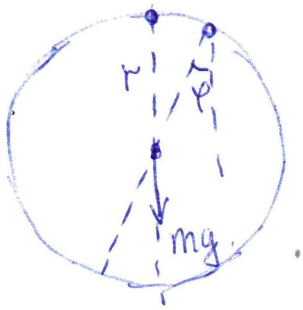
Семинар 13

Колебания твердых тел. Затухающие и вынужденные колебания.

21. Однородный диск радиусом $r = 10$ см подвешен на оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его край (см. зад. 10.6). Диску сообщили из положения равновесия начальную угловую скорость $\omega = 0{,}03$ рад/с. Найти закон изменения угла отклонения маятника во времени, считая амплитуду колебаний малой. *Ответ*: $\varphi = A\sin\Omega t$, где $A \approx 0{,}1$ рад, $\Omega \approx 0{,}3$ рад/с.



1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m_c g r_c}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mr^2}{2}+mr^2}{mgr}} =$

$= 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$

2) $I\frac{d\omega}{dt} = M \Rightarrow I\ddot{\varphi} = -mgr\sin\varphi \approx mgr\cdot\varphi$

$I\ddot{\varphi} + mgr\varphi = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{mgr}{I} = \frac{2}{3}\frac{g}{r}$

$\varphi = A\sin(\Omega t),\quad A = \varphi_M$

$E_{к1} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{4}mr^2\omega^2 \qquad E_{к2} = 0$

$E_{п1} = mgr \qquad E_{п2} = mgr\cdot\cos\varphi_M$

$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2} \Rightarrow \frac{3}{4}mr^2\omega^2 = mgr(1-\cos\varphi_M)$

$\cos\varphi_M \approx 1 - \frac{\varphi_M^2}{2} \Rightarrow \varphi_M^2 = \frac{3}{2}\frac{r}{g}\omega_0^2 \approx 1{,}5\cdot10^{-2}$ рад^2

$\varphi_M = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}\,\omega_0 = 0{,}12$ рад.

5.71. Определить добротность маятника, если за время, в течение которого было совершено 10 колебаний, амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза.

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T}$$

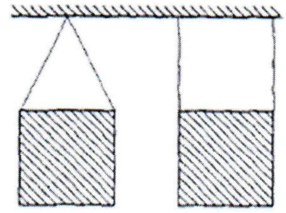
где δ – логарифм. ~~коэфф. зат~~ декремент затухания

β – коэффициент затухания.

$$e^{\beta T} = \frac{a_i}{a_{i+1}} \Rightarrow \frac{a_i}{a_{i+n}} = e^{\beta n T}$$

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{n\pi}{\ln(a_i / a_{i+n})} = \frac{10\pi}{\ln 2} = 45,3.$$

10.3. Две одинаковые однородные пластинки, имеющие форму квадрата, подвешены с помощью тонких невесомых нитей двумя способами (рис. 217). Расстояние от точек подвеса до верхних сторон пластинок равно длине сторон. Найти отношение периодов малых колебаний получившихся физических маятников в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью пластинки.



Момент инерции квадрата: $I_{кв} = \frac{1}{6} ma^2$ (ц.м.)

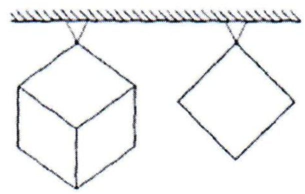
а) $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{6}ma^2 + m\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{mg \cdot \frac{3}{2}a}} = 2\pi \sqrt{\frac{29}{18}\frac{a}{g}}$

б) Система эквивалентна математическому маятнику с $l = a$

$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$

в) $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{29}{18}} \approx 1{,}27.$

10.4. Два одинаковых сплошных однородных куба подвешены двумя различными способами: в одном случае за вершину, в другом — за середину ребра (рис.). Учитывая свойства эллипсоида инерции куба, найти отношение периодов колебаний получившихся физических маятников в поле тяжести. Колебания происходят в плоскости рисунка.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}$$

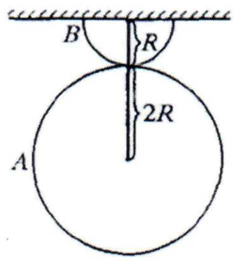
Куб: $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6}ma^2 \Rightarrow I = \frac{1}{6}ma^2 \ \forall$ оси ц.м.

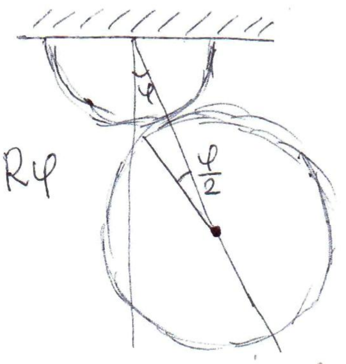
1) $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}ma^2 + m\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{mga\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\cdot\frac{11}{6\sqrt{3}}}$$

2) $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{6}ma^2 + m\left(a/\sqrt{2}\right)^2}{mga/\sqrt{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\,\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

3) $$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{11}{6\sqrt{3}}\Big/\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{\frac{11}{4\sqrt{6}}} \approx 1{,}06.$$

10.47. Однородный диск *A* массы *M* и радиуса 2R может совершать колебания, катаясь по поверхности неподвижного цилиндра *B*, имеющего радиус R (рис. 257). Центры цилиндра и диска стянуты стержнем массы *m* так, что при качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.





