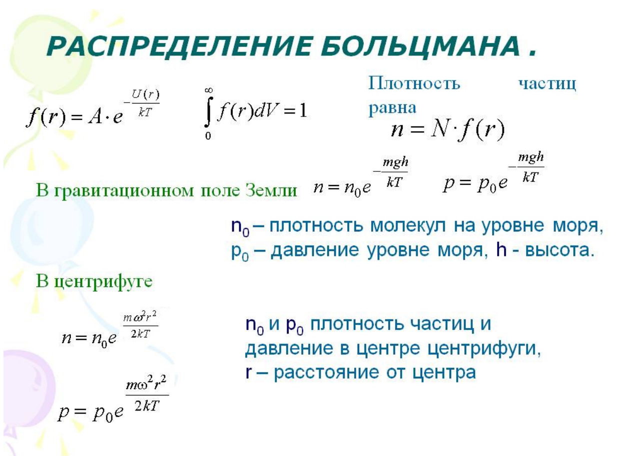
Элементы статистической физики. Распределение Больцмана.

Задачи: 8.11,8.28,8.56,8.52

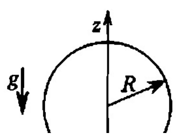
ЗАДАНИЕ: 8.15, 8.25, 8.70, 8.61

Распределение Больцмана.



Задача 8.11

8.11. Атмосфера планеты, на поверхности которой сила тяжести равна земной, состоит только из гелия и азота ($N_г/N_{аз} = 7$, где N — полное число соответствующих молекул в атмосфере). Найти скорость звука у поверхности такой планеты. Атмосферу считать изотермической с температурой $T = 200$ К, изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.



Скорость звука — скорость распространения упругих волн в среде: как продольных (в газах, жидкостях или твёрдых телах), так и поперечных, сдвиговых (в твёрдых телах).

Распространение звуковой волны процесс адиабатический, т.е. идущий при постоянной энтропии.

$C_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$

Для идеальных газов скорость звука вычисляется по формулам:

$C_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} = \alpha \sqrt{T} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} < v >;$

где γ- показатель адиабаты: 5/3 для одноатомных газов,7/5 для двухатомных и для воздуха, 4/3 для многоатомных, k - постоянная Больцмана, R - газовая постоянная, m - молекулярная масса, μ - молярная масса, $< v >$ - средняя скорость теплового движения частиц газа, $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma R}{M}};$

Для смеси газов:

$\gamma = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2}}$

$M = \frac{\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2}{\nu_1 + \nu_2}$. Тогда

$V_s = \sqrt{\frac{(\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2})(\nu_1 + \nu_2) R T}{(\nu_1 C_{v1} + \nu_2 C_{v2})(\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2)}}$

где $\mu_1 = 4, mu_2 = 28, \nu_1 = 7, \nu_2 = 1$, т.к. число молей соотносится также как число частиц 7 к 1, поскольку число молей равно числу частиц деленному на число Авогадро.

Гелий He - одноатомный газ ($C_v = 3/2, C_p = 5/2$), азот N_2 двухатомный ($C_v = 5/2, C_p = 7/2$)

Подставляя эти значения в C_s, получим значение скорости звука.

Задача 8.28

8.28. Измеряется распределение концентрации молекул белка в растворе, помещенном в центрифугу. На некотором расстоянии от оси центрифуги напряженность центробежных сил составляет $G = 100g$, а относительный градиент концентрации в этом месте оказывается равным $\alpha = \frac{1}{n}\frac{dn}{dr} = 10$ см$^{-1}$. Плотность белка $\rho = 1{,}1$ г/см^3,

растворителя — $\rho_0 = 0{,}9$ г/см^3, температура $t = 20$°C. Найти молярную массу белка μ.

1) $\mu = m_{ch}N_A$

Однако в центрифуге используется эффективная масса m, получаемая с учетом силы Архимеда, которая действует против центробежной силы. За счет этого масса частиц уменьшается на массу растворителя:

$m = m_{ch} - m_r = m_{ch}\left(1 - \frac{\rho_r}{\rho_{ch}}\right)$, откуда $m_{ch} = m\frac{\rho_{ch}}{\rho_{ch}-\rho_r}$;

2)m_{ch} надо выразить через параметры данные в условиях.

