

1.2.3.

Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса.

Семёнов Андрей Б02-016

18 февраля 2021г.

**Цель работы:** Измерение момента инерции тела и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам. Проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**В работе используются:** Трифилярный подвес (Рис. 1), секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых необходимо измерить.

## 1 Теоретические сведения.

Рассмотрим нашу установку:

Момент инерции

твердого тела относительно неподвижной оси определяется по формуле:  $I = \int r^2 dm$ .

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно легко посчитать. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно поределить экспериментально. Для этого

удобно использовать устройство, называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  вращающейся платформы  $P'$ . Путем небольшого поворота верхней платформы можно возбудить крутильные колебания в системе. Уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать в виде:

$$\frac{I\ddot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

В системе координат, связанной с верхней платформой, координаты верхнего подвеса нити  $C$  равны  $(r, 0, 0)$ . Нижний подвес нити в равновесии является точкой  $C''(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка перейдет в  $C'''(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ .

Расстояние между точками  $C$  и  $C'''$  равно длине нити  $L$ . Так, что:

$$(R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = L^2 \quad (2)$$

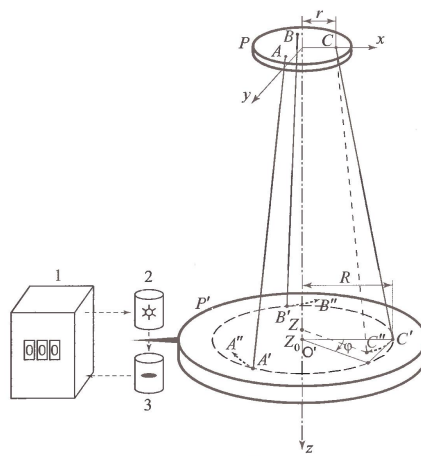


Рис. 1: Трифилярный подвес

Учитывая малость угла  $\varphi$ :

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \quad (3)$$

Решая (3):

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0} \quad (4)$$

Подставляя данное уравнение в ЗСЭ и дважды дифференцируя по времени, после сокращений, получаем:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно  $\varphi$ , получаем:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right) \quad (6)$$

Из (6) следует, что:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (7)$$

$$I = kmT^2, \quad k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \quad (8)$$

## 2 Выполнение работы.

### 2.1 Проверка установки.

Перед началом выполнения лабораторной работы, выполним проверку установки. Для этого, возбудим крутильные колебания нижней платформы и определим время затухания. Установку будем считать исправной, если время затухания

$$\tau \gg T$$

Для удобства наблюдения, определим, за какое время амплитуда колебаний платформы (угол отклонения от начального положения) уменьшится в 2 раза. В нашем случае, измерения проводить будем при значении амплитуды  $15^\circ$ .

### 2.2 Определение параметров установки.

Мы работали на установке №7. Запишем в таблицу информацию о нашей платформе

m г	R мм	r мм	L см
$993.5 \pm 0.5$	$115 \pm 0.5$	$30.5 \pm 0.3$	$217.5 \pm 0.1$

Таблица 1: Параметры платформы.

Сразу заметим, что различие между  $z_0$  и  $L$  меньше погрешности. Поэтому дальше будем считать их равными...

### 2.3 Определение момента инерции установки.

Наш рабочий диапазон—когда период не зависит от амплитуды колебаний (заметим, что при весьма малых значениях амплитуды эта зависимость вновь проявляется). Для нашей установки подходящее значение амплитуды равно  $15^\circ$ .

Проведем измерения времени десяти колебаний при таком значении амплитуды. Из этих данных определим период колебаний нашей платформы и её момент инерции:

$t_{10}$ с	44.036	44.013	44.010	44.007	43.967	43.966	43.990	$T = 4.399c$	$\delta T = 0.001c$
------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------------	---------------------

Таблица 2: Время колебаний пустой платформы.

Отсюда момент инерции установки:  $I = \frac{T^2 mg R r}{4\pi^2 z_0} \Rightarrow I = (7.69 \pm 0.11) \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ .

### 2.4 Определение момента инерции заданных тел. Проверка аддитивности момента инерции.

$t_{10}$ с	39.724	39.608	39.588	39.540	$T_{disk} = 3.961c$	$\delta T_{disk} = 0.001c$
------------	--------	--------	--------	--------	---------------------	----------------------------

Таблица 3: Крышка на платформе.

