Семинар 15

Элементы теории упругости. Гидростатика.

25. Два троса с сечениями S_1 и $S_2 = 2S_1$ и одинаковой длины имеют модули Юнга E_1 и $E_2 = 2E_1$. Найти отношение их энергий деформации при одинаковой нагрузке.
Ответ: $W_1 / W_2 = 8$.

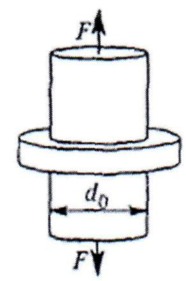
Решение.

$$W = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{ES}{2l}(\varepsilon l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2}V$$

$$w = \frac{W}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{F^2}{2ES^2}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} = 8$$

13.17. На вертикально расположенный резиновый жгут диаметра d_0 насажено легкое стальное кольцо слегка меньшего диаметра $d<d_0$ (рис.). Считая известным модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ для резины, определить с каким усилием F нужно растягивать жгут, чтобы кольцо с него соскочило. В расчетах весом резинового жгута пренебречь.



Решение.

Коэффициент Пуассона: $\varepsilon_{yy} = -\mu\, \varepsilon_{xx}$

(при растяжении жгута его радиус уменьшается)

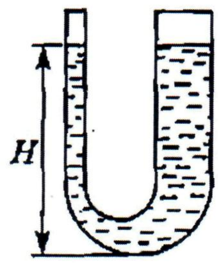
Закон Гука: $\sigma_{xx} = E\, \varepsilon_{xx}$

$$F = \sigma_{xx} S = E \frac{\Delta l}{l} S = E \frac{\Delta d}{d\mu} S = E \frac{d_0 - d}{d_0 \mu} \cdot \frac{\pi d_0^2}{4} =$$

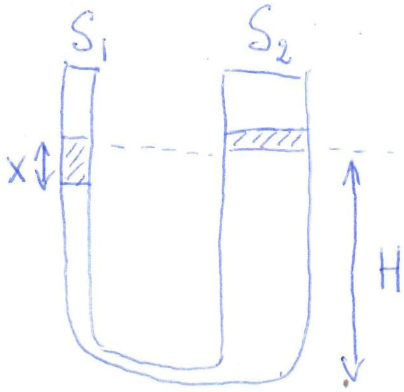
$$= \frac{\pi d_0}{4\mu} E (d_0 - d)$$

? Может ли быть $\mu < 0$?

14.3. U-образная трубка, которая имеет колена разных сечений (рис), залита жидкостью до высоты H от нижнего сочленения. Найти период малых колебаний уровней жидкости. Вязкостью пренебречь. Поперечные размеры трубки малы по сравнению с H.



Решение.



S_1 и S_2 – площади сечений

Если в S_1 уровень понизится на x, то в S_2 уровень повысится на $x\frac{S_1}{S_2}$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\rho(S_1+S_2)H\ddot{x} = -\rho S_2\left(x + x\frac{S_1}{S_2}\right)g$$

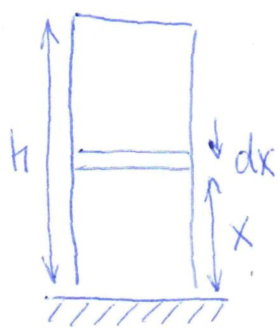
$$\rho(S_1+S_2)H\ddot{x} = -\rho g x(S_1+S_2)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{H}x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$$

13.7. Резиновый цилиндр с высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

Решение.



