Элементы теории упругости. Гидростатика. 13.7, 13.16, 13.39, 14.16

ЗАДАНИЕ: 13.18, 13.36, 13.50, 13.33

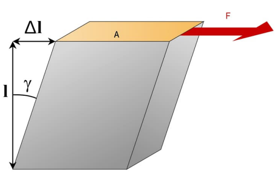
1) **Элементы теории упругости.** —

Деформации — растяжение, сжатие, сдвиг:

$\Delta l-$ абсолютная деформация;

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация;

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta l}{l}$ - деформация сдвига;



1. **Закон Гука.** $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$; или $\sigma = E\varepsilon$;

2. **Поперечное сжатие** - изменение поперечных размеров при деформации сжатия-растяжения:

$\frac{\Delta D}{D} = \mu\frac{\Delta l}{l}$, где μ - коэффициент Пуассона и D - диаметр;

3. **Одноосное напряжение.** - $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$;

$\sigma_x = E'\varepsilon_x$, где $E' = E\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$

4. **Всестороннее сжатие.** $P_x = P_y = P_z = P \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$;

$P = k\frac{\Delta V}{V}$, где $k = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ - модуль объемного сжатия;

5. **Работа и энергия при деформации.**

$A = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$

$dA = Fdl = \sigma S dl = \sigma S l \frac{\Delta l}{l} = V\sigma d\varepsilon$

$A = VE\int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = V\frac{E\varepsilon^2}{2} = W$ - потенциальная энергия;

Плотность потенциальной энергии.

$\omega_{\text{пот}} = \frac{W}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$ - для сжатия-растяжения;

6. **Распространение упругих волн в стержне.**

Упругой волной называется процесс распространения механических деформаций в упругой среде.

Деформации сжатия и сдвига и связанная с ними энергия переносятся упругой волной из одной точки среды в другую.

При этом потока массы вещества не возникает.

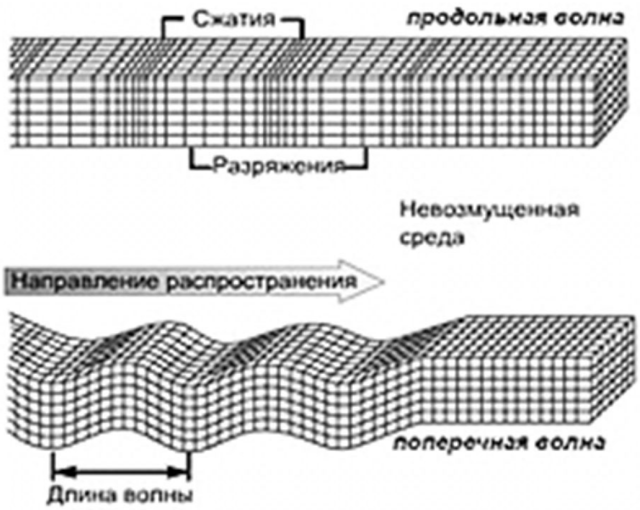
Для существования в среде упругих волн необходимо выполнение следующих условий:

наличие источника колебаний;

наличие упругой среды, частицы которой будут передавать колебания за счет связи с другими частицами.

Упругие волны бывают продольные и поперечные.

В газе и жидкости упругие волны только продольные, в металле могут быть как продольные (волна сжатия), так и поперечные (волна сдвига) упругие волны.



Продольная и поперечная волны в твердом теле

Электромагнитные волны в **вакууме** - поперечные.

Распространение волн в стержне (продольные волны).

Характеристики волны

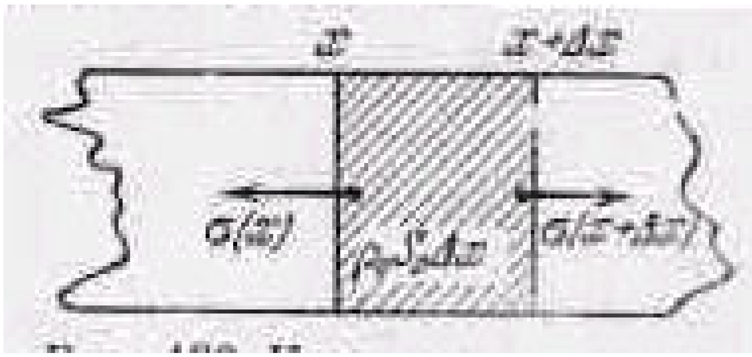
Длина волны - это расстояние между двумя ближайшими горбами или впадинами поперечной волны, или расстояние между двумя ближайшими сгущениями или разрежениями продольной волны.

Скорость волны "c это скорость распространения колебаний.

Скорость распространения волны и длина волны зависят от среды, в которой они распространяются. Наибольшая скорость распространения волн в твердых телах, наименьшая - в газах.

