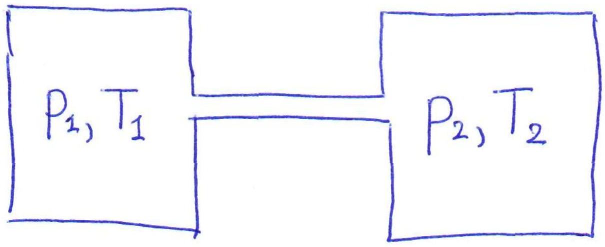
32. Два сосуда с идеальным газом соединены трубкой, диаметр которой заметно меньше длины свободного пробега в обоих сосудах. Температура в сосудах поддерживается постоянной и равной соответственно T_1 и $T_2 = 2T_1$. Найти отношение давлений P_2/P_1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение



При равновесии через трубку с обеих сторон проходит одинаковое количество молекул:

$$\frac{dN}{S\,dt} = \frac{n\langle v\rangle}{4} \sim \frac{p}{T}\cdot\sqrt{T} = \frac{p}{\sqrt{T}} = const$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{2}$$

33. Оценить коэффициент диффузии сильно разреженного воздуха по длинной трубке диаметром 1 см при комнатной температуре. Считать, что разрежение таково, что длина пробега молекул ограничивается диаметром трубки (высокий вакуум).

Ответ: 1,6 $м^2/с$.

Решение

Воздух: $\mu = 29 \frac{г}{моль}$, $T = 298$ K

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 466 \ \frac{м}{с}$$

Вакуум: $\lambda = l = 1$ см.

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \approx 1{,}6 \ м^2/с.$$

34. Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра d = 2 см при расходе Q = 30 л/мин. Вязкость холодной воды $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с.
Ответ: 10^4.

Решение

Число Рейнольдса: $Re = \dfrac{\rho v d}{\eta}$

Объемный расход жидкости:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta(SL)}{\Delta t} = Sv \Rightarrow v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$\Rightarrow Re = \frac{\rho d}{\eta} \cdot \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4\rho Q}{\pi \eta d} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{м^3}{с}}{\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\, Па \cdot с \cdot 2 \cdot 10^{-2}\, м} \approx 10^4$$

! $Re \gg 1$, т.ч. поток турбулентный

10.82. Определить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии $h = 1$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с второй такой же диск. Радиус дисков $R = 10$ см, модуль кручения нити $f = 100$ дин·см/рад, вязкость воздуха считать равной $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ дин·с/см^2. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

10.83. Решить предыдущую задачу в предположении, что диски помещены в сильно разреженный воздух с давлением $P = 10^{-4}$ Тор, когда длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с расстоянием между дисками. Для упрощения расчета считать, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, равными средней скорости молекул воздуха $\upsilon = 450$ м/с.

Решение

1) Если f – модуль кручения $\Rightarrow \varphi = M/f$

Сила на кольцевой площадке: $\tau = -\eta \frac{d\upsilon}{dy} \approx \eta \frac{\upsilon}{h}$

$dF = \tau \cdot dS = \eta \frac{\upsilon}{h} \cdot 2\pi r dr$, $\upsilon = \omega r$

Момент сил: $dM = r \cdot dF = 2\pi\eta\omega r^3 \frac{dr}{h}$

$M = \int dM = \pi\eta\omega \frac{R^4}{2h} \Rightarrow \varphi = \frac{M}{f} = \frac{\pi\eta\omega R^4}{2hf}$

2) Вакуум $\longrightarrow$ обмен импульсами от прилет. молекул

На расстоянии r $\rightarrow$ импульс $m\upsilon = m\omega r$

Кольцо радиуса r и ширины dr: $2\pi r dr \cdot \frac{n\langle\upsilon\rangle}{4}$ молекул.

$dF = \pi m n \omega \cancel{\langle\upsilon\rangle} r^2 \frac{dr}{2}$ $\qquad dM = r dF$

$M = \int dM = \frac{\pi}{2} m n \omega \langle\upsilon\rangle \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{8} m n \omega \langle\upsilon\rangle R^4$

Угол закручивания: $\varphi = \frac{M}{f} = \frac{\pi m n \omega \langle\upsilon\rangle R^4}{8f}$

10.68. Камера объема V = 100 л откачивается в помощью идеального насоса (т. е. улавливающего весь попадающий в него газ) через трубу радиуса r = 2 см, длины L = 1 м. Оценить, сколько времени должна длиться откачка камеры от начального давления P_1 = 1 атм до давления $P_2 = 10^{-1}$ мм рт. ст. Коэффициент вязкости воздуха считать равным $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ П.

