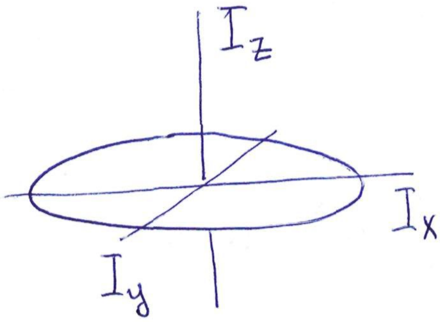
Семинар 10

Вращение вокруг неподвижной оси, вычисление моментов инерции.

14. Вычислить момент инерции I однородного диска массы m и радиусом R относительно оси вращения, проходящей в плоскости диска по его диаметру.
Ответ: $mR^2/4$.

Решение.



1) Вдоль оси I_z:

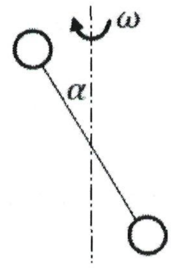
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

2) Для плоского тела: $I_x + I_y = I_z$

$$I_x = I_y \Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m R^2$$

15. Два маленьких шарика массы m каждый, закрепленных на лёгкой штанге длины l, вращаются с угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси, проходящей через центр штанги под углом α к ней. Найти направление и модуль вектора момента импульса системы в произвольный момент времени.



Ответ: $L = \frac{1}{2} m\omega l^2 \sin^2\alpha$.

Решение.

Радиус вращения шариков: $r = \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$

Момент импульса системы:

$$L = I\omega = 2mr^2 \cdot \omega = 2m\left(\frac{l}{2}\sin\alpha\right)^2\omega =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega l^2 \cdot \sin^2\alpha.$$

16. Высокая и тонкая фабричная труба треснула у основания и стала падать. Найти угловую скорость и угловое ускорение как функции угла α между трубой и вертикалью.

Ответ: $\varepsilon = \frac{3g}{2l}\sin\alpha$, $\omega = \sqrt{3\frac{g}{l}(1-\cos\alpha)}$.

Решение.

Считаем, что основание трубы не проскальзывает.

Уравнение движения: $I\varepsilon = M$

Момент силы тяжести при наклоне α:

$$M = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

Момент инерции трубы относ. неподвиж. точки:

$I = \frac{1}{3}ml^2$ (теор. Гюйгенса-Штейнера).

$$I = I_0 + ma^2$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{\frac{1}{2}mgl\sin\alpha}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g}{2l}\sin\alpha.$$

Найдем ω из закона сохранения энергии:

$$E_к + E_п = const \Rightarrow E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}$$

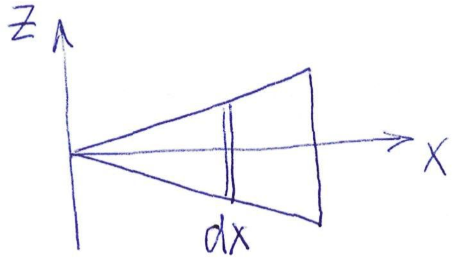
$$E_{к1} = 0,\ E_{п1} = mg\frac{l}{2},\ E_{к2} = \frac{I\omega^2}{2},\ E_{п2} = mg\frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$mg\frac{l}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + mg\frac{l}{2}\cos\alpha,\quad I = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}$$

9.1. Вычислить момент инерции I_x кругового конуса относительно оси симметрии OX; радиус основания конуса R, высота L, масса M. Вычислить также момент инерции конуса I_z относительно оси OZ, перпендикулярной OX. Точка O — вершина конуса.

Решение.



1) Относительно оси x:

момент инерции тонкого диска:

$$dI_x = dm \cdot \frac{r^2}{2} = \rho \cdot \pi r^2 dx \cdot \frac{r^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\left(\frac{R}{L}x\right)^4 dx$$

$$I_x = \int_0^L \frac{\pi\rho}{2}\frac{R^4}{L^4}x^4 dx = \frac{\pi\rho}{2}\frac{R^4}{L^4}\cdot\frac{L^5}{5} = \frac{\pi\rho R^4}{10L}$$

Масса: $M = \rho V = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 L \Rightarrow I_x = 0{,}3\, mR^2$

2) Относительно оси z: на расстоянии x

$$dI_z = dm \cdot \frac{r^2}{4} + dm \cdot x^2 \quad \text{(теор. Гюйгенса - Штейнера).}$$

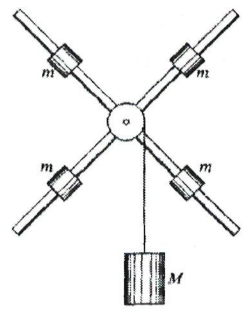
$$\Rightarrow dI_z = dm\left(\frac{r^2}{4} + x^2\right) = \rho \cdot \pi r^2 dx \cdot \left(\frac{r^2}{4} + x^2\right) =$$

$$= \rho \cdot \pi \left(\frac{R}{L}x\right)^2 dx \left(\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}x\right)^2 + x^2\right) =$$

$$= \pi\rho \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{R^2}{4L^2} + 1\right)x^4 dx$$

$$I_z = \pi\rho \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{R^2}{4L^2} + 1\right)\frac{L^5}{5} = 0{,}15\, MR^2 + 0{,}6\, ML^2.$$

9.8. К шкиву креста Обербека (рис.) прикреплена нить, к которой подвешен груз массы $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{рыв}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массы $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.



