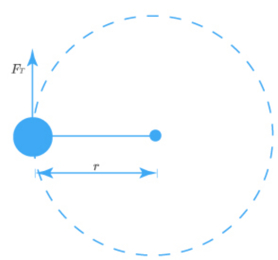
Вращение твёрдых тел вокруг неподвижной оси. 9.1, 9.8, 9.90, 9.131

ЗАДАНИЕ: 9.105, 9.126, 9.121, 9.95

1) **Момент инерции.**

Если рассмотреть массу m на конце легкого стержня (масса стержня = 0), вращающейся вокруг центральной точки,



то из второго закона Ньютона для тангенциальной силы: $F_t = m\frac{dv_t}{dt} = m(r\frac{d\omega}{dt})$. Умножая на r, получим уравнение моментов

$$M = (mr^2)\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}, \text{где}$$

I=mr^2 называется моментом инерции.

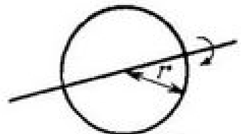
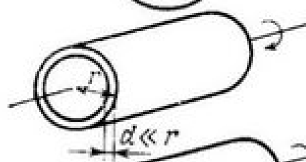
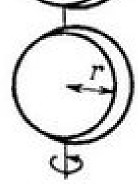
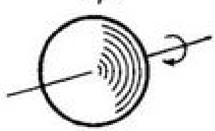
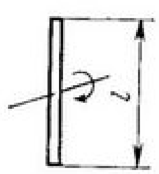
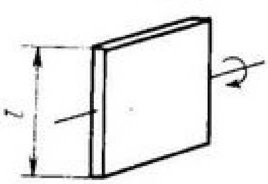
Связь момента инерции со вторым законом Ньютона заключается в том, что момент инерции занимает место массы во «вращательной» версии второго закона Ньютона. В случае твердого тела выражение для момента инерции имеет вид:

$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \rho \int r^2 dV$ при $\rho = const$;

В разных системах отсчета, которые определяются симметрией тел, элемент dV имеет вид

$$\begin{cases} dv = dxdydz & \text{—Декартова система} \\ dv = rdrd\varphi dz & \text{—цилиндрическая система} \\ dv = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi & \text{—сферическая система} \end{cases}$$

Результаты расчета для некоторых симметричных тел приведены ниже:

Тонкое кольцо		mr^2
Полый тонкостенный цилиндр		mr^2
Сплошной цилиндр		$\frac{m}{2} r^2$
Полый толстостенный цилиндр		$\frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$
Диск		$\frac{m}{2} r^2$
Диск		$\frac{m}{4} r^2$
Шар		$\frac{2m}{5} r^2$
Полая тонкостенная сфера		$\frac{2m}{3} r^2$
Тонкий стержень длиной l		$\frac{m}{12} l^2$
Четырехугольная пластина		$\frac{m}{12} l^2$

2)**Тензор инерции и главные оси.**

Тензор инерции — в механике абсолютно твёрдого тела — тензорная величина, связывающая момент импульса тела и кинетическую энергию его вращения с угловой скоростью ω:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$, , где I - тензор инерции и $\vec{L}$ - момент импульса.

Рассмотрим случай вращения твердого тела вокруг некоторой произвольной оси 00, (Рис. 1).

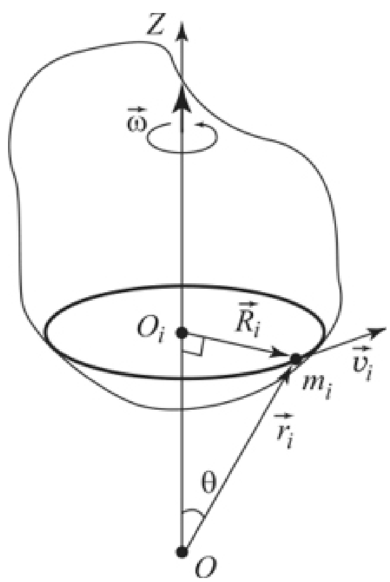


Рис. 1: OO - произвольная ось $\neq Z$.

