Произвольное движение твёрдого тела. Гироскопы. Колебания точки. 11.1, 11.14, 5.22, 5.43

ЗАДАНИЕ: 11.10, 11.24, Т6, 5.49, 5.70

1) **Произвольное движение твердого тела.**

При произвольном движении твердого тела отдельные его точки движутся, вообще говоря, по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные скорости и ускорения.

Однако существуют кинематические характеристики, являющиеся одинаковыми для всех точек тела, по крайней мере, в данный момент времени.

Основными задачами кинематики твердого тела являются:
а) установление способа задания движения тела,
б) изучение кинематических характеристик движения,
в) определенна траекторий, скоростей и ускорений всех точек движущегося тела.

При произвольном движении твердого тела его перемещение может быть представлено через поступательное и вращательное перемещения.

- При произвольном движении твердого тела в каждый момент времени существует прямая, точки которой совершают поступательное движение вдоль этой прямой. Эту прямую называют **мгновенной винтовой осью**.

- Винт, осью которого является эта прямая и у которого вектор равен угловой скорости тела $\vec{\omega}$ называют **мгновенным винтом скоростей тела**.

2) **Гироскопы.**

1.**Движение гироскопа.**

Гироскоп — устройство, способное реагировать на изменение углов ориентации тела, на котором оно установлено, относительно инерциальной системы отсчёта. Простейший пример гироскопа — юла (волчок).

У гироскопа есть быстро вращающаяся часть - ротор, которая представляет собой волчок и это волчок закреплен в специальный подвес, в котором рамки вращаются в горизонтальных, вертикальных или угловых плоскостях. (карданов подвес или подвес Фесселя).

Рис. 1: Гироскоп.

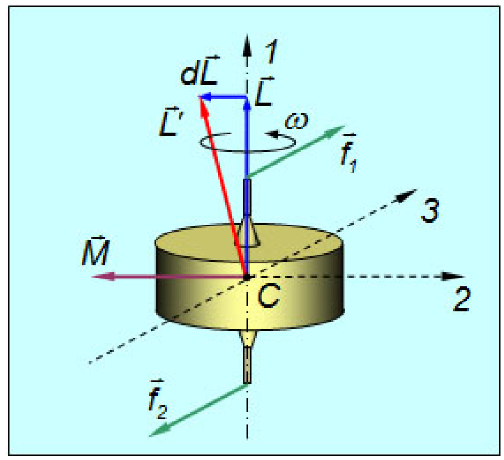


Рис. 2: Схема движения

Под действием сил (рис. 2), наблюдается поворот оси фигуры вокруг оси 3. Странное на первый взгляд поведение гироскопа полностью объясняется уравнением динамики вращательного движения твердого тела:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

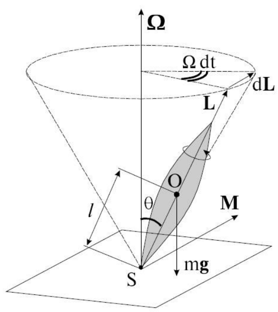
2.**Устойчивость.**

Если на гироскоп будет действовать внешняя сила в течение времени τ, то приращение момента импульса будет

$\Delta\vec{L} = \int_\tau \vec{M}dt \approx \vec{M}\tau$ и если τ мало, то $\Delta\vec{L} \ll \vec{L}$;

Этим объясняется устойчивость положения оси гироскопа.

3. **Прецессия.**



Момент силы f относительно точки 0 будет $\vec{M} = \vec{l} \times \vec{f}$;

Приращение момента импульса гироскопа за время dt равно $d\vec{L} = \vec{M}dt$;

Это приращение перпендикулярно моменту импульса и, следовательно, меняет его направление, но не величину.