Решение

При $1 \ll l$ используем формулу Пуазейля:

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta L}(p_1 - p_2) = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{dp}{dx} \quad \text{(для газов)}$$

$$\rho = \frac{\mu p}{RT} \Rightarrow Q_m = \rho Q_V = \frac{\mu p}{RT} \cdot \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{dp}{dx} =$$

$$= \frac{\pi \mu r^4}{16\eta RT} \cdot \frac{d(p^2)}{dx} \approx \frac{\pi \mu r^4}{16\eta RT} \cdot \frac{p_1^2 - p_2^2}{l}$$

При $p_1 \gg p_2$ считаем $p_2 \approx 0$, $p_1 = p$.

$$-\frac{dm}{dt} = Q_m = \frac{\pi \mu r^4}{16\eta RT} \cdot \frac{p^2}{L} \quad (1)$$

$$m = \frac{pV\mu}{RT} \Rightarrow -\frac{dm}{dt} = -\frac{V\mu}{RT} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (2)$$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{dt} = \frac{\pi r^4}{16\eta l V} p^2; \quad \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{\pi r^4}{16\eta LV} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = \frac{16\eta l V}{\pi r^4}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \approx 4{,}3 \text{ с.}$$

10.69. Камера объема $V = 100$ л откачивается при комнатной температуре с помощью идеального насоса (т. е. улавливающего все попадающие в него молекулы воздуха) через трубку радиуса $r = 2$ см и длины $L = 1$ м. Оценить время откачки от давления $P_1 = 10^{-4}$ Тор до давления $P_2 = 10^{-7}$ Тор.

Решение

При вакууме ($\lambda \gg L$) используем форм. Кнудсена:

$$Q_m = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi\mu}{RT}\right)^{1/2}\frac{r^3}{L}(P_1 - P_2) \approx \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi\mu}{RT}\right)^{1/2}\frac{r^3}{L}P$$

$$\frac{dm}{dt} = -Q_m \quad (1)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{V\mu}{RT}\cdot\frac{dp}{dt} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{4}{3}\left(\frac{2\pi RT}{\mu}\right)^{1/2}\frac{r^3}{VL}dt$$

$$\ln\frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi RT}{\mu}\right)^{1/2}\frac{r^3}{VL}\cdot t$$

$$t = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{1/2}\frac{VL}{r^3}\ln\frac{P_1}{P_2} \approx 88\text{ с.}$$

10.120. Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры T_1 и T_2, находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа n, масса атома m. Определить плотность теплового потока q между пластинами. Предполагается, что атомы газа в пространстве между пластинами имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами T_1 и T_2.

Решение

Из равенства потоков частиц:

$$\frac{n_1\langle v_1\rangle}{4} = \frac{n_2\langle v_2\rangle}{4} \Rightarrow n_1\sqrt{T_1} = n_2\sqrt{T_2} \qquad (1)$$

$$n_1 + n_2 = n \qquad (2)$$

$$\Rightarrow n_1 = n\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}; \qquad n_2 = n\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}.$$

Для параллельного потока частиц:

Число соударений: $\cancel{\langle n \rangle}$ $n\langle v\rangle$

Средняя кинетическая энергия: $2kT$

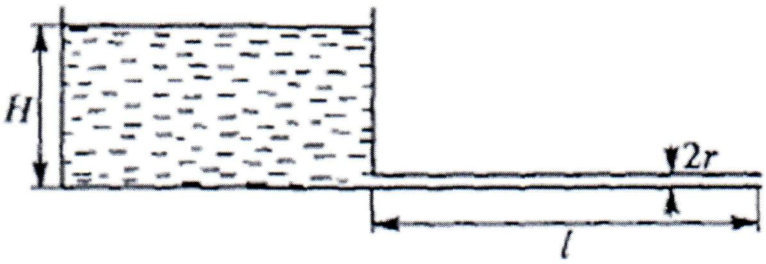
$$\Rightarrow q = n_1\langle v_1\rangle\cdot 2kT_1 - n_2\langle v_2\rangle\cdot 2kT_2 =$$

$$= 2k\left(n\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}\cdot\sqrt{\frac{8kT_1}{\pi m}}\cdot T_1 - n\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}\cdot\sqrt{\frac{8kT_2}{\pi m}}\cdot T_2\right) =$$

$$= 2kn\sqrt{\frac{8k}{\pi m}}\cdot\sqrt{T_1T_2}\,\frac{T_1-T_2}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}} =$$

$$= 4kn\sqrt{\frac{2k}{\pi m}}\sqrt{T_1T_2}\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)$$

14.27м. Однородный по высоте сосуд с площадью сечения $S = 100$ см^2 залит водой до уровня $H = 10$ см (рис.). Вблизи дна вода отводится трубочкой диаметра $2r = 2$ мм и длины $l = 1$ м. Трубочка открывается в атмосферу. По какому закону $h(t)$ вода вытекает из сосуда? Оценить также время, за которое вода вытечет из сосуда. Предполагается известной вязкость воды $\eta = 10^{-2}$ П.



Решение

Если трубка длинная, то устанавливается ламинарное течение:

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l}(p_1 - p_2) = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \cdot \rho g h$$

где h – текущая высота уровня жидкости.

$$Q_V = -\frac{dV}{dt} = -S\frac{dh}{dt} = \frac{\pi r^4 \rho g}{8\eta l} \cdot h$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{\pi \rho g r^4}{8\eta l S} dt = -\frac{dt}{\tau}, \quad h(0) = H$$

$$\Rightarrow h(t) = H \cdot e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{8 S \eta l}{\pi r^2 \cdot \rho g r^2} \approx 0{,}72 \text{ ч.}$$

Время вытекания: $H \approx r$

$$\Rightarrow t_{выт} \approx \tau \ln\frac{H}{r} \approx 3{,}3 \text{ ч.}$$

! Ламинарный поток устанавливается на расстоянии $a \approx 0{,}2 r \cdot Re$

При $l < a$ поток считаем турбулентным!

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$