Семинар 3

Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

4. Ракета массой M = 6 т установлена для запуска по вертикали. При скорости истечения газов $u = 3$ км/с найти расход топлива μ, необходимый для того, чтобы обеспечить тягу, достаточную для придания ракете начального ускорения a = $2g$ вверх. *Ответ*: 59 кг/с.

Решение.

Уравнение Мещерского:

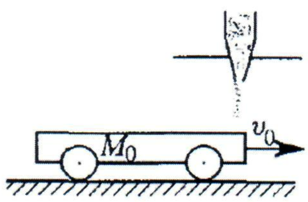
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Проекция на вертикальную ось:

$$Ma = -Mg + (-u)(-\mu) = -Mg + \mu u$$

$$\mu = \frac{M(a+g)}{u} = \frac{3Mg}{u} \approx 59 \text{ кг/с}.$$

3.2. Платформа длины L катится без трения со скоростью v_0 (рис. 40). В момент времени $t = 0$ она поступает к пункту погрузки песка, который высыпается со скоростью μ [кг/с]. Какое количество песка будет на платформе, когда она минует пункт погрузки? Масса платформы равна M_0.



Решение.

По горизонт. оси: $\sum F_x = 0 \Rightarrow p_x = const$

$$\mu = \frac{dm}{dt}, \quad m(0) = m_0 \Rightarrow m(t) = m_0 + \mu t$$

$$mv = m_0 v_0 \Rightarrow v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \mu t} = v_0 \left(1 + \frac{\mu}{m_0} t\right)^{-1}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int_0^t v(\xi) d\xi = \int_0^t v_0 \left(1 + \frac{\mu}{m_0}\xi\right)^{-1} d\xi =$$

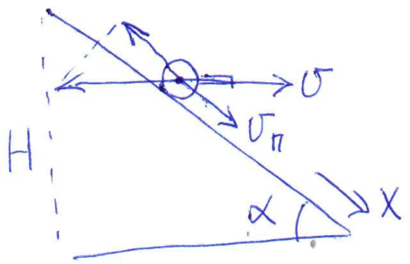
$$= \frac{v_0 m_0}{\mu} \ln\left(1 + \frac{\mu}{m_0} t\right) \Rightarrow L = \frac{v_0 m_0}{\mu} \ln \frac{m}{m_0}$$

$$m = m_0 \exp\left(\frac{\mu L}{m_0 v_0}\right)$$

$$m - m_0 = m_0 \left[\exp\left(\frac{\mu L}{m_0 v_0}\right) - 1\right]$$

4.10. Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость υ снаряда для того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость υ снаряда через его массу m, массу пушки M и угол α наклона плоскости к горизонту. Учесть, что $m << M$.

Решение.



Скорость пушки:

$$\frac{M\upsilon_п^2}{2} = MgH = Mgl\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \upsilon_п = \sqrt{2gl\sin\alpha}$$

При выстреле вдоль оси x:

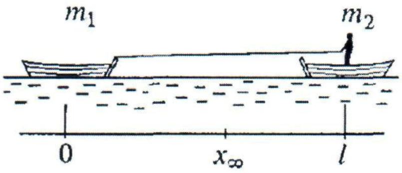
$$P_{снаряда} + M\upsilon_п = m\upsilon\cos\alpha + \underline{\underline{0}}$$

$$m << M \Rightarrow P_{снаряда} \approx 0$$

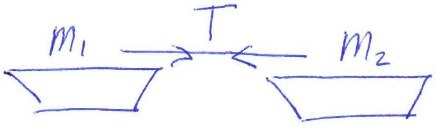
$$\Rightarrow \upsilon = \frac{M\upsilon_п}{m\cos\alpha} = \frac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cdot\cos\alpha}$$

! Импульс силы тяжести, действующий на оба тела, за короткий промежуток времени выстрела пренебрежимо мал.

4.13. Человек, стоящий в лодке, подтягивает вторую лодку за веревку до их соприкосновения и далее удерживает их вместе (рис. 50). Где будут находиться обе лодки, когда их движение в результате трения о воду прекратится? Трение лодок о воду считать пропорциональным их скорости и одинаковым для обеих лодок, массы лодок m_1 и m_2, начальное расстояние между центрами их масс l.



Решение.



Центр тяжести будет смещаться за счёт сил трения

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = T - k\dot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -T - k\dot{x}_2 \end{cases}$$

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + k(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0$$

$$m_1\dot{x}_1\Big|_0^\infty + m_2\dot{x}_2\Big|_0^\infty + k(x_1 + x_2)\Big|_0^\infty = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(\infty) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2(\infty) = 0$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad x_1(\infty) = x_2(\infty) = x_\infty$$

$$\Rightarrow 2x_\infty - l = 0 \quad \Rightarrow \quad x_\infty = l/2.$$

3.11. По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. На тележки падает μ [г/с] снега. В момент времени $t = 0$ массы тележек равны m_0, а скорости — υ_0. Начиная с момента $t = 0$, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса ее в дальнейшем останется постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

Решение.

