Семинар 9

Теория

Нормальное распределение: $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

Доска Гальтона: $\sigma^2=\langle\upsilon_x^2\rangle=\dfrac{k_Б T}{m}$, $\mu=0$.

Одномерное распределение Максвелла:

$$\frac{dn}{n_0}=\varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x=\left(\frac{m}{2\pi k_Б T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2k_Б T}\right)d\upsilon_x$$

Двухмерное распределение Максвелла:

