Семинар 4

Динамика систем. Работа и энергия.

5. Тонкий однородный стержень раскрутили вокруг одного из концов. С какой силой действует стержень на ось вращения, если сила натяжения в его середине равна 12 Н? *Ответ*: 16 Н.

Решение.

Пусть L – длина стержня, m – масса, ω – угловая скорость вращения.

Центробежная сила:

$$dF = dm \cdot a_{цб} = dm \cdot \omega^2 x = m\frac{dx}{L} \cdot \omega^2 x = \frac{m\omega^2}{L} x\,dx$$

Весь стержень:

$$F_x = \int_0^L \frac{m\omega^2}{L} x\,dx = \frac{m\omega^2}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{m}{2}\omega^2 L$$

Половина стержня:

$$F_y = \int_{L/2}^{L} \frac{m\omega^2}{L} x\,dx = \frac{m\omega^2}{L}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{(L/2)^2}{2}\right) = \frac{3}{8} m\omega^2 L$$

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{1/2}{3/8} = \frac{4}{3} \Rightarrow F_x = \frac{4}{3} F_y = \frac{4}{3} \cdot 12 H = 16\ H.$$

6. Груз, висящий на лёгкой пружине жёсткостью k = 400 Н/м, растягивает её на Δx_0 = 2 см. Какую работу надо затратить, чтобы утроить удлинение пружины (Δx_1= 6 см), прикладывая к грузу вертикальную силу? *Ответ*: 0,32 Дж.

Решение.

Физика: часть энергии на растяжение пружины компенсируется опусканием груза в однородном поле тяжести.

$$E_п = \frac{k\Delta x^2}{2} - mg\cdot\Delta x$$

$$A = E_{п1} - E_{п0} = \frac{k\Delta x_1^2}{2} - \frac{k\Delta x_0^2}{2} - mg(\Delta x_1 - \Delta x_0)$$

$$mg = k\Delta x_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{k}{2}(\Delta x_1 - \Delta x_0)(\Delta x_1 + \Delta x_0) - k\Delta x_0(\Delta x_1 - \Delta x_0) =$$

$$= 0{,}32 \text{ Дж.}$$

7. В одной из моделей потенциальная энергия взаимодействия двух молекул равна $U=U_0[(a/r)^{12}-(a/r)^6]$ (потенциал Леннарда–Джонса), где $U_0>0$, $a = 4$ нм, r – расстояние между молекулами. Найти расстояние r_0, при котором сила взаимодействия молекул равна нулю. *Ответ*: 4,5 нм.

Решение.

Сила взаимодействия молекул:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$U = U(r) \Rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(U_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^6\right]\right) =$$

$$= -U_0\left[a^{12}(-12r^{-13}) - a^6(-6r^{-7})\right] = 0$$

(точка равновесия)

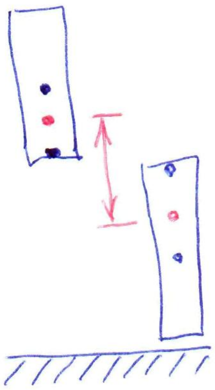
$$a^6 \cdot 6r^{-7} = a^{12} \cdot 12r^{-13}$$

$$r^6 = a^6 \cdot 2 \Rightarrow r_x = a\sqrt[6]{2} \approx 4{,}5 \text{ нм.}$$

4.25. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

Решение.

Физика: муха находится не в вакууме, а в воздухе, и через него взаимодействует с пробиркой.



Центр масс системы "муха + пробирка" за время падения смещается на L/2.

$$\frac{L}{2} = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}$$

4.47. Брусок 1 лежит на таком же бруске 2 (рис. 65). Оба они как целое скользят по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и сталкиваются с аналогичным покоящимся бруском 3. Удар бруска 2 о брусок 3 абсолютно неупругий (бруски 2 и 3 слипаются, рис. 65). Чему равна длина брусков l, если известно, что брусок 1 прекратил свое движение относительно брусков 2 и 3 из-за трения после того, как он полностью переместился с 2 на 3? Коэффициент трения между брусками 1 и 3 равен k. Трением о поверхность, а также между брусками 1 и 2 пренебречь.

Решение.

1) Столкновение брусков 2 и 3:

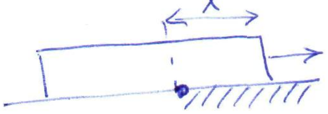
$$mv_0 = 2m\cdot v \Rightarrow v = v_0/2$$

2) Конечная скорость системы после торможения бруска 1: $2mv_0 = 3mv_k \Rightarrow v_k = \frac{2}{3}v_0$

Изменение кинетической энергии равно работе сил трения:

$$\Delta E_k = \underbrace{\frac{mv_0^2}{2}}_{\text{бр.1}} + \underbrace{\frac{2m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}_{\text{бр.2 и 3}} - \frac{3m}{2}\left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}mv_0^2$$

3) Работа сил трения:



$$F_{тр} = k\cdot m\frac{x}{L}\cdot g$$

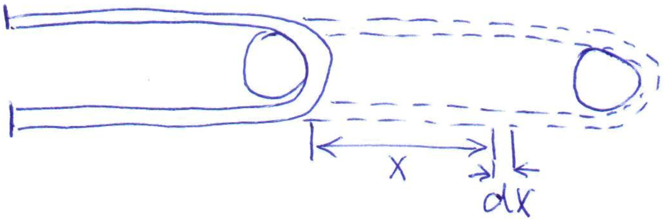
$$A_{тр} = \int_0^L F_{тр}\,dx = \int_0^L \frac{kmg}{L}x\,dx = \frac{kmgL}{2}$$

$$A_{тр} = \Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2}kmgL = \frac{1}{12}mv_0^2$$

$$L = \frac{v_0^2}{6kg}$$

4.52. Мальчик стреляет из рогатки. Он растягивает резину вдвое, доведя усилие до $F_0 = 10$ Н. Определить скорость камешка массой $m = 10$ г, если длина резинки $2l = 20$ см, а ее масса $M = 30$ г.

Решение.



$$W_к = W_р$$

1) Кинетическая энергия: $W_{к1} = \frac{m\upsilon^2}{2}$ (камень)

Разные учаски резины имеют разную скорость!

$$W_{к2} = \frac{1}{2}\int_0^L \upsilon_x^2\, dm(x) = \frac{1}{2}\int_0^L \underbrace{\left(\upsilon\frac{x}{L}\right)^2}_{\text{линейное поле скоростей}}\left(\frac{M}{L}dx\right) =$$

$$= \frac{M\upsilon^2}{2L^3}\int_0^L x^2 dx = \frac{M\upsilon^2}{6}$$

$$W_к = W_{к1} + W_{к2} = \left(m + \frac{M}{3}\right)\frac{\upsilon^2}{2}$$

2) Сила растяжения: $F(x) = F_0\frac{x}{L}$

Потенциальная энергия:

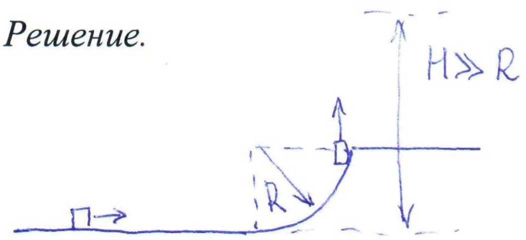
$$W_п = \int_0^L F(x)dx = \int_0^L F_0\frac{x}{L}dx = \frac{F_0}{L}\cdot\frac{L^2}{2} = \frac{F_0 L}{2}$$

3) $W_к = W_п \Rightarrow \left(m + \frac{M}{3}\right)\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{F_0 L}{2}$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{F_0 L}{m + \frac{M}{3}}} = \sqrt{\frac{10\,Н \cdot 0{,}1\,м}{(10+10)\cdot 10^{-3}\,кг}} = 10\ м/с.$$

4.125. Небольшое тело, скользящее по горизонтальной поверхности, наезжает на расположенное в горизонтальной плоскости закругление (рис.), после чего тело подлетает вертикально вверх. Определить величину коэффициента трения μ тела о закругление, если это трение уменьшает высоту максимального подъема тела на 12%. Считать, что радиус закругления мал по сравнению с высотой подъема, а размер тела много меньше радиуса закругления.

Решение.



$$\frac{H_\mu}{H_0} = 0{,}88$$

При движении по окружности действует центробежная сила! $N \doteq \frac{mv^2}{R} + \cancel{mg\cos\varphi} \approx \frac{mv^2}{R}$

$$F_{тр} = \mu N = \mu \frac{mv^2}{R}$$

$$dA_{тр} = F_{тр} \cdot R d\varphi = \mu \frac{mv^2}{R} \cdot R d\varphi = \mu m v^2 d\varphi$$

Трение уменьшает кинетическую энергию тела!

$$dA_{тр} = -dK = -mv\,dv$$

$$\Rightarrow \mu v\, d\varphi = -dv \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\mu \int_0^{\pi/2} d\varphi$$

$$v^2 = v_0^2 \exp\left(-\mu \frac{\pi}{2} \cdot 2\right) = v_0^2 \exp(-\mu\pi)$$

$$H(\mu) = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \exp(-\mu\pi)$$

$$H_0 = v_0^2/2g \Rightarrow \exp(-\mu\pi) = 0{,}88$$

$$\mu \doteq 0{,}04.$$