Семинар 14

Неинерциальные системы отсчёта.

22. Математический маятник имеет длину L = 9,8 см. Точка подвеса маятника колеблется вдоль оси, расположенной горизонтально, по гармоническому закону с циклической частотой $\Omega = 11$ рад/с и амплитудой a = 1 мм. Найти амплитуду A установившихся колебаний маятника. Трение считать малым. *Указание:* перейти в систему отсчёта подвеса.

Ответ: $A = \dfrac{a}{1 - g/\left(l\Omega^2\right)} = 5{,}8$ мм.

Решение.

В системе отсчёта подвеса на груз действует сила инерции: $F_{ин} = -m\Omega^2 a \cdot \cos(\Omega t)$

$$\Rightarrow I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi + l \cdot F_{ин}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = -lm\Omega^2 a\cos(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\Omega^2\frac{a}{l}\cos(\Omega t)$$

Решение ищем как $\varphi = \varphi_0\cos(\Omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\Omega^2\varphi_0\cos(\Omega t + \varphi)$

$$-\Omega^2\varphi_0\cos(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2\varphi_0\cos(\Omega t + \varphi) = -\Omega^2\frac{a}{l}\cos(\Omega t)$$

$$\cos(\Omega t + \varphi) = \cos(\Omega t)\cos\varphi - \sin(\Omega t)\sin\varphi$$

Т.к. функции $\cos(\Omega t)$ и $\sin(\Omega t)$ линейно независимы,

$$\begin{cases} \varphi_0\cos\varphi(\omega_0^2 - \Omega^2) = -\Omega^2\frac{a}{l} \\ \varphi_0\sin\varphi(\omega_0^2 - \Omega^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\varphi = 0,\ \cos\varphi = 1.$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\Omega^2 a}{l(\omega_0^2 - \Omega^2)} = \frac{a}{l}\frac{1}{1 - \omega_0^2/\Omega^2}$$

$$A = l\varphi_0 = \frac{a}{1 - \omega_0^2/\Omega^2} = \frac{a}{1 - g/(l\Omega^2)} = 5{,}8 \text{ мм.}$$

23. Поезд, движется со скоростью V = 144 км/ч по закруглению радиуса R = 20 км. К потолку вагона подвешен на нити небольшой груз. Оценить угол отклонения нити $\Delta\alpha$ и относительное изменение натяжения нити $\Delta T/T$ по сравнению со случаем, когда поезд покоится.

Ответ: $\Delta\alpha \approx 8{,}2\cdot10^{-3}$ рад $= 0{,}5^{\circ}$, $\dfrac{\Delta T}{T} \approx -\dfrac{\Delta\alpha^2}{2} = 3{,}3\cdot10^{-5}$.

Решение.

Дополнительно есть центробежная сила:

$$a_{цб} = \frac{v^2}{R} = \frac{(40\ м/с)^2}{2\cdot10^4 м} = 0{,}08\ \frac{м}{с^2} \ll 9{,}8\ м/с^2 = g.$$

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha \approx \Delta\alpha = \frac{F_{цб}}{mg} = \frac{v^2}{gR} = 8{,}2\cdot10^{-3}\ рад$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\sqrt{F_{цб}^2+(mg)^2}-mg}{mg} = \sqrt{1+\left(\frac{F_{цб}}{mg}\right)^2}-1 = \frac{1}{2}\left(\frac{F_{цб}}{mg}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\alpha^2 \approx 3{,}3\cdot10^{-5}.$$

12.38. Какую работу должен совершить человек, чтобы пройти от периферии к центру карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с, если радиус карусели $R = 5$ м, а масса человека $m = 60$ кг? Зависит ли эта работа от формы пути, по которому идет человек? Силы трения не учитывать.

Решение.

