Семинар 1

Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Адиабатический и политропический процессы.

1. В комнате объёмом V в течение некоторого времени был включен нагреватель. В результате температура воздуха увеличилась от T_1 до T_2. Давление в комнате не изменилось. Найти изменение внутренней энергии ΔU воздуха, содержащегося в комнате.

Решение.

Считаем идеальным газом:

$$pV = \nu R T$$

$$pV_1 = \nu R T_1, \quad pV_2 = \nu R T_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Число молей в комнате:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{V_1}{V_2} = \nu_1 \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \nu_1 T_1 = \nu_2 T_2$$

Изменение ~~числа молей~~ внутр. энергии:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C(\nu_2 T_2 - \nu_1 T_1) = 0.$$

2. Найти работу, которую совершает моль воздуха, расширяясь от объёма V_0 до $V_1 = 2V_0$ в изотермическом процессе при комнатной температуре.
Ответ: 1,7 кДж.

Решение.

Изотермический процесс:

$$pV = \nu RT = const \Rightarrow p_0 V_0 = p_1 V_1 \Rightarrow p = \frac{p_0 V_0}{V}$$

Работа газа:

$$\delta A = p\,dV = p_0 V_0 \frac{dV}{V}$$

$$A = p_0 V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = RT_0 \ln 2 = 1{,}7 \text{ кДж.}$$

3. Температура воздуха равна T = 273 К. Найти изменение скорости звука при изменении температуры на ΔT = 1 К.
Ответ: 0,61 м/с.

Решение.

Идеальный газ: $p = \rho \frac{RT}{\mu}$

$$c_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$$

2-х атомный газ:

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad C_p = \frac{7}{2} R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$$

$$c_{зв} = \left(\frac{\frac{7}{5} \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 273\,К}{29 \cdot 10^{-3}\,кг/моль} \right)^{1/2} = 331\ \frac{м}{с}$$

$$c_{зв} \sim \sqrt{T} \Rightarrow \frac{dc_{зв}}{c_{зв}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dT}{T}$$

$$\Delta T \ll T \Rightarrow \Delta c_{зв} = c_{зв} \cdot \frac{\Delta T}{2T} \approx 0{,}61\ м/с.$$

1.40. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема в 4 л до конечного объема в 1 л. Давление при этом возросло от 1 до 8 атм. Найти теплоемкость *C* всей массы гелия, если его начальная температура была 300 К.

Решение.

$$pV = \nu RT \quad (*)$$

Дифференцируем: $pdV + Vdp = \nu R dT$

$$\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = \frac{\nu R dT}{\nu RT} = \frac{dT}{T} \quad (**)$$

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow C dT = C_V dT + p dV$$

$$p dV = (C - C_V) dT$$

$$(*) \quad \frac{p dV}{pV} = \frac{(C - C_V) dT}{RT} \overset{(**)}{\Rightarrow} \frac{C - C_p}{C - C_V} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p}$$

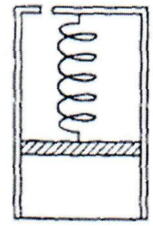
$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V} \Rightarrow pV^n = const., \quad C = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}$$

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \Rightarrow n = 1{,}5$$

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_p = \frac{5}{2}R \quad (\text{одноатомный газ}) \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

$$C = \frac{3}{2}R \cdot \frac{\frac{3}{2} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{2} - 1} = -\frac{R}{2}.$$

1.54. Моль идеального газа нагревают в цилиндре под поршнем, удерживаемым в положении равновесия пружиной, подчиняющейся закону Гука (рис.). Стенки цилиндра и поршень адиабатические, а дно проводит тепло. Начальный объем газа V_0, при котором пружина не деформирована, подобран так, что $P_0S^2 = kV_0$, где P_0 – наружное атмосферное давление, S — площадь поршня, k — коэффициент упругости пружины. Найти теплоемкость газа для этого процесса.



Решение.

