Явления переноса.
Броуновское движение.
Задачи: 10.106 10.30 Т3 10.92

ЗАДАНИЕ:10.25 10.54 10.98 Т5

1) Явления переноса. см. 12-Stolknovenija

Явления переноса - необратимые процессы в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос массы (диффузия), импульса (вязкость) и энергии (теплопроводность).

2) Броуновское движение.

Броуновское движение — беспорядочное движение макроскопических видимых взвешенных частиц твёрдого вещества в жидкости или газе , вызываемое тепловым движением частиц жидкости или газа.

Броуновское движение частиц, взвешенных в окружающем веществе, тесно связано с явлением диффузии. Из за флуктуаций концентрации молекул окружающего вещества возникает их диффузия, которая оказывает давление на взвешенную частицу.

Движение броуновской частицы характеризуется ее подвижностью B, то есть величиной, связывающей скорость броуновской частицы u с силой F,приложенной к этой частице:

$$u = BF$$

Потенциальная энергия газа или жидкости равна –Fx, а наличие градиента концентрации обеспечивает диффузионный поток $J = -D\frac{dn}{dx}$. Этот поток, в состоянии равновесия, уравновешивается силовым потоком BFn, обусловленным наличием потенциальных сил:

$-D\frac{dn}{dx} + BFn = 0$

Для флуктуаций концентрации частиц справедливо распределение Больцмана:

$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$

Беря производную из распределения Больцмана и используя U=-Fx получим

$-D\frac{F}{kT}n + BFn = 0$, откуда

$D = kTB$

Последнее выражение называется соотношением Смолуховского-Эйнштейна для связи коэффициентов диффузии и подвижности.

По формуле Стокса для частиц радиуса r сила $F = 6\pi\eta r u$ и $B = \frac{1}{6\pi\eta r}$; Откуда

$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$.

Смещение броуновской частицы:

1. $\sqrt{x^2} = 2D\tau = 2kTB\tau$ - одномерный случай;

2. $\sqrt{l^2} = 4D\tau = 4kTB\tau$ - двумерный случай;

3. $\sqrt{r^2} = 6D\tau = 6kTB\tau$ - трехмерный случай;

Задача 10.106

10.106. Найти время испарения воды из трубки длиной $l = 10$ см, запаянной с одного конца. Температура $t = 27$°C. Первоначально вода заполняла трубку наполовину; относительная влажность воздуха 50%. Давление насыщенных паров при температуре 27°C $P_н = 20$ Тор. Длина свободного пробега λ в системе воздух–пар порядка 10^{-5} см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

Поток массы в единицу времени через единичную площадку определяется диффузией:

$\frac{dM}{dt} = \rho \frac{dl}{dt} = j = -D\frac{d\rho}{dx}$

Средняя величина градиента плотности пара меняется в прцессе испарения, т.к. зависит от x, где x расстояние от поверхности до нормальной атмосферы с влажностью 0.5 насыщенного пара. Величина градиента плотности пара

$\frac{n_{np}(1-\varphi)m}{x}$, где x меняется от l/2 до l.
$dM = \rho dl = \frac{1}{3}v\lambda\frac{n_{np}(1-\varphi)m}{x}dt$, откуда

$\tau = \int\limits_0^\tau = \int\limits_{l/2}^{l} \frac{3\rho x dx}{v\lambda n_{np}(1-\varphi)m} = \frac{3\rho\left(\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{8}\right)}{v\lambda n_{np}0.5m} = \frac{9}{4}\frac{\rho l^2}{v\lambda n_{np}m} \Rightarrow;$

Из уравнения идеального газа для пара $n_{np}m = \rho = \frac{M}{V} = \frac{P_n\mu}{RT}$, откуда $\tau = \frac{9}{4}\frac{RT\rho l^2}{v\lambda P_n\mu}$;

Задача 10.30

10.30. Оценить глубину промерзания почвы на широте Москвы за бесснежную зиму (~ 120 суток). Теплопроводность грунта принять $\varkappa \sim 1$ Вт/(м $\cdot$ К), его теплоемкость $c \sim 10^6$ Дж/(м^3 $\cdot$ К).

Промерзание слоя dx на глубине x сопровождается потоком тепла $\chi \frac{dT}{dx}$, где градиент температуры можно оценить отношением $\frac{T_2 - T_1}{x}$; T_1, T_2 - температура воздуха и почвы на глубине x соответственно. Тогда

$\chi \frac{T_2 - T_1}{x} dt = dx \rho q$, где q - теплота образования льда. Отсюда разделяя переменные и интегрируя

$h^2 = 2 \frac{\chi}{\rho q}(T_2 - T_1)\tau, \;\; \rho q = c \triangle T \Rightarrow$

$h = \sqrt{2 \frac{\chi}{\rho q}(T_2 - T_1)\tau} = \sqrt{\frac{\chi \tau}{c}};$

$h = \sqrt{\frac{\chi \tau}{c}} \simeq 3$ м.

Задача Т.3

Т-3. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые =4 с на расстояние =0,5 м в случайном направле-нии. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положе-ния 2 за =1 час и определить коэффициент диффузии D толпы пья-ных матросов, не взаимодействующих между собой. Ответ: 2=15 м, 56,3 м2/ч.

$S_{N+1} = S_N \pm \lambda;$

$S_{N+1}^2 = S_N^2 \pm 2S_N\lambda + \lambda^2;$

$< S_{N+1}^2 >= S_N^2 + \lambda^2$

$S_1^2 = \lambda^2,\;\; S_2^2 = 2\lambda^2 ... S_N^2 = N\lambda^2$

$< X^2 >= N\lambda^2 \Rightarrow \sqrt{< X^2 >} = \lambda\sqrt{N}$

$\sqrt{< X^2 >} = 15$ м

$< X^2 >= 4D\tau$

$D = \frac{<X^2>}{4\tau} = \frac{225}{4} \simeq 56$ м^2/час.

Задача 10.92

10.92. Капелька масла массой $m = 10^{-10}$ г падает в воздухе с высоты $h = 1$ м, совершая при этом броуновское движение. Предполагая, что к ее падению применима формула Стокса, найти средний квадрат $\langle r^2 \rangle$ отклонения капельки от ожидаемой точки падения, если температура воздуха $T = 300$ К. Проверить, выполняются ли условия применимости формулы Стокса, если плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3, а вязкость воздуха $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ П.

1) В поперечной плоскости Броуновское движение приводит к смещению $< r^2 >= 4D\tau$;

$D = BkT$ по формуле Смолуховского-Эйнштейна, где по формуле Стокса подвижность $B = \frac{1}{6\pi\eta a}$ (a-радиус частицы, η-вязкость среды).

$< r^2 >= 4D\tau = 4BkT\tau$

Время падения капли $\tau = \frac{h}{u}$, где по определению $u = BF$, а F=mg, поэтому $\tau = \frac{h}{Bmg}$;

$< r^2 >= 4D\tau = 4BkT\frac{h}{Bmg} = \frac{4kTh}{mg}$

$\sqrt{< r^2 >} = 2\sqrt{\frac{kTh}{mg}} \simeq 1.3 \cdot 10^{-2}$ см.

2) $a = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \simeq 1.4 \cdot 10^{-3}$ см » $\lambda \simeq 10^{-5}$ см

Условие применимости формулы Стокса выполняется, т.к. число Рейнольдса $Re = \frac{mg\rho}{6\pi\eta^2} \simeq 0.15 << 1$.