

30. Оценить коэффициент диффузии капль тумана радиусом $R \sim 10$ мкм в воздухе при нормальных условиях. Вязкость воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ: 10^{-8} см²/с.

Решение.

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta R} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 298 \text{ К}}{6\pi \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot 10^{-5} \text{ м}} \approx 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = 10^{-8} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

31. Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda \sim 10^{-5}$ см.

Ответ: 10^2 с.

Решение.

3-х мерный случай:

$$\langle r^2 \rangle = 6Dt = 6t \cdot \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle = 2\lambda \langle v \rangle t$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 298 \text{ К}}{\pi \cdot 27 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} \approx 483 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$t = \frac{\langle r^2 \rangle}{2\lambda \langle v \rangle} = \frac{(10 \text{ см})^2}{2 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot 4,83 \cdot 10^4 \text{ см/с}} \approx 10^2 \text{ с}.$$

10.30. Оценить глубину промерзания почвы на широте Москвы за бесснежную зиму (~120 суток). Теплопроводность грунта принять $\chi \sim 1$ Вт/(м·К), его теплоемкость $c \sim 10^6$ Дж/(м³·К).

Решение.

Тепловой поток: $q = -\chi \frac{dT}{dx} \approx -\chi \frac{\Delta T}{h}$

$$dQ = q S dt = c S dh \cdot \Delta T$$

$$\chi \Delta T \cdot dt = c h dh \cdot \Delta T$$

$$\chi dt = c h dh$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{2 \chi \tau}{c} \Rightarrow h \approx 3 \text{ м.}$$

10.106. Найти время испарения воды из трубки длины $l = 10$ см, запаянной с одного конца. Температура $t = 27^\circ\text{C}$. Первоначально вода заполняла трубку наполовину; относительная влажность воздуха 50%. Давление насыщенных паров при температуре 27°C $P_n = 20$ Тор. Длина свободного пробега λ в системе воздух-пар порядка 10^{-5} см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

Решение.

Число частиц через единицу площади поверхности в единицу времени:

$$j = -D \frac{dn}{dx} \approx -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \cdot \frac{P_{\text{нас}}(1-\varphi)}{x}$$

Масса испарившейся воды:

$$dm = j S dt \cdot \frac{\mu}{N_A}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{j S \mu}{N_A} = -\frac{\lambda \langle v \rangle P_{\text{нас}}(1-\varphi) S \mu}{3 N_A x}$$

$$dm = -S \rho dx \Rightarrow \rho \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda \langle v \rangle P_{\text{нас}}(1-\varphi) S \mu}{3 N_A} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{x} \Rightarrow x dx = A dt \Rightarrow \left. \frac{x^2}{2} \right|_{\ell/2}^{\ell} = A t$$

$$t = \frac{3 \ell^2}{8 A} = \frac{3 \ell^2 \cdot 3 \rho N_A}{8 \lambda \langle v \rangle P_{\text{нас}}(1-\varphi) \mu}$$

$$\frac{P_{\text{нас}}}{N} = \frac{P_{\text{нас}}}{RT}, \quad 1-\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{9 R T \rho \ell^2}{4 \lambda \langle v \rangle P_{\text{нас}} \mu} \approx 227 \text{ гней.}$$

10.92. Капелька масла массы $m = 10^{-10}$ г падает в воздухе с высоты $h = 1$ м, совершая при этом броуновское движение. Предполагая, что к ее падению применима формула Стокса, найти средний квадрат $\langle r^2 \rangle$ отклонения капельки от ожидаемой точки падения, если температура воздуха $T = 300$ К. Проверить, выполняются ли условия применимости формулы Стокса, если плотность масла $\rho = 0,9$ г/см³, а вязкость воздуха $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ дин·с/см².

Решение.

Время падения капли: $t = \frac{H}{u}$, где u — подвижность.

$$u = BF$$

$$\Rightarrow B = \frac{u}{F} = \frac{a\tau}{2F} = \frac{\tau}{2m} = \frac{1}{2m\nu} = \frac{1\nu}{2m\nu^2} = \frac{1\nu}{4} \cdot \frac{2}{m\nu^2} = \frac{D}{kT}$$

$$\langle r^2 \rangle = 4Dt = 4D \cdot \frac{H}{BF} = 4DH \cdot \frac{H}{mg} \cdot \frac{kT}{D} = \frac{4H \cdot kT}{mg}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ см}$$

Проверим применимость модели Стокса:

1) Радиус капельки:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ см} \gg \lambda = 10^{-5} \text{ см.}$$

2) Число Рейнольдса:

$$mg = 6\pi\eta r\nu \Rightarrow r\nu = \frac{mg}{6\pi\eta}$$

$$Re = \frac{\rho\nu r}{\eta} = \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{mg}{6\pi\eta} = \frac{mg\rho}{6\pi\eta^2} \approx 0,15 \ll 1$$

Т3. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые $\tau = 4$ с на расстояние $\lambda = 0,5$ м в случайном направлении. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положения $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle}$ за $t = 1$ час и определить коэффициент диффузии D толпы пьяных матросов, не взаимодействующих между собой.

Решение.

Скорость смещения в сторону: $\langle v \rangle = \frac{\lambda}{\tau}$

Коэффициент диффузии:

$$D = \lambda \langle v \rangle = \frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{(0,5 \text{ м})^2}{4 \text{ с}} \approx 0,06 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Среднеквадратичное смещение:

$$\langle (\Delta r)^2 \rangle = 4Dt$$

$$\sqrt{\langle (\Delta r)^2 \rangle} = \sqrt{4Dt} = \sqrt{4 \frac{\lambda^2}{\tau} t} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot \frac{(0,5 \text{ м})^2}{4 \text{ с}} \cdot 3600 \text{ с}} = \sqrt{900 \text{ м}^2} = 30 \text{ м.}$$