Течение газов.
Явления в разреженных газах.

Задачи: 10.82/83 10.68/69 10.120 14.27мех

ЗАДАНИЕ: 10.77 10.142 10.102 14.46мех

1) Течение газов.

Течение газа можно разделить на три основных режима:

1. **турбулентное**; Число Рейнольдса $Re = \frac{PVD}{\eta}$; Re>2000 – течение полностью турбулентное;

Возникает при высоких градиентах давления. Условие турбулентности $PQD > 5 \cdot 10^5$, где P-давление, Q-расход л/с, D-диаметр.

2. Re<1200 – течение полностью **ламинарное**.

вязкостное, или ламинарное; $\lambda \sim \frac{1}{P}$; При высоких давлениях P, $\lambda << L$ (L-размер сосуда) и поток газа ограничивается вязкостью газа. Условие ламинарности Re<1200 и число Кнудсена $Kn = \frac{\lambda}{L} < 0.001$.

Расход газа:

$Q = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8l}$ – Формула Пуазейля.

3. **молекулярное**; K$n \geq 1$, молекулы движутся независимо, понятие вязкости теряет смысл.

1) **Эффузия** - процесс, при котором отдельные молекулы проникают через отверстие без столкновений между собой. Есть две части сосуда I и II, разделенные перегородкой с малым отверстием площадью S, давления $P_1 > P_2$ и удовлетворяют условию K$n \geq 1$.

Чему равен поток частиц через S?

Число частиц пересекающих единицу площади S в единицу времени со стороны I и II будет:

$N_1 = 1/4 n_1 < v >$ и $N_2 = 1/4 n_2 < v > \Rightarrow$

$N = N_1 - N_2 = 1/4(n_1 – n_2) < v >$;

$n = P/kT \Rightarrow NS = 1/4 < v > S\frac{P_1 - P_2}{kT}$ – число молекул за 1 секунду.

$M = mNS = \frac{1}{4}\frac{<v>S(P_1 - P_2)}{RT}$ – масса газа за секунду;

$Q = \frac{M}{\mu}$ – количество в молях;

$< v >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$;

2) Молекулярное течение в трубе:

$Q = \frac{4}{3}\sqrt{2\pi}\mu RT)\frac{r^3}{l}\triangle P$ – вязкость отсутствует, $Q \sim r^3$.

3) **Эффект Кнудсена.**

Два сосуда с отверстием размером $L << \lambda$: $\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}}$(если$\lambda << L$, то $P_1 = P_2$!)

4) Если сосуды соединены трубой (D-диаметр) и $D << \lambda$, то

$Q = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{m}{2k}}\frac{D^3}{l}(\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{P_2}{\sqrt{T_2}})$

Задача 10.82/83

10.82. Определить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии $h = 1$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с второй такой же диск. Радиус дисков $R = 10$ см, модуль кручения нити $f = 100$ дин · см/рад, вязкость воздуха считать равной $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ дин · с/см^2. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

Соприкасаясь с нижним кольцом молекулы воздуха приобретают скорость, зависящую от r, $v(r) = \omega r$.

Импульс, передаваемый от слоя к слою в воздухе определяется уравнением переноса, где $\eta = \frac{1}{3} mn\bar{u}\lambda$

$j_P(r) = -\eta \frac{dv}{dz} = -\eta \frac{wr}{h}$ Здесь стоит градиент скорости, т.к. масса частицы учтена в выражении для вязкости.

Момент импульса, передаваемый кольцом в диске (r,r+dr)

$dM = rjdS = r\frac{\eta\omega r}{h} 2\pi r dr = \frac{2\pi\omega\eta}{h} r^3 dr.$

Интегрируя и приравнивая момент импульса моменту сил,получим:

$M = \frac{\pi\omega\eta}{2h} r^4 = f\varphi$, откуда

$\varphi = \frac{\pi\omega\eta r^4}{2hf} = 1.41$ рад=81°;

10.83*. Решить предыдущую задачу в предположении, что диски помещены в сильно разреженный воздух с давлением $P = 10^{-4}$ Тор, когда длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с расстоянием между дисками. Для упрощения расчета считать, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, равными средней скорости молекул воздуха $v = 450$ м/с.

Передаваемый импульс $P_r = \frac{n\bar{v}}{4} mu(r) = \frac{n\bar{v}}{4} m\omega r$

Момент импульса $dM = rP_r dS = \frac{n\bar{v}}{4} m\omega r \cdot r2\pi r dr$

$M = f\acute{\varphi} = \frac{\pi n\bar{v}m\omega r^4}{8}$

$\acute{\varphi} = \frac{\pi n\bar{v}m\omega r^4}{8f} = \frac{1}{4}\frac{h}{\eta} n\bar{v}m\varphi;$

$P = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2 \Rightarrow$

$\acute{\varphi} = \frac{3}{4}\frac{Ph}{\bar{v}\eta}\varphi \simeq 10^{-2}\varphi \simeq 1^\circ.$

10.83. Р е ш е н и е. Рассмотрим кольцо на вращающемся диске с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$. С площади этого кольца ежесекундно отражаются $nv \cdot 2\pi r dr/4$ молекул. Каждая из них уносит момент количества движения $mr^2\omega$, который передается неподвижному диску. Полный момент импульса, передаваемый в одну секунду неподвижному диску, легко найти интегрированием. Приравнивая его моменту силы $f\varphi'$, действующему со стороны закрученной нити, получим для угла закручивания

$$\varphi' = \frac{3\pi P}{8vf}\omega R^4 = \frac{3}{4}\frac{Ph}{\eta v}\varphi \approx 1^\circ,$$

φ — значение угла закручивания, соответствующее тому случаю, когда расстояние между дисками велико по сравнению с длиной свободного пробега молекулы. (См. предыдущую задачу.)