$t_{10}$ с	42.708	42.647	42.592	$T_{ring} = 4.264c$	$\delta T_{ring} = 0.001c$
------------	--------	--------	--------	---------------------	----------------------------

Таблица 4: Кольцо на платформе.

$t_{10}$ с	40.054	$T_{ring+disk} = 4.005c$	$\delta T_{ring+disk} = 0.001c$
------------	--------	--------------------------	---------------------------------

Таблица 5: Кольцо+Крышка. Проверка аддитивности.

Тело	Период колебаний, с	Масса груза, г
платформа	4.399	993.5
платформа, Крышка	3.691	$584.4+993.5=1577.9$
платформа, Кольцо	4.264	$821.1+993.5=1814.6$
платформа, Кольцо+Крышка	4.005	2399

Таблица 6: Периоды колебаний и параметры различных тел на трифилярном подвесе.

Тело	Момент инерции, $kg * m^2, *10^{-3}$
Платформа	7.69
Платформа, Крышка	8.61
Платформа, Кольцо	13.21
Платформа, Кольцо+Крышка	15.04

Таблица 7: Моменты инерции различных тел.

Проверка аддитивности момента инерции  $\Leftrightarrow$  проверке выполнения равенства  $I_{ring+disk} = I_{ring} + I_{disk} - I$ . Вычислим моменты инерции всех тел используя формулы (8). Занесём результаты в общую таблицу (7) моментов инерции. И посмотрим: **есть ли аддитивность?**

Из полученного видно, что желаемое соотношение для моментов инерции выполнено, а значит наше утверждение об аддитивности моментов инерции доказано.

## 2.5 Проверка закона Гюйгенса-Штейнера.

Теперь разберемся с двумя "половинками". Разместим их на платформе как показано на рисунке 2. Далее будем мерять время десяти полных колебаний, смещая после каждого такого измерения полудиски на расстояние  $h = 5$  мм. В результате измерений мы получим зависимость  $T(h)$ , а затем, используя формулу 8, получим  $I(h^2)$ . Результаты занесём в соответствующие

Массы этих самых половинок (дисков) равны 764.5 г. Отсюда посчитаем моменты инерции и выведем зависимость.

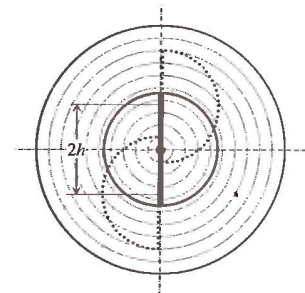
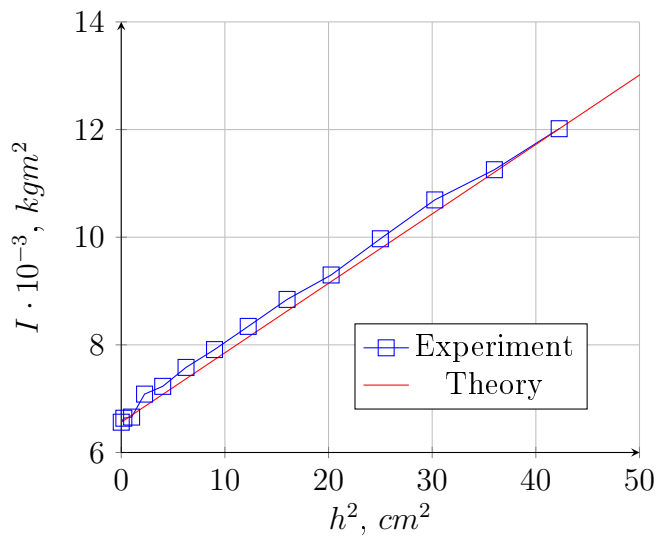


Рис. 2: Расположение тел на платформе.



№ изм.	$t_{10}$ с	T с	h см	№ изм.	$t_{10}$ с	T с	h см
1	30.545	3.054	0	8	34.435	3.443	3.5
2	30.712	3.071	0.5+x	9	35.459	3.545	4.0
3	30.764	3.076	1.0	10	36.349	3.635	4.5
4	31.154	3.173	1.5	11	37.645	3.764	5.0
5	32.048	3.205	2.0	12	38.981	3.898	5.5
6	32.819	3.282	2.5	13	39.994	3.999	6.0
7	33.532	3.353	3.0	14	41.322	4.132	6.5

Таблица 8: Зависимость периода колебаний от расстояния между "половинками".

