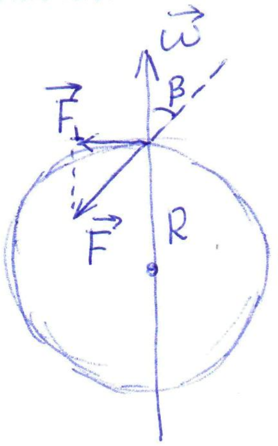
Семинар 12

Произвольное движение твёрдого тела. Гироскопы. Колебания точки.

11.7. В районе северного полюса на Землю падает метеорит под углом 45° к вертикали. Масса метеорита 1000 т. Его скорость 20 км/с. Найти, на сколько повернется земная ось в результате соударения с метеоритом. Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, ее радиус 6400 км.

Решение.



Передаваемый импульс:

$$p = mu = F\tau$$

τ – время прецессии Земли

Угол поворота:

$$\alpha = \Omega\tau = \frac{M_F}{L}\tau = \frac{F\sin\beta \cdot R}{I\omega}\tau = \frac{muR\sin\beta}{I\omega}$$

Момент инерции Земли:

$$I = \frac{2}{5}M_З R_З^2 = \frac{2}{5}\cdot 6\cdot 10^{24}\,кг\,(6{,}4\cdot 10^6\,м)^2 \approx 1{,}01\cdot 10^{38}\,кг\cdot м^2$$

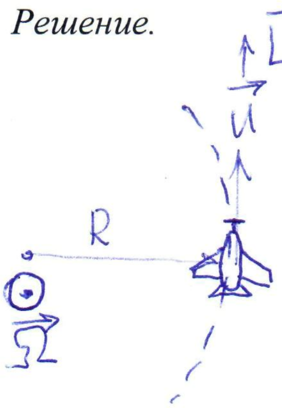
Частота вращения Земли:

$$\omega_З = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\,\frac{рад}{с}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5mu\sin\beta}{2M_З R_З \omega_З} = 1{,}27\cdot 10^{-17}\,рад$$

11.8. Самолет при скорости u = 300 км/ч делает поворот радиуса R = 100 м. Пропеллер с моментом инерции I = 7 кг·м^2 делает N = 1000 об/мин. Чему равен момент M гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера?

Решение.



$\Omega = \dfrac{u}{R}$ – угл. скорость прецессии

$\omega = 2\pi N$ – угл. скорость вращ. пропеллера

$\Rightarrow L = I\omega = 2\pi N I$

Момент сил:

$$M = L\Omega = \frac{2\pi N I u}{R} = 612 \text{ Н·м}$$

$\vec M$ – ?

20. На гладком столе лежат два груза массами m и $2m$, скреплённые двумя последовательно соединёнными пружинами с жёсткостями k и $2k$. Найти их период колебаний. *Ответ*: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

Решение.

Поскольку на центр масс системы не действуют внешние горизонтальные силы, то центр масс системы неподвижен.

Заменим систему пружин на 1 эквивалентную:

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} \Rightarrow k' = \frac{2}{3}k.$$

Пусть длина экв. пружины l, тогда

$$x_c = \frac{0\cdot m + l\cdot 2m}{3m} = \frac{2}{3}l.$$

Эффективная жесткость слева от ц.м.:

$$k_1' = \frac{k'}{2/3} = \frac{3}{2}k' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}k = k.$$

Тогда период колебаний груза слева:

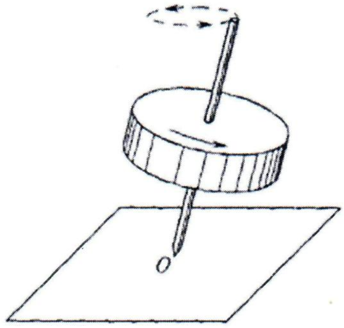
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Для груза справа от ц.м:

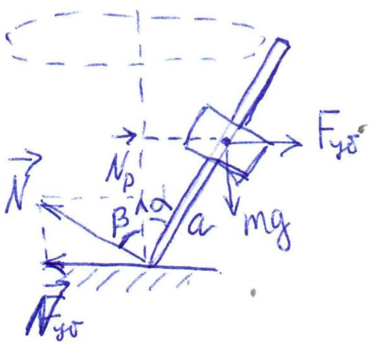
$$k_2' = \frac{k'}{1/3} = 3k' = 2k.$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T_1$$

11.1. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (рис.), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.



