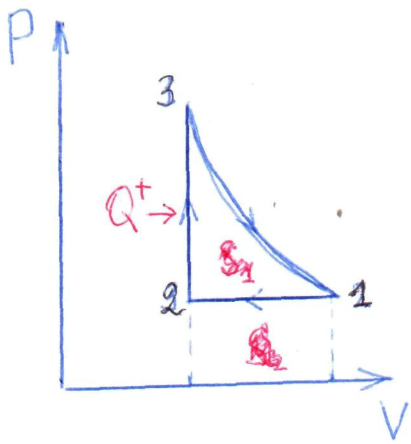
Семинар 2

Тепловые машины. Второе начало термодинамики. Изменение энтропии в обратимых процессах.

4. Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного сжатия, изохорного нагревания и адиабатического расширения, если отношение максимального и минимального объёмов равно 2. Рабочее тело – двухатомный идеальный газ. *Ответ*: 0,15.

Решение.



$$1)\quad \eta = \frac{\sum Q_i}{Q^+} = \frac{Q_{1\to2} + Q_{2\to3} + \underbrace{Q_{3\to1}}_{=0}}{Q_{2\to3}} =$$

$$= 1 + \frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}$$

$$2)\quad Q_{1\to2} = C_p (T_2 - T_1) \quad (p = const)$$

$$p_1 V_1 = RT_1,\quad p_1 \frac{V_1}{2} = RT_2 \Rightarrow T_2 = T_1/2$$

$$\Rightarrow Q_{1\to2} = -\frac{7}{2} R \cdot \frac{T_1}{2} = -\frac{7}{4} RT_1$$

$$3)\quad Q_{2\to3} = C_V (T_3 - T_2) \quad (V = const)$$

$$p_3 V_2^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma},\quad V_1 = 2V_2 \Rightarrow p_3 = p_1 \cdot 2^{\gamma}$$

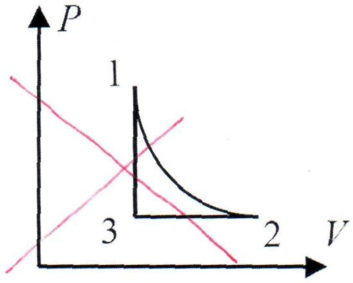
$$p_1 V_1 = RT_1,\quad p_3 V_2 = RT_3 \Rightarrow T_3 = T_1 \cdot 2^{\gamma-1}$$

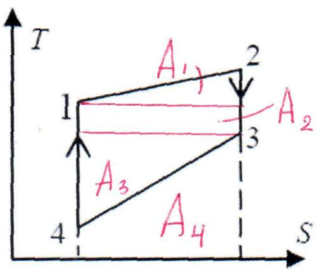
$$Q_{2\to3} = \frac{5}{2} RT_1 \left(2^{\gamma-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} RT_1 \left(2^{2/5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$4)\quad \eta = 1 + \frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}} = 1 - \frac{\frac{7}{4} RT_1}{\frac{5}{2} RT_1 \left(2^{2/5} - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{7/10}{2^{2/5} - \frac{1}{2}} \approx 0{,}15.$$

5. Тепловая машина с неизвестным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рисунке в координатах TS. $T_2 = 3/2T_1$, $T_3 = 3/4T_1$, $T_4 = T_1/20$. Найти КПД цикла.





Ответ: 0,68.

Решение.

$$\delta Q = T dS \Rightarrow Q = \int_{S_1}^{S_2} T dS$$ – площадь A.

$$\Rightarrow \eta = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$A_1 = (S_2 - S_1)\cdot \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{4} T_1 (S_2 - S_1)$$

$$A_2 = (S_2 - S_1)(T_1 - T_3) = \frac{1}{4} T_1 (S_2 - S_1)$$

$$A_3 = (S_2 - S_1)\frac{1}{2}(T_3 - T_4) = \frac{7}{20} T_1 (S_2 - S_1)$$

$$A_3 + A_4 = (S_2 - S_1) T_3 = \frac{3}{4} T_1 (S_2 - S_1)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{7}{20}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{17}{25} \approx 0{,}68.$$

6. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу (тепловой насос), отбирает от первого резервуара 65 Дж теплоты и передает количество теплоты 80 Дж второму резервуару при T = 320 К. Определить температуру первого резервуара.
Ответ: 260 К.

Решение.

Эффективность теплового насоса:

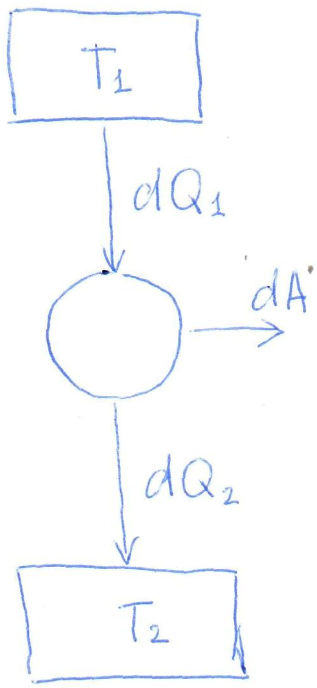
$$\gamma = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{80\ Дж}{80\ Дж - 65\ Дж} = \frac{16}{3}$$

Через температуры:

$$\gamma = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{16}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{13}{16} T_1 = 260\ К.$$

3.25. Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 80$ ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

Решение.



