

Семинар 5

Законы сохранения. Упругие и неупругие столкновения.

4.70. Найти изменение кинетической энергии ΔK и импульса Δp тела, движущегося со скоростью u , при упругом ударе его о стенку, движущуюся в том же направлении равномерно со скоростью $u < u$. При каком соотношении между скоростью тела u и скоростью стенки u тело остановится?

Решение.

Упругое столкновение — сохраняются импульс и энергия

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{o1} + m_2 \vec{v}_{o2} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{o1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{o2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 + v_{o2} = v_1 + v_{o1}$$

Стенка: $m_2 \gg m_1$ и $v_2 \approx v_{o2} \Rightarrow v_1 = -v_{o1} + 2v_{o2} (*)$

Изменение импульса: $\Delta p = -2m_1(v_{o1} - v_{o2})$

Условие остановки: $v_{o1} = 2v_{o2}$

Изменение кинетической энергии тела:

$$\Delta K = \frac{m_1 v_{o1}^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} \stackrel{(*)}{=} 2m_1 v_{o2}(v_{o1} - v_{o2})$$

4.109. Найти минимальную относительную скорость V_{\min} двух одинаковых метеоритов, необходимую для их нагрева и полного испарения в результате испарения. Теплота нагревания и испарения 1 г вещества метеоритов составляет $Q = 10^{10}$ эрг/г.

Решение.

Неупругий удар — кинетическая энергия переходит в тепло.

$$2mQ = 2 \cdot \frac{m}{2} \left(\frac{V}{2} \right)^2 \quad (\text{в с.о. центра масс}).$$

$$\Rightarrow Q = \frac{V^2}{8} \Rightarrow V = \sqrt{8Q} \approx 2,83 \text{ км/с.}$$

4.80. По теории, разработанной Г. Герцем (1882 г.), при столкновении упругих шаров сила взаимодействия пропорциональна деформации в степени $3/2$, т.е. $F = kx^{3/2}$. Рассмотреть лобовое столкновение шаров одинакового радиуса с одинаковой упругой константой k , но разными массами m и $m/3$. Начальные скорости v_0 и $-v_0$. Определить величину максимальной деформации шаров x_{\max} .

Решение.

Скорость при максимальной деформации шаров — v

$$mv_0 - \frac{m}{3}v_0 = \frac{4}{3}mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

Энергия деформации равна разности кинетических энергий:

$$\begin{aligned} E_{\text{пот}} &= E_{k1} + E_{k2} - E_{k\text{деф}} = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m}{3} \frac{v_0^2}{2} - \frac{4}{3}m \frac{(v_0/2)^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \end{aligned}$$


$$E_{\text{пот}} = \int_0^x F(\xi) d\xi = \int_0^x k \xi^{3/2} d\xi = \frac{2}{5} k x^{5/2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2}{5} k x^{5/2}$$

$$x = \left(\frac{5}{4} \frac{mv_0^2}{k} \right)^{2/5}$$

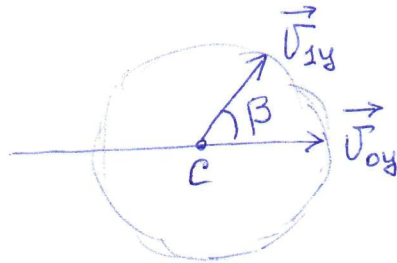
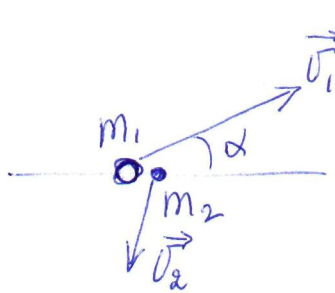
4.90. Две частицы, массы которых равны m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол $\alpha = 30^\circ$ в лабораторной системе отсчета или на угол $\beta = 60^\circ$ в системе центра масс. Определить отношение m_1/m_2 .

Решение.

Лабораторная система отсчета (ЛСО) — относительно неподвижного наблюдателя (лаборанта )

Система центра масс (СЦМ) — движется с ним.

