Колебания твердых тел. Затухающие и вынужденные колебания. 10.4, 10.47, 10.84, 5.60

ЗАДАНИЕ: 10.78, 10.53, 10.34, 5.74

1)**Гармонические (собственные) колебания твердого тела.**

Характерной чертой гармонических колебаний является независимость частоты и периода таких колебаний от амплитуды. Гармонические колебания являются самыми простыми с точки зрения математического описания такого движения. Моделями для гармонических колебаний являются пружинный и математический маятники.

В случае, если отсутствуют силы сопротивления движению, то уравнение движения (2-й ЗН):

$m\ddot{x} = -kx$ или $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$;

Это уравнение гармонических колебаний, которые называются также собственными, т.к идут с собственной частотой колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, и описываются дифференциальным уравнением второго порядка с одним параметром ω_0.

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$;

Его решением является выражение $x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$;

Амплитуда A и начальная фаза α зависят от начальных условий и определяются по формулам

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$;

Колебания маятника изображены на рисунке 1

Процесс колебаний сопровождается превращением энергии: если кинетическая падает, то потенциальная увеличиваться и наоборот. Процесс изображен на рисунке 2.

Потенциальная энергия пружинного маятника имеет вид: $E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$, где k – коэффициент жесткости пружины, x – координата. Кинетическая энергия:$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$.

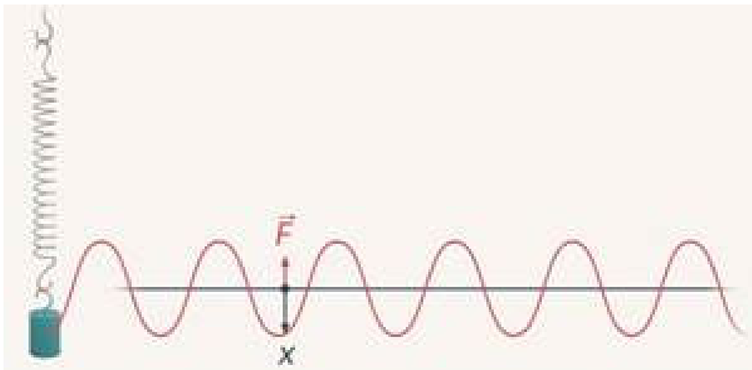


Рис. 1: Незатухающие (гармонические) колебания.

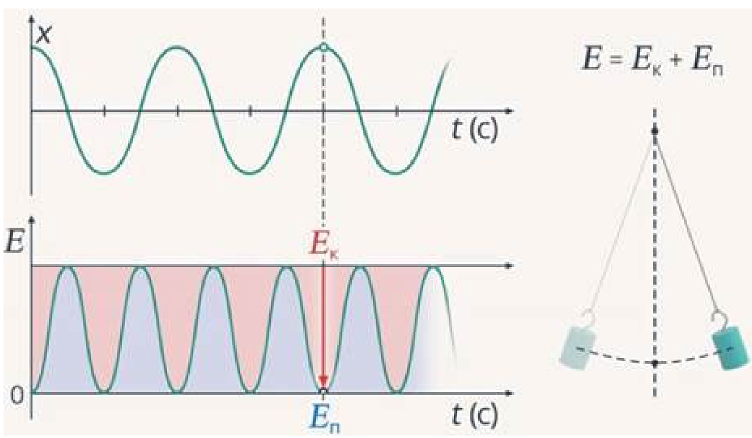


Рис. 2: Изменение энергий.

Если подставить выражения для координаты и скорости в формулы для энергий, то получим закон, по которому изменяется со временем потенциальная и кинетическая энергии для пружинного маятника:

$$E_п = \frac{kx_m^2}{2}\cos^2\omega_0 t$$

$$E_к = \frac{mv_m^2}{2}\sin^2\omega_0 t$$

В каждый момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии одинакова – выполняется закон сохранения энергии $E = E_к + E_п$.

Связь между энергией и частотой колебаний при одномерном движении.

Для пружинного маятника выражение для энергии имеет вид $m\frac{v^2}{2} + k\frac{x^2}{2} = E$ и частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, где под корнем стоит отношение коэффициентов при v^2 и x^2.