Вектор момента импульса ведет себя подобно вектору скорости при движении частицы по окружности. В последнем случае приращения скорости перпендикулярно скорости частицы и равно по модулю

$dV = |\vec{a}_n dt|$, где $|\vec{a}_n| = const$;

В случае гироскопа элементарное приращение момента импульса $d\vec{L} \perp \vec{L}$ и равно по модулю $dL = Mdt$ при $M = const$;

За время dt вектор момента импульса повернется на угол $d\varphi$

$d\varphi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{f \cdot l \cdot dt}{L}$;

Угловая скорость прецессии в этом случае равна

$\vec{\Omega} = \frac{f \cdot l}{L} = \frac{f \cdot l}{I\omega}$, т.е. скорость прецессии $\sim \frac{1}{I\omega}$

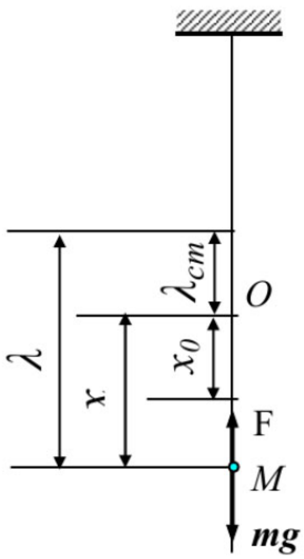
$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$ и $\Omega \sim \frac{M}{L}$

В качестве примера неформальных гироскопов можно привести винт самолета или корабля, в частности подводного.

4) **Колебания груза, подвешенного на пружине.**

Коэффициент жесткости пружины равен c. На груз действуют сила тяжести и сила упругости пружины. Величина силы упругости, возникающей при деформации пружины, пропорциональна ее удлинению : F = c.

В положении равновесия удлинение пружины называется статическим ст. В данном случае сила упругости, равная Fст = сст, в положении равновесия уравновешивается силой тяжести: mg = сст и $\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}$.



Пусть в начальный момент времени t = 0 точка смещена из положения статического равновесия на величину x_0 , а начальная скорость равна $\dot{x}_0$.

При отклонении груза M от положения статического равновесия на величину OM = x, полная деформация пружины равна = (ст + x), проекция силы упругости на ось x равна

$F_x = -c(\lambda_{\text{ст}} + x)$, тогда уравнение движения

$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - c(\lambda_{\text{ст}} + x) = mg - \frac{mg}{\lambda_{\text{ст}}}(\lambda_{\text{ст}} + x) = mg - mg - \frac{mg}{\lambda_{\text{ст}}}$ или

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}x = 0$ или $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$;

Решение $x = a\sin(kt + \alpha)$;

Частота и период свободных колебаний

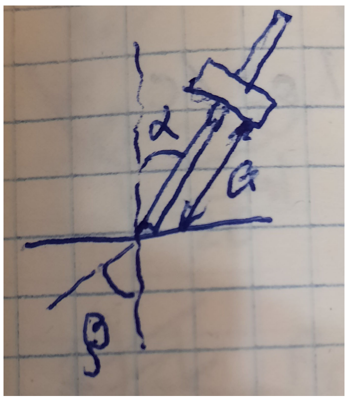
$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}$, $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{\text{ст}}}{g}}$;

Амплитуда a и начальная фаза α зависят от начальных условий и определяются по формулам

a = $\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0}{v_0}$;
==

Задача 11.1

11.1. Симметричный волчок массой m, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (рис. 302), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры. Расстояние от точки опоры волчка до его центра масс равно a, момент инерции волчка относительно его оси равен $I_{\|}$.



1) $\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$;

$\vec{M} = \vec{a} \times m\vec{g} = -m\vec{g} \times \vec{a}$;

$\vec{a} \| \vec{L}, \;\; \vec{\Omega} \times \vec{L} = -m\vec{g} \times \vec{a} \Rightarrow$

$\vec{g} \uparrow\downarrow \vec{\Omega}$;

Прецессия $\perp \vec{g}$;

2) $N_{\text{верт}} = mg$;

$N_{\text{гориз}} = m\Omega^2 a \sin\alpha$ - центробежная сила $\Rightarrow$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_{\text{ц.б.}}}{P} = \frac{m\Omega^2 a \sin\alpha}{mg} = \frac{a\sin\alpha}{g}\Omega^2$;