1) Для тележки с работающим дворником:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = const$$

$$m_0 \upsilon = m_0(\upsilon + d\upsilon) + \mu dt \cdot \upsilon$$

$$m_0 d\upsilon + \mu \upsilon dt = 0$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{\mu}{m_0} dt$$

$$\Rightarrow \upsilon_I = \upsilon_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m_0} t\right)$$

2) Для ленивого дворника

$$m = m_0 + \mu t$$

$$m_0 \upsilon_0 = m\upsilon = (m_0 + \mu t)\upsilon$$

$$\upsilon_{II} = \upsilon_0 \frac{1}{m_0 + \mu t} > \upsilon_I \text{ при больших } t. \text{ Почему?}$$

3) I тележка остановится через

$$x_I = 0 + \int_0^t \upsilon_I(\xi)d\xi = \upsilon_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{\mu}{m_0}\xi\right)d\xi = \frac{m_0 \upsilon_0}{\mu}$$

3.60. Какой максимальной высоты h_1 достигнет ракета, поднимающаяся вертикально вверх? Расход топлива во время работы двигателя $\tau = 50$ с остается постоянным. Скорость истечения газов относительно ракеты также постоянная и равна $u = 1000$ м/с. Отношение массы ракеты с топливом к конечной массе ракеты $\alpha = 10$. Ускорение силы тяжести принять постоянным и равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать. На какую высоту h_2 поднялась бы ракета, если бы топливо сгорело очень быстро ($\tau \to 0$)? Почему $h_1 \neq h_2$?

Указание: $\int \ln x dx = x \ln x - x + const$

Решение.

h_τ – работа двигателя, h_g – свободный подъем

1) $m d\vec{v} = \vec{u} dm + \vec{F} dt \Rightarrow dv = -u \dfrac{dm}{m} - g dt$

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m} - gt \quad (1)$$

Постоянный расход топлива: $m = m_0 - \mu t$

$$\frac{dx}{dt} = v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt = -u \ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t\right) - gt$$

$$\int \ln z dz = z \ln z - z + C$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{u m_0}{\mu}\left[\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) \ln\left(1 - \frac{\mu t}{m_0}\right) + \frac{\mu t}{m_0}\right] - \frac{g t^2}{2} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{m_0}{m} \Rightarrow m = \frac{m_0}{\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{m_0 - m}{\tau} = \frac{m_0(\alpha - 1)}{\alpha \tau}$$

$$\frac{\mu \tau}{m_0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \Rightarrow h_\tau = x(\tau) = u\tau\left(1 - \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) - \frac{g \tau^2}{2}$$

2) $(1) \Rightarrow v_\tau = u \ln \alpha - g\tau \underline{> 0} \Rightarrow h_g = \dfrac{v_\tau^2}{2g}$

$$h_1 = h_\tau + h_g \approx 187 \text{ км}$$

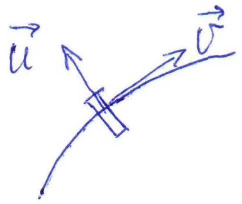
3) Быстрый разгон: $F dt \approx 0 \Rightarrow dv = -u \dfrac{dm}{m}$

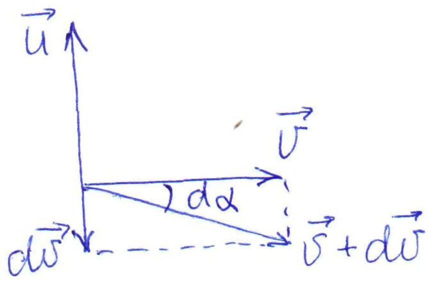
$$v_{разг} = u \ln \alpha$$

$$h_2 = \frac{v_{разг}^2}{2g} \simeq 265 \text{ км}.$$ Почему?

3.43. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

Решение.





1) При повороте: $m d\vec{v} = \vec{u}\,dm + \vec{F}dt$

Внешних сил нет: $\vec{F} = 0$

Проекции на оси: $dv_\tau = 0$, $m\,dv_n + u\,dm = 0$.

$d\alpha = \frac{dv_n}{v} = -\frac{u}{v}\frac{dm}{m}$ $(\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ при $\alpha \ll 1)$

$\alpha = -\frac{u}{v}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \frac{u}{v}\ln\frac{m_0}{m}$

При развороте $\alpha = \pi \Rightarrow \ln\frac{m_0}{m_\text{р}} = \frac{\pi v}{u}$

2) При торможении и разгоне

$m\,dv = -u\,dm \Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}dv$

$\ln\frac{m_0}{m_{\cancel{\text{р}}\text{т}}} = \frac{v-(-v)}{u} = \frac{2v}{u} < \frac{\pi v}{u} \Rightarrow m_\text{р} < m_\text{т}$