Если система более сложная, чем простой маятник, то выражение для энергии имеет общий вид $Av^2 + Bx^2 = E$ и в этом случае

$\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}}$;

В реальности энергия, как правило, не сохраняется. Любая колебательная система тратит часть своей энергии на преодоление силы сопротивления, силы трения. Энергия уменьшается, колебания на самом деле являются затухающими. Есть только один пример незатухающих колебаний - атом, что подтверждается совпадением реликтового и современного спектров излучения.

2) **Затухающие колебания.**

Если при совершении колебаний присутствуют силы сопротивления, то процесс также описывается дифференциальным уравнением второго порядка, но уже с двумя параметрами δ и ω_0, где δ - коэффициент затухания, а ω_0, как и прежде, частота собственных колебаний.

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 = 0$;

Есть два отличия от гармонических колебаний:

- Колебания совершаются с частотой $\omega \neq \omega_0 : \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$;

- Амплитуда колебаний A(t) уменьшается со временем $A(t) \sim e^{-\delta t}$ - колебания затухают экспоненциально.

Вид затухающих колебаний приведен на рисунке 3

Пунктир - $e^{-\delta t}$. Решение уравнения имеет вид:

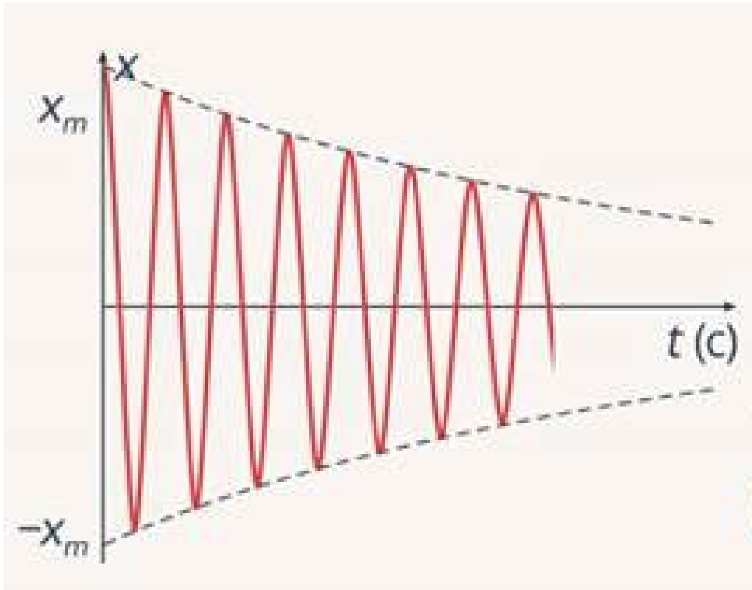


Рис. 3: Затухающие колебания.

$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$,

где амплитуда колебаний $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ - зависит от времени и за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ уменьшается в $e^{\delta T}$ раз.

С увеличением трения частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ уменьшается, период возрастает, и при $\delta = \omega_0$ период $T = \infty$. Такие колебания называются апериодическими (рисунок 4).

Таким образом, можно выделить три типа свободных колебаний:

1. $\delta = 0$ - гармонические колебания;

2. $0 < \delta < \omega_0$ - затухающие колебания;

3. $\delta \geq \omega_0$ - апериодические колебания;

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, работа которой непрерывно восполняла бы убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения.

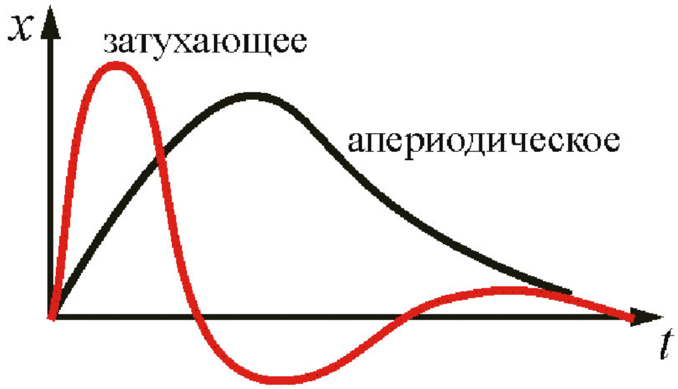


Рис. 4: Апериодические колебания (черная кривая).

