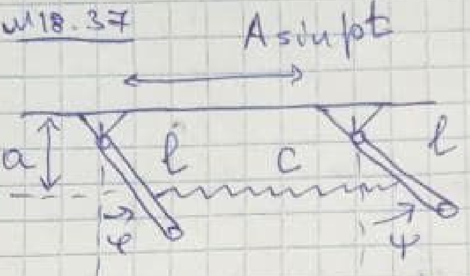
$$(c_1 + c_1)^2 - 2\lambda m(c + c_1) + \lambda^2 m^2 - c_1^2 = 0$$

$$D = \cancel{4m^2(c+c_1)^2} - \cancel{4m^2(c+c_1)^2} + 4m^2c_1^2 = 4m^2c_1^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cancel{m}(c + c_1) \pm 2\cancel{m}c_1}{2m^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{c + 2c_1}{m} \text{ – не резонанс} \\ \dfrac{c}{m} \text{ – резонанс} \end{array} \right.$$

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$

№18.37



$$\begin{cases} T = \frac{m}{2}\left(\frac{l^2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{l^2}{3}\dot\psi^2\right) \\ \Pi = -\frac{m}{2} lg\cos\varphi - \frac{l}{2}mg \cdot \cos\psi + \frac{c}{2}\left((\cos\varphi - \cos\psi)^2 a^2 + \right. \end{cases}$$

$$\left. + a^2(\sin\varphi - \sin\psi)^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{lmg}{2} + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & \frac{l}{2}mg + ca^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \qquad \vec q = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \text{ - обобщ. коорд.}$$

$$A\ddot{\vec q} + C\vec q = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos\varphi \, Ap^2 \sin pt \\ \frac{l}{2}\cos\psi \, Ap^2 \sin pt \end{pmatrix}$$

$\cos\varphi \to 1$, $\cos\psi \to 1$

переходим к нормальным координатам $\vec q = SQ$

$$\ddot Q + DQ = S^T F$$

$$\ddot Q + \lambda^2 Q = g\sin(\Omega t)$$

о.р.о: $\ddot Q + \lambda^2 Q = 0 \Rightarrow Q = C_1 \sin\lambda t + C_2 \cos\lambda t +$

$+ \gamma \sin\Omega t$

Ответ: $\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}$, $\omega_2^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$, $D = \frac{3Ap^2}{(3g - 2lp^2)}$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D \exp t$$

$\boxed{\text{П. 1}}$ $\chi = \lambda^4 + \lambda^3(1+\beta) + (\beta+2)\lambda^2 + (1+\beta)\lambda + 1 - \alpha$

хар-ое ур-ие из 17.11 (8)

- $\alpha = 1$

$\omega^4 + (1+\beta)\omega^3 + (2+\beta)\omega^2 + (1+\beta)\omega = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega^3 + (1+\beta)\omega^2 + (2+\beta)\omega + (1+\beta) = 0 \end{array}\right.$$

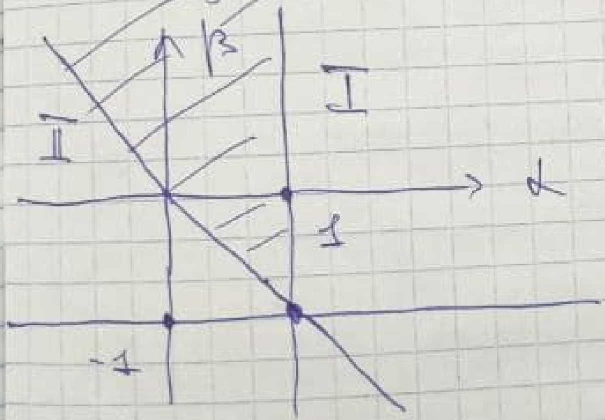
- $\beta = -\alpha$.