Проскальзывание отсутствует

$$\Rightarrow R\varphi = 2R\cdot\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi}{2}$$

При отклонении стержня на угол φ диск проворачивается на этот угол плюс $\frac{\varphi}{2}$ $\Rightarrow$ суммарно $\frac{3}{2}\varphi$.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = mg\cdot\frac{3}{2}R(1-\cos\varphi) + Mg\cdot 3R(1-\cos\varphi) \approx 3Rg\left(M+\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{\varphi^2}{2} = A\frac{\varphi^2}{2}$$

Кинетическая энергия:

$$K = \frac{I_п\dot\varphi^2}{2} + \frac{Mv_g^2}{2} + \frac{I_g\left(\frac{3}{2}\dot\varphi\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{m(3R)^2}{3}\cdot\frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{M}{2}(3R\cdot\dot\varphi)^2 + \frac{M\cdot(2R)^2}{2}\cdot\frac{9}{4}\frac{\dot\varphi^2}{2} =$$

$$= \frac{\dot\varphi^2}{2}\left[3m + \frac{27}{2}M\right]R^2 = B\frac{\dot\varphi^2}{2}$$

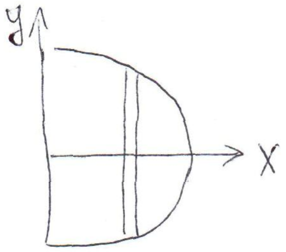
$$\Pi + K = const \Rightarrow A\frac{\varphi^2}{2} + B\frac{\dot\varphi^2}{2} = const$$

$$A\varphi\dot\varphi + B\dot\varphi\ddot\varphi = 0 \Rightarrow \ddot\varphi + \frac{A}{B}\varphi = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{A}{B}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R}\,\frac{2M+m}{9M+2m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\,\frac{9M+2m}{2M+m}}$$

10.84. Найти период колебаний половинки сплошного цилиндра радиусом R? находящейся на горизонтальной поверхности. При колебаниях проскальзывание отсутствует.



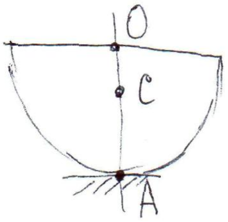
$$\rho_s = \frac{m}{S} \Rightarrow \frac{\rho_s}{m} = \frac{1}{S} = \frac{2}{\pi R^2}$$

$$y^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$x_{cp} = \frac{1}{m}\int x\,dm = \frac{1}{m}\int x \cdot \rho_s \cdot 2y\,dx =$$

$$= \frac{1}{m}\cdot \rho_s \int_0^R x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\frac{\rho_s}{m}\int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) =$$

$$= \frac{\rho}{m}\int_0^{R^2} t^{1/2}\,dt = \frac{2}{\pi R^2}\cdot \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_0^{R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$



$$I_A = I_c + m(R - x_{cp})^2 = I_0 - m x_{cp}^2 + m(R - x_{cp})^2 =$$

$$= \frac{mR^2}{2} + m(R^2 - 2R x_{cp}) = m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2R\cdot\frac{4R}{3\pi}\right) =$$

$$= mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right).$$

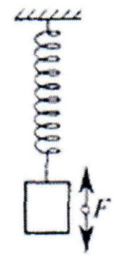
$$M = mg x_c \sin\varphi \approx mg\cdot\frac{4R}{3\pi}\varphi$$

$$I_A \ddot{\varphi} = -M = -mg\cdot\frac{4R}{3\pi}\varphi \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{mg\,\frac{4R}{3\pi}}{mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)} = \frac{g}{R}\,\frac{8}{9\pi - 16}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{9\pi - 16}{8}}$$

5.60. Тело подвешено на пружине и имеет собственный период колебаний 1/2 с (рис.). На тело действует направленная вертикально синусоидальная сила с амплитудой F = 100 дин и некоторая сила трения. Определить амплитуду $F_{Тр}$ силы трения и коэффициент трения (сила трения пропорциональна скорости движения), если амплитуда колебаний при резонансе $A_р$ составляет 5 см.



1) При резонансе сила трения равна внешней силе: $F_{тр} = F = 100$ дин.

2) Амплитуда скорости:

$$v_0 = A_р \omega = A_р \frac{2\pi}{T} = 5\,см \cdot \frac{2\pi}{0{,}5\,с} = 20\pi \left(\frac{см}{с}\right)$$

$$F_{тр} = k v \Rightarrow k = \frac{F_{тр}}{v_0} = \frac{5}{\pi} \left(\frac{г}{с}\right).$$