В СЦМ импульсы частиц при столкновении меняются по направлению, но не по величине!



$$|\vec{v}_{0y}| = |\vec{v}_{1y}| \quad (*)$$

Скорость центра масс: $m_1 v_0 - m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_{цм}$

$$v_{цм} = v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Скорость тяжелой частицы m_1 в СЦМ!

$$v_{0y} = v_0 - v_{цм} = v_0 - v_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \stackrel{(*)}{=} v_{1y}$$

Проекция скорости на вертикаль в ЛСО и СЦМ

$$\text{равны: } v_1 \sin \alpha = v_{1y} \sin \beta = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \sin \beta$$

$$\text{По горизонтали: } v_1 \cos \alpha = v_{1y} \cos \beta + v_{цм} =$$

$$= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \cos \beta + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta + \frac{m_1 - m_2}{2m_2 \sin \beta}$$

$$\alpha = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$$

4.108. Ядро с массовым числом A и кинетической энергией $K_0 = 7$ МэВ налетает на неподвижное ядро с массовым числом $A/6$. В результате неупругого рассеяния налетающее ядро остается неизменным, а ядро мишени оказывается возбужденным с энергией возбуждения $E^* = 0,75$ МэВ. Определить максимальный угол рассеяния θ_{\max} падающего ядра в лабораторной системе отсчета.

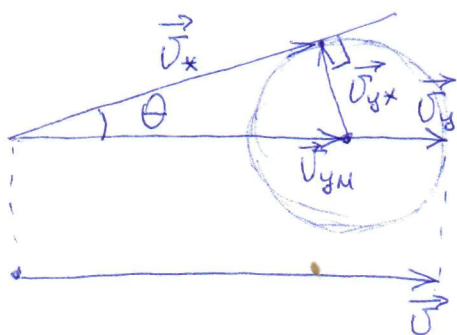
Решение.

В СЦМ импульс системы равен 0 до и после соударения. Пусть p — импульс частицы "до", p^* — импульс частицы "после".

$$\frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^{*2}}{2m_1} + \frac{p^{*2}}{2m_2} + Q \quad \underline{Q = E^*}$$

$$p^{*2} = p^2 - \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} Q$$

Диаграмма столкновения:



Скорости!

\vec{v} - го соударения

\vec{U}_* — после сожжения, $\max_{\theta} \gamma(\theta)$

\vec{U}_y — в СЦМ до соударения

$\vec{V}_{\text{г*}}$ - в СЧМ после соударения.

$\vec{v}_{цм}$ — скорость центра масс

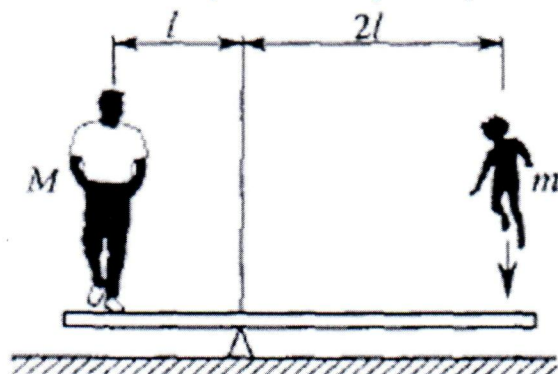
$$K = \frac{m_1 v^2}{2}, \quad v = \frac{p}{m}, \quad v_* = \frac{p_*}{m}$$

$$\Rightarrow v_{y*} = v_y \left[1 - \frac{(m_1 + m_2)Q}{m_2 K} \right]$$

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v_{ym} \Rightarrow v_{ym} = v \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{V_{y*}}{V_{ym}} = \frac{1}{12}$$

6.4. Длинная жесткая доска может свободно вращаться вокруг оси, делящей ее длину в отношении 1:2. На длинный конец доски с высоты $h = 1,5$ м прыгает мальчик, масса которого $m = 40$ кг. На коротком плече стоит мужчина массы $M = 80$ кг (рис. 130). На какую высоту x подбросит доска мужчину после прыжка мальчика? Массой доски пренебречь. Доска расположена невысоко над полом, так что начальным наклоном доски к полу можно пренебречь.



Решение.

Приближение: сила тяжести за малое время удара не проявляется.

Сохранение момента импульса системы:

$$m v_0 \cdot 2l = m v_1 \cdot 2l + M v_2 \cdot l = \omega [m(2l)^2 + M l^2]$$

$$\omega = \frac{m v_0 \cdot 2l}{m(2l)^2 + M l^2}$$

Скорость мальчика: $v_r = \omega l$

$$v_r = \frac{m v_0 \cdot 2l^2}{m \cdot 4l^2 + M l^2} = v_0 \cdot \frac{2}{4 + (M/m)} = \frac{v_0}{3}$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow \frac{v_r^2}{v_0^2} = \frac{h_r}{h}$$

$$h_r = h \left(\frac{v_r}{v_0} \right)^2 = h \frac{4m^2}{(4m + M)^2} = \frac{h}{9} = 0,167 \text{ м.}$$