Упругие и неупругие столкновения. Момент импульса. 4.80, 4.90, 4.108, 6.4

ЗАДАНИЕ: 4.81 4.101 4.134 6.15

1. **Момент импульса.**

Момент импульса системы тел равен векторной сумме: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$, где все векторы определены относительно одной и той же точки заданной системы отсчета.

Момент внутренних сил $\sum M_i^{\text{внутр}} = 0$ по 3 закону Ньютона.

Закон изменения момента импульса для системы тел имеет вид:

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внешн}} = \vec{M}^{\text{внешн}}$, то есть изменение момента импульса системы

равно сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки.

Если сумма моментов всех внешних сил равна нулю $\vec{M}^{\text{внешн}} = 0$, то момент импульса системы сохраняется

$\vec{L} = const.$

Как и в случае закона сохранения импульса, момент импульса незамкнутой системы сохраняется при условии что:

1) суммарный момент внешних сил равен нулю,

2) если момент внешних сил относительно точки отличен от нуля, но относительно некоторой оси равен нулю, то момент импульса относительно этой оси сохраняется,

3) если действие внешних сил ограничено во времени (удар, взрыв) $\triangle\vec{L} = \vec{M}\triangle t$,

то изменением момента импульса за время удара можно пренебречь .

Момент импульса системы частиц в произвольной системе складывается из ее собственного момента импульса (момент относительно ЦМ) и момента , обусловленного движением системы частиц как целого:

$\vec{L} = \vec{L}_{\text{цм}} + [\vec{R}_{\text{цм}}\vec{P}_{\text{цм}}]$, где

$\vec{L}_{\text{цм}}$ - момент импульса относительно центра масс,

$\vec{R}_{\text{цм}}$ - радиус вектор центра масс,

$\vec{P}_{\text{цм}}$ - суммарный импульс системы.

2. **Упругие столкновения.**

Связь скоростей в С и Лаб системах:
До столкновения:
$v_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v$

$v_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v$ где $v = v_1 - v_2$ и 0 обозначает скорость в С системе;

Из закона сохранения импульса:

- импульсы обеих частиц остаются после столкновения равными по величине и противоположными по направлению,

- а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными и их абсолютные величины.

Результат столкновения сводится в С-системе к повороту скоростей обеих частиц:

После столкновения (штрих) в С-системе:
$v\prime_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\vec{n}_0$

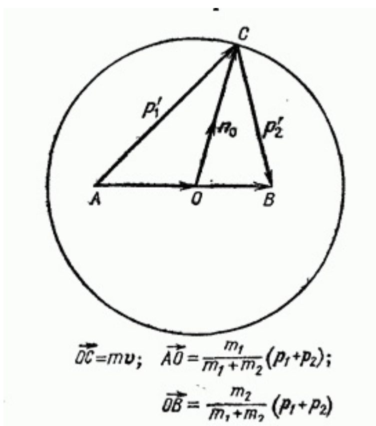
$v\prime_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\vec{n}_0$

После столкновения в Лаб-системе (добавляется скорость центра масс):

$v_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2};$

$v_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2};$

Переходя к импульсам, можно геометрически изобразить процесс рассеяния:

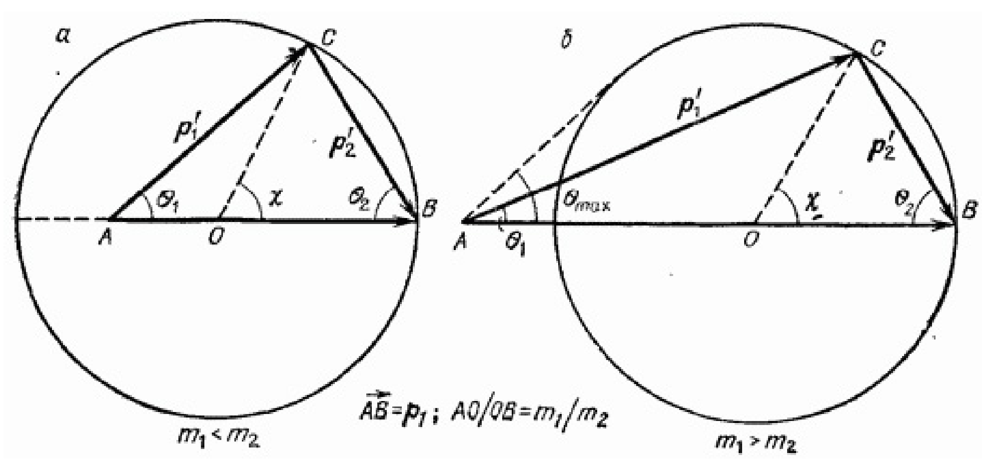


где радиус окружности R=mv и направление $OC \parallel \vec{n}_0$.

