Семинар 6

Движение в поле центральных сил. Тяготение.

8. Над некоторой планетой запущен спутник связи, всё время находящийся над одной и той же её точкой. Во сколько раз радиус орбиты этого спутника R больше радиуса планеты R_0, если известно, что другой спутник, обращающийся вокруг планеты на малой высоте, делает за время планетарных суток 17 полных оборотов? *Ответ*: $R \approx 6{,}6R_0$.

Решение.

Для спутника на орбите радиуса R:

$$m a_{цс} = F_{тяг} \qquad (F_{цб} - F_{тяг} = 0)$$

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{M_З m}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

Период обращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}} \sim R^{3/2} \quad (\text{III закон Кеплера})$$

$$\frac{T_c}{T_н} = \left(\frac{R_c}{R_0}\right)^{3/2} \Rightarrow R_c = R_0 \left(\frac{T_c}{T_п}\right)^{2/3} \approx 6{,}6\, R_0$$

7.1. Сможет ли космонавт, подпрыгнув, покинуть навсегда астероид, масса которого равна массе Фобоса (спутника Марса): $M = 1{,}1 \cdot 10^{16}$ кг и радиус $R = 11{,}1$ км?

Решение.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{mM}{R} = 0$$

$$\upsilon = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{16} кг}{1{,}11 \cdot 10^4 м}} \approx 11{,}5 \text{ м/с}.$$

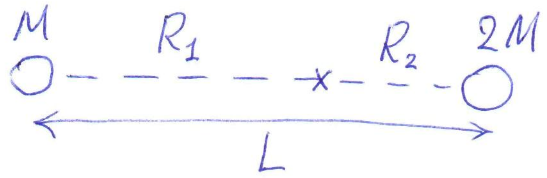
Рекорд по прыжкам в высоту на Земле $H = 245$ см (Хавьер Сотомайор, 1993 год, методом фосбери-флоп, когда центр масс находится ниже планки).

$$\upsilon = \sqrt{2g_з H} \approx 7 \text{ м/с} < 11{,}5 \text{ м/с}.$$

Точнее: $\upsilon = \sqrt{2g_з(H - H_0)}$ — еще меньше!

9. Найти период обращения двойной звезды, компоненты которой имеют массы $M_\odot$ и $2M_\odot$ ($M_\odot$ — масса Солнца) и движутся по орбитам с нулевым эксцентриситетом на расстоянии 0,5 а.е. друг от друга. *Ответ*: $T \approx 2{,}5$ мес.

Решение.



Пусть T – период обращения $\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = L & (1) \\ M\cdot\omega^2 R_1 = 2M\cdot\omega^2 R_2 = G\,\frac{M\cdot 2M}{L^2} & (2) \end{cases}$$

$$R_1 = 2R_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} R_1 = \frac{2}{3}L,\ R_2 = \frac{L}{3}.$$

$$2M\cdot\omega^2\cdot\frac{L}{3} = G\,\frac{2M^2}{L^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3GM}{L^3}}$$

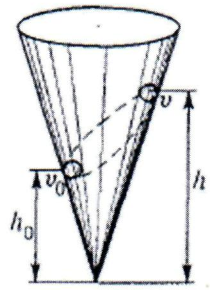
Движение Земли вокруг Солнца: 1 а.е. = 2L

$$m\omega_3^2\cdot 2L = G\,\frac{mM}{L^2} \Rightarrow \omega_3^2 = \frac{1}{8}\,\frac{GM}{L^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2 = \frac{3GM}{L^3}\cdot\frac{8L^3}{GM} = 24 \qquad \frac{\omega}{\omega_3} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{T}{T_3} = \frac{\omega_3}{\omega} \Rightarrow T = T_3\,\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{T_3}{2\sqrt{6}} \approx 2{,}5 \text{ мес.}$$

6.8. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис.). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его υ_0 была горизонтальна. Найти υ_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость υ шарика в наивысшем положении.



Решение.

При отсутствии трения сохраняется момент импульса: $L = m\upsilon_{гор} r_\perp = const$, где $r_\perp$ – расстояние до оси конуса.

Поскольку для конуса $\frac{h}{r_\perp} = const$, то

$\upsilon_0 h_0 = \upsilon h$. (1)

В верхней и нижней точках $\upsilon_{верт} = 0$

$\Rightarrow \upsilon = \upsilon_{гор}$.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh \qquad (2)$$

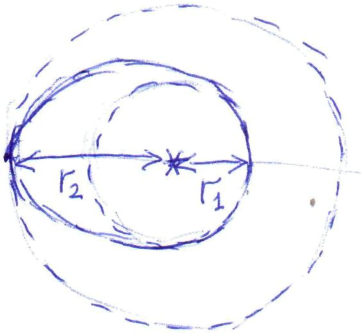
$$\Rightarrow \upsilon_0 = h\sqrt{\frac{2g}{h_0+h}}; \quad \upsilon = h_0\sqrt{\frac{2g}{h_0+h}}.$$

7.61. Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля ($R_З = 1{,}5 \cdot 10^8$ км), причем настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Корабль получает в направлении своего движения дополнительную скорость $\Delta \upsilon$, достаточную для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Марс вращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса $R_M = 2{,}28 \cdot 10^8$ км. Определить время перелета и величину $\Delta \upsilon$. Для Солнца $\gamma M_c = 1325 \cdot 10^8$ км^3/с^2.