Вектор полного момента импульса L тела относительно неподвижной точки на оси вращения в общем случае не параллелен вектору угловой скорости $\vec{\omega}$ и вычисляется по формуле:

$\vec{L} = \sum[\vec{r_i}, \vec{p_i}] = \sum m_i[\vec{r_i}, \vec{v_i}] = \sum m_i[\vec{r_i}, [\vec{\omega}, \vec{r_i}]] = \sum m_i(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{r_i} \cdot \vec{\omega}))$;

Отсюда проекция момента импульса на ось Хнеподвижной декартовой системы координат с началом в точке O определяется как линейная функция составляющих вектора угловой скорости $\vec{\omega}$:

$L_x = \omega_x \sum m_i(r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i = \omega_x I_{xx} - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}$,

$L_y = \omega_x I_{yx} - \omega_y I_{yy} - \omega_z I_{yz}$,

$L_z = \omega_x I_{zx} - \omega_y I_{zy} - \omega_z I_{zz}$,

Введенные здесь девять коэффициентов образуют квадратную матрицу, которая преобразуется как тензор второго порядка и называется тензором инерции (тензором момента инерции):

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

в которой элементы являются моментами инерции относительно различных осей. Диагональные компоненты тензора инерции — это моменты инерции тела относительно осей X, У и Z. Недиагональные компоненты тензора называются центробежными моментами инерции тела.

- Поскольку $I_{ij} = I_{ji}$, то тензор инерции является симметричным.

- В случае, когда масса твердого тела непрерывно распределена по его объему, центробежные моменты инерции определяются по формулам:

$$I_{xy} = \int xydm, I_{xz} = \int xzdm, I_{yz} = \int yzdm;$$

Матрицу можно диагонализировать, т.е. для любого тела можно выбрать три такие взаимно перпендикулярные оси X, У, Z, для которых все недиагональные компоненты равны нулю и тензор инерции принимает вид

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы являются **главными моментами инерции тела**.

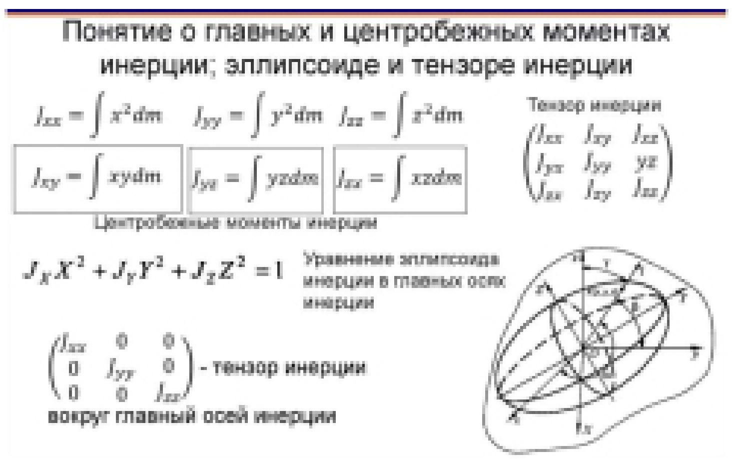
Для любого тела, множество точек, соответствующих моментам инерции для осей, проходящих через центр масс тела, составляет **эллипсоид инерции**. Уравнение эллипсоида инерции записывается как:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

При этом координатные оси эллипсоида должны совпадать с главными осями тела.

Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, если только она проходит через центр эллипсоида.

Эллипсоид инерции (для точки O) — геометрическая фигура в виде поверхности второго порядка, которая характеризует тензор инерции твёрдого тела относительно точки O.



В **любом** теле есть **3 главных взаимно перпендикулярных оси**, проходящих через центр масс.

Всякая ось симметрии тела является главной.

Если известны моменты инерции тела относительно главных осей I_x, I_y, I_z, то следующие два правила позволяют определить момент инерции относительно любой оси.

