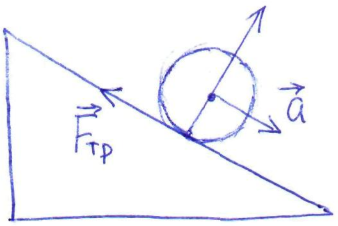
Семинар 11

Плоское движение твёрдого тела. Качение.

17. Найти ускорение центра тонкостенного мяча, скатывающегося без проскальзывания с наклонной плоскости, установленной под углом α к горизонту.
Ответ: $a=\cancel{2/3}\,g\sin\alpha$. $\frac{3}{5}$

Решение.



Поступательное движение:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр}$$

Вращательное движение:

$$I\beta = F_{тр} r$$

$$a = \beta r \Rightarrow F_{тр} = \frac{I\beta}{r} = \frac{Ia}{r^2}$$

$$ma = mg\cdot\sin\alpha - \frac{Ia}{r^2}$$

$$a = \frac{g\cdot\sin\alpha}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

Мяч как сфера: $I = \frac{2}{3}mr^2 \Rightarrow a = \frac{3}{5}g\sin\alpha$

18. Шар и сплошной цилиндр, имеющие равные массы, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить отношение их кинетических энергий $K_ш$ / $K_ц$.
Ответ: 14/15.

Решение.

Подберем длину цилиндра так, чтобы радиусы шара и цилиндра были равны.

$$v = \omega R$$

$$I = kmr^2 \quad \left(k_ш = \frac{2}{5}, \quad k_ц = \frac{1}{2}\right).$$

Кинетическая энергия:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kmr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} =$$

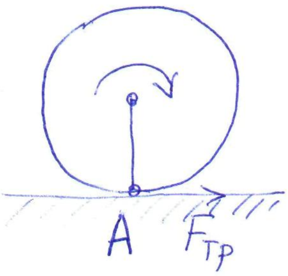
$$= \frac{mv^2}{2}(1+k)$$

$$\frac{E_ш}{E_ц} = \frac{1+k_ш}{1+k_ц} = \frac{1+\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{14}{15}.$$

19. Мяч радиуса R и массы m раскручен до угловой скорости ω и поставлен вертикально на горизонтальную шероховатую поверхность. С какой скоростью V будет двигаться мяч после прекращения проскальзывания?

Ответ: V=2ωR/5.

Решение.



$$ma = F_{тр} = \mu N = \mu mg$$

$$a = \mu g = const \Rightarrow v(t) = \mu g t.$$

$$I\beta = M \Rightarrow I\beta = F_{тр} \cdot R = \mu m g R$$

$$\beta = \frac{\mu m g R}{I} = const$$

$$\beta = -\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \beta t = \omega_0 - \frac{\mu m g R}{I} t$$

$$v = \omega R \Rightarrow \mu g t = \omega_0 R - \frac{\mu m g R^2}{I} t$$

↑ окончание проскальзывания

$$\mu g t \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) = \omega_0 R$$

$$t_x = \frac{\omega_0 R}{\mu g \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)} = \frac{\omega_0 R}{\mu g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \frac{\omega_0 R}{\mu g}$$

$$v_x = \mu g t_x = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{2}{5} \omega_0 R$$

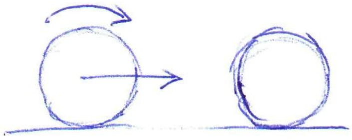
Другой вариант: относ. т. A $\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow L = const$

$$L = \cancel{\frac{I\omega^2}{2} + m} \; I\omega + mvR = I\omega_0$$

$$\omega = v/R \Rightarrow v = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

9.79. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью υ и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдет в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Решение.



После соударения у шара I $\upsilon_I = 0$, $\omega_I > 0$, у шара II $\upsilon_{II} > 0$, $\omega_{II} = 0$. Шары обменялись скоростями, но не вращением!

1) Для шара I из задачи 19:

$$\upsilon_I = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{mR^2}{I_ш}} = \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{2}{7}\upsilon_0$$

2) Для шара II:

$$ma = -F_{тр} = -\mu mg \Rightarrow a = -\mu g \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0 - \mu g t$$

$$I\beta = M = F_{тр}\cdot R = \mu mgR \Rightarrow \omega = \beta t = \frac{\mu mgR}{I} t$$

Прекращение проскальзывания: $\upsilon = \omega R$

$$\upsilon_0 - \mu g t = \frac{\mu mgR^2}{I} t \Rightarrow t_x = \frac{\upsilon_0}{\mu g\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)}$$

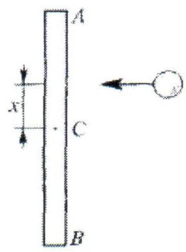
$$\upsilon_{II} = \upsilon_0 - \mu g t_x = \upsilon_0 - \frac{\upsilon_0}{1 + \frac{mR^2}{I_ш}} = \frac{5}{7}\upsilon_0$$

3) $$\Delta E_к = \left(\frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2}\right) - \left(\frac{m\upsilon_I^2}{2} + \frac{I\omega_I^2}{2}\right) - \left(\frac{m\upsilon_{II}^2}{2} + \frac{I\omega_{II}^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{10} m\left(\upsilon_0^2 - \upsilon_I^2 - \upsilon_{II}^2\right) = \frac{7}{10} m\upsilon_0^2\left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^2\right) = \frac{2}{7} m\upsilon_0^2$$

$$\Delta E_к / E_к = \cancel{\frac{4}{7}}\, 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

9.115. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M, который может скользить по этой поверхности без трения (рис. 188). В одну из точек стержня ударяет шарик массы m, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?



Решение.

