Закон сохранения Импульса. Реактивное движение.
4.13, 3.11, 3.43, 3.60; **ЗАДАНИЕ: 4.118, 3.69, 3.41, T1**

1. Закон сохранения импульса.

Теорема Нетер: Каждой непрерывной симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения.

1. Однородность пространства - закон сохранения импульса.

2. Изотропность пространства - закон сохранения момента импульса.

3. Однородность времени - закон сохранения энергии.

Сохранение импульса замкнутой системы.

В силу однородности пространства свойства замкнутой механической системы не меняются при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве,

Уравнение Мещерского. Реактивное движение.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt$

Рассмотрим движение тела (для определенности ракеты) с переменной массой.

$dp = p(t+dt) - p(t) = (m - dm)(v + dv) + dm(v + u) - mv =$**, где v - скорость ракеты, а u - скорость топлива относительно ракеты**

$= mv + mdv - vdm - d$**mdv+vdm+udm-mv=mdv+udm=mdv+u**μdt**.** **где** $dm = \frac{dm}{dt}dt = \mu dt$; **Вернем векторные обозначения:**

Уравнение движения:

$md\vec{v} = \vec{F}dt - \vec{u}\mu dt$ **или** $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \mu\vec{u} = \vec{F} + \vec{R}$**, где** $\vec{R}$ **- реактивная сила;**

Уравнение Мещерского:

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2$**, где** $\mu_1\vec{u}_1$ **- потеря вещества, а** $\mu_2\vec{u}_2$ **- добавление;**

Формула Циолковского - зависимость скорости и ускорения от расхода вещества (топлива);

В отсутствии внешних сил

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt} \rightarrow md\vec{v} = -\vec{u}dm$**;**

1) $dv = -u\frac{dm}{m} \rightarrow v = uln\frac{m_н}{m_к}$

$v = uln\frac{m_0}{m_0-\mu t}$

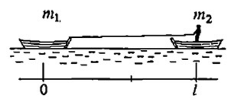
2) $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{u\mu}{m_0-\mu t} = \frac{\mu}{m_0}\frac{u}{1-\frac{\mu}{m_0}t} = \frac{ku}{1-kt}$**, где** $k = \frac{\mu}{m_0}$

$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{ku}}{\mathbf{1-kt}}$**, где** $k = \frac{\mu}{m_0}$

==

Задача 4-13

4.13* Человек, стоящий в лодке, подтягивает вторую лодку за веревку до их соприкосновения и далее удерживает их вместе (рис.). Где будут находиться обе лодки, когда их движение в результате трения о воду прекратится? Трение лодок о воду считать пропорциональным их скорости и одинаковым для обеих лодок, массы лодок m_1 и m_2, начальное расстояние между центрами их масс l.



Сил две: натяжение веревки T и сила трения $h\dot{x}$. Уравнение движения записывается для каждой лодки.

***Решение приведено в задачнике.**

Задача 3-11

3.11. По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. На тележки падает μ [г/с] снега. В момент времени $t = 0$ массы тележек равны m_0, а скорости — v_0. Начиная с момента $t = 0$, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса ее в дальнейшем останется постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

Запишем уравнения движения для каждой тележки.

$\frac{dp}{dt} = F_{\text{вн}} + \frac{dp}{dt}\text{вх} - \frac{dp}{dt}\text{вых}$ **при** $F_{\text{вн}} = 0$**;**

1. Снег сметается.

Из уравнения Мещерского $\vec{F}_{\text{доп}} = \mu(\vec{v}_{\text{вх}} - \vec{v}_{\text{вых}})$ **где** $\mu = \frac{dm}{dt}$**;**

$v_{\text{вх}} \parallel y$ **и поскольку** $v_{x\text{вх}} = 0$**, то** $\vec{F}_{\text{вх}} = 0$**;**

$\vec{F}_{\text{вых}} = -\mu(\vec{v}+\vec{v}_{\text{тел}})$**, откуда** $F_{x\text{вых}} = -\mu v$**; Тогда** $\frac{dp_x}{dt} = m_0\frac{dv}{dt} = -\mu v \rightarrow$

$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m_0}dt$ **и интегрируя получаем** $\mathbf{v} = \mathbf{v_0}\mathbf{e}^{-\frac{\mu}{\mathbf{m_0}}\mathbf{t}}$

2. Снег не сметается.

$\frac{dp_x}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{p}_x = mv_x = const \rightarrow (\mathbf{m}_0 + \mu t) = m_0 v_0$

$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{m_0 v_0}}{\mathbf{m_0}+\mu\mathbf{t}}$**;**

Экспонента быстрее степенной функции, т.е. первая тележка тормозится быстрее. Это происходит из за того, что дворник сметает импульс.

