Основы молекулярно-кинетической теории.
Распределение Максвелла.

Задачи: 7.18, 7.14, 7.20, 7.53

ЗАДАНИЕ:7.70, 7.16, 7.40, 7.80

Основное положение молекулярно-кинетической теории:

1) Если равновесная система может находиться в одном из N состояний, то верояеность P_n, что она находится в состоянии n с энергией E_n равна (Распределение Гиббса):

$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}}$, где $Z = \sum\limits_{n=1}^{N} e^{-\frac{E_n}{kT}}$ - статистическая сумма;

2) Статистическая сумма Z позволяет найти все ТД свойства системы:

$E = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$, где $\beta = \frac{1}{T}$

$F = E - TS = -kT \ln Z = -kT \ln(\sum\limits_{n=1}^{N} e^{-\frac{E_n}{kT}})$

$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V; P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T;$

$C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V$

3) $E_n = T_n + U_n,\ P_n = \left[\frac{1}{Z_k} e^{-\frac{T_n}{kT}}\right] \cdot \left[\frac{1}{Z_p} e^{-\frac{U_n}{kT}}\right]$, где $Z = Z_k \cdot Z_p$;

4)**Распределения Максвелла:**

1. Распределение по абсолютным скоростям:

$$f(\mathrm{v}) = \left(\frac{\mathrm{m}}{2\pi \mathrm{kT}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathrm{m}(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2)}{2\mathrm{kT}}\right) = \left(\frac{\mathrm{m}}{2\pi \mathrm{kT}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathrm{mv}^2}{2\mathrm{kT}}\right)$$

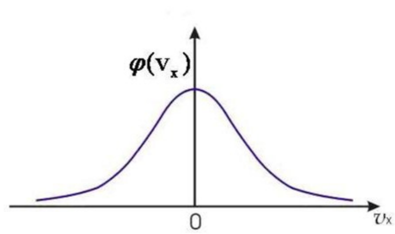
аналитический вид

функции распределения молекул газа по проекции скорости:

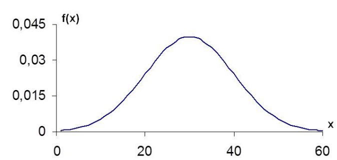
$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

$\varphi(v_x)$ нормирована на единицу, т.е. площадь по кривой $\varphi(v_x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x)\, dv_x = 1$$



Распределение Гаусса

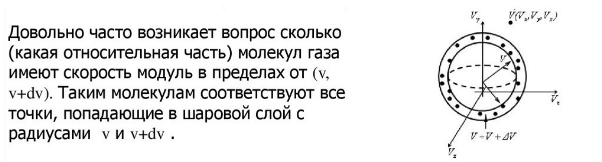


Функция распределения Гаусса со средним значением 30, и стандартным отклонением 10

Может ли распределение Максвелла описываться представленным распределением Гаусса:

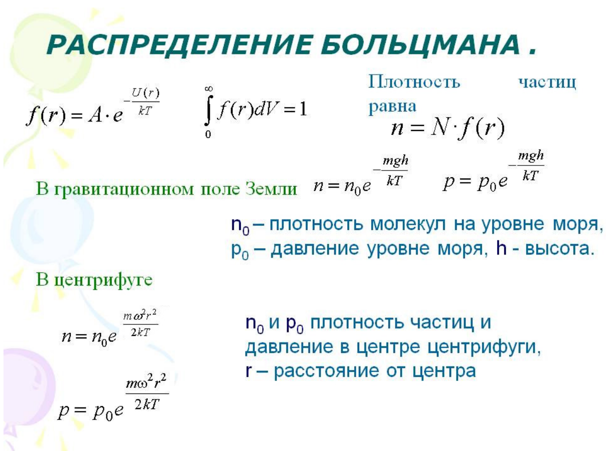
Нет, не может! Распределение Максвелла описывает тепловое, то есть стохастическое (случайное) распределение скоростей. Наличие поступательной скорости - это ветер. А ветер может быть как горячим, так и холодным.