Такая переменная сила называется вынуждающей $F_{\text{вын}}$, а возникающие под ее действием незатухающие колебания – вынужденными.

3) **Вынужденные колебания.**

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos\omega t;$

Решением уравнения является сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения приведено выше и со временем затухает. Решение неоднородного уравнения имеет вид

$x(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$, где

$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2};$

Уравнение описывает гармоническое колебание, происходящее с частотой, равной частоте вынуждающей силы Ω, отличающееся по фазе на φ относительно колебаний силы.

При вынужденных колебаниях может наблюдаться такое явление, как резонанс. Резонанс это резкое возрастание амплитуды колебаний системы.

4) **Резонанс.**

Определим условие, при котором наступает резонанс, для этого рассмотрим уравнение

$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}$

Найдем условие, при котором амплитуда принимает максимальное значение. Экстремум функции наблюдается, когда ее производная равна нулю, т.е.

$\frac{dA}{dt} = 0$; откуда

$\omega_{max} = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ и

$A_{max} = A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$;

Скорость смещения имеет вид:

$\dot{x} = v(t) = -A\Omega\sin(\Omega t - \varphi) = -v_0\sin(\Omega t - \varphi)$

$v_0 = A\omega = \frac{F_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2}}$

Максимум v_0 достигается при $\omega = \omega_0$, т.е.

$v_0(\omega_0) = v_0^{max} = \frac{F_0}{2\delta}$

Частота при которой амплитуда смещения достигает максимума $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ не совпадает с частотой при которой максимума достигает скорость $\omega = \omega_0$.

Резонансные кривые с максимумами при $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ представлены на рисунке 5.

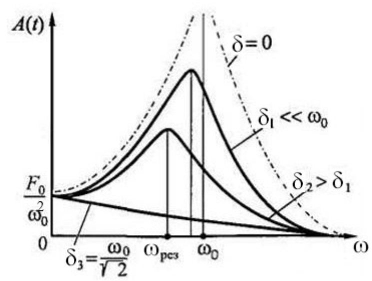


Рис. 5: Резонансные кривые при разных значениях коэффициента затухания δ.

Чем больше δ, тем ниже и левее максимум соответствующей кривой. При этом с возрастанием δ амплитуда колебаний вблизи резонанса изменяется медленнее, максимум получается менее острым. При значительном затухании ($2\delta^2 > \omega_0^2$) значение $\omega_{\text{рез}}$ становится мнимым. Это означает, что при данных условиях резонанс не возникает, с увеличением частоты амплитуда монотонно уменьшается.

Одной из основных характеристик колебательной системы является добротность Q, которая определяется отношением энергии W, накопленной в колебательной системе, к энергии, которую расходует система за один период колебания $\frac{\Delta W}{2\pi}$. Добротность характеризует качество колебательной системы, потому что чем она больше, тем меньше потери энергии.

$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$, где $2\Delta\omega$ - ширина резонанса на высоте $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \pi N_e$,

где N_e - число колебаний за время уменьшения амплитуды в е раз (время релаксации).

5)Работа внешних сил при резонансе.

При резонансе внешняя сила действует в такт со свободными колебаниями. Ее направление совпадает с направлением скорости мммаятника, поэтому эта сила совершает только положительную работу. При установившихся колебаниях положительная работа внешней силы равна по модулю отрицательной работе силы сопротивления.

Исторический факт: Когда в Петербурге по Египетскому мосту маршевым шагом, то есть в ногу, проходил кавалерийский эскадрон, мост сильно раскачался и в результате обвалился (рисунок 6).

Рис. 6: Обвал Египетского моста в Петербурге.

Рис. 7: Обрушение моста при резонансе.

==

Задача 10.4

10.4. Два одинаковых сплошных однородных куба подвешены двумя различными способами: в одном случае за вершину, в другом — за середину ребра (рис. 252). Учитывая свойства эллипсоида инерции куба, найти отношение периодов колебаний получившихся физических маятников в поле тяжести. Колебания происходят в плоскости рисунка.

