Продвинутый матанализ для продолжающих на втором курсе ФОПФ

(1) Конечная и бесконечная размерность линейных пространств.
(2) Полилинейные формы, детерминант, тензоры.
(3) Гладкие многообразия и гладкие функции на них.
(4) Регулярные значения и степень гладкого отображения многообразий.
(5) Теорема Брауэра о неподвижной точке.
(6) Отображения сферы в сферу и векторные поля на сфере.
(7) Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство.

Список задач для самостоятельного решения

Задача 0.1. Докажите, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$), V — конечномерное пространство над этим полем, $A : V \to V$ — линейный оператор, то существует полный флаг в V, инвариантный относительно A (в том смысле, что все составляющие флаг подпространства инварианты относительно A).

Задача 0.2. Приведите примеры линейных операторов $A : V \to V$, не имеющих инвариантных полных флагов для поля, не являющегося алгебраически замкнутым (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$).

Задача 0.3. * Проверьте, что в бесконечномерном случае размерности V и V^* (определённые как мощности базисов) не обязаны быть равны.

Задача 0.4. * Проверьте, что в бесконечномерном случае тавтологическое вложение $s : V \to V^{**}$ не является изоморфизмом. Попробуйте придумать элемент V^{**}, не лежащий в V.

Задача 0.5. Докажите, что если $\dim V = n$, то $\dim \wedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

Задача 0.6. Проверьте, что если $W \subset V$ и линейный оператор $f : V \to V$ обладает свойством $f(W) \subseteq W$, то

$$\det f = \det f|_W \cdot \det \bar{f},$$

где $\bar{f} : V/W \to V/W$ индуцирован f.

Задача 0.7. Опишите собственные значения оператора $\wedge^k f^* : \wedge^k V^* \to \wedge^k V^*$ в терминах собственных значений исходного оператора $f : V \to V$.

Задача 0.8. Пусть V и W — конечномерные векторные пространства. Найдите минимальное число k (в зависимости от V и W), такое что всякий элемент тензорного произведения $V \otimes W$ можно представить в виде $\sum_{i=1}^k v_i \otimes w_i$ с некоторыми $v_i \in V$ и $w_i \in W$.

Задача 0.9. Докажите, что для вложенного в $\mathbb{R}^N$ гладкого многообразия M гомоморфизмы $\mathbb{R}$-алгебр $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками M.

Задача 0.10. Докажите, что для вложенных в $\mathbb{R}^N$ гладких многообразий M и N гомоморфизмы $\mathbb{R}$-алгебр $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гладкими отображениями $M \to N$.

Задача 0.11. * Докажите, что для вложенного в $\mathbb{R}^N$ гладкого многообразия M всякая гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой функции $\bar{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Задача 0.12. Докажите, что компактное подмножество абстрактного гладкого многообразия является замкнутым.

Задача 0.13. Докажите, что множество всех полных флагов в $\mathbb{R}^n$ является гладким многообразием.

Задача 0.14. Какую может иметь размерность пространство когомологий де Рама с компактным носителем $H^n_c(M) = \Omega^n_c(M)/d\Omega^{n-1}_c(M)$ для гладкого n-мерного связного многообразия без края M?

Задача 0.15. Пусть $f : N \to M$ — гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности n, причём M связно. Докажите, что для всякой $\omega \in \Omega^n_c(M)$ выполняется

$$\int_N f^*\omega = \deg f \cdot \int_M \omega.$$

Задача 0.16. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение компактных ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$ и M связно. Докажите, что в этом случае степень корректно определена и $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

Задача 0.17. * Докажите, что всякое вложенное в $\mathbb{R}^3$ компактное двумерное многообразие без края S ориентируемо.

Задача 0.18. Докажите, что всякое выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно шару некоторой размерности и всякое непрерывное отображение $f : K \to K$ имеет неподвижную точку.

Задача 0.19. Предположим, что для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует непрерывная *ретракция* $r : \mathbb{R}^n \to K$, $r|_K = \mathrm{id}_K$. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : K \to K$ имеет неподвижную точку.

Задача 0.20. Докажите, что гомеоморфизм $f : B \to B$ единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ переводит сферу ∂B в себя.

Задача 0.21. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся x, такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

Задача 0.22. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

Задача 0.23. Докажите, что если на сфере $\mathbb{S}^n$ есть всюду ненулевое касательное векторное поле, то n должно быть нечётным.

Задача 0.24. Приведите пример всюду ненулевого касательного векторного поля на сфере нечётной размерности.

Задача 0.25. Постройте три векторных поля на $\mathbb{S}^3$, которые в каждой точке сферы дают базис касательного пространства.

Задача 0.26. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

Задача 0.27. * Докажите, что если непрерывное отображение сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ нечётно, то есть для любого $x \in \mathbb{S}^n$ верно $f(-x) = -f(x)$, то степень отображения f нечётна.

Задача 0.28. Докажите, что максимум объёма множества в $\mathbb{R}^n$ данного диаметра достигается на шаре.

Задача 0.29. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ называется *логарифмически вогнутой*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$ выполняется $f((1-t)x + ty) \geqslant f(x)^{1-t} f(y)^t$. Докажите, что если логарифмически вогнутую функцию n переменных проинтегрировать по одной переменной, то получится логарифмически вогнутая функция $(n-1)$ переменной (или $+\infty$).

Определения и пояснения смотрите в конспекте

[1] Р.Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа.* rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.