Неинерциальные системы отсчёта. 12.19, 12.7, 12.81, 12.34

ЗАДАНИЕ:12.27, 12.48, 12.80, 12.71

Неинерциальная система отсчёта — система отсчёта, движущаяся с ускорением или поворачивающаяся относительно инерциальной.

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчёта.

- Тем не менее, движение тел в неинерциальных системах отсчёта можно описывать теми же уравнениями движения, что и в инерциальных, если наряду с силами, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать силы инерции;

- Так как в неинерциальных системах отсчёта в принципе не может быть замкнутых систем тел (силы инерции всегда являются внешними силами для любого тела системы), то в них не выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.

Классическая механика постулирует следующие два принципа:

- время абсолютно, то есть промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех произвольно движущихся системах отсчёта;

- пространство абсолютно, то есть расстояние между двумя любыми материальными точками одинаково во всех произвольно движущихся системах отсчёта.

Эти два принципа позволяют записывать уравнение движения материальной точки относительно любой неинерциальной системы отсчёта. Уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта может быть представлено в виде:

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{dr} - m\vec{W} + m[\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}] + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}] + m[\omega \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]],$

где m — масса тела, $\vec{v}$ его скорость относительно неинерциальной системы отсчёта,

$\frac{dU}{dr}$ — силы в потенциальном поле,

$\vec{W}$ — ускорение поступательного движения тела,

ω — угловая скорость вращательного движения неинерциальной системы отсчёта вокруг мгновенной оси, проходящей через начало координат,

$[\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}]$ — ускорение вращательного движения тела,

$2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$ — сила кориолиса,

$m[\omega \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]]$ - центробежная сила.

В левой части уравнения остается только относительное ускорение, это придает этому уравнению вид второго закона Ньютона с дополнительными членами в правой части

При равномерном движении $\vec{W} = \dot{\vec{\omega}} = 0$ и уравнение принимает вид:

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{dr} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}] + m[\omega \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]],$

Последний член $[\omega \times [\vec{r} \times \vec{\omega}]] = \vec{r}\omega^2 - \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}) = \vec{r}\omega^2$ для $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{dr} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}] + m\vec{r}\omega^2, \quad$ для $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

Для равномерного вращения $\vec{F_{\text{цб}}} = m\omega^2\vec{r}$ и центробежное ускорение

$a_{\text{цб}} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r};$

Наличие центробежных сил - необъяснимая загадка, над которой безнадежно бился Ньютон.

Вращение ведра с водой.

1. До движения ведра поверхность плоская - движения ведра относительно воды нет.

2. В раскрученном ведре поверхность параболическая - и снова движения ведра относительно воды нет.

В чем причина? Эйнштейн: Гравитация и силы инерции эквивалентны (Принцип эквивалентности).

Лифт Эйнштейна. В падающем лифте - невесомость, т.е. $m_{\text{грав}} g = m_{\text{инерц}} g \Rightarrow$; или $m_{\text{грав}} = m_{\text{инерц}}$, что подтверждено в опытах Этвеша с точностью 10^{-8} и по современным данным 10^{-13}.

Однако формулировка Эйнштейна содержит некорректное условие - однородное гравитационное поле. Такого поля вообще говоря нет. Кроме того для сил инерции не выполняется 3-й закон Ньютона, либо мы чего то еще не понимаем!

==

Задача 12.19

12.19. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

1)**Инерциальная система.**

Относительный сдвиг мишени и пули складывается из двух частей $x = x_1 + x_2$;

- Пуля имеет начальную поперечную скорость $v_\perp = \omega R \Rightarrow x_1 = \omega R t_0 = \omega R \frac{2R}{v} = 2\frac{\omega R^2}{v}$;

- Сдвиг мишени $x_2 = \omega R \frac{2R}{v} = 2\frac{\omega R^2}{v}$;

$x = 4\frac{\omega R^2}{v} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{x}{2R} = 2\frac{\omega R}{v}$;

2)**Неинерциальная система.**

$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{кор}} = 2m\omega v$;

$\tau = \frac{2R}{v} \Rightarrow x = \frac{a\tau^2}{2} = 2\frac{\omega v \tau^2}{2} = \omega v (\frac{2R}{v})^2 = 4\frac{\omega R^2}{v}$;

$\alpha = \frac{x}{2R} = 2\frac{\omega R}{v}$;

Направление пули меняется с расстоянием, но изменение силы Кориолиса мало, т.к.