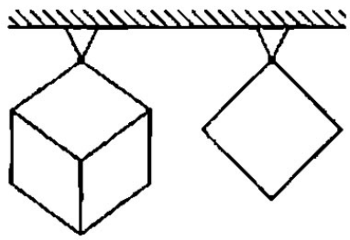


Рис. 252

$T = \sqrt{\frac{I}{mgl}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}\frac{l_2}{l_1}};$

$l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\;\; l_2 = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}};$

$\mathbf{\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}};$

$I = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma$, где $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{ma^2}{6};$

1) $\cos\alpha = \frac{a}{2l_1} = \frac{1}{\sqrt{3}};\;\; \alpha = \beta = \gamma;$

$I = 3\frac{ma^2}{6}\frac{1}{3} = \frac{ma^2}{6};$

$\acute{I}_1 = \frac{ma^2}{6} + ml_1^2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{3ma^2}{4} = \frac{11ma^2}{12};$

2) $\acute{I}_2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2} = \frac{2ma^2}{3};$

$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{11 \cdot 3}{12 \cdot 2}\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{\sqrt{6}}};$

$\mathbf{\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{\sqrt{6}}};}$

Задача 10.47

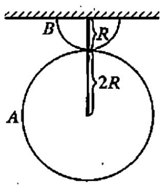


Рис. 291

10.47. Однородный диск A массой M и радиусом $2R$ может совершать колебания, катаясь по поверхности неподвижного цилиндра B, имеющего радиус R (рис. 291). Центры цилиндра и диска стянуты стержнем массой m так, что при качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где $\omega = \sqrt{\frac{C}{A}}$, а C и A коэффициенты при x^2 и v^2 в выражениях для потенциальной и кинетической энергиях соответственно. Поэтому

$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{C}}$;

1) Кинетическая энергия=энергии стержня $E_{ст}$+диска $E_{д}$;

- $E_{ст} = \frac{I_{ст}\omega^2}{2} = \frac{m(3R)^2}{3}\frac{\omega^2}{2} = (\frac{3}{2}m)\omega^2R^2$;

- $E_{д} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I_{д}\omega_{д}^2}{2} = \frac{M(3R\omega)^2}{2} + \frac{M(2R)^2}{2}\frac{(\frac{3}{2}\omega)^2}{2} = \frac{27}{4}\omega^2R^2$;

-$E_{к} = (\frac{3m}{2} + \frac{27M}{4})\omega^2R^2 = A\omega^2$, т.к. поворот диска $\varphi = \varphi_0 + \varphi_0/2$; $\Rightarrow$

$A = R^2(\frac{3m}{2} + \frac{27M}{4})$;

2) Потенциальная энергия=$(\frac{3}{2}R)mg(1-\cos\varphi) + 3RMg(1-\cos\varphi) = \frac{3}{4}Rg(m+2M)\varphi^2 = C\varphi^2 \Rightarrow$

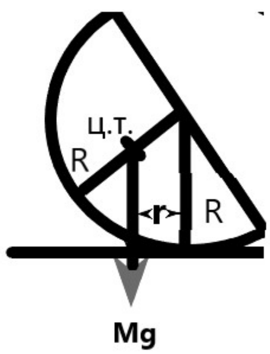
$C = \frac{3}{4}Rg(m+2M)$;

$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2\left(\frac{3m}{2}+\frac{27M}{4}\right)}{\frac{3}{4}Rg(m+2M)}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\frac{2m+9M}{m+2M}}$

==

Задача 10.84

10.84. Найти период малых колебаний половинки сплошного цилиндра радиусом R, находящейся на горизонтальной поверхности. При колебаниях проскальзывание отсутствует.



Правильный рисунок - полдела!

- Вращение происходит относительно оси перпендикулярной рисунку и проходящей через точку опоры.

- Сила, создающая момент, приложена к центру тяжести.

- Плечо момента r равно расстоянию между вертикалями, проходяшими через ц.т. и точку опоры.

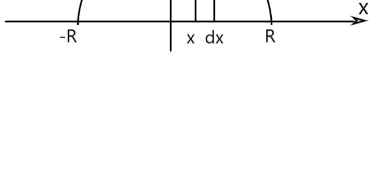
- Момент инерции I определяется относительно точки опоры (оси вращения).

Уравнение: $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -[\vec{r}\vec{F}] = -rMg \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{rMg}{I} = \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$;

1) **Определение r**;

Поскольку колебания малые, то r можно оценить как разность дуг, которые описывает R и R_c, где R_c-радиус центра тяжести $r \simeq (R - R_c)\varphi$.

