Семинар 6

Реальные газы. Эффект Джоуля-Томпсона. Уравнение Бернулли.

16. Во сколько раз давление газа Ван-дер-Ваальса больше его критического давления, если известно, что его объём в 5 раз, а температура в 5,7 раза больше критических значений этих величин? **Ответ**: 3,14.

Решение.

Ур. Ван-дер-Ваальса: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

$p_{кр} = \frac{a}{27b^2}$; $V_{кр} = 3b$; $T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}$.

$\alpha = \frac{p}{p_{кр}}$; $\omega = \frac{V}{V_{кр}}$; $\tau = \frac{T}{T_{кр}}$.

$$\Rightarrow \left(\alpha + \frac{3}{\omega^2}\right)\left(\omega - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{8}{3}\tau}{\omega - \frac{1}{3}} - \frac{3}{\omega^2} \approx 3{,}14.$$

17. Найти изменение энтропии идеального газа, подвергнутого дросселированию через пористую перегородку, если начальное давление равно P_1 = 4 атм, конечное P_2 = 1 атм. **Ответ**: 11,5 Дж/К.

Решение.

Для идеального газа: $a = 0,\ b = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$

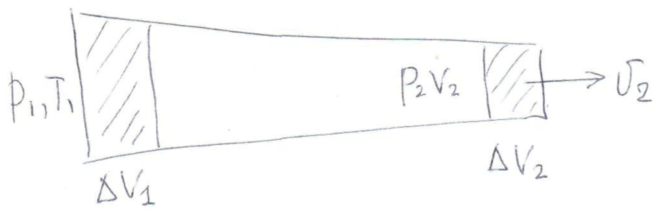
Изменение энтропии:

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} = -R \ln \frac{P_2}{P_1} = R \ln \frac{P_1}{P_2} =$$

$$= 8{,}31 \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \ln 4 = 11{,}52 \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

18. Оценить максимально возможную скорость истечения воздуха при нормальных условиях через отверстие, выходящее в вакуум. **Ответ**: 740 м/с

Решение.



Меняется не только внутр., но и кинетич. энергия!

$$\Delta U + \Delta E_k = \Delta Q + \Delta A'$$

Адиабат. течение $\Rightarrow$ $\Delta Q \approx 0$

$$\Delta A' = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 = \nu R (T_1 - T_2) \quad \text{(ид. газ)}$$

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1); \qquad \Delta E_k = \nu \mu (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (C_V + R)(T_2 - T_1) + \frac{\mu}{2}(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow C_p T + \frac{\mu}{2} \upsilon^2 = const$$

$$\upsilon_1 = 0, \ \upsilon_2 = \upsilon \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p (T_1 - T_2)}$$

Адиабата: $pV^\gamma = const$, $V = \frac{RT}{p}$ $\Rightarrow T^\gamma p^{1-\gamma} = const$.

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

Скорость максимальна при $p_2 = 0$ (вакуум):

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T_1} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \frac{\gamma}{\gamma - 1} R T_1} \approx 740 \text{ м/с}$$

6.17. После демонстрации критического состояния вещества ампула, заполненная эфиром, охлаждается. Оказалось, что при некоторой температуре T жидкость, плотность которой $\rho_ж = 1{,}9\rho_{кр}$, заполняет ровно половину пробирки. Определить эту температуру T. Критическая температура эфира $T_{кр} = 467$ К.

Решение.

Сохранение массы:

$$m = \rho_{кр} V = \rho_ж \frac{V}{2} + \rho_г \frac{V}{2} = 1{,}9\, \rho_{кр} \frac{V}{2} + \rho_г \cdot \frac{V}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho_п}{\rho_{кр}} = 0{,}1 \qquad \frac{\rho_ж}{\rho_{кр}} = 1{,}9.$$

$$\omega_п = \frac{V_п}{V_{кр}} \approx \frac{m/\rho_п}{m/\rho_{кр}} = \frac{\rho_{кр}}{\rho_п} = 10$$

$$\omega_ж = \frac{V_ж}{V_{кр}} = \frac{\rho_{кр}}{\rho_ж} = \frac{1}{1{,}9} \approx 0{,}526$$