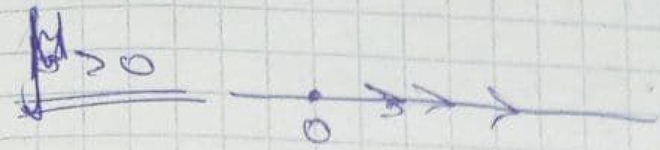
$\omega^4 + (1+\beta)\omega^3 + (2+\beta)\omega^2 + (1+\beta)\omega = 0$

есть корни $= \pm i \Rightarrow \omega^2 + (1+\beta)\omega + 1 + \beta = 0 \Rightarrow$

$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(1+\beta)(\beta-3)} - (1+\beta)\right) - 2$

$\Rightarrow \omega_{3,4}$





T.5 * Возьмем уравнение из прошлого семестра $u'' + u = \frac{a}{2c^2} + \frac{3}{2} a u^2$

$$\begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{3}{2} a u^2 + \frac{a}{2c^2} - u \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{3}{2} a x^2 + (3a\lambda - 1)x \end{cases}$$

где $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3a^2}{c^2}}}{3a}$ – при таком решение из нулевого члена

$$\frac{3}{2} a u^2 - u + \frac{a}{2c^2} = 0 \Rightarrow u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3a^2}{2c^2}}}{3a},$$

$y = 0$. В лин. приближении: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3a\lambda - 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

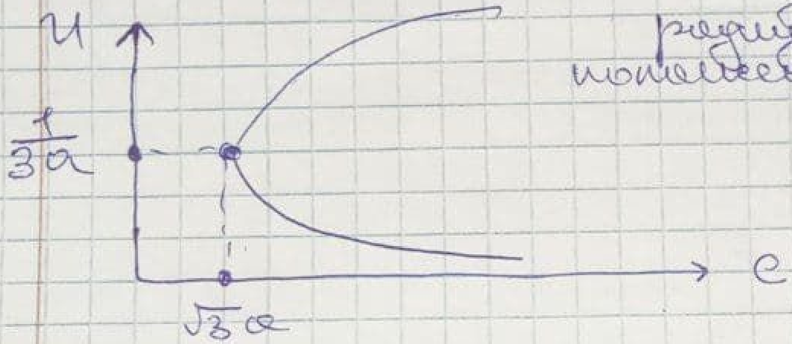
$\Rightarrow \lambda^2 = \pm\sqrt{1-\frac{3a^2}{c^2}}$

если $\sqrt{D}$ не отриц. $\Rightarrow$ возникает седло

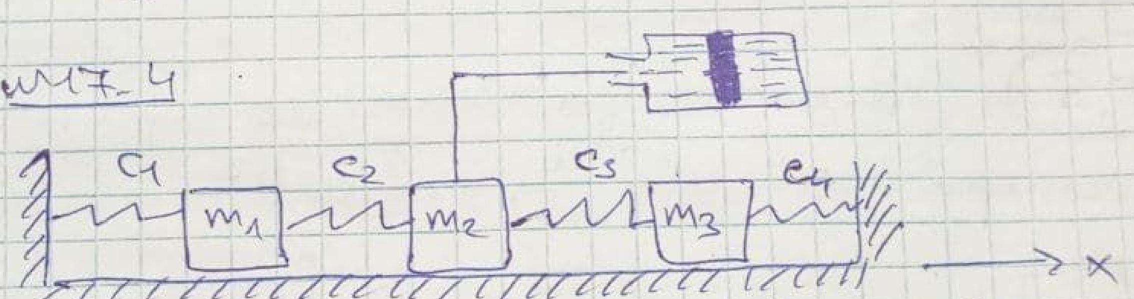
$u \le \frac{1}{3a}$ - уст.

$u \geq \frac{1}{3a}$ - неуст.

таким образом $\frac{1}{c} \le \frac{1}{3a} \geq c \geq 3a$ — радиус устойчивого положения равновесия



№17-4



$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{x}_3^2}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$

$F = -\beta \cdot \dot{x}_2$ - сила вязкого тр.

