25. Два твёрдых тела с температурами 299 К и 300 К приведены в соприкосновение. Оценить, во сколько раз более вероятна передача порции энергии 10^{-11} эрг от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, чем в обратном направлении. Теплоёмкости тел достаточно велики, так что изменением их температуры можно пренебречь.

Ответ: 5.

Решение.

Изменение энтропии при передаче тепла:

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta Q}{T_1} - \frac{\Delta Q}{T_2}; \quad \Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}.$$

Формула Больцмана: $\Delta S = k \ln W$

$$W_1 = \exp\left(\frac{\Delta S_1}{k}\right); \quad W_2 = \exp\left(\frac{\Delta S_2}{k}\right).$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \exp\left(\frac{\Delta S_1 - \Delta S_2}{k}\right) = \exp\left(\frac{2\Delta Q}{k}\frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2}\right) \simeq 5$$

26. Небольшой груз массы 1 г подвешен на лёгкой нити длиной 1 м. Оценить среднеквадратичное отклонение груза от положения равновесия из-за тепловых флуктуаций при комнатной температуре.

Ответ: $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} \approx 0{,}9$ нм.

Решение.

Потенциальная энергия математич. маятника:

$$E_п = mgl(1-\cos\varphi) \approx mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta x}{l} \Rightarrow E_п = \frac{mg}{l} \cdot \frac{\Delta x^2}{2}$$

При флуктуации потенциальная энергия равна энергии тепловых колебаний $\frac{1}{2}kT$

$$E_п = \frac{mg}{l}\frac{\Delta x^2}{2} = \frac{kT}{2}$$

$$\Rightarrow (\langle x^2 \rangle)^{1/2} = \sqrt{\frac{kTl}{mg}} \approx 0{,}9 \text{ нм}$$

27. Оценить среднеквадратичную относительную флуктуацию числа молекул воздуха в объёме 1 мкм^3 при нормальных условиях.
Ответ: 0,02%.

Решение.

Из теории: $\varepsilon_N = \dfrac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$

— ищем число молекул.

$$pV = \nu RT \Rightarrow N = N_A \nu = N_A \frac{pV}{RT} =$$

$$= 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{част}}{\text{моль}} \cdot \frac{10^5 \text{Па} \cdot (10^{-6} \text{м})^3}{8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273 \text{К}} \approx 2{,}64 \cdot 10^7 \text{ частиц.}$$

$$\varepsilon_N = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} \approx 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}02\%.$$

9.45. Сосуд разделен перегородкой на два различных объема, так что в одном объеме содержится N_1 атомов, в другом N_2. Температура и давления газов одинаковы. Затем перегородку убирают, и газы перемешиваются. Вычислить изменение энтропии после смешения, если: а) газы различны б) газы одинаковы. Газ одноатомный, идеальный.

Решение.

$$S = n\left(C_V \ln T + R \ln \frac{V}{n} + S_0\right)$$

2 газа:

$$S_1 = n_1\left(C_V \ln T + R \ln \frac{V_1}{n_1} + S_{01}\right) + n_2\left(C_V \ln T + R \ln \frac{V_2}{n_2} + S_{02}\right)$$

Смешение газов:

$$S_2 = n_1\left(C_V \ln T + R \ln \frac{V_1+V_2}{n_1} + S_{01}\right) + n_2\left(C_V \ln T + R \ln \frac{V_1+V_2}{n_2} + S_{02}\right)$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1 = n_1 R\left[\ln\left(\frac{V_1+V_2}{n_1}\right) - \ln\left(\frac{V_1}{n_1}\right)\right] +$$

$$+ n_2 R\left[\ln\left(\frac{V_1+V_2}{n_2}\right) - \ln\left(\frac{V_2}{n_2}\right)\right] =$$

$$= R\left(n_1 \ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_1}\right) + n_2 \ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_2}\right)\right)$$

Для одного газа при равных p и T:

$$\Delta S_2 = 0.$$

9.8. Оценить предельную чувствительность $\Delta T/T$ идеального газового термометра, в котором температура измеряется по объему газа при постоянном давлении. Количество газа в термометре равно 10^{-3} моля.

Решение.

Вероятность флуктуации определяется работой ΔW, которую надо произвести над подсистемой, чтобы перевести её из нач. равновесного состояния в конечн.

$$\delta Q_0 = T_0 \Delta S = \Delta U + p_0 \Delta V - \Delta W \Rightarrow \Delta W = \Delta U - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V =$$

$$= \Delta H - T_0 \Delta S \approx \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p \Delta S + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial S^2}\right)_p \frac{\Delta S^2}{2} + \ldots - T_0 \Delta S =$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p \frac{\Delta S^2}{2} = \frac{T_0}{C_p} \frac{\Delta S^2}{2}$$

Вероятность флуктуации того, что температура лежит между T и $T+dT$:

$$dp = A \exp\left(-\frac{\Delta W}{kT}\right) dS = A \exp\left(-\frac{\Delta S^2}{2kC_p}\right) dS$$

Нормировка: $A = (\pi k C_p)^{-1/2}$

$$\langle (\Delta S)_p^2 \rangle = A \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta S)^2 \exp\left(-\frac{\Delta S^2}{2kC_p}\right) dS = kC_p$$

$$T (\Delta S)_p = C_p (\Delta T)_p \Rightarrow \langle (\Delta T)_p^2 \rangle = \frac{kT_0^2}{C_p}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{[\langle (\Delta T)_p^2 \rangle]^{1/2}}{\Delta T} = \left(\frac{k}{C_p}\right)^{1/2} = \left(\frac{R}{C_{pM} N}\right)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-11}$$

N – число частиц

C_{pM} – молярная теплоемкость при $p = const$.

9.6. Определить величину объема V в идеальном газе, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет $\alpha = 10^{-6}$ от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц n в таком объеме. Газ находится в стандартных условиях.

Решение.

По условию: $\varepsilon_N = \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$

$\Rightarrow \quad n = \langle N \rangle = \dfrac{1}{\alpha^2} = 10^{12}$ частиц.

$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{n}{N_A} \cdot \dfrac{RT}{p} \approx 3{,}78 \cdot 10^4$ мкм^3.

T4. (5A-2017). Ионы солей иттербия имеют спин s=7/2. Во внешнем магнитном поле B энергия иона зависит от ориентации спина и может принимать значения $E_m = m\mu B$, где μ — известная константа, и $m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$. Найти изменение энтропии ΔS и количество теплоты Q, поглощаемое 1 молем соли при её квазистатическом изотермическом размагничивании от очень большого ($B_0 \gg kT/\mu$) до нулевого поля (B_1=0) при температуре T. Взаимодействием ионов между собой пренебречь.

Решение.

1) Поскольку $\mu B_0 \gg kT$, вначале все ионы находились на нижнем уровне:

$S_0 \approx 0$.

2) После размагничивания $B_1 = 0$ и $\mu B_1 \ll kT$, так что ионы с равной вероятностью распределились по всем $2s+1=8$ уровням:

$$\Delta S = S_1 - S_0 = S_1 = -kN\sum_{i=1}^{8} w_i \ln w_i =$$

$$= -R\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{8}\ln\frac{1}{8} = R\ln 8$$

3) Т.к. процесс квазистатический, $T = const$

$$Q = T\Delta S = RT\ln 8$$