Для идеального цикла Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Для бесконечно малых порций:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_2}{T_2}$$

$$Q_2 = q m_2 \quad (T_2 = const)$$

$$\delta Q = -c m_1 dT$$

$$\frac{Q_2}{T_2} = \int \frac{dQ}{T} = -c m_1 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c m_1 \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_к = T_1 \exp\left(-\frac{q m_2}{c m_1 T_2}\right) = 373 \text{ К} \cdot \exp(-0{,}293) = 278 \text{ К}$$

$$A = c m_1 (T_1 - T_к) - m_2 q = 62 \text{ кДж}.$$

3.43. С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура t_1 = –3 ^{0}С при температуре на улице t_2 = –23 ^{0}С. Предлагается использовать бензин в движке с КПД η = 0,4 (40%), а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по холодильному циклу теплоту с улицы в комнату. Какой должна быть в этом случае температура в помещении t_x? Движок находится вне помещения; расход бензина в нем такой же, как в горелке.

Решение.

Закон Ньютона - Рихмана: мощность теплопотерь пропорциональна разности температур в помещении и на улице.

$N = a(T_1 - T_2)$ – мощность горелки.

При температуре T_{1x} в комнате:

$N_{1x} = a(T_{1x} - T_2)$

Закон сохр. энергии: $N_{1x} = N_2 + \eta N$, (*)

где N_2 – мощность, отбираемая с улицы.

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} \Rightarrow \frac{N_2}{T_2} = \frac{N_{1x}}{T_{1x}} \Rightarrow N_2 = N_{1x}\frac{T_2}{T_{1x}}$$

$$(*) \Rightarrow a(T_{1x} - T_2) = a\frac{T_2}{T_{1x}}(T_{1x} - T_2) + \eta a(T_1 - T_2)$$

$$(T_{1x} - T_2)^2 = \eta T_{1x}(T_1 - T_2)$$

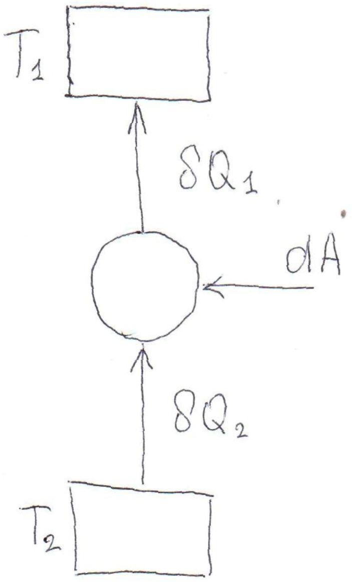
$\eta = 0,4$; $T_1 = 270$ K; $T_2 = 250$ K

$\Rightarrow T_{1x} \approx 295$ K $= 22\,^\circ$C

T1. В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ К. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ К. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Ответ. $A = 1$ кДж, $T_2 = 450$ К.

Решение.



Цикл Карно: $\dfrac{\delta Q_1}{T_1} = \dfrac{\delta Q_2}{T_2}$;

$$\delta Q_1 = C_V\, dT_1; \qquad \delta Q_2 = -C_V\, dT_2;$$

$$C_V \frac{dT_1}{T_1} = -C_V \frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \ln\frac{T_1}{T_0} = \ln\frac{T_0}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_0^2}{T_1} = \frac{300\text{К}\cdot 300\text{К}}{200\text{К}} = 450\ \text{К}$$

$$A = Q_1 - Q_2 = C_V(T_1 - T_0) - C_V(T_0 - T_2) =$$
$$= C_V(T_1 + T_2 - 2T_0) \approx 1\ \text{кДж}.$$

4.80. На Венере атмосфера состоит из CO_2. Полагая CO_2 идеальным газом и атмосферу адиабатической, определить температуру на поверхности планеты, если плотность падает в $n = 2$ раза на высоте $H = 12{,}2$ км при ускорении силы тяжести $g = 8{,}87$ м/с^2. Молекулярная теплоемкость CO_2 в таких условиях $C_v = 5R$. Ускорение силы тяжести не зависит от высоты.

Указание. Адиабатической называется атмосфера, в которой порции газа, перемещаясь по вертикали без теплообмена, все время остаются в механическом равновесии.

Решение.

Адиабатический процесс: $dS = \frac{\delta Q}{T} = 0$

$\delta Q = dU + \delta A = C_v dT + p dV$, $\quad pV = RT$

$\Rightarrow C_v \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = 0 \qquad \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

$\Rightarrow C_p \frac{dV}{V} + C_v \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow pV^\gamma = const \Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = const.$

$(1-\gamma)\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow dT = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{T}{p} dp$

Механическое равновесие: $dp = -\rho g dz$

$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{p}(-\rho g) = -\frac{R}{C_p}\frac{T}{p}\rho g$

$p = \frac{\rho R T}{\mu} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{\mu g}{C_p} = const \Rightarrow T = T_0 - \frac{\mu g}{C_p} z.$

$\downarrow$

$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = \frac{C_v}{R}\frac{dT}{T}$

$\Rightarrow \frac{R}{C_v}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\frac{T}{T_0}$

$\Rightarrow T = T_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{R/C_v} = T_0 - \frac{\mu g H}{C_p}; \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}$ при $z = H$.

$\Rightarrow T_0 = \frac{\mu g H}{C_p\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{R/C_v}\right]} \approx 740$ K