Задача $3_4 3$

3.43. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

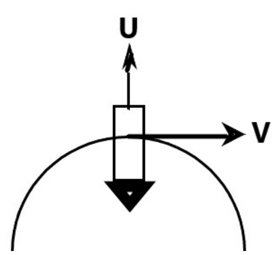
$F = 0; \to m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu u$;

1. $\uparrow\downarrow$ **На первом и втором участке уравнения одинаковые**

$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u}$; **Интегрируя от** m_0 **до** m **и меняя знак, получим:**

$\mathbf{ln\frac{m_0}{m} = \frac{2v}{u}}$.

2. Поворот.



Скорость можно разложить на продольную τ **и поперечную n составляющие. Скорость меняется только по направлению, по модулю скорость не меняется, т.е.** $\mathbf{v}_\tau = 0$;

Поэтому уравнение $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu u = -u\frac{dm}{dt}$ **можно записать в следующем виде:**

$mdv_n + udm = 0$

$\mathbf{v_n} \uparrow\downarrow \mathbf{u}$;

Используя уравнение и геометрию, поворот на малый угол: $d\alpha = \frac{dv_n}{v} = -\frac{udm}{mv}$**;**

Интегрируя, получим $\alpha = \frac{u}{v} ln \frac{m_0}{m}$**. Учитывая, что** $\alpha = \pi$ **получим;**

$\mathbf{ln \frac{m_0}{m} = \frac{\pi v}{u}}$**;**

Откуда, расход топлива в первом варианте (при торможении) меньше.

Задача 3-60

3.60. Какой максимальной высоты h_1 достигнет ракета, поднимающаяся вертикально вверх? Расход топлива во время работы двигателя $\tau = 50$ с остается постоянным. Скорость истечения газов относительно ракеты также постоянна и равна $u = 1000$ м/с. Отношение массы ракеты с топливом к конечной массе ракеты $\alpha = 10$. Ускорение силы тяжести принять постоянным и равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать. На какую высоту h_2 поднялась бы ракета, если бы топливо сгорело очень быстро ($\tau \to 0$)? Почему $h_1 \neq h_2$?

Указание. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + \text{const}.$

1. В задаче необходимо учесть, что при остановке двигателя подъем продолжается, т.е. $h = h_\tau + h_g$;

1) Во время работы двигателя $m\frac{dv}{dt} = -mg - \mu u$, **где** $\mu = \frac{dm}{dt}$ **и** $m = m_0 - \mu t$;

$dv = -gdt - \frac{\mu}{m}udt = -gdt - \frac{dm}{m}u = -gdt + \frac{\mu}{m_0}\frac{u}{1-\frac{\mu}{m_0}t}dt$;

$v = -gt - uln(1 - \frac{\mu}{m_0}t) = ulnm_0m - gt$;

$dh = vdt; \to h = -\frac{g\tau^2}{2} - u\int ln(1 - \frac{\mu}{m_0}t)dt$;

$\int lnxdx = xlnx - x + const;$ Для $x = 1 - \frac{\mu}{m_0}t$ **имеем:**

$I = \frac{m_0}{\mu}\int lnxdx = [(1 - \frac{\mu}{m_0}t)ln(1 - \frac{\mu}{m_0}t) - (1 - \frac{\mu}{m_0}t)]|_0^\tau + const =$;
$= (1 - \frac{\mu}{m_0}\tau)ln(1 - \frac{\mu}{m_0}\tau) - (1 - \frac{\mu}{m_0}\tau) + 1 =$
$= 0.1ln0.1 - 0.1 + 1 = 0.67$;
По условию $\alpha = \frac{m_0}{m} = 10$, **тогда** $h_\tau = u\tau\left[1 - ln\frac{\alpha}{\alpha-1}\right] - \frac{g\tau^2}{2}$;

2) После остановки двигателя ракета летит по инерции:
$h_g = \frac{v_\tau^2}{2g}$, **где** $v_\tau = uln\frac{m_0}{m} - g\tau$; **В результате:**

$\mathbf{h_{max} = h_\tau + h_g = 162 + 24,6 = 187}$ **км**

2. При $\tau \to 0$ влиянием тяжести можно пренебречь. В отсутствии внешних сил по формуле Циалковского скорость ракеты:

$v_{\text{р}} = uln\frac{m_0}{m} = u \cdot ln\alpha$**; и** $h = \frac{v_{\text{р}}^2}{2g} = \frac{u^2 \cdot ln^2\alpha}{2g} = 265$ **км.**

При сжигании топлива на земле высота подъема больше: $h_{max} = 265$ **км вместо** $h_{max} = 187$ **км.**