3) $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = I\vec{\Omega} \times \vec{\omega}$;

$M = mga\sin\alpha = I\Omega\omega\sin\alpha \Rightarrow \Omega = \frac{mga}{I\omega}$;

$\operatorname{tg}\beta = \frac{a\sin\alpha}{g}\Omega^2 = \frac{a\sin\alpha}{g}\left(\frac{mga}{I\omega}\right)^2 = \frac{a^3m^2g}{I^2\omega^2}\sin\alpha$;

$\operatorname{tg}\beta = \frac{a^3m^2g}{I^2\omega^2}\sin\alpha$;

==

Задача 11.14

11.14. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун) весом P, способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 304). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна $r = 50$ см, а рабочая скорость 1 об/с.

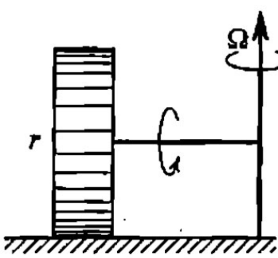


Рис. 304

$\Omega = \frac{rF}{I\omega} \Rightarrow F = \frac{I\omega\Omega}{r}$;

$I = \frac{mr^2}{2}$;

$M = N = Fr = \Omega L = I\omega\Omega \Rightarrow$

$F = \frac{I\omega\Omega}{r} = \frac{mr^2}{2}\frac{\Omega^2}{r} = \frac{m\Omega^2 r}{2}$;

$N = \frac{m\Omega^2 r}{2} + mg = m\left[\frac{\Omega^2 r}{2} + g\right]$;

$\frac{\Omega^2 r}{2} = 0.25(2\pi)^2 = \pi^2 \simeq g$,

т.к. $\Omega = \frac{2\pi}{1\text{c}}$;

$N \simeq 2mg$;

==

Задача 5.22

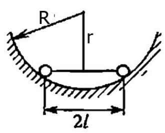


Рис. 100

5.22. Гантель длиной $2l$ скользит без трения по сферической поверхности радиусом r (рис. 100). Гантель представляет собой две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении: а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении; б) в плоскости рисунка.

$F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow$ Уравнение колебаний $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma M_i = -2mgr\sin\varphi$,

где $r = r_{\text{ц.м.}} = \sqrt{R^2 - l^2}$;

$\sin\varphi \simeq \varphi \Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2mgr}{I}\varphi = 0 \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgr}}$;

1) В плоскости рисунка: $I = 2mR^2 \Rightarrow \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{gr}}\frac{2\pi R}{\sqrt{g\sqrt{R^2-l^2}}}$;

2) В плоскости $\perp$ рисунку: $I = 2mr^2 \Rightarrow \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{2\pi\sqrt[4]{R^2-l^2}}{\sqrt{g}}$;

==

Задача 5.43

5.43. Найти частоту малых колебаний шарика массой m, подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т. е. $F = k(l - l_0)^2$, где l_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии.

1) l_1 - длина в нагруженном состоянии, тогда $mg = k(l_1 - l_0)^2$;

2) Уравнение $m\frac{d^2l}{dt^2} = mg - k(l - l_0)^2 = mg - k(l - l_1 + l_1 - l_0)^2 =$

$= mg - k(l - l_0)^2 - k(l_1 - l_0)^2 - 2k(l - l_0)(l_1 - l_0) =$

$= -k(l - l_0)^2 - 2k(l_1 - l_0)(l - l_0) \simeq -2k(l_1 - l_0)(l - l_0) \Rightarrow$

$\frac{d^2(l-l_0)}{dt^2} + \frac{2k}{m}(l_1 - l_0)(l - l_0) = 0 \Rightarrow$

$\omega_0^2 = \frac{2k(l_1-l_0)}{m} = \frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{4kg}{m}}$;

$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{4kg}{m}}$ ==