Решение.

1) При опускании груза: $I\frac{d\omega}{dt} = M_F \Rightarrow I\beta = Tr$

Поступательное движение: $Ma = Mg - T$

$$a = \beta r \Rightarrow Ia = Tr^2 \Rightarrow T = \frac{Ia}{r^2}$$

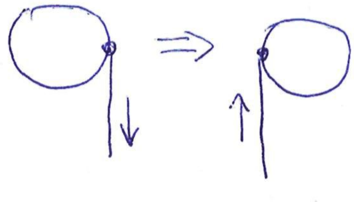
$$\left(M + \frac{I}{r^2}\right)a = Mg \Rightarrow a = \frac{Mg}{M + I/r^2}$$

2) При подъеме груза – аналогично:

$$Ma_п = T_п - Mg \Rightarrow a_п = -\frac{Mg}{M + I/r^2}, \quad T_п = T$$

Скорость груза: $v = \sqrt{2aH}$

3)



В момент рывка:

$$(T_p - Mg)\Delta t = 2Mv$$

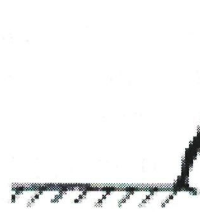
(изменение импульса)

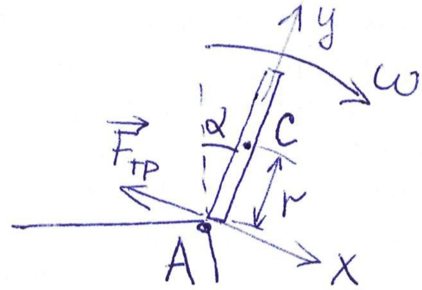
Оценка времени рывка: $\Delta t \approx \pi r / v$

$$\Rightarrow T_p = Mg + \frac{2Mv}{\Delta t} = Mg + \frac{4MgHr}{\pi(Mr^2 + I)}$$

$$I = 4mR^2$$

9.131. Оцените, сколько раз перевернется человек, падая по стойке «смирно» (рис.) с десятиметровой вышки?





Решение.

Уравнение движения относ. т. A:

$$I_A\dot{\omega} = mgr\sin\alpha, \quad I_A = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}mr^2.$$

Закон сохранения энергии:

$$mgr = \frac{1}{2}I_A\omega^2 + mgr\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_A\omega^2 = mgr(1-\cos\alpha)$$

По оси y: $m\omega^2 r + N = mg\cos\alpha$

Момент отрыва: $N=0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r}\cos\alpha$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}mr^2\cdot\frac{g}{r}\cos\alpha = mgr(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\cos\alpha = 1-\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0,6; \ \sin\alpha = 0,8.$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}\cos\alpha} = \sqrt{0,6\cdot\frac{g}{r}}$$

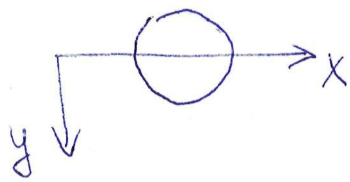
$$v_{верт(0)} = v_C\sin\alpha = \omega r\sin\alpha = 0,8\sqrt{0,6\,g/r}$$

$$h = v_{верт(0)}t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t \approx 1,3\text{ с}.$$

$$n = \frac{\omega t + \alpha}{2\pi} \approx 0,65 \text{ оборота}.$$

9.90. В лежащий на столе шар радиуса R и массы M попадает пуля массы m, летящая со скоростью υ_0 и вращающаяся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. Радиус инерции пули равен r. Пуля застревает в центре шара. Найти энергию ΔE, потерянную при проникновении пули в шар. За время проникновения пули шар не смещается.

Решение.



1) Неупругий удар при поступательном движении:

$$m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon_x \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_0 \frac{m}{m+M}$$

Потери энергии:

$$\Delta E_1 = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{(M+m)\upsilon_x^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\,\frac{M}{M+m}$$

2) Вращательное движение: $L = const$

$$I_{\text{п}}\omega_0 = (I_{\text{п}} + I_{\text{ш}})\omega \Rightarrow \omega = \omega_0 \frac{I_{\text{п}}}{I_{\text{п}} + I_{\text{ш}}}$$

$$\Delta E_2 = \frac{I_{\text{п}}\omega_0^2}{2} - \frac{(I_{\text{п}} + I_{\text{ш}})\omega^2}{2} = \frac{I_{\text{п}}\omega_0^2}{2} \cdot \frac{I_{\text{ш}}}{I_{\text{п}} + I_{\text{ш}}} =$$

$$= \frac{m r^2 \omega_0^2 I_{\text{ш}}}{2(m r^2 + I_{\text{ш}})}, \quad I_{\text{ш}} = \frac{2}{5} M R^2.$$