№ изм.	$I, \text{kgm}^2 * 10^{-3}$	$h, \text{cm}$	№ изм.	$I, \text{kgm}^2 * 10^{-3}$	$h, \text{cm}$
1	6.563	0	8	8.343	3,7
2	6.637	0,52	9	8.844	4,2
3	6.658	1,2	10	9.298	4,7
4	7.085	1,7	11	9.971	5,2
5	7.229	2,2	12	10.693	5,7
6	7.581	2,7	13	11.254	6,2
7	7.912	3,2	14	12.016	6,7

Таблица 9: Зависимость Момент инерции от расстояния между "половинками".

## 2.6 Определение момента инерции диска, его массы.

Из таблицы 9 определим момент инерции диска на платформе. Он отвечает значению  $h = 0$  то есть  $I = 6.563 \text{ kgm}^2$ . Теперь из формулы (8) определим массу диска.

$$M = \frac{I}{kT^2} = \frac{4\pi^2 z_0 I}{g R r T^2} \Rightarrow M = 1757$$

Теперь вычтем из  $M$  993.5 г. – массу платформы, получим 763.5 г. Видим, что различие с истинным значением всего лишь 1 грамм, то есть  $\sim 0.13\%$ .

Аналогично для кольца:

$$I_{ringexp} = (13.21 - 7.69) \cdot 10^{-3} = 5.52 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$m_{ringexp} = 820 \text{ г.}$$

## 2.7 Определение момента инерции тел с использованием теоретических формул и сравнение размеров тел.

Определим, совпадают ли полученные значение моментов инерции с теоретическими. Измеренный диаметры диска 87.9мм.

Для этого, используем следующие формулы:

$$I_{disk} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_{ring} = \frac{m}{2}(R_{int}^2 + R_{ext}^2)$$

Подставив в данные формулы значения  $m_{diskth} = 764.5\text{г}$ ,  $R_{diskth} = \frac{87.9}{2}\text{мм}$ ,  $m_{ringth} = 821.1\text{г}$ ,  $R_{ringext} = 83.6\text{мм}$ ,  $R_{ringint} = 78.5\text{мм}$ . Тогда получаем:

$$I_{diskth} = 0.738 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2$$

$$I_{ringth} = 5.40 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2$$

В силу доказанной аддитивности момента инерции  $I_{disk+platform} = I_{diskexp} + I_{platform}$ , где:

$$I_{platform} = 7.69 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2.$$

$$I_{disk+platform} = 6.563 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2.$$

Экспериментальное значение момента инерции диска:

$$I_{diskexp} = (7.69 - 6.563) \cdot 10^{-3} = 1.127 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2$$

Отсюда экспериментальное значение радиуса диска:  $R_{diskexp} = \sqrt{\frac{2I_{diskexp}}{m_{diskexp}}} \Rightarrow R = 54.3\text{мм}$ . Разница с реальным радиусом (44мм) составляет 23.5%.

Экспериментальное значение момента инерции диска:

$I_{ringexp} =$  Упрощенно найдем экспериментальное значение радиуса кольца:

$$R_{ringexp} =$$

## 2.8 Определение погрешностей измерений.

Погрешность  $k$ :

$$\sigma_k = k \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2}$$

$$\sigma_k = 0.01 \quad k \approx 0.40$$

Относительная погрешность измерения момента инерции:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \varepsilon_I = 0.089 \Rightarrow \varepsilon_I = 8.9\%$$



### 3 Вывод.

1. Мы достаточно хорошо показали аддитивность момента инерции
2. Значение теоретического и экспериментального моментов инерции близки
3. Геометрические размеры тел определены не так точно, как хотелось бы, но результаты не очень различны.
4. Мы построили зависимость  $I(h^2)$  и показали справедливость закона Гюйгенса-Штейнера.
5. Хотя у нас и возникли некоторые неточности всвязи с тем, что мы не могли точно смещать бруски на одинаковую длину  $h$ , но эту проблему вышло легко устранить.