Решение.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = const = E. \quad (1)$$



При движении по окружности:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad (2)$$

$E_п$ – потенц. энергия, $E_к$ – кинетич. энерг.

$$E_п = -G\frac{Mm}{r} \overset{(2)}{=} -mv^2 = -2E_к \quad (3)$$

$E_1 = E_к + E_п = E_к - 2E_к = -E_к < 0$ (финитное движение!)

При увеличении скорости в α раз:

$$E_2 = \alpha^2 E_к + E_п = \alpha^2 E_к - 2E_к = (\alpha^2 - 2)E_к = -(\alpha^2-2)E_1$$

При $\alpha^2 < 2$ – финитное движение (эллипт. орбита)

Определим её параметры:

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = E \\ mv \cdot r = L \end{cases} \Rightarrow r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

Теорема Виета: $2a = r_1 + r_2 = -\frac{GMm}{E} \sim \frac{1}{E}$

$$a \sim \frac{1}{E_2}, \quad R \sim \frac{1}{E_1} \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2-\alpha^2}$$

7.61 (продолжение)

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2-\alpha^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{2 - \frac{R}{a}} = \sqrt{2 - \frac{2R_З}{R_З + R_М}} = \sqrt{\frac{2R_М}{R_З + R_М}}$$

Скорость корабля на орбите Земли:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M_c}{R_З}} \approx 29{,}7\ \frac{км}{с} \quad \left(или \quad \frac{2\pi R_З}{T_З}\right)$$

$$v_2 = \alpha v_1 = \sqrt{\frac{2R_М}{R_З + R_М}} \cdot \sqrt{G\frac{M_c}{R_З}} \approx 32{,}6\ \frac{км}{с}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 2{,}9 \text{ км/с}.$$

Период обращения по финитной траектории:

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{a}{R_З}\right)^3 \quad (\text{III закон Кеплера})$$

$$T_2 = T_1\left(\frac{a}{R_З}\right)^{3/2} = T_1\left(2-\alpha^2\right)^{-3/2}$$

Время перелета:

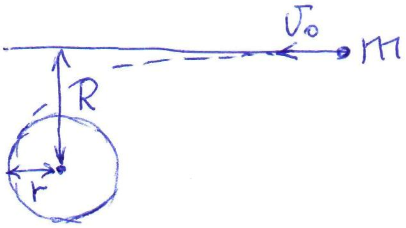
$$\tau = \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2}T_1\left(\frac{R_З + R_М}{2R_З}\right)^{3/2} = \frac{T_З}{4\sqrt{2}}\left(1 + \frac{R_М}{R_З}\right)^{3/2} \approx 260 \text{ сут.}$$

! Для эллипса:

$$b = \sqrt{r_1 r_2} = \frac{L}{\sqrt{-2Em}} \quad (\text{теор. Виета},\ E<0).$$

7.85. По направлению к уединенному космическому телу, имеющему массу и размеры такие же, как у Земли, из глубин космоса движется рой метеоритов, скорость которых на значительном удалении от тела равна υ = 5 км/с. Поперечные размеры этого метеоритного облака много больше диаметра тела, глубина облака (по направлению движения) составляет h = 1000 км, средняя плотность облака n = 0,1 км$^{-3}$, а центр облака движется в направлении центра тела. Каково общее число метеоритов, которые попадут на тело?

Решение.



R – прицельное расстояние

(x < R – падает на планету)

Закон сохр. момента импульса!

$$m v_0 R = m v r \Rightarrow v = v_0 \frac{R}{r} \quad (1)$$

Закон сохранения энергии!

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} - G\frac{Mm}{r} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2}\cdot\frac{R^2}{r^2} - G\frac{M}{r}$$

$$R^2 = r^2 + \frac{2MrG}{v_0^2}$$

Число метиоритов, падающих на планету!

$$N = n\cdot V = n\cdot \pi R^2\cdot h = \pi n h\left(r^2 + \frac{2MrG}{v_0^2}\right)$$

$$g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow GM = g r^2 \qquad \underline{r = R_З}$$

$$N = \pi n h R_З^2\left(1 + \frac{2gR_З}{v_0^2}\right) \approx 7{,}75\cdot 10^{10} \text{ шт.}$$

7.189. Слабая сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, пропорциональна квадрату его скорости: $F = k\upsilon^2$. Найти, как зависит скорость спутника массой m, движущегося по круговой орбите, от времени, если при $t = 0$ скорость спутника была равна υ_0.

Решение.

Для круговой орбиты: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 R = const$

Дифференцируем: $2\upsilon d\upsilon \cdot R + \upsilon^2 dR = 0$

$$\upsilon dR = -2R d\upsilon \qquad (1)$$

Изменение момента импульса: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \cancel{\frac{dL}{dt}}$

$$\frac{dL}{dt} = -F(\upsilon)\cdot R$$

$$L = m\upsilon \cdot R \Rightarrow \frac{dL}{dt} = m\left(\frac{d\upsilon}{dt}\cdot R + \upsilon\frac{dR}{dt}\right)$$

$$-\frac{R\cdot F(\upsilon)}{m}dt = \upsilon dR + R d\upsilon \overset{(1)}{=} -R d\upsilon$$

$$\Rightarrow d\upsilon = \frac{F(\upsilon)}{m}dt = \frac{k\upsilon^2}{m}dt, \quad \upsilon(0) = \upsilon_0.$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{k}{m}dt \Rightarrow \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = \frac{k}{m}t$$

$$\upsilon(t) = \frac{\upsilon_0}{1 - \frac{k\upsilon_0}{m}t}$$