$$\left(\alpha + \frac{3}{\omega^2}\right)\left(\omega - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\alpha + \frac{3}{10^2}\right)\left(10 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau \\ \left(\alpha + \frac{3}{(0{,}526)^2}\right)\left(0{,}526 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0{,}19; \quad \tau = 0{,}8.$$

$$T = \tau \cdot T_{кр} = 0{,}8 \cdot 467\ К = 373{,}6\ К.$$

6.52. Один моль эфира, находящегося в критическом состоянии, расширяется в теплоизолированный вакуумированный сосуд, так что его объем увеличивается в $N = 17$ раз. Считая, что теплоемкость эфира $C_v = 3R$ от температуры не зависит, определить изменение энтропии эфира в этом процессе.

Решение.

Адиабатическое расширение:

$\Delta Q = 0, \ \Delta A = 0 \ \Rightarrow \ \Delta U = 0 \ \Rightarrow \ U = const.$

Внутр энергия для газа Ван-дер-Ваальса:

$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V}\right) = const.$

Критическое состояние: $T_1 = T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}$; $V_1 = V_{кр} = 3b.$

$V_2 = N V_1 = 3Nb.$

$U_1 = U_2 \ \Rightarrow \ C_V T_1 - \frac{a}{3b} = C_V T_2 - \frac{a}{3bN} = C_V \frac{8a}{27Rb} - \frac{a}{3b}$

$C_V = 3R \ \Rightarrow \ T_2 = \frac{11}{17} T_1.$

Энтропия: $S = \nu\left(C_V \ln T + R \ln(V - b) + const\right)$

$\Delta S = \nu\left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}\right) = 1{,}9R \approx 15{,}9 \ \frac{Дж}{К}.$

2.11. Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре $T_1 = 273$ К, вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость $\upsilon = 400$ м/с. Найти температуру вытекающего воздуха T_2 в конце трубки, а также давление P_1 воздуха в баллоне. Процесс истечения газа считать адиабатическим.

Решение.

1) Из задачи №18: $C_p T + \frac{\mu \upsilon^2}{2} = const.$

$$C_p T_1 = C_p T_2 + \frac{\mu \upsilon^2}{2}; \quad C_p = \frac{7}{2} R.$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{\mu \upsilon^2}{2 C_p} = 273\,К - \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль} \cdot \left(400\, \frac{м}{с}\right)^2}{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}} \simeq 193\, К.$$

2) $pV^\gamma = const;$

$$pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{P}$$

$$\Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = const.$$

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma, \quad P_2 = 1\, атм.$$

$$P_1 = P_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} = -\frac{C_p/C_V}{C_p/C_V - 1} = -\frac{C_p}{C_p - C_V} = -\frac{C_p}{R} = -\frac{7}{2}.$$

$$P_1 = 1\, атм \left(\frac{193\, К}{273\, К}\right)^{-7/2} \simeq 3{,}37\, атм.$$

6.68. Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с $a = 0$ в опыте Джоуля-Томсона всегда нагревается. Определить повышение температуры при расширении.

6.69. Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с $b = 0$ в опыте Джоуля-Томсона всегда охлаждается. Определить понижение температуры при расширении.

Решение.

Энтальпия: $H = U + pV = const$

1) $a = 0,\ b \neq 0 \Rightarrow$ ВдВ: $p(V-b) = RT$

$$U = C_V T - \frac{a}{V} \Rightarrow H = C_V T - \frac{a}{V} + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)V \overset{a=0}{=}$$

$$= (C_V + R)T + bp$$

$$\Delta H = 0 \Rightarrow (C_V + R)\Delta T + b\Delta p = 0$$

$$-\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{b}{C_V + R} \approx \frac{b}{C_p} > 0 \quad (\Delta p < 0)$$

2) Аналогично: $a \neq 0,\ b = 0$

$$H = (C_V + R)T - \frac{2a}{V}, \quad \left(p + \frac{a}{V^2}\right)V = RT$$

$$\Delta T = \frac{2a}{C_V + R}\Delta\left(\frac{1}{V}\right) < 0, \text{ т.к. } V_1 > V_0, \text{ и } \Delta\left(\frac{1}{V}\right) < 0.$$

Примечание: дифф. эффект Джоуля-Томсона:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_p}$$