2. Распределение по модулю скорости:



$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

5)**Распределение Больцмана.**



6)**Элементы объема в разных системах отсчета:**

1. $dv = dv_x dv_y dv_z$ - декартова система;
2. $dv = rdrd\varphi dz$ - цилиндрическая система;
3. $dv = r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$;

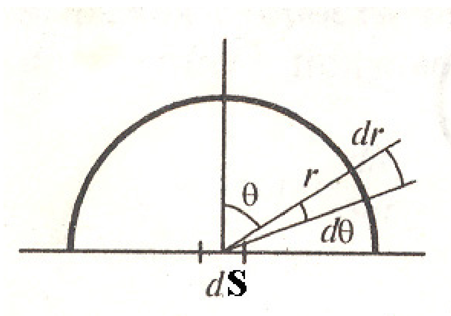
7) Определенные интегралы

$\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$; $\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$;

$\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$; $\int\limits_0^\infty x^5 e^{-x^2}dx = 1$;

$\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$; $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

8) Число молекул ударяющихся в единичную площадку сосуда за единицу времени:



На рисунке показана площадка dS и объем газа, из которого частицы ударяют площадку под углом ϑ. Объем $d\omega = 2\pi r^2 dr \sin\vartheta d\vartheta$

Число частиц в объеме $d\omega, nd\omega$, где n - концентрация частиц. Доля частиц, летящих в направлении dS, составляет $\frac{dS\cos\vartheta}{4\pi r^2}$; Тогда число частиц, попавших в dS, будет:

$$d^2N(r,\vartheta) = nd\omega\frac{dS\cos\vartheta}{4\pi r^2} = \frac{n2\pi r^2 dr\sin\vartheta d\vartheta dS\cos\vartheta}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}ndS\sin\vartheta\cos\vartheta dr d\vartheta$$

Учитывая, что $dr = vdt$, можно записать число соударений в единицу времени при скорости v:

$$\frac{d^2N}{dSdt} = \frac{1}{2}nv\int\limits_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta = \frac{nv}{4}$$

Реально скорости распределены по интервалу от 0 до ∞ и $dn/n = F(v)dv$, тогда

$$\frac{d^2N}{dSdt} = \frac{n}{4}\int\limits_0^\infty vF(v)dv = \frac{n<v>}{4};$$

Окончательно число частиц, ударяющих единичную площадку за единицу времени, при Максвелловском распределении скоростей равно:

$$\frac{d^2N}{dSdt} = \frac{n<v>}{4}$$

Задача 7.18

7.18. В центре сферы радиусом R в некоторый момент времени создается N молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре T. Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность j потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени t_0, когда поток максимален, и найти скорость молекул v_0, подлетающих к стенке в этот момент.

Время и скорость t_0, v_0 определяются из условия максимума $\frac{dj(t)}{dt} = 0$;

Число частиц со скоростями в интервале (v,v+dv) определяется распределением Максвелла, где F(v) плотность вероятности

$dN = N_0 F(v) dv = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv$

$j(v) = \frac{1}{S}\frac{dN}{dt}$, откуда, выражая скорость частиц и производную v через время $v = \frac{R}{t}$ и $\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{t^2}$, получим

$j(t) = N_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mR^2}{2kTt^2}\right) \frac{R}{t^4}$

$\frac{dj(t)}{dt} = -\frac{4R}{t^5} \exp\left(-\frac{mR^2}{2kTt^2}\right) + \frac{R}{t^4} \exp\left(-\frac{mR^2}{2kTt^2}\right) \frac{mR^2}{2kT} \frac{2}{t^3} = 0;$

$\frac{1}{t^2} \frac{mR^2}{4kT} = 1;$

$t_{max} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{m}{kT}};\ \ v_{max} = \frac{R}{t_{max}} = 2\sqrt{\frac{kT}{m}};$
$j(t) = \frac{N_0 R}{t^4} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp^{-\frac{mR^2}{2kTt^2}};$