Задача 10.68

Камера объемом V=100 л откачивается с помощью идеального насоса (т.е. улавливающего весь попадающий в него газ) через трубу радиусом r=2 см, длиной L=1 м. Оценить сколько времени должна длиться откачка камеры от начального давления $P_1 = 1$ атм до давления $P_2 = 10^{-1}$ мм.рт.ст. Коэффициент вязкости воздуха считать равным $\eta = 1.8 \cdot 10^{-4}$ П.

==

$Q = -\pi\rho(P_1 - P_2)\frac{r^4}{8\eta L}$

$\frac{dQ}{dx} = -\frac{\pi\rho r^4}{8\eta L}\frac{dP}{dx} = -\frac{\pi\mu r^4}{8\eta LRT}P\frac{dP}{dx}$

Интегрируя по x получим:

$Q = \frac{\pi\mu r^4}{16\eta LRT}(P_1^2 - P_2^2)$

$P_2 = 0$, т.к. насос идеальный.

$\frac{dm}{dt} = \frac{\mu V}{RTL}\frac{dP}{dt} = \frac{\pi\mu r^4}{16\eta RTL}P^2$

$dt = \frac{16V\mu\eta LRT}{\pi\mu r^4 RT}\frac{dP}{P^2}$

Интегрируя получаем

$\tau = \frac{16\eta LV}{\pi r^4}(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}) \simeq 4.3$ с.

Задача 10.69

Камера объемом V=100 л откачивается с помощью идеального насоса (т.е. улавливающего весь попадающий в него газ) через трубу радиусом r=2 см, длиной L=1 м. Оценить сколько времени должна длиться откачка камеры от начального давления $P_1 = 10^{-4}$ Тор до давления $P_2 = 10^{-7}$ Тор.

==

При вытекании газа из объема V в вакуум

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{2}{3}\pi r^3 < v > \frac{n}{L}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\mu V}{RT}\frac{dP}{dt} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi\mu}{RT}}\frac{r^3}{L}P$$

$$dt = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}\frac{L}{r^3}\frac{dM}{P} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}\frac{Lm}{r^3}\frac{dN}{P}$$

$$dN = V dn \quad P = nkT \quad \Rightarrow$$

$$dt = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}\frac{LmVN_A}{r^3kTN_A}\frac{dP}{P}$$

После интегрирования

$$\tau = \frac{3}{4}\frac{LV}{r^3}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}\ln\frac{P_1}{P_2} \simeq 88 \text{ с.}$$

Задача 10.120

10.120. Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры T_1 и T_2, находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа n, масса атома m. Определить плотность теплового потока q между пластинами. Предполагается, что атомы газа в пространстве между пластинами имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами T_1 и T_2.

$n = n_1 + n_2$; Поток тепла

$$q = n_1 < v_1 > E_1 - n_2 < v_2 > E_2;$$

Поток частиц:

$$n_1 < v_1 >= n_2 < v_2 > \Rightarrow \quad n_1\sqrt{T_1} = n_2\sqrt{T_2}, \text{ т.к. } < v >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$n = n_1 + n_2 = n_1 + n_1\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow$$

$$n_1 = n\sqrt{\frac{T_2}{T_1+T_2}}, \quad n_2 = n\sqrt{\frac{T_1}{T_1+T_2}};$$

Энергия, передаваемая частицей при соударении с плоскостью E=2kT, т.к. число степеней свободы частицы =2 и число направлений движения =2, всего $E = 4\frac{kT}{2} = 2kT$; Тогда для потока тепла

$$q = n\sqrt{\frac{T_2}{T_1+T_2}}\sqrt{\frac{8kT_1}{\pi m}}2kT_1 - n\sqrt{\frac{T_1}{T_1+T_2}}\sqrt{\frac{8kT_2}{\pi m}}2kT_2 =$$

$$= 4n\left[\sqrt{\frac{2k^3T_1T_2}{\pi m(T_1+T_2)}}T_1 - \sqrt{\frac{2k^3T_1T_2}{\pi m(T_1+T_2)}}T_2\right];$$

$$q = 4n\sqrt{\frac{2k^3T_1T_2}{\pi m}}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})$$

Задача 14.27Мех

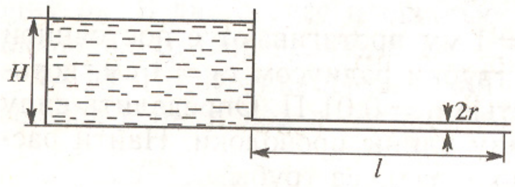

Рис. 370

Однородный по высоте сосуд с площадью сечения $S = 100$ см^2 залит водой до уровня H=10 см. Вблизи дна вода отводится трубочкой диаметром 2r=2 мм и длиной l=1 м (рис. 370) Трубочка открывается в атмосферу.

По какому закону h(t) вода вытекает из сосуда?
Оценить также время, за которое вода вытечет из сосуда.
Предполагается известной вязкость воды $\eta = 10^{-2}$ П.

==

$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l}(P_1 - P_2) = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\rho g h(t) = -S\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{h} = -\frac{\pi\rho g r^4}{8\eta l S}dt$

После интегрирования

$h(t) = H\exp(-\frac{\pi\rho g r^4}{8\eta l S}t) = He^{-\frac{t}{\tau}}$, где $\tau = \frac{8\eta l S}{\pi\rho g r^4} \simeq 0.72$ ч.

$t = -\tau\ln\frac{h(t)}{H}$

Вытекание прекратится при $h \leq r$

$t_{end} = \tau\ln\frac{H}{r} \simeq 3.3$ ч.