Из условий задачи даны значения β и $G = \omega^2 r$;
Распределение Больцмана $n = n_0 \exp(-\frac{E_{pot}}{kT})$

В случае центрифуги $F = m\omega^2 r$ и потенциальная энергия для частиц на расстоянии r от оси вращения

$E_{pot} = -\int\limits_R^r m\omega^2 r dr = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - r^2)$, тогда

$\beta = \frac{1}{n}\frac{dn}{dr} = \frac{m\omega^2 r}{kT}$ и $\frac{\beta}{G} = \frac{m}{kT} = \frac{m_{ch}}{kT}\frac{\rho_{ch}-\rho_r}{\rho_{ch}}$

$m_{ch} = \frac{\beta kT}{G}\frac{\rho_{ch}}{\rho_{ch}-\rho_r}$

$\mu = m_{ch}N_A = \frac{\beta RT}{G}\frac{\rho_{ch}}{\rho_{ch}-\rho_r}$.

Задача 8.56

8.56. Вычислить молярную теплоемкость идеального газа, в котором каждая молекула кроме трех поступательных степеней свободы имеет два внутренних дискретных уровня энергии $\mathscr{E}_1 = 0$ и $\mathscr{E}_2 = \varepsilon$. Температура газа такова, что $kT = \varepsilon$. Вращение молекул не учитывать.

$C_V = \frac{d<E>}{dT}$

Пусть n_0 молекул имеют нулевую энергию и n_1 энергию E. Всего в моле молекул $N_A = n_0 + n_1$

Доля молекул с разной энергией определяется распределением Больцмана:

$n_0 = N_A e^{-\frac{0}{kT}} = N_A, \;\; n_1 = N_A e^{-\frac{E}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E}{kT}}$

Тогда средняя энергия моля газа равна поступательной энергии всех молекул $+ \; En_1$

$< E >= N_A \left(\frac{3}{2} kT + E \frac{n_1}{n_0 + n_1} \right)$

$\frac{n_1}{n_0+n_1} = \frac{1}{1+\frac{n_0}{n_1}} = \frac{1}{1+e^{\frac{E}{kT}}}$

$< E >= N_A \left(\frac{3}{2} kT + \frac{E}{1+e^{\frac{E}{kT}}} \right)$

$C_V = N_A \left[\frac{3}{2} k + \frac{E^2}{kT^2} e^{\frac{E}{kT}} \left(1 + e^{\frac{E}{kT}} \right)^{-2} \right]$

Задача 8.52

8.52. Найти значения средней колебательной энергии теплового движения для двух различных атомных осцилляторов при температуре $T = 300$ К. Частота колебаний осцилляторов $\nu_1 = 10^{13}$ Гц и $\nu_2 = 10^{14}$ Гц. Сравнить полученные значения с соответствующим классическим значением. Найти колебательную теплоемкость C_V одного моля газа таких осцилляторов для случая $\nu = 4{,}7 \cdot 10^{13}$ Гц (кислород O_2).

Колебания атомов описываются с помощью модели квантовых осцилляторов (КО), введенной в физику Планком. Корректное решение задачи об энергетических уровнях КО было получено Шоедингером

$E_n = h\nu(n + \frac{1}{2})$, где h - постоянная Планка, ν - частота колебаний, n=0,1,2...

Вероятность колебаний с энергией E_n определяется распределением Больцмана

$P_n = Ae^{-\frac{E_n}{kT}}$, где константа A определяется из условия нормировки $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow$

$$P_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{kT}}} = \frac{e^{-\frac{nE_0}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nE_0}{kT}}}$$

где $E_0 = h\nu$. Тогда для средней энергии выражение

$$< E >= \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n E_n = \frac{E_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} n e^{-\frac{nE_0}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nE_0}{kT}}}$$

Знаменатель представляет бесконечную геометрическую прогрессию, которую, делая замену $x = \frac{E_0}{kT}$, можно представить в виде:

$$\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Выражение для числителя можно получить дифференцируя это выражение:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$

Подставляя эти значения, получаем

$< E >= \frac{E_0 e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{E_0}{e^x - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

$C_V = \frac{d<E>}{dT} = ke^{\frac{h\nu}{kT}} \left(\frac{h\nu}{kT(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} \right)^2$