1. Момент инерции относительно оси проходящей через центр масс и составляющей углы $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ с главными осями равен

$I_0 = I_x \cos^2 \alpha_x + I_y \cos^2 \alpha_y + I_z \cos^2 \alpha_z$, где I_x, I_y, I_z - моменты инерции относительно главных осей;

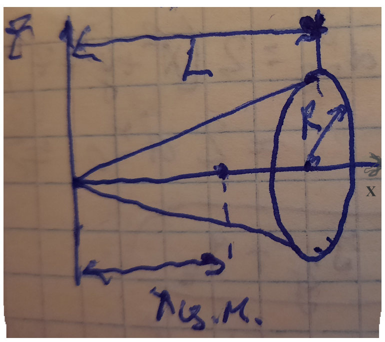
2. Если ось не проходит через центр масс тела, то согласно теореме Гюйгенса-Штейнера

$I = I_0 + MR^2$;

==

Задача 9.1

9.1. Вычислить момент инерции I_x кругового конуса, радиус основания которого R, высота L, масса M, относительно оси симметрии OX. Вычислить также момент инерции конуса I_z относительно оси OZ, перпендикулярной OX. Точка O — вершина конуса. Где находится центр масс C этого конуса?



Система цилиндричекая:

1) $I_x = \rho\int r^3 dr d\varphi dx = 2\pi\rho\int_0^L r^3 dr dx =$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x} = \frac{R}{L} \Rightarrow r = \frac{R}{L}x \Rightarrow$

$= 2\pi\rho\frac{1}{4}\int r^4|_0^{\frac{R}{L}x}dx = \frac{1}{2}(\frac{R}{L})^4\pi\rho\int_0^L x^4 dx = \frac{\pi\rho}{10}R^4L;$

$V = \int dV = \int r dr d\varphi dx = \frac{\pi}{3}LR^2;$

$I_x = \frac{\pi(\rho V)}{10}\frac{R^4L}{V} = 0.3MR^2$

2) I_z−?
По определению

$$\begin{cases} dI_0 = (x^2+y^2+z^2)dm \\ dI_x = (y^2+z^2)dm \\ dI_y = (x^2+z^2)dm \\ dI_z = (x^2+y^2)dm \end{cases}$$

Проинтегрировав, получаем соотношение $2I_0 = I_x + I_y + I_z$;

Разобъем конус на тонкие диски

1. Для тонкого диска момент инерции относительно x: $I_0 = I_x \Rightarrow$

$I_x + I_y + I_z = 2I_x \Rightarrow I_y + I_z = I_x$, но $I_y = I_z \Rightarrow I_y = I_z = \frac{I_x}{2}$;

2. По теореме Штейнера для диска относительно z:

$dI_z = dI_{z0} + x^2 dM = \frac{dI_x}{2} + (\pi r^2 \rho dx)x^2$; Тогда для конуса:

$I_z = \frac{I_x}{2} + \int_0^L \pi\rho(\frac{R}{L}x)^2 x^2 dx = 0.15MR^2 + \pi\rho(\frac{R}{L})^2 L^5 = 0.15MR^2 + 0.6ML^2$;

$I_z = 0.15M(R^2 + 4L^2)$;
==

Задача 9.8

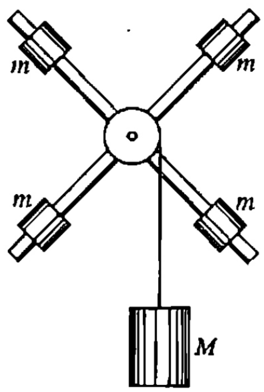


Рис. 169

9.8. К шкиву креста Обербека (рис. 169) прикреплена нить, к которой подвешен груз массой $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{рыв}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза с массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

1) $T =?$

$I\frac{d\omega}{dt} = rT, a = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{rT}{I} = r^2\frac{T}{I};$

$Ma = Mg - T \Rightarrow Mr^2\frac{T}{I} = Mg - T \Rightarrow T(1 + \frac{Mr^2}{I}) = Mg \Rightarrow$

