

1.4.1.

Изучение физического маятника

Семёнов Андрей Б02-016

11 марта 2021г.

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счетчик числа колебаний, линейка, секундомер.

1 Теоретические сведения

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где I —момент инерции маятника, φ —угол отклонения маятника от положения равновесия, t —время, M —момент сил, действующих на маятник.

В нашей работе в качестве физического маятника 1 используется однородный стальной стержень длины l . На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние ОС от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a , тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \quad (2)$$

Момент силы тяжести равен $M = -mga \sin \varphi$, учтя малость угла φ и подставляя это вместе с (2) в (1) получим:

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0, \quad (3)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \quad (4)$$

Решением этого уравнение является

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (5)$$

Амплитуда A и начальная фаза α определяются только начальными условиями.

Период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}}. \quad (6)$$

Видим, что период малых колебаний не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний. Изохронность справедлива для всех колебаний, подчиняющихся уравнению (3).

Период колебаний математического маятника определяется:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}. \quad (7)$$

l' —длина математического маятника. Поэтому величину $l_{pr} = a + \frac{l^2}{12a}$ называют приведённой длиной физического маятника. Точка O' называется центром качания. При качании маятника относительно точки O' его период будет таким же, как и при качании относительно точки O .

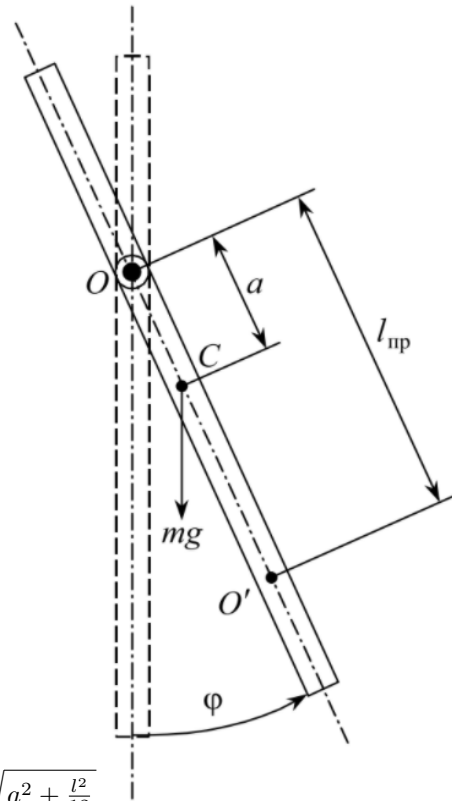


Рис. 1: Физический маятник

Этим методом можно проверять теоретические сведения. Ещё один метод заключается в проверке правильности формулы (6). Входящую в формулу величину a можно изменять, передвигая опорную призму по стержню. В данной работе в качестве математического маятника используется свинцовый шарик, подвешенный на двух расходящихся нитях, как показано на 2. Длину нитей можно изменять, наматывая их на ось.

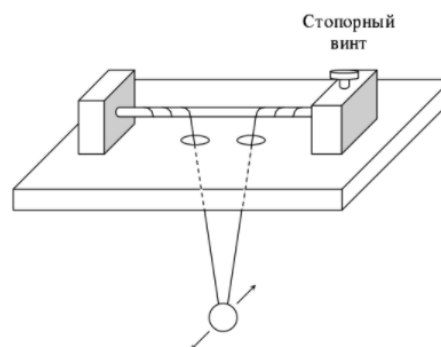


Рис. 2: Математический маятник

2 Выполнение работы

Имеем установку со следующими характеристиками:

$$l = 100 \pm 0,5 \text{ см.}$$

$$m = 952,8 \text{ г} \text{—масса стержня}$$

2.1 Диапазон амплитуд

Определим диапазон амплитуд, в пределах которого T не зависит от амплитуды:

XX	φ	$\varphi/2$	$\varphi/4$
$t_{100}, \text{ с}$	157,4	156,38	155

2.2 График $T^2 a(a^2)$

Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуем зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс.

$\Delta a = 0,2 \text{ см}$, тогда:

$$\Delta(a^2) = \sqrt{2}a\Delta a$$

$$\Delta(T) = \frac{\Delta T}{n}$$

$$\Delta(aT) = aT^2 \sqrt{2\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2}$$

$a, \text{ см}$	3	5	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29
$a^2, \text{ см}^2$	9	25	49	81	121	169	289	361	441	529	729	841
$\Delta(a^2), \text{ см}^2$	0,8	1,4	2	2,5	3,1	3,7	4,8	5,4	5,9	6,5	7,6	8,2
$T, \text{ с}$	1,6	1,6	1,62	1,57	1,558	1,547	1,53	1,53	1,53	1,527	1,55	1,565
$\Delta(T), \text{ с}$	0,02	0,01	0,01	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
$T^2 a, \text{ см с}^2$	7,68	12,8	18,371	22,184	26,701	31,112	39,795	44,477	49,159	53,630	64,868	71,028
$\Delta(T^2 a), \text{ см с}^2$	3,5	1,8	1,2	0,9	0,8	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Таблица 1: Результаты измерений и погрешности

Теперь можем построить график зависимости $T^2 a(a^2)$:

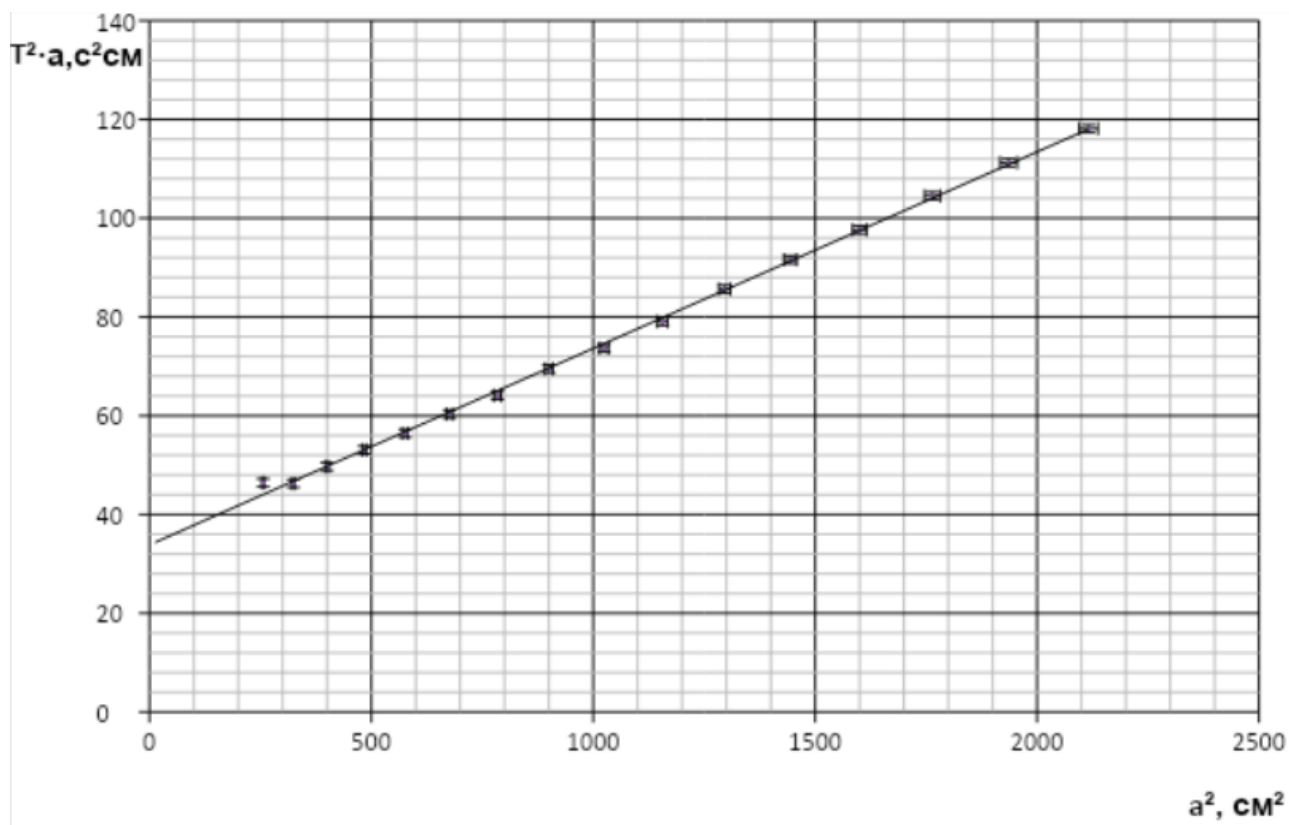
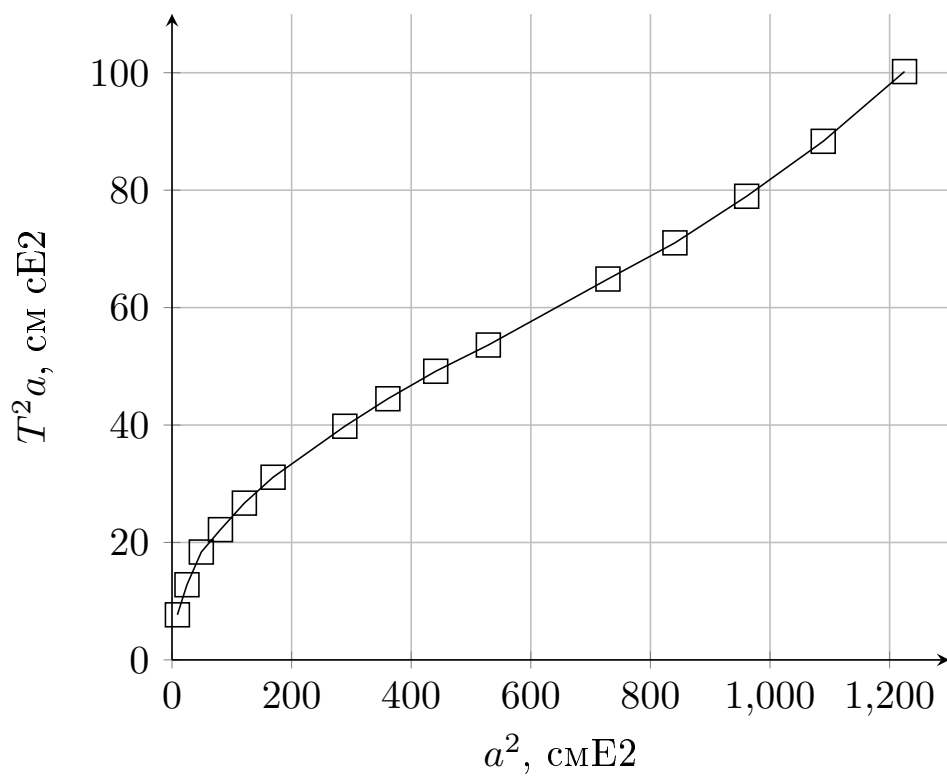