Решение.



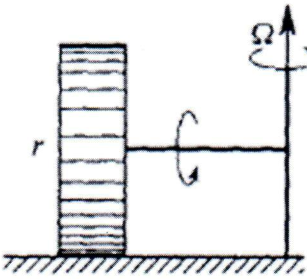
$$N_p = mg$$

$$N_{уб} = F_{уб} = m\Omega^2 a\sin\alpha,$$

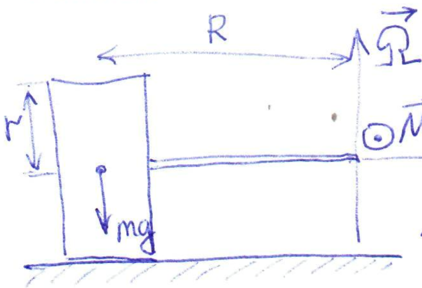
где $\Omega = \dfrac{M_F}{L_\omega} = \dfrac{mga}{I\omega}$

$$tg\beta = \frac{N_{уб}}{N_p} = \frac{m\Omega^2 a\sin\alpha}{mg} = \frac{\Omega^2 a\sin\alpha}{g} = \frac{m^2a^3g\sin\alpha}{I^2\omega^2}$$

11.14. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 265). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна r = 50 см, а рабочая скорость 1 об/с.



Решение.



$L_\omega = I\omega$

$$M = L\Omega = I\omega\Omega = \frac{mr^2}{2}\omega\Omega$$

$$\vec{M} = [\vec{R} \times \vec{F_1}] \qquad F_1 = M/R$$

Нет проскальзывания:

$$\Omega R = \omega r \Rightarrow \omega = \Omega\frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{mr^2}{2}\frac{\omega}{R}\Omega = \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{\Omega^2}{r} =$$

$$= 0{,}5 \cdot mr\Omega^2 = m \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5\,\text{м} \cdot (4\pi\ \text{с}^{-1})^2 = m \cdot 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx$$

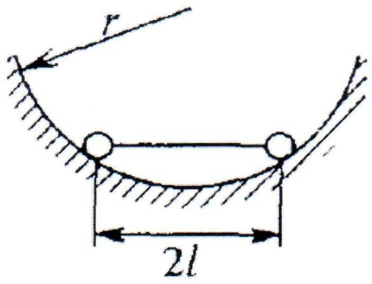
$$\approx mg = P$$

$$\Rightarrow F_п = 2P$$

5.22. Гантель длины $2l$ скользит без трения по сферической поверхности радиуса r (рис.). Гантель представляет собой две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении:

а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении;

б) в плоскости рисунка.



Решение.

а) При движении в перпендикулярном плоскости рисунка направлении задача сводится к колебаниям центра масс – матем. маятник

$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, где $a = \sqrt{r^2 - l^2}$.

б) Сместим центр гантели на малый угол φ.

$E_к = 2 \cdot \frac{m\dot{x}^2}{2} = m\dot{x}^2 = mr^2\dot{\varphi}^2$

$E_п = 2mg\,a(1-\cos\varphi) \approx 2mga\frac{\varphi^2}{2} = mga\varphi^2$

$E_к + E_п = const \Rightarrow mr^2\dot{\varphi}^2 + mga\varphi^2 = const$

$mr^2 \cdot 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \cancel{2}mga \cdot 2\varphi\dot{\varphi} = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{ga}{r^2}\varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{ga}{r^2}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{\sqrt{ga}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{g\sqrt{r^2-l^2}}}$

5.43. Найти частоту малых колебаний шарика массы m, подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т.е. $F = k(l - l_0)^2$, где l_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии.

Решение.

Точка равновесия: $mg = k(\Delta L_0)^2 \Rightarrow L_0 = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/2}$

Сдвинем шарик на малое расстояние x:

$$m\ddot{x} = -k(\Delta L_0 + x)^2 + mg = -k(\Delta L_0)^2 + mg -$$

$$- kx(2\Delta L_0 + x) = -kx(2\Delta L_0 + x)$$

$$x \ll \Delta L_0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k\Delta L_0}{m} x = 0$$

$$\omega = \left(\frac{4k}{m} g^2\right)^{1/4}$$