Рассмотрим случай, когда одна из частиц (пусть это будет частица m_2) до столкновения покоилась. В этом случае

$OB = R = \frac{m_2}{m_1+m_2} p_1 = mv$

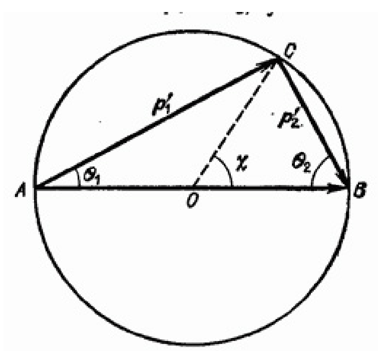
длина OB совпадает с радиусом, т. е. точка B лежит на окружности. Вектор же AB совпадает с импульсом первой частицы до рассеяния. При этом точка A лежит внутри (если $m_1 < m_2$) или вне (если $m_1 > m_2$) окружности. Соответствующие диаграммы изображены на рисунках а и б.



Указанные на них углы ϑ_1, ϑ_2 представляют собой углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению удара (направлению $\vec{p}_1$). Центральный же угол, обозначенный на рисунках посредством χ (дающий направление $\vec{n}_0$), представляет собой угол поворота первой частицы в системе центра инерции. Из рисунка следует, что углы ϑ_1, ϑ_2 могут быть выражены через угол χ формулами:

$tg\vartheta_1 = \frac{m_2 sin\chi}{m_1 + m_2 cos\chi}$, $\vartheta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$;

Сумма $\vartheta_1 + \vartheta_2$ - угол разлета частиц после столкновения, он $> \pi/2$ при $m_1 < m_2$ и $< \pi/2$ при $m_1 > m_2$. В случае б) существует максимальный угол рассеяния частицы m_1: $sin\vartheta_{1max} = \frac{m_2}{m_1}$;



Наиболее простой случай $m_1 = m_2$. Частицы разлетаются под прямым углом.

$\vartheta_1 = \chi/2$;

$\vartheta_2 = (\pi - \chi)/2$;

Скорости:

$v_1' = vcos\frac{\chi}{2}$ $\quad v_2' = vsin\frac{\chi}{2}$

3. **Неупругие столкновения**

1. Механическая энергия не сохраняется.

2. Импульс сохраняется.
==

Задача 4.80

4.80. По теории, разработанной Г. Герцем (1882 г.), при столкновении упругих шаров сила взаимодействия пропорциональна деформации в степени 3/2, т. е. $F = kx^{3/2}$. Рассмотреть лобовое столкновение шаров одинакового радиуса с одинаковой упругой константой k, но разными массами m и $m/3$. Начальные скорости v_0 и $-v_0$. Определить величину максимальной деформации шаров $x_{\max}$.

Из закона сохранения энергии кинетическая энергия переходит в потенциальную упругих сил.

$\triangle T = \triangle U_{\text{упр}} = A = 2\int_0^{\triangle x} F(x)dx = 2\int_0^{\triangle x} kx^{\frac{3}{2}}dx = 2\frac{2}{5}k(\triangle x)^{\frac{5}{2}}$;

При максимальном сжатии отностельное движение отсутствует, остается только движение центра тяжести, поэтому:

$\triangle T = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v_{\text{цм}}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$, т.к.

$v_{\text{цм}} = \frac{m_1 v - m_2 v}{m_1+m_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v$;

$\frac{1}{2}\frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = 2\frac{2}{5}k(\triangle x)^{\frac{5}{2}}$

$\triangle x_{max} = \left(\frac{5}{8}\frac{mv^2}{k}\right)^{\frac{2}{5}}$.

==

Задача 4.90

4.90. Две частицы, массы которых равны m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\alpha = 30°$ в лабораторной системе отсчета или на угол $\beta = 60°$ в системе центра масс. Определить отношение m_1/m_2.

Пусть после столкновения:

v_1 **- скорость в Лаб системе, а** $v_{1цм}$ **скорость** m_1 **в системе ЦМ;**

По вертикали (y) они равны, а по (x) отличаются на скорость ЦМ.

$v_1 sin\alpha = v_{1цм} sin\beta;$

$v_1 cos\alpha = v_{1цм} cos\beta + v_{цм}$

В системе ЦМ величина импульса не меняется (столкновение упругое), меняется лишь направление разлета;

$p_0 = p_1 \rightarrow v_{0цм} = v_{1цм}$, **где**

$v_{0цм} = v_0 - v_{цм};$

$v_{цм} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$;

$v_{0цм} = v_0 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \mathbf{v}_{1цм};$

$v_{1цм} = \frac{2v_0}{1+x}$, **где** $x = \frac{m_1}{m_2}$;

$v_1 sin\alpha = v_{1цм} sin\beta = \frac{2v_0}{1+x} sin\beta;$

$v_1 cos\alpha = \frac{2v_0}{1+x} cos\beta + \frac{x-1}{x+1} v_0$;

Делим второе уравнение на первое:

$ctg\alpha = ctg\beta + \frac{x-1}{x+1}\frac{x+1}{2v_0}v_0\frac{1}{sin\beta} = ctg\beta + \frac{x-1}{2sin\beta}$**;**