$\frac{dx}{dt} = 2\omega v \tau = 4\omega R << v$;

==

Задача 12.7

12.7. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60°$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

$m\frac{dv}{dt} = -mg + 2m[\vec{v}\vec{\omega}] = -mg + 2m\omega v\cos\varphi;$

$v = v_0 - gt \Rightarrow \tau = \frac{v_0}{g};$

$x = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g};$

$v_{\text{к}} = 2\omega\cos\varphi\int_0^\tau(v_0 - gt)dt = 2\omega\cos\varphi(v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2});$

$v_{\text{к}}^0 = \omega\cos\varphi\frac{v_0^2}{2g};$

$x_{\text{к}}^0 = 2\omega\cos\varphi(\frac{v_0\tau^2}{2} - \frac{g\tau^3}{6}) = \frac{2}{3}\omega\cos\varphi\frac{v_0^3}{g^2};$

$\Delta x = V_{\text{к}}^0\tau + \frac{2}{3}\omega\cos\varphi\frac{v_0^3}{g^2} - 2\omega\cos\varphi\frac{g\tau^3}{6} = \frac{4}{3}\omega\cos\varphi\frac{v_0^3}{g^2};$

$\Delta x = 50$ см.

======================================

Задача 12.81

12.81. Ноги циркового гимнаста прикреплены в точке O к вертикально расположенному стержню, который вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 339). Гимнаст описывает круговой конус. Угол между гимнастом и вертикальной осью $\alpha = 30°$. Определить частоту малых колебаний гимнаста ω в вертикальной плоскости около положения равновесия. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной $l = 1{,}75$ м.

φ-угол отклонения при колебаниях, тогда уравнение колебаний

$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{2}mgl\sin(\alpha+\varphi) + \int_0^l dm[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]] = -\frac{1}{2}mgl\sin(\alpha+\varphi) + \int_0^l \Omega^2(x\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha+\varphi))(\frac{m}{l})xdx$ или,

$\frac{ml^2}{3}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{2}mgl\sin(\alpha+\varphi) + \frac{1}{6}\mathrm{m}\Omega^2 l^2\sin[2(\alpha+\varphi)];$

Используя малость угла φ, получим

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\frac{3g}{2l}\cos\alpha - \Omega^2\cos(2\alpha)\right]\varphi + C = 0$

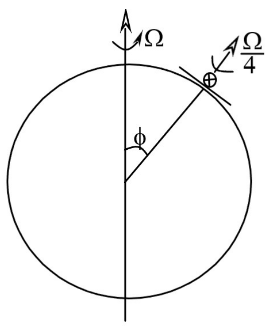
Делая замену $\varphi \Rightarrow \varphi - \frac{C}{\left[\frac{3g}{2l}\cos\alpha - \Omega^2\cos(2\alpha)\right]}$, получим уравнение гармонических колебаний

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[\frac{3g}{2l}\cos\alpha - \Omega^2\cos(2\alpha)\right]\varphi = 0$, откуда
$\omega = \sqrt{\left[\frac{3g}{2l}\cos\alpha - \Omega^2\cos(2\alpha)\right]}$;
$\cos\alpha = \frac{3g}{2\Omega^2 l}$, откуда, подставляя в ответ и раскрывая $\cos 2\alpha$, получим;

$\omega = \sin\alpha\sqrt{\frac{3g}{2l\cos\alpha}}$;

Задача 12.34

12.34. В центре неподвижной карусели находится человек. Он переходит с постоянной скоростью к краю карусели, двигаясь при этом с востока на запад. Считая карусель однородным диском, определить, при каком соотношении масс человека и карусели m/M последняя приобретет угловую скорость, равную четверти угловой скорости суточного вращения Земли. Считать, что карусель находится на широте $\varphi = 30°$, трением в подшипниках карусели пренебречь.



Момент инерции карусели I, тогда сила Кориолиса создает момент сил

$M = F_{\text{кор}} r \cos\phi$, где $\phi = 60°$ и уравнение вращения карусели имеет вид

$\frac{d}{dt}[(I + mr^2)\omega] = 2mv\Omega r\cos\phi$, где ω- угловая скорость карусели

$v = \frac{dr}{dt} = const. \Rightarrow r = vt, \;\; I = \frac{MR^2}{2}$

$v\frac{d}{dr}[(I + mr^2)\omega] = 2mv\Omega r\cos\phi$

$2mr\omega + (I + mr^2)\frac{d\omega}{dr} = 2m\Omega r\cos\phi$

$(I + mr^2)\frac{d\omega}{dr} = 2mr(\Omega\cos\phi - \omega) = 2mr(\omega' - \omega)$, где $\omega' = \Omega\cos\phi$

$\int \frac{d\omega}{\omega' - \omega} = \int \frac{dz}{z}$, где $z = I + mr^2$ и $dz = 2mrdr$

$-\ln\frac{\omega' - \frac{1}{4}\Omega}{\omega'} = \ln\frac{I + mR^2}{I}$;

$-\ln\frac{\omega' - \omega}{\omega'} = \ln\frac{I + mR^2}{I}$

$-\ln\frac{2\Omega-\Omega}{2\Omega} = \ln 2 = \ln(1 + 2\frac{mR^2}{MR^2}) \Rightarrow 2 = 1 + 2\frac{m}{M}$

$\frac{M}{m} = 2;$