==



Положение ц.т. можно определить с помощью статических моментов. Половинку цилиндра можно представить как плоскую фигуру.

Масса фигуры $M = \rho \int_{-R}^{R} f(x)dx$;

Ц.т. выделенного фрагмента отстоит от оси x на (1/2)y, а от оси y на x. Центр тяжести фрагмента определяется через дифференциалы стат. моментов:

$dS_x = dm \cdot \frac{1}{2}y = (\rho y dx)\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\rho y^2 dx$; Аналогично $dS_y = \rho xydx$;

Тогда стат. моменты $S_x = \frac{1}{2}\rho \int_{-R}^{R} y^2 dx$ и $S_y = \rho \int_{-R}^{R} xydx$;

Если теперь всю массу поместить в ц.т., то стат. моменты не изменятся, откуда

$M \cdot x_c = \rho S \cdot x_c = S_y$ и $M \cdot y_c = \rho S \cdot y_c = S_x$, где S-площадь, и окончательно координаты ц.т.

$x_c = \frac{\int xydx}{\int ydx}$ и $y_c = \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{\int ydx}$

=======================================

Для половинки цилиндра $x_c = 0$, а $S_x = \frac{1}{2}\rho \int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \rho \frac{2}{3}R^3 \Rightarrow$

$y_c = \frac{S_x}{\rho S} = \frac{4R}{3\pi}$

Тогда $R_c = R - y_c$ и $r \simeq (R - R_c)\varphi = y_c\varphi = \left(\frac{4R}{3\pi}\right)\varphi$

$r = \frac{4R}{3\pi}\varphi$; Тогда уравнение колебаний имеет вид

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{4RMg}{3\pi I}\varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{4RMg}{3\pi I}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi I}{4RMg}}$;

2) **Момент инерции I**;

В уравнение колебаний входит момент инерции половины цилиндра относительно оси, проходящей через точку касания. По теореме Штейнера он равен моменту инерции относительно ц.м. I_c плюс произведению M на квадрат расстояния от ц.м. до точки касания, которое равно $(R - y_c)$.

Используя аддитивность момента инерции, можно записать его значение относительно центра диаметра $I = \frac{MR^2}{2}$, где М - масса половины цилиндра. Тогда

$I_c + My_c^2 = \frac{MR^2}{2}$ и $I = I_c + M(R - y_c)^2 = \frac{MR^2}{2} - My_c^2 + M(R - y_c)^2 = MR^2(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi})$; Откуда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi I}{4RMg}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)}{4RMg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)} \simeq 2\pi\sqrt{1.5\frac{R}{g}};$$

==

Задача 5.60

5.60. Тело подвешено на пружине и имеет собственный период колебаний 1/2 с (рис. 122). На тело действует направленная вертикально синусоидальная сила с амплитудой $F = 100$ дин и некоторая сила трения. Определить амплитуду $F_{тр}$ силы трения и коэффициент трения (сила трения пропорциональна скорости движения), если амплитуда колебаний при резонансе $A_р$ составляет 5 см.

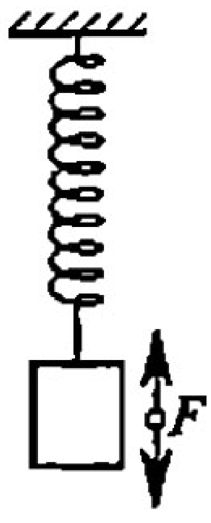


Рис. 122

Уравнение вынужденных колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \sin\Omega t;$$

Резонанс при $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \simeq \omega_0$;

$A_{max} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 5$ см;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $T_0 = 0.5c$, $\omega_0 = 4\pi = 12.56c^{-1}$;

При резонансе (установившиеся колебания) работа внешних сил компенсирует работу сил трения $A_{тр} = A_{вн} \Rightarrow F_{тр} = F_{вн}$

$F_{тр} = F = 10^{-3}$ Н при резонансе.

Амплитуда скорости $v_0 = A_0\omega_0$=5 см 4π с$^{-1}$=20π см/с

$k = \frac{F_{тр}}{v_0} = \frac{F_{рез}}{A_{рез}\omega_0} = \frac{100din}{5cm4\pi} = \frac{5}{\pi}$ г/с;