Пусть v_1 – скорость шара после удара, v_2 – скорость центра стержня, ω – угл. скорость вращения.

$$\begin{cases} m v_0 = m v_1 + M v_2 & (\text{ЗСИ}) \\ m v_0 x = m v_1 x + I_c \omega & (\text{ЗСМИ}) \\ \dfrac{m v_0^2}{2} = \dfrac{m v_1^2}{2} + \dfrac{M v_2^2}{2} + \dfrac{I_c \omega^2}{2} & (\text{ЗСЭ}) \end{cases}$$

$$M v_2 = m(v_0 - v_1), \quad I_c \omega = m(v_0 - v_1)x$$

$$\frac{m}{2}(v_0^2 - v_1^2) = \frac{M}{2}\left(\frac{m(v_0 - v_1)}{M}\right)^2 + \frac{I_c}{2}\left(\frac{m(v_0 - v_1)x}{I_c}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_0^2 - v_1^2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)^2 + \frac{m x^2}{I_c}(v_0 - v_1)^2$$

$$v_0 + v_1 = \left(\frac{m}{M} + \frac{m x^2}{I_c}\right)(v_0 - v_1)$$

При $v_1 = 0$: $\quad \dfrac{m}{M} + \dfrac{m x^2}{I_c} = 1, \quad I_c = \dfrac{1}{12} M l^2$

$$\frac{m}{M}\left(1 + \frac{12 x^2}{l^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{m} - 1}$$

Это возможно при $x \geq 0 \Rightarrow M \geq m$

и $x \leq \dfrac{l}{2} \Rightarrow x^2 \leq \dfrac{l^2}{4} \Rightarrow \dfrac{l^2}{12}\left(\dfrac{M}{m} - 1\right) \leq \dfrac{l^2}{4} \Rightarrow M \leq 4m$

9.163. Баскетбольный мяч, закрученный с угловой скоростью ω_0, брошен на пол под углом $\alpha = 11{,}4°$ к вертикали со скоростью $\upsilon_0 = 2$ м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения. Определить величину угловой скорости ω_0, при которой мяч отскочит от пола вертикально. Коэффициент трения мяча о пол $k = 0{,}2$. Радиус мяча $R = 15$ см. Считать, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча при ударе пренебречь.

Решение.

Пусть T – время соударения, τ – время скольжения до начала качения без проскальзывания

$N(t)$ – профиль силы реакции опоры.

Изменение импульса:

по вертикали – $|\Delta p_y| = 2m\upsilon_0\cos\alpha = \int_0^T N(t)dt$ (1)

по горизонтали – $|\Delta p_x| = m\upsilon_0\sin\alpha = k\int_0^\tau N(t)dt$ (2)

Если проскальзывание не прекратилось, то $T=\tau$

Делим (2) на (1) $\Rightarrow$ $\mathrm{tg}\,\alpha = 2k$

Проверка: $\mathrm{tg}(11{,}4°) = 0{,}2 < 0{,}4 = 2k \Rightarrow \tau < T$

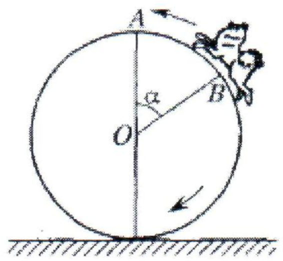
Следовательно, $\upsilon_{гор} = 0$ и $\omega = 0$.

Вращ. движение: $I(\omega_0 - \omega) = R\cdot k\int_0^\tau N(t)dt \Rightarrow$

$I\omega_0 = R\cdot m\upsilon_0\sin\alpha$

$$\omega_0 = \frac{R\cdot m\upsilon_0\sin\alpha}{\frac{2}{3}mR^2} = \frac{3}{2}\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{R} \approx 4 \text{ рад/с.}$$

9.76. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массы m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (рис. 176). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOB равен α. Определить:

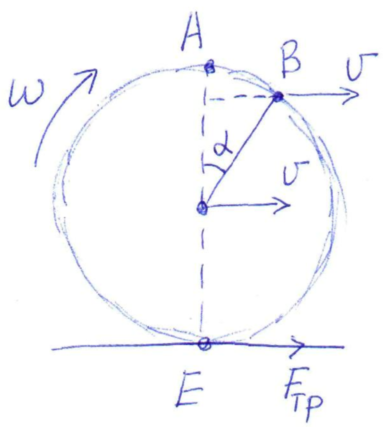


1) ускорение a оси цилиндра;

2) силу трения $F_{тр}$ между цилиндром и плоскостью во время качения;

3) время t, в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A, если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна N_{max}. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость υ_{max} поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.).

Решение.



1) Момент импульса относительно мгновенной оси вращ. (точка E):

$$L = I_E \omega + m\upsilon \cdot r(1+\cos\alpha)$$

$$I_E = 2Mr^2, \quad \upsilon = \omega r$$

$$\Rightarrow L = r\upsilon\left[2M + m(1+\cos\alpha)\right]$$

Момент силы относ. т. E: $mg\sin\alpha \cdot r$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = r \cdot a\left[2M + m(1+\cos\alpha)\right] = mgr\sin\alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{2M + m(1+\cos\alpha)}$$

2) Т.к. проскальзывания цилиндра по гориз. поверхн. нет, то $F_{тр} = (m+M) \cdot a$

3) Т.к. $a = const$, то $v = at$, $\omega = v/R$

Кинетическая энергия:

$$E_K = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}I_E\omega^2 = (2M+m)\frac{v^2}{2} = (2M+m)\frac{a^2t^2}{2}$$

Мощность:

$$N_{max} = \frac{dE_K}{dt} = (2M+m)\cdot a^2 t$$

$$t_{max} = \frac{N_{max}}{(2M+m)a^2}$$

$$v_{max} = a\cdot t_{max} = \frac{N_{max}}{(2M+m)a}$$