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow C dT = C_V dT + pS dx$$

$$C = C_V + pS\frac{dx}{dT}$$

$$p_0 S + kx = pS$$

$$dF = S dp = k dx = k\frac{dV}{S} \Rightarrow dp = k\frac{dV}{S^2}$$

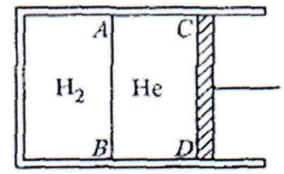
$$S^2 p = kV + \xi; \quad S^2 p = kV \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow p = \frac{kV}{S^2}$$

Идеальный газ: $\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \Rightarrow 2\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V}{2T} = \frac{R}{2p}$$

$$C = C_V + p\frac{dV}{dT} = C_V + p\cdot\frac{R}{2p} = C_V + \frac{R}{2}$$

1.87. Теплоизолированный сосуд разделен тонкой, неподвижной, теплопроводящей перегородкой АВ на две части. В одной находится моль газообразного водорода, в другой — моль газообразного гелия (рис.). Начальное состояние системы равновесное, причем оба газа имеют одинаковое давление P_0 и одинаковую температуру T_0 = 293 К. Затем поршень CD адиабатически и квазистатически выдвигают, в результате чего объем гелия увеличивается в 2 раза. Какова будет установившаяся температура обоих газов после расширения?



Решение.

$$\delta Q = dU + \delta A$$

Процесс адиабатический $\Rightarrow \delta Q = 0$.

$$(C_{V(H_2)} + C_{V(He)})\,dT + P_{He}\,dV = 0$$ (перегородка неподвижна!)

$$RT = P_{He} V$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(C_{V(H_2)} + C_{V(He)})\,dT}{RT} = -\frac{dV}{V}$$

$$C_{V(H_2)} = \frac{5}{2}R; \quad C_{V(He)} = \frac{3}{2}R$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{1}{4}\frac{dV}{V}$$

$$\ln\frac{T}{T_0} = -\frac{1}{4}\ln\frac{V}{V_0} = -\frac{1}{4}\ln 2 \Rightarrow T = T_0 \cdot 2^{-1/4}$$

2.6. Измерением скорости звука в газе можно контролировать его чистоту. С какой относительной точностью $\Delta\upsilon_{зв}/\upsilon_{зв}$ нужно измерить скорость звука в гелии, чтобы можно было заметить в нем примесь аргона (μ = 40 г/моль) в количестве 1 % (по количеству молей)?

Решение.

1) $$c_{зв}^2 = \gamma\frac{RT}{\mu}$$

$$c_{зв(г)} \simeq c_{зв(см)} \Rightarrow c_{зв(г)}^2 - c_{зв(см)}^2 \simeq \Delta c_{зв}\cdot 2c_{зв(г)}$$

$$\frac{\Delta c_{зв}}{c_{зв}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{c_{зв(см)}^2}{c_{зв(г)}^2}\right)$$

2) $$p_1V = \nu_1RT, \quad p_2V = \nu_2RT, \quad p_{см}V = \frac{m_{см}}{\mu_{см}}RT$$

$$p_{см} = p_1+p_2, \quad m_{см} = m_1+m_2 = \nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2}{\mu_{см}} = \nu_1+\nu_2 \Rightarrow \mu_{см} = \frac{\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2}{\nu_1+\nu_2}$$

3) $$C_{V(см)} = \frac{\nu_1C_{V(1)}+\nu_2C_{V(2)}}{\nu_1+\nu_2}; \quad C_{p(см)} = \frac{\nu_1C_{p(1)}+\nu_2C_{p(2)}}{\nu_1+\nu_2}.$$

4) $$c_{зв(см)}^2 = \frac{\gamma_{см}}{\mu_{см}}RT = RT\frac{\nu_г+\nu_A}{\mu_г\nu_г+\mu_A\nu_A}\cdot\frac{\nu_гC_{p(г)}+\nu_AC_{p(A)}}{\nu_гC_{V(г)}+\nu_AC_{V(A)}}$$

$$c_{зв(г)}^2 = \frac{\gamma_{(г)}}{\mu_{(г)}}RT = \frac{C_{p(г)}}{C_{V(г)}}\cdot\frac{RT}{\mu_г}$$

5) $$C_{V(г)} = C_{V(A)} = \frac{3}{2}R; \quad C_{p(г)} = C_{p(A)} = \frac{5}{2}R.$$

$$\Rightarrow \frac{c_{зв(см)}^2}{c_{зв(г)}^2} = 0{,}917 \Rightarrow \frac{\Delta c_{зв}}{c_{зв}} = 0{,}041$$