$x = 1 + 2(ctg\alpha - ctg\beta)sin\beta = 3$**;**

$\mathbf{\frac{m_1}{m_2} = 3;}$
==

Задача 4.108

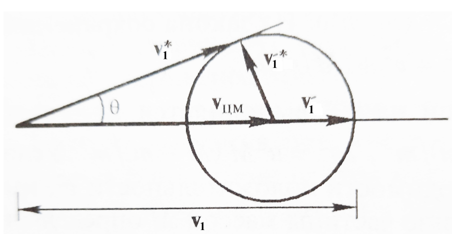
4.108. Ядро с массовым числом A и кинетической энергией $K_0 = 7$ МэВ налетает на неподвижное ядро с массовым числом $A/6$. В результате неупругого рассеяния налетающее ядро остается неизменным, а ядро мишени оказывается возбужденным с энергией возбуждения $E^* = 0{,}75$ МэВ. Определить максимальный угол рассеяния θ_{max} падающего ядра в лабораторной системе отсчета.

При неупругом рассеянии импульс сохраняется, энергия нет. Штрихом обозначим переменные в СЦМ, а звездочкой частицы после рассеяния. Запишем законы сохранения импульса и энергии в СЦМ:

$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1'^* + \vec{p}_2'^* = 0 \rightarrow p_1' = -p_2' = p',\ p_1'^* = -p_2'^* = p'^*$;

$\frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} = \frac{p'^{*2}}{2m_1} + \frac{p'^{*2}}{2m_2} + \triangle E$;

Диаграмму рассеяния можно представить через скорости в следующем виде :



Здесь везде импульсы для m_1, поэтому можно p заменить на скорости v. Очевидно $v = v' + v_{цм}$ и $v'^* = v'$, т.к. импульс сохраняется. Тогда, если окружность нарисовать радиусом $R = v_1'$, то ее точки будут соответствовать разным углам рассеяния m_1 в СЦМ. Максимальный угол рассеяния ϑ в Лаб системе соответствует случаю, когда v_1^* является касательной к окружности. В этом случае очевидно:

$\sin\vartheta_{max} = \frac{v'^*}{v_{цм}}$;

ЗСЭ можно переписать в виде:

$\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} p'^2 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} p'^{*2} + 2\triangle E$; **Здесь** $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \mu$ **- приведенная масса. Поэтому**

$\mathbf{p}'^2 = p'^{*2} + 2\mu\triangle E$**; или для скоростей**

$v_1'^{*2} = v_1'^2 - \frac{2\mu}{m_1^2}\triangle E$**;**

$v_1'^{*} = v_1' \left[1 - \frac{2\mu}{m_1^2 v_1'^2}\right]^{\frac{1}{2}}$**;**

$v_1' = v_1 - v_{\text{цм}} = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1$**; Подставляя численные значения, получим**

$v_1'^{*} = \frac{v_1}{7}\left[1 - \frac{7\triangle E}{K_0}\right] \simeq \frac{v_1}{14}$**;**

$v_{\text{цм}} = \frac{m_{v1}}{m_1+m_2}$**, тогда** $\frac{v_1'^{*}}{v_{\text{цм}}} = \frac{1}{14}\frac{7}{6} = \frac{1}{12}$**;**

$\sin\vartheta = \mathbf{\frac{1}{12}}$;
==

Задача 6.4

6.4. Длинная жесткая доска может свободно вращаться вокруг оси, делящей ее длину в отношении 1 : 2. На длинный конец доски с высоты $h = 1{,}5$ м прыгает мальчик, масса которого $m = 40$ кг. На коротком плече стоит акробат массой $M = 80$ кг (рис. 130). На какую высоту x подбросит доска акробата после прыжка мальчика? Массой доски пренебречь. Доска расположена невысоко над полом, так что начальным наклоном доски к полу можно пренебречь.

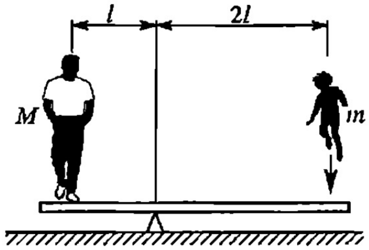


Рис. 130

Удар неупругий: m движется вместе с доской. На систему действуют две силы: сила тяжести и реакция опоры. Если момент импульса считать относительно опоры, то ее реакция момента не создает. Тогда закон сохранения момента импульса можно записать в следующем виде:

$2mlv_0 = 2mlv_1 + Mlv_2 = \omega(4ml^2 + Ml^2)$, **тогда угловая скорость**

$\omega = \frac{2mlv_0}{4ml^2+Ml^2} = \frac{1}{3}\frac{v_0}{l}$**;**

$v = \omega l = \frac{1}{3}v_0$ **и** $v^2 = \frac{1}{9}v_0^2$, $v^2 = 2gH$, $v_0^2 = 2gh$**;** $\rightarrow$

$\mathbf{H = \frac{1}{9}h}$;
==