19. Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до υ_0. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Решение

$$\frac{dN(\upsilon)}{N_0} = f(\upsilon)\,d\upsilon = A\,d\upsilon \qquad \int_0^{\upsilon_0} A\,d\upsilon = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\upsilon_0}$$

Средняя скорость:

$$\langle \upsilon \rangle = \int_0^{\upsilon_0} \upsilon f(\upsilon)\,d\upsilon = \int_0^{\upsilon_0} \frac{\upsilon}{\upsilon_0}\,d\upsilon = \frac{1}{\upsilon_0}\frac{\upsilon_0^2}{2} = \frac{\upsilon_0}{2}$$

Среднеквадратичная скорость:

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \int_0^{\upsilon_0} \upsilon^2 f(\upsilon)\,d\upsilon = \frac{1}{\upsilon_0}\frac{\upsilon_0^3}{3} = \frac{\upsilon_0^2}{3} \Rightarrow \upsilon_{ск} = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{3}}$$

Абсолютная флуктуация

$$(\Delta \upsilon)^2 = \int_0^{\upsilon_0} (\upsilon - \langle \upsilon \rangle)^2 f(\upsilon)\,d\upsilon = \frac{1}{\upsilon_0}\int_0^{\upsilon_0}\left(\upsilon - \frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 d\upsilon = \frac{\upsilon_0^2}{12}$$

$$\Delta \upsilon = \frac{\upsilon_0}{2\sqrt{3}}$$

Относительная флуктуация:

$$\frac{(\Delta \upsilon)^2}{\langle \upsilon \rangle^2} = \frac{\upsilon_0^2/12}{\upsilon_0^2/4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\Delta \upsilon}{\langle \upsilon \rangle} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

20. Найти наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул азота при T = 300 К. Сравнить полученные значения со скоростью звука.

Решение

Распределение Максвелла:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2RT}\right)$$

Наиболее вероятная скорость: $\frac{df}{dv} = 0$

$$\Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 300\ К}{28 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}}} \approx 422\ м/с.$$

Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 476\ м/с$$

Среднеквадратическая скорость

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{3RT}{\mu} \Rightarrow v_{ск} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 517\ м/с$$

$$!\quad \frac{\mu \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} RT$$

Скорость звука:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{7}{5} \frac{RT}{\mu}} \approx 353\ \frac{м}{с}.$$

7.52. Какова бы была мгновенная скорость испарения воды с каждого квадратного сантиметра ее поверхности, если бы над этой поверхностью был вакуум, а температура воды в тот момент равнялась 300 К? Табличное значение давления насыщенного водяного пара при этой температуре P = 27 мм рт. ст. Сравнить полученную величину с величиной скорости испарения воды при обычных условиях (т. е. когда над поверхностью воды находится воздух при нормальном давлении) и объяснить получившееся расхождение.

Решение.

Число вылетающих из жидкости молекул равно числу столкновений молекул пара с поверхностью.

$$\frac{d^2 Z}{dS\,dt} = \frac{n\langle v\rangle}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = m\,\frac{n\langle v\rangle}{4} = m\,\frac{P}{kT}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} =$$

$$= P\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} = P\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{1/2} \approx 0{,}38\ \frac{г}{с\cdot см^2}$$

Эта величина много больше скорости испарения при нормальных условиях из-за слоя насыщенного пара вблизи поверхности.

7.14. В диоде электроны, эмитируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150$ К, определить долю электронов α, преодолевающих задерживающий потенциал: 1) $V = 0{,}2$ В; 2) $V = 0{,}4$ В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

Решение

Минимальная скорость электронов, достигающих диода:

$$\frac{m_e v_{min}^2}{2} = eU \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

Расп. Максвелла для абс. скорости в 2d пространств.

$$\frac{dN}{N_0} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\,dv_x\,dv_y = \frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2kT}\right)dv_x\,dv_y$$

Р-м фазовый объем $dv_x dv_y$ как кольцо $2\pi v\,dv$:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v\,dv$$

Доля молекул со скоростью $v > v_{min}$:

$$\alpha = \int_{v_{min}}^{\infty}\frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)v\,dv = \exp\left(-\frac{eU}{kT}\right)$$

$U = 0{,}2$ В: $\alpha = 0{,}13$

$U = 0{,}4$ В: $\alpha = 0{,}018$

7.18. В центре сферы радиуса R в некоторый момент времени создается N молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре T. Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность j потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени t_0, когда поток максимален, и найти скорость молекул υ_q, подлетающих к стенке в этот момент.