Центробежная сила: $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}_\perp \Rightarrow F_{цб} = -m\omega^2 x$

Работа силы $F_{цб}$:

$$A = \int_R^0 F_{цб}(x)\,dx = \int_0^R m\omega^2 x\,dx = m\omega^2 \frac{R^2}{2} =$$

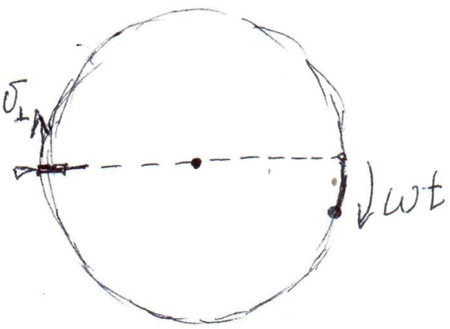
$$= 0{,}5 \cdot 60\,кг \cdot (1\,рад/с)^2 \cdot (5\,м)^2 = 750\,Дж.$$

Т.к. $r_\perp$, то от формы пути не зависит:

$$A = \int_{-R}^0 (\vec{F}_{цб}, d\vec{x})$$

12.19. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $\upsilon = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

Решение.



1) В системе отсчёта карусели действует сила Кориолиса

$$m\ddot{s} = F_{кор} = 2m\omega v$$

Время пролета пули: $t \approx \frac{2R}{v}$

$$\ddot{s} = 2\omega v \approx const$$

$$\Rightarrow s = \omega v \cdot t^2 = \frac{4\omega R^2}{v}$$

$$\alpha \approx \frac{s}{2R} = \frac{2\omega R}{v} = \frac{4\pi R}{vT} \approx 1{,}2^\circ.$$

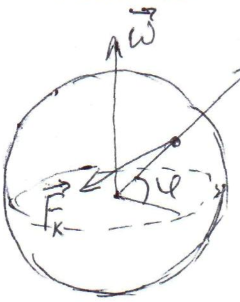
2) В лабораторной системе отсчёта, связанной с Землей: — происходит смещение ружья и цели из-за вращения:

$$s_1 = v_1 t = \omega R \cdot \frac{2R}{v} = \frac{2\omega R^2}{v} \qquad s_2 = s_1$$

$$s = s_1 + s_2 = \frac{4\omega R^2}{v}$$

12.7. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т.е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули υ_0 = 100 м/с, географическая широта места φ = 60°. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение.



1) $\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}'] = 2m[\vec{\upsilon}' \times \vec{\omega}]$

$\Rightarrow$ пуля отклоняется на запад.

$a_к \ll g \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0 - gt$

$F_к = 2m\omega(\upsilon_0 - gt)\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = 2m\omega(\upsilon_0 - gt)\cos\varphi$

$m\ddot{x} = F_к \Rightarrow \ddot{x} = 2\omega(\upsilon_0 - gt)\cos\varphi$

$\dot{x} = 2\omega\cos\varphi(\upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2})$; $x = \omega\cos\varphi\cdot(\upsilon_0 t^2 - \frac{gt^3}{3})$

Время подъема $t_1 = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow \upsilon_1 = \omega\cos\varphi\frac{\upsilon_0^2}{g}$, $x_1 = \frac{2}{3}\omega\cos\varphi\frac{\upsilon_0^3}{g^2}$

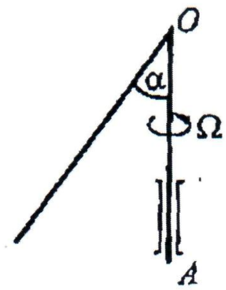
2) При движении пули вниз $F_к$ направлена на восток.

$\upsilon(t) = gt$ $F_к = 2m\omega\cdot gt\cdot\cos\varphi \Rightarrow \ddot{x} = -2\omega\cos\varphi\cdot gt$

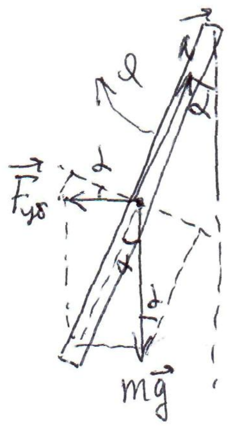
$\dot{x} = \upsilon_1 - \omega\cos\varphi\cdot gt^2$, $x = x_1 + \upsilon_1 t - \omega\cos\varphi\cdot\frac{gt^3}{3}$

$t_2 = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow x_{см} = \frac{4}{3}\omega\cos\varphi\frac{\upsilon_0^3}{g^2} \approx 0{,}51$ м.