По истечении времени t после приложения силы участок стержня длины x=ct будет равномерно сжат, остальная часть стержня останется еще ненапряженной.

Сечение, являющееся границей между напряженной и ненапряженной частями стержня, называется фронтом упругой волны. Фронт упругой волны движется со скоростью "c" . Определим ее.



Запишем 2-й закон Ньютона для участка (x,x+dx)

Масса участка $\rho S dx$, смещение ξ, сила $S\sigma(x)$

$\rho S dx \frac{d^2\xi}{dt^2} = S\sigma(x+dx) - S\sigma(x) \Rightarrow \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d\sigma}{dx}$

$\sigma = E\varepsilon = E\frac{dl}{l} = E\frac{d\xi}{dx} \Rightarrow$

$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2\xi}{dx^2} = c^2\frac{d^2\xi}{dx^2}$ Это волновое уравнение. Коэффициент=квадрату скорости.

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - скорость распространения продольной волны (звуковая волна);

Есть еще одна скорость, это скорость движения деформации v. За время t фронт волны проходит расстояние L=ct. За это же время торец стержня проходит расстояние $\Delta L = vt = v\frac{L}{c}$. Откуда деформация стержня за фронтом волны

$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon = \frac{v}{c}$, а скорость движения деформации (для всех точек стержня за фронтом)

$v = c\varepsilon$

Из закона Гука можно получить давление

$\frac{F}{S} = P = E\varepsilon = E\frac{v}{c};$

Используя закон Ньютона $\Delta P = F\Delta t$ можно получить еще одно выражение для P

$\Delta P = \Delta(mv) = \rho SLv = PS\Delta t = PS\frac{L}{c} \Rightarrow$

$P = \rho cv;$

==

Задача 13.7

13.7. Резиновый цилиндр с высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

$1) dW = \frac{E\varepsilon^2}{2} S dl = \frac{ES}{2}\frac{P^2}{(ES)^2}\frac{l^2}{h^2} dl = \frac{P^2}{2Eh^2S} l^2 dl$, т.к. $\varepsilon = \frac{F}{SE} = \frac{P}{SE}\frac{l}{h}$

$W = \int dW = \frac{P^2 h}{6ES}$;

2) $dW_{2h} = \frac{ES}{2}\frac{1}{(ES)^2}\left(P + P\frac{l}{h}\right)^2 dl$

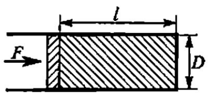
$W_{2h} = \frac{P^2}{2ES}\int_0^h \left(1 + \frac{l}{h}\right)^2 dl = \frac{P^2}{2ES}\int_1^2 t^2 dt = \frac{7P^2 h}{6ES}$, где $t = 1 + \frac{l}{h}$;

$W_{2h} = 7W_h$;

==

Задача 13.16

13.16. Однородный круглый резиновый жгут длиной l и диаметром D помещен в стальную трубку с закрытым концом того же диаметра (рис. 349). На конец жгута со стороны открытого конца трубки начинает действовать сила F, равномерно распределенная по всему сечению жгута. На сколько уменьшится при этом длина жгута? Упругие свойства резины считать известными.



$$\sigma_x = E'\varepsilon_x, \text{ где } E' = E\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)};$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E'} = \frac{F}{SE}\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)};$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{SE}\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)};$$

==

Задача 13.39

13.39. Два одинаковых тонких стальных бруска длиной $l = 10$ см ($\rho = 7{,}8$ г/см^3, $E = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см^2) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет $T_y = 200$ Н/мм^2?

==

1) После столкновения по обоим сержням распростроняется волна сжатия со скоростью $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Время сжатия $\Delta\tau = \frac{L}{c}$, то же самое для обратного растяжения

$\Delta\tau = \frac{L}{c}$

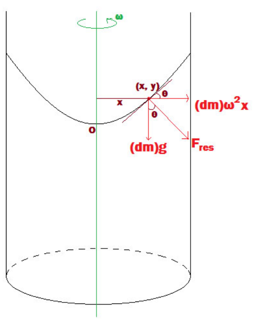
Суммарное время:$\Delta\tau = \frac{2L}{c}$

2) $T_y = E\varepsilon = E\frac{v}{c} \Rightarrow v = \frac{cT_y}{E}$;

Неупругие явления возникнут при скоростях сжатия $v \geq \frac{cT_y}{E}$;r r r ==

Задача 14.16

14.16. Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Z в цилиндрическом сосуде.



Поверхность жидкости формируется двумя силами: центробежной и гравитацией.

Равнодействующая перпенликулярна к поверхности и определяет угол наклона жидкости

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx;$

$y(x) = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + h;$