1) Сила тяжести, действующая на слой dx: $F = m\frac{h-x}{h}g = mg\left(1-\frac{x}{h}\right)$

$$\frac{d(\Delta l)}{dx} = \frac{F}{SE} = \frac{mg}{SE}\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

$$\Delta l = \frac{mg}{SE}\int_0^h\left(1-\frac{x}{h}\right)dx = \frac{mgh}{2SE}$$

Энергия упругой деформации:

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E}dV = \frac{\sigma^2}{2E}(Sdx) = \frac{F^2}{2ES}dx = \frac{m^2g^2}{2ES}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2dx$$

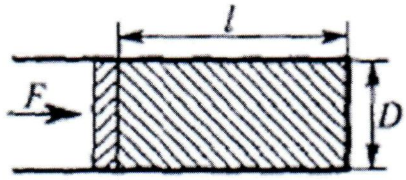
$$U = \frac{m^2g^2h}{6ES}$$

2) Стержень сверху: $F = mg + m\frac{h-x}{h}g = mg\left(2-\frac{x}{h}\right)$

$$dU = \frac{F^2}{2ES}dx = \frac{m^2g^2}{2ES}\left(2-\frac{x}{h}\right)^2dx$$

$$U = \frac{7m^2g^2h}{6ES}$$

13.16. Однородный круглый резиновый жгут длины l и диаметра D помещен в стальную трубку с закрытым концом того же диаметра (рис.). На конец жгута со стороны открытого конца трубки начинает действовать сила F, равномерно распределенная по всему сечению жгута. На сколько уменьшится при этом длина жгута? Упругие свойства резины считать известными.



Решение.

Отличие от свободного сжатия – действуют силы со стороны стен (yy и zz)

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})\right] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \end{cases}$$

Решим систему относ. σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}:

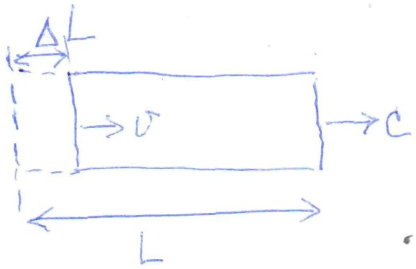
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E'\left[\varepsilon_{xx} + (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\mu/(1-\mu)\right] \\ \sigma_{yy} = E'\left[\varepsilon_{yy} + (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx})\mu/(1-\mu)\right] \\ \sigma_{zz} = E'\left[\varepsilon_{zz} + (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\mu/(1-\mu)\right] \end{cases}$$

где $E' = E\dfrac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \Rightarrow -1 < \mu < 1/2$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E'} = \frac{F}{SE}\,\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu}$$

13.39. Два одинаковых тонких стальных бруска длиной l = 10 см (ρ = 7,8 г/см^3, $E = 2\cdot10^{12}$ дин/см^2) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время столкновения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет T_y = 200 Н/мм^2?

Решение.



c – скорость движения волны

v – скорость движения вещества

$t = \frac{L}{c}$ – прохождение волной длины стержня

$\Rightarrow \Delta L = vt = v\frac{L}{c}$ – смещение торца

Деформация: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{v}{c}$

По закону Гука: $\sigma = E\varepsilon = E\frac{v}{c}$ (1)

$\Delta p = F\Delta t = \sigma S\Delta t = mv = \rho c\Delta t\cdot S v$

$\Rightarrow \sigma = \rho c v$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $c = \sqrt{E/\rho}$

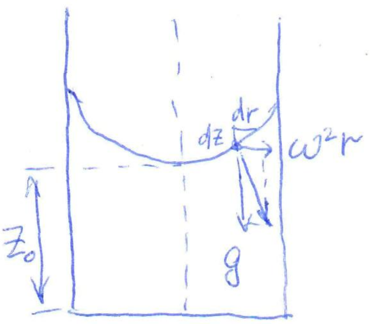
$T = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} = 4\cdot10^{-5}$ с.

За волнами вещество становится неподвижным, давление возрастает до $p = \sigma = E\frac{v}{c} = T_y$

Отсюда $v = \frac{cT_y}{E} \approx 5$ м/с.

14.16. Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью со вокруг вертикальной оси Z в цилиндрическом сосуде.

Решение.



Наклон поверхности жидкости определяется отношением центробежной силы к силе тяжести!

$$\frac{dz}{dr} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}, \quad z(0) = z_0.$$

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$$

$$z(r) = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$