$T = \frac{Mg}{1+\frac{Mr^2}{I}};\ a = T\frac{r^2}{I} = \frac{Mg}{M+\frac{I}{r^2}} = \frac{g}{1+\frac{I}{Mr^2}};$

2) $T_{\text{рыв}} =?;$

$\frac{\triangle p}{\triangle t} = T_{\text{рыв}} - Mg; \triangle p = 2Mv, \triangle t = \frac{\pi r}{v}$, v$=\sqrt{2ha}; \Rightarrow$

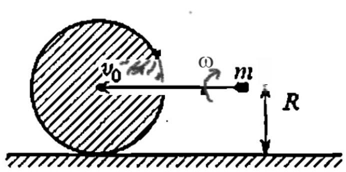
$T_{\text{рыв}} = Mg + \frac{\triangle p}{\triangle t} = Mg + \frac{2Mv^2}{\pi r} = Mg + \frac{4Mh}{\pi r}a = Mg + \frac{4M^2hg}{\pi(Mr+\frac{I}{r})};$

$T_{\text{рыв}} = Mg(1 + \frac{4Mhr}{\pi(I+Mr^2)});$

==

Задача 9.90

9.90. В лежащий на столе шар радиусом R и массой M попадает пуля массой m, летящая со скоростью v_0 и вращающаяся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0. Радиус инерции пули равен r. Пуля застревает в центре шара. Найти энергию ΔE, потерянную при проникновении пули в шар. За время проникновения пули шар не смещается.



$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{I_1\omega_0^2}{2} = \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{(I_1+I_2)\omega^2}{2} + \triangle E$;

$\triangle E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{I_1\omega_0^2}{2} - \frac{(I_1+I_2)\omega^2}{2}$;

$mv_0 = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{m}{M+m}v_0$;

$I_1\omega_0 = (I_1+I_2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_0$;

$\triangle E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{M+m}{2}\frac{m^2}{(M+m)^2}v_0^2 + \frac{I_1\omega_0^2}{2} - \frac{I_1+I_2}{2}\frac{I_1^2}{(I_1+I_2)^2}\omega_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{mM}{M+m}v_0^2 + \frac{I_1I_2}{I_1+I_2}\omega_0^2)$,
где $I_1 = \frac{mr^2}{2}, I_2 = \frac{2}{5}MR^2$;

==

Задача 9.131

9.131. Оценить сколько раз перевернется человек, падая по стойке «смирно» (рис. 214) с десятиметровой вышки?

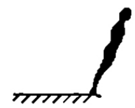


Рис. 214

Сила реакции направлена вдоль тела, условие отрыва $m\omega^2 r = mg\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$**, где** $r = h/2$**;**

$I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\alpha} = mgr\sin\alpha \Rightarrow \omega d\omega = \frac{mgr}{I}\sin\alpha d\alpha$**;**
Интегрируя получим:

$\omega^2 = \frac{2mgr}{I}(1 - \frac{r\omega^2}{g}) \Rightarrow \omega^2(1 + \frac{2mgr}{I}\frac{r\omega^2}{g}) = \omega^2(1 + \frac{2mr^2}{I}) = \frac{2mgr}{I}$**;**

$\omega^2 = \frac{2mgr}{I+2mr^2} = \frac{g}{r}\frac{2mr^2}{2mr^2+\frac{4mr^2}{6mr^2}} = 6$ **Гц;**

$\omega = 2.45$ **Гц ,** $v_0 = \omega r = 2.45$ **м/с;** $f = 0.4$ **об/с;**

$\cos\alpha = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{6\cdot 1}{10} = 0.6, \alpha = 53^\circ \Rightarrow v_\parallel = v_0\cos 37^\circ = 2.45\cdot 0.8 \simeq 2$**;**

$gt^2/2 + v_0 t = H \Rightarrow 5t^2 + 2t - 10 = 0; t = 1.23$ **с;**

$n = tf + \frac{\alpha}{2\pi} = 0.47 + \frac{arccos0.6}{2\pi} = 0.47 + 0.15 = 0.63$**;**
==