==
Ядерный взрыв: $T = 10^8 K$. Для R=1 км $t_{max} = 170$ мкс.
==

Задача 7.14

7.14. В диоде электроны, эмитируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150$ К, определить долю электронов α, преодолевающих задерживающий потенциал: 1)$V = 0{,}2$ В; 2)$V = 0{,}4$ В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

В задаче рассматривается движение в двумерном цилиндрическом пространстве (вместо трехмерного). В этом случае, фазовый объем в пространстве скоростей $2\pi v dv$, вместо $4\pi v^2 dv$ в 3-х мерном случае, а функция плотности вероятности имеет вид:
и $F_2 = \frac{m}{kT} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v$

Тогда доля электронов со скоростями в интервале (v,v+dv):
$\frac{dN}{N_0} = F_2 dv$ и доля частиц со скоростями более u ($\frac{mu^2}{2} = e\varphi$):

$\alpha = \frac{1}{N_0} \int\limits_u^\infty dN = \frac{m}{kT} \int\limits_u^\infty e^{\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)} v dv =$

$= \frac{m}{kT} \frac{1}{2} \frac{2kT}{m} \int\limits_u^\infty e^{-x} dx = e^{-\frac{mu^2}{2kT}} = e^{-\frac{e\varphi}{kT}}$, где $x = \frac{mv^2}{2kT}$

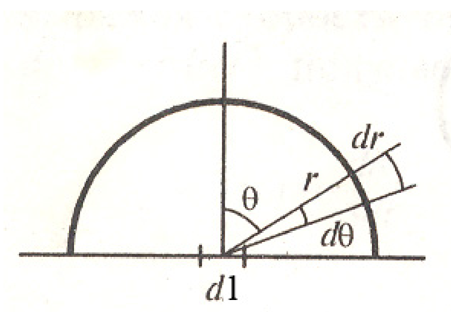
$kT = \frac{1150}{11600} \simeq 0.1$ эВ $\Rightarrow \alpha \simeq e^{-10e\varphi}$;

1) $\varphi = 0.2B \Rightarrow \alpha = e^{-2} = 0.14$;

2) $\varphi = 0.4B \Rightarrow \alpha = e^{-4} = 0.02$;

Задача 7.20

7.20. Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое полупроводника, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить частоту z ударов электронов, приходящихся на единицу длины периметра границы области, в которой заключен этот «газ». Считать при этом заданными температуру T, поверхностную концентрацию частиц n и массу электрона m.



Электроны падают на элемент периметра dl под разными углами ϑ. В случае их изотропного движения с одинаковой скоростью v доля электронов, пересекающих площадку в единицу времени для двумерного случая:

$$\frac{d^2N}{dldt} = nv\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{rd\vartheta\cos\vartheta}{2\pi r} = \frac{nv}{\pi};$$

Тогда с учетом двумерной плотности распределения Максвелла по скоростям:

$$\frac{d^2N}{dldt} = \frac{n}{\pi}\frac{m}{kT}\int\limits_0^\infty v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)vdv = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$$

Задача 7.53

7.53. В сферическом реакторе радиусом $r = 1$ м идет химическая реакция между газом, заполняющим реактор, и материалом стенок реактора. Продуктом реакции является порошок, непрерывно удаляемый из реактора. В реакцию могут вступить только молекулы газа, имеющие кинетическую энергию $E \geqslant E_п = 1$ эВ, при этом вероятность реакции при ударе молекулы о стенку $w = 10^{-3}$. С какой скоростью dM/dt надо подавать газ в реактор, чтобы поддерживать в нем постоянное давление $P_0 = 10$ атм? Молярная масса газа $\mu =$

$= 40$ г/моль. Считать, что вблизи стенок реактора распределение молекул по скоростям максвелловское при температуре $T = 1160$ К.

Скорость подачи газа в реактор определяется выражением

$$\frac{dM}{dt} = \omega m \frac{n<v>}{4} S = \omega m n \pi S \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{v_p}^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Определяя среднюю скорость $< v >$ из распределения Максвелла, получим окончательно

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \omega p_0 \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{1/2} \left(\frac{E_p}{kT} + 1\right) \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) \simeq 5.1 \text{ г/с};$$

где $p_0 = nkT$