Тогда $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - матр. для ее энергии

$\Pi = c_1\frac{\cancel{x_1}^2}{2} + c_2\frac{(x_2-x_1)^2}{2} + c_3\frac{(x_3-x_2)^2}{2} + \frac{c_4 x_3^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 \end{pmatrix}$

Тогда:

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2+c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & m_2\lambda^2+\lambda\beta+c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & \lambda^2 m_3+c_3+c_4 \end{vmatrix}=0$$

Случай, когда груз m_2 покоится:

$$\lambda=i\sqrt{\frac{c_1+c_2}{m_1}} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & \dots & -c_3 \\ 0 & -c_3 & -\frac{(c_1+c_2)m_3}{m_1}+c_3+c_4 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow c_5-0-\frac{(c_3+c_4)m_1-(c_1+c_2)m_3}{m_1}c_2^2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (c_3+c_4)m_1=(c_1+c_2)m_3$ - если это условие не выполн., тогда наблюдаем асимптотическую устойчивость

В качестве ф-ии Ляпунова возьмем полную мех. энергию $\Rightarrow$ по теор. Барбашина - Красовского будет асимптотическая устойчивость.

$\boxed{\text{T. 8}^*}$ Матьё: $\ddot{x} + (a + \varepsilon\cos t)x = 0$

$0 \leq \varepsilon \ll 1$

$\tau = t$, $T = \varepsilon^2 t$, замена: $a = 1 + c\varepsilon^2$, где $c = O(1)$

$$x = x(\tau, T) \Rightarrow \frac{d}{dt}x = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial x}{\partial T}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial T} + \varepsilon^4 + \dots$$

остальными слагаемыми пренебрегаем

$$x = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \varepsilon^2 x_2(\tau, T)$$

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial T} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} +$$
$$+ \varepsilon \cos t\, x_0 + \varepsilon^2 \cos t\, x_1 + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + c\varepsilon^2 x_0 = 0$$

$$O(1): \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \Rightarrow x_0(\tau, T) = A(T)\cos\tau + B(T)\sin\tau$$

$$O(\varepsilon): \quad \ddot{x}_1 + x_1 = -\cos^2\tau\, A(T) - B(T)\sin\tau\cos\tau = \frac{A}{2}(1 + \cos 2\tau) - \frac{B}{2}\sin 2\tau$$

$$x_1(\tau, T) = A_1(T)\cos\tau + B_1(T)\sin\tau - \frac{A}{2} + \frac{A}{6}\cos 2\tau + \frac{B}{6}\sin 2\tau$$

$$O(\varepsilon^2) \quad \ddot{x}_2 + x_2 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial T} - x_1\cos\tau - c x_0 = 2A'\sin\tau - 2B'\cos\tau + \frac{A}{2}\cos\tau -$$
$$- \frac{A}{6}\cos 2\tau\cos\tau - \frac{B}{6}\sin 2\tau\cos\tau - B_1\sin\tau\cos\tau -$$

$-A_1\cos\tau - cA\cos\tau - cB\sin\tau \Rightarrow \begin{cases} 2A' = \frac{B}{12} + cB \\ -2B' = -\frac{A}{2} + \frac{A}{12} + cA \end{cases}$

$\Rightarrow B'' + \frac{1}{4}\left(c - \frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{12} + c\right)B = 0$

$B = B_0 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\left(c + \frac{1}{12}\right)\left(c - \frac{5}{12}\right)}\, t + c\right) \quad -\frac{5A''}{12}$

Итого $-\frac{1}{12} < c < \frac{5}{12} \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon^2}{12} < a < 1 + \frac{5\varepsilon^2}{12} + O(\varepsilon^4)$

$\boxed{\text{T.6}}$ $0 < \varepsilon \ll 1$ $\quad \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$

Осциллятор Дюффинга с $\omega^2 = 1$

Запишем в форме Коши

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x - \varepsilon x^3$

линейную форму обр. матрица с $\lambda_{1,2} = \pm i$

по условию $\varepsilon \neq 0$, но в сл. $\varepsilon = 0$ дифф. ур

имеем решение: $x = ce^{i\omega t} + \bar{c}e^{-it} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = i\left(ce^{it} - \bar{c}e^{-it}\right)$