Решение

Расп. Максвелла: $f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\upsilon^2 \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)$

$$\upsilon = \frac{r}{t} \Rightarrow d\upsilon = -r\frac{dt}{t^2} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{r}{t^2}$$

Плотность потока:

$$j(t) = \frac{1}{S}\frac{dn}{dS} = \frac{1}{4\pi r^2} N_0 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2\frac{d\upsilon}{dt} =$$

$$= N_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{r^2}{t^2}\cdot\frac{r}{t^2}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)$$

$$\Rightarrow |j(t)| = N_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)\frac{r}{t^4}$$

$$j(t) \to max \Rightarrow \frac{dj}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)\cdot\frac{mr^2}{kT}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{r}{t^4} + \exp\left(-\frac{mr^2}{2kTt^2}\right)r\left(-\frac{4}{t^3}\right) = 0$$

$$\frac{mr^2}{kT}\cdot\frac{r}{t^5} = \frac{4r}{t^3} \Rightarrow t_{max} = \frac{r}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2}$$

$$\upsilon_m = \frac{r}{t_{max}} = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

7.45. В замкнутом сосуде находится разреженный идеальный газ под давлением P. В стенке сосуда сделано малое отверстие площади σ. Определить реактивную силу F, испытываемую сосудом при истечении газа через отверстие.

Решение

Число соудар. молекул о площадку:

$$\frac{d^2 Z}{dS\,dt} = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4}$$

Полная кинетич. энергия молекул:

$$\varepsilon = \frac{d^2 E}{dt\,dS} = \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} \frac{dn \cdot v}{4}, \quad dn = n_0 f(v)\,dv$$

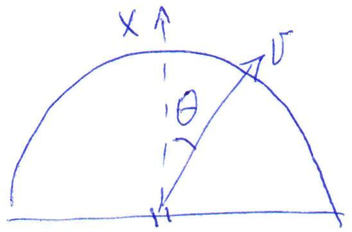
Для расп. Максвелла:

$$\varepsilon = n_0 kT \left(\frac{2kT}{\pi m}\right)^{1/2} = n_0 kT \left(\frac{2RT}{\pi \mu}\right)^{1/2}$$

Число частиц: $\dfrac{d^2 Z}{dS\,dt} = \dfrac{n_0}{4}\left(\dfrac{8RT}{\pi \mu}\right)^{1/2}$

$\Rightarrow$ Средняя энергия $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{d^2 E}{d^2 Z} = 2kT$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{m\langle v \rangle^2}{2} \Rightarrow \langle v \rangle^2 = \frac{2\varepsilon}{m} = \frac{4kT}{m}$$



Молекулы разлетаются изотропно

$$v_x = \langle v \rangle \cdot \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} = \frac{\langle v \rangle}{2} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Импульс: $p_x = m v_x = \sqrt{mkT}$

$$F = \frac{dp_{x\,сум}}{dt} = \frac{n_0 \langle v \rangle \sigma}{4} \cdot \frac{1}{2} m \langle v \rangle = \frac{P_0 \sigma}{4kT} \cdot \frac{m\langle v \rangle^2}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{P_0 \sigma}{4kT} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{4kT}{m} = \frac{P_0 \sigma}{2}$$

7.53. В сферическом реакторе радиуса r = 1 м идет химическая реакция между газом, заполняющим реактор, и материалом стенок реактора. Продуктом реакции является порошок, непрерывно удаляемый из реактора. В реакцию могут вступить только молекулы газа, имеющие кинетическую энергию $E \geq E_П = 1$ эВ, при этом вероятность реакции при ударе молекулы о стенку w = 10^{-3}. С какой скоростью dM/dt надо подавать газ в реактор, чтобы поддерживать в нем постоянное давление P_0 = 10 атм? Молярная масса газа μ = 40 г/моль. Считать, что вблизи стенок реактора распределение молекул по скоростям максвелловское при температуре T = 1160 К.

Решение

Число ударов о стенку: $\frac{n v}{4} \cdot S$, $n = n_0 f(v)$, $E = \frac{m v^2}{2}$

$$\frac{dM}{dt} = w m N_{уд} = w m \frac{S}{4} n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot 4\pi \int_{v_п}^{\infty} v \cdot v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2kT}\right) dv =$$

$$(*)\quad dE = \frac{m}{2} 2v\,dv = m v\,dv; \quad v^2 = 2E/m$$

$$= w S n_0 \pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{E_п}^{\infty} \frac{2E}{m} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE$$

$$(**)\quad \int x e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx - 1), \quad c = -\frac{1}{kT}; \quad n_0 = \frac{p_0}{kT}$$

$$I = \int_{E_п}^{\infty} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE = (kT)^2 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\left(-\frac{E}{kT} - 1\right)\Big|_{E_1}^{\infty} =$$

$$= (kT)^2 \exp\left(-\frac{E_п}{kT}\right)\left(1 + \frac{E_п}{kT}\right)$$

$$\frac{dM}{dt} = 2\pi \cdot \frac{wS}{m} \cdot \frac{m}{2\pi kT} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{p_0}{kT} (kT)^2 \exp\left(-\frac{E_п}{kT}\right)\left(1 + \frac{E_п}{kT}\right) =$$

$$= w S p_0 \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \left(1 + \frac{E_п}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_п}{kT}\right) \approx 5{,}1 \ \frac{г}{с}.$$