Рис. 3: График

2.3 Находим $g/4\pi^2$ и $l^2/12$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a}{g} + \frac{4\pi^2 l^2}{12ag}$$

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{4\pi^2 l^2}{12g}$$

$y = kx + b$, где $k = \frac{4\pi^2}{g} = (0,0398 \pm 0,0004); s^2 cm^{-1} \Rightarrow \frac{g}{4\pi^2} = (0,251 \pm 0,002); \frac{m}{s^2}$ Соответственно получаем:
 $g = (9,87 \pm 0,08) \frac{m}{s^2}$

$$b = \frac{4\pi^2 l^2}{12g} = (0,338 \pm 0,003); s^2 m$$

$\frac{l^2}{12} = (0,085 \pm 0,002) m^2$ Отсюда сразу получаем экспериментально значение длины стержня: $l = (1,02 \pm 0,01) m$

2.4 Немного математического маятника

Подберём длину математического маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колебаний обоих маятников совпали. Согласно теоретическим вычислениям:

$$l_{pr} = 58,8 \text{ см}$$

Экспериментальное же значение:

$$l_{prexp} = (59 \pm 0,2) \text{ см}$$

Данные величины совпадают в пределах погрешности

2.5 Обратимость точки подвеса(опоры) и центра качания физического маятника

Проверим на опыте обратимость точки подвеса и центра качения физического маятника(то есть при качании маятника вокруг O' период будет таким же, как и при качании вокруг O).

При $a = (20 \pm 0,2) \text{ см} = (1,58 \pm 0,2) \text{ с}$, $a' = l_{pr} = l_m = (42 \pm 0,2) \text{ см}$ При $a'_{a'} = (1,57 \pm 0,2) \text{ с}$

С учетом погрешности их периоды совпадают.

3 Выводы

1. Мы получили довольно точные значения g и l .
2. Подтвердили обратимость точки подвеса (опоры) и центра качания физического маятника.
3. Построили график зависимости $T^2 a(a^2)$.

4 Контрольные вопросы

1. При каких упрощающих предположениях была выведена формула (6)?

Формула получается при малости угла отклонения тела от положения равновесия, когда допустимо приближение $\sin \varphi \approx \varphi$.

2. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебаний маятника минимален?

Период колебаний будет минимальным при расстоянии $\frac{2}{3}l$, которое можно вычислить приравняв $\frac{dT^2}{da}$ к нулю. При очень больших или очень малых a период стремится к бесконечности, а значит в точке, где производная ноль находится минимум графика $T^2(a)$, и он равен $T = 2\pi \sqrt{3 \frac{l}{g}}$.

3. Как будет вести себя физический маятник, если совместить точку его подвеса с центром масс?

При смещении точки подвеса в точку центра масс, стержень не будет колебаться, а будет оставаться в том положении, в котором его оставить, ведь момент силы тяжести будет равен 0.

4. С какой целью в данной работе математический маятник подвешивается на двух нитях?

4. Математический маятник подвешивается на 2 нитях для того, чтобы исключить колебания во всех направлениях, кроме изучаемого.

5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.

Будем рассматривать абсолютно твёрдое тело, образованное совокупностью материальных точек^[2].

По определению момента инерции для J_C и J можно записать

$$J_C = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i)^2,$$
$$J = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}'_i)^2,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки тела в системе координат с началом, расположенным в центре масс, а \mathbf{r}' — радиус-вектор точки координат, через начало которой проходит новая ось.

Радиус-вектор \mathbf{r}'_i можно расписать как сумму двух векторов:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{d},$$

где \mathbf{d} — радиус-вектор расстояния между старой (проходящей через центр масс) и новой осями вращения. Тогда выражение инерции примет вид

$$J = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \mathbf{d} + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{d})^2.$$

Вынося \mathbf{d} за сумму, получим

$$J = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i)^2 + 2\mathbf{d} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i + d^2 \sum_{i=1}^n m_i.$$

По определению центра масс, для его радиус-вектора \mathbf{r}_c выполняется

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Поскольку в системе координат с началом, расположенным в центре масс, радиус-вектор центра масс равен нулю, то равна $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$.

Тогда

$$J = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i)^2 + d^2 \sum_{i=1}^n m_i,$$

откуда и следует искомая формула:

$$J = J_C + md^2,$$