тогда для $\varepsilon \neq 0$ сделаем замену $z = ce^{it} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = z + \bar{z},\ y = i(z - \bar{z}),\ z = \frac{1}{2}(x - iy),\ \bar{z} = \frac{1}{2}(x + iy)$

$\dot{z} = iz + \frac{i\varepsilon}{2}(z + \bar{z})^3,\ \dot{\bar{z}} = -i\bar{z} - \frac{i\varepsilon}{2}(z + \bar{z})^3$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ и $\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$

рез. мономы $(2, 1)\ (1, 2)$

$\dot{y} = iy + \frac{3i\varepsilon}{2}y^2\bar{y}$. замена $z \mapsto y \Rightarrow$

$\Rightarrow z = y + \frac{\varepsilon}{4}y^3 + \alpha y^2\bar{y} - \frac{3\varepsilon}{4}y\bar{y}^2 - \frac{\varepsilon}{8}\bar{y}^3,\ \forall\alpha$

решение будем искать в виде $y = c(t) \cdot e^{it}$

$$\dot c = \frac{3i\varepsilon}{2} c^2 \bar c$$

В показательной форме $c(t) = r\frac{e^{i\varphi}}{2}$, $r = r(t)$,

$\varphi = \varphi(t)$

$$\dot r = 0, \quad \dot\varphi = \frac{3\varepsilon r^2}{8} \quad \Downarrow$$

$$y = \frac{r_0}{2} e^{i(t+\varphi_0)}, \quad \varphi = \frac{3\varepsilon r_0^2}{8} + \varphi_0, \quad r_0 \text{ и } \varphi_0 = const.$$

примем $\alpha = 0$ т.к. его можно положить любым

$$x = y + \bar y + \frac{\varepsilon}{8}(y^3 + \bar y^3) - \frac{3\varepsilon}{4}(y^2 \bar y + y \bar y^2)$$

$$x = \frac{r_0}{2}\left(e^{i(t+\varphi_0)} + e^{-i(t+\varphi)}\right) + \frac{\varepsilon r_0^3}{64}\left(e^{3i(t+\varphi)} + e^{-i(t+\varphi)}\right) - \frac{3\varepsilon r_0^3}{32}\left(e^{i(t+\varphi)} + e^{-i(t+\varphi)}\right)$$

$$x = r_0\left(1 - \frac{\dot\varphi}{2}\right)\cos\left((1+\dot\varphi)t + \varphi_0\right) + \frac{\dot\varphi}{12}\cos\left(3(1+\dot\varphi)t + 3\varphi_0\right) + \ldots$$

$$\dot\varphi = \frac{3\varepsilon r_0^2}{8}$$

(бесконечный ряд в форме многочлена)

(T. 7) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 x_2^2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{matrix} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ резонансный случай, значит систему можно будет перевести в вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{r(y)}_{\text{содержит только резонансные слагаемые третьей степени.}}$$

Так, что совершим замену:

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{p}\,\vec{y}^3$, $\vec{p} = (p_1, p_2)^T$, $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$

$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 (1 + 3 p_1 y_1^2) = -y_2 - p_2 y_2^3 - (y_1 + p_1 y_1^3) \cdot (y_2^2 + o(y^4)) = -y_2 - p_2 y_2^3 - y_1 y_2^2 + o(y^4)$

$\frac{1}{1 + 3p_1 y_1^2} = 1 - 3p_1 y_1^2$ дальше идёт $o(y^4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{y}_1 = -y_2 - p_2 y_2^3 - y_1 y_2^2 + 3 p_1 y_1^2 y_2 + o(y^4)$

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_2(1+3p_2y_2^2) = y_1 + p_1y_1^3 - (y_2 + p_2y_2^3)^3 =$$

$$= y_1 + p_1y_1^3 - y_2^3 + o(y^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{y}_2 = y_1 + p_1y_1^3 - y_2^3 - 3p_2y_1y_2^2 + o(y^4)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2y_2^3 - y_1y_2^2 + 3p_1y_1^2y_2 \\ p_1y_1^3 - y_2^3 - 3p_2y_1y_2^2 \end{pmatrix}$$

$$+ o(y^4)$$