12.81. Ноги циркового гимнаста прикреплены к точке O к вертикально расположенному стержню, который вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью Ω (рис.). Гимнаст описывает круговой конус. Угол между гимнастом и вертикальной осью α = 30°. Определить частоту малых колебаний ω в вертикальной плоскости около положения равновесия. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной l = 1,75 м.



Решение.



Точка равновесия: $F_{уб}\cos\alpha = mg\sin\alpha$

$$m\Omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \Omega^2\frac{l}{2}\cos\alpha = g;^{(*)} \quad \Omega^2 = \frac{2g}{l\cdot\cos\alpha}$$

Пусть $\alpha' = \alpha + \varphi$, где φ – малый угол $\varphi \ll \alpha$.

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad I = \frac{ml^2}{3}$$

$$M = \frac{l}{2}\left(F'_{уб}\cos\alpha' - mg\sin\alpha'\right) = \frac{l}{2}\left(m\Omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha'\cos\alpha' - mg\sin\alpha'\right) =$$

$$= \frac{ml}{2}\sin\alpha'\left(\Omega^2\frac{l}{2}\cos\alpha' - g\right)$$

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi \approx \cos\alpha - \varphi\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\alpha' \approx \sin\alpha$$

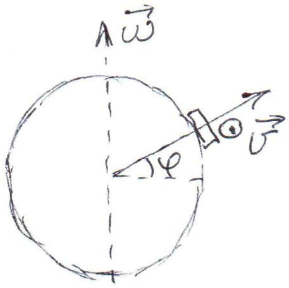
$$\overset{(*)}{\Rightarrow} M \approx \frac{ml}{2}\sin\alpha\left(-\varphi\cdot\frac{\Omega^2 l}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} = -\frac{ml^2}{4}\Omega^2\sin^2\alpha \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{3}{4}\Omega^2\sin^2\alpha\cdot\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{4}\Omega^2\sin^2\alpha = \frac{3}{4}\frac{2g}{l\cos\alpha}\sin^2\alpha = \frac{3g\sin^2\alpha}{2l\cos\alpha}$$

12.34. В центре неподвижной карусели находится человек. Он переходит с постоянной скоростью к краю карусели, двигаясь при этом с востока на запад. Считая карусель однородным диском, определить, при каком соотношении масс человека и карусели m/M последняя приобретет угловую скорость, равную четверти угловой скорости суточного вращения Земли. Считать, что карусель находится на широте $\varphi = 30°$, трением в подшипниках карусели пренебречь.

Решение.



$$\vec{F}_{кор} = -2m[\vec{\omega}\times\vec{v}] = 2m[\vec{v}\times\vec{\omega}]$$

$$F_{кор} = 2mv\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = 2mv\omega\cos\varphi$$

$$x = vt, \quad t_{пред} = R/v, \quad I(t) = \frac{MR^2}{2} + mx^2$$

$$M(t) = xF_{кор} = x\cdot 2mv\omega\cos\varphi$$

$$I\frac{d\Omega}{dt} = M$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{M}{I} = \frac{2mv\omega\cos\varphi\cdot vt}{\frac{MR^2}{2}+mv^2t^2}$$

$$d\Omega = \frac{mv^2\omega\cos\varphi\cdot 2t\,dt}{\frac{MR^2}{2}+mv^2t^2} = \frac{m\omega\cos\varphi\, d(v^2t^2)}{\frac{MR^2}{2}+m(v^2t^2)} = \frac{\omega\cos\varphi\, d(mx^2)}{\frac{MR^2}{2}+mx^2}$$

$$\Omega = \omega\cos\varphi\ln\left(\frac{MR^2}{2}+mx^2\right)\Big|_0^R = \omega\cos\varphi\ln\left(\frac{\frac{MR^2}{2}+mR^2}{\frac{MR^2}{2}}\right) =$$

$$= \omega\cos\varphi\ln\left(\frac{M+2m}{M}\right)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{4}, \quad \cos\varphi = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{2m}{M}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)-1\right)$$