Семинар 7

Кинематические эффекты теории относительности. Преобразования Лоренца.

10. Две частицы летят вдоль прямой со скоростью v=0,99c относительно лабораторной системы. Неподвижный детектор регистрирует эти частицы интервалом Δt=10^{-4} с. Найти расстояние между частицами в их системе отсчёта. *Ответ*: $l \approx 2{,}1 \cdot 10^5$ м.

Решение.

В лабораторной системе отсчёта (ЛСО):

$$l = v\Delta t = \beta c \Delta t, \text{ где } \beta = \frac{v}{c} = 0{,}99.$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-0{,}99^2)^{-1/2} = (0{,}01 \cdot 1{,}99)^{-1/2} \approx 7{,}1.$$

$$l' = \gamma l = \gamma \beta c \Delta t = 7{,}1 \cdot 0{,}99 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \cdot 10^{-4} с \approx 2{,}1 \cdot 10^5 м.$$

11. Две частицы, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и находившиеся исходно на расстоянии L в лабораторной системе, столкнулись через время $t = L/c$ по лабораторным часам. Найти их относительную скорость. *Ответ*: 0,8 c.

Решение.

В лабораторной системе отсчёта:

$$\Delta t = \frac{L_0}{2v} = \frac{L_0}{c} \Rightarrow v = \frac{c}{2}$$

Сложение скоростей по Лоренцу:

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v_x' v}{c^2}} \Rightarrow v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}$$

$$v_x = -v \Rightarrow v_x' = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$|v_x'| = \frac{2 \cdot \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = 0{,}8\ c.$$

8.4. Две линейки, собственная длина каждой из которых равна l_0, движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x с релятивистскими скоростями. Наблюдатель, связанный с одной из них, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов линеек прошло время τ. Какова относительная скорость линеек?

Решение.

В системе K':

-левый стержень – скорость 0, длина l_0

-правый стержень – скорость v_x', длина $l' = l_0/\gamma$

Время между совпадениями концов:

$$\tau = \frac{l_0 + l'}{v_x'} = \frac{l_0 + l_0/\gamma}{v_x'} = \frac{l_0}{v_x'}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\tau v_x'}{l_0} - 1$$

По определению: $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v_x'^2}{c^2}}$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v_x'^2}{c^2} = \left(\frac{\tau v_x'}{l_0} - 1\right)^2 = \left(\frac{\tau v_x'}{l_0}\right)^2 - 2\frac{\tau v_x'}{l_0} + 1$$

$$\Rightarrow v_x' = \frac{2\tau l_0}{\frac{l_0^2}{c^2} + \tau^2}$$

8.79. Тонкий стержень пролетает с большой скоростью мимо метки, помещенной в лабораторной системе отсчета *K*. Известно, что промежуток времени прохождения концов стержня мимо метки составил $\Delta t = 3$ нс в системе *K* и $\Delta t' = 5$ нс в системе отсчета *K*', связанной со стержнем. Определить собственную длину стержня, т.е. длину в системе *K*'.

Решение.

В разных системах отсчёта интервал между событиями является инвариантом:

$$S_{AB}^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 = inv$$

В ЛСО: $S^2 = (c\Delta t)^2$

В движ. СО: $S'^2 = (c\Delta t')^2 - \ell_0^2$

$S = S' \Rightarrow \ell_0 = [(c\Delta t')^2 - (c\Delta t)^2]^{1/2} = 4$ св.нс $\approx 1{,}2$ м.

8.30. Вслед космическому кораблю, удаляющемуся от Земли со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$, каждую секунду посылают сигналы точного времени. Какое время между поступлением двух сигналов будет проходить по корабельным часам?

Решение.

Пусть $T_1 = T'$ – интервал времени, через который получают сигналы на корабле, по часам K'

T_0 – интервал по собств. времени наблюдателя ~~(ИСО)~~.

Интервал: $T_1 = T + \frac{\upsilon T_1}{c}$ удаление корабля.

$$\Rightarrow T_1 = \frac{T}{1-\upsilon/c}.$$

Собств. время наблюдателя:

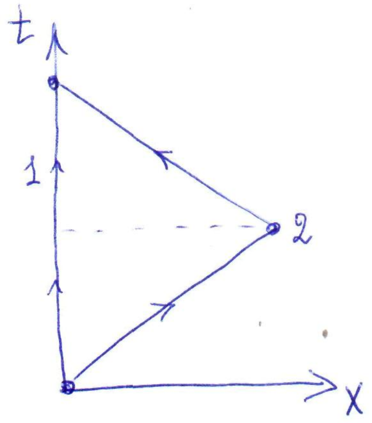
$$T_0 = \frac{T_1}{\gamma} = \cancel{\frac{T_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}} = T_1\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = T\,\frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}} =$$

$$= T\sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} = 1\text{ сек}\sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}} = 3\text{ сек}.$$

(Эффект Доплера в СТО).

8.77. Близнецы Петр и Павел расстались в тот день, когда им исполнилось по 21 году. Петр отправился в направлении оси *x* на 7 лет своего времени со скоростью 24/25 скорости света, после чего сменил скорость на обратную и за 7 лет вернулся назад, тогда ка Павел оставался на Земле. Определить возраст близнецов в момент их встречи.

Решение.



СТО не применима для систем, движущихся с ускорением!

$$(ds')^2 = (c\,dt')^2$$

$$(ds)^2 = (c\,dt)^2 - (dx)^2$$

$$ds = ds'$$

$$\Rightarrow dt' = dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}$$

Пренебрежем участками пути с ускорением: $v = const$.

$$\Rightarrow \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \left(\Delta t' = \int dt'\right).$$

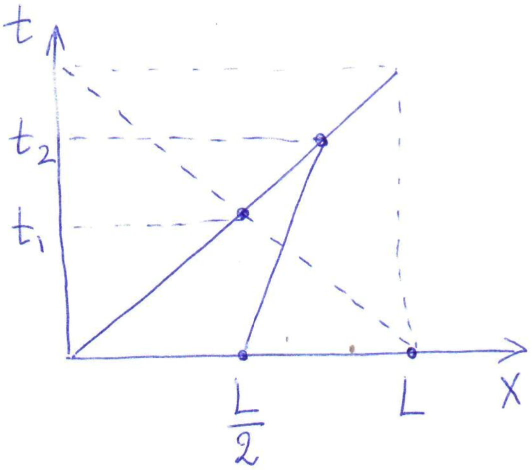
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{7\text{ лет}}{\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}} = \frac{7\text{ лет}}{\sqrt{\frac{49}{625}}} = 25\text{ лет.}$$

Петр: $21+7+7 = 35$ лет.

Павел: $21+25+25 = 71$ год.

8.7. Космический корабль летит со скоростью $V = 0{,}6c$ от одного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за 2 месяца.

Решение.



$$(c+v)t_1 = \frac{L}{2}$$

$$(c-v)t_2 = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{Lv}{c^2 - v^2}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{Lv}{c^2-v^2}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{Lv}{c\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{t_м v}{\sqrt{c^2-v^2}} =$$

$$= \frac{2\ \text{месяца}\cdot 0{,}6c}{\sqrt{c^2-(0{,}6c)^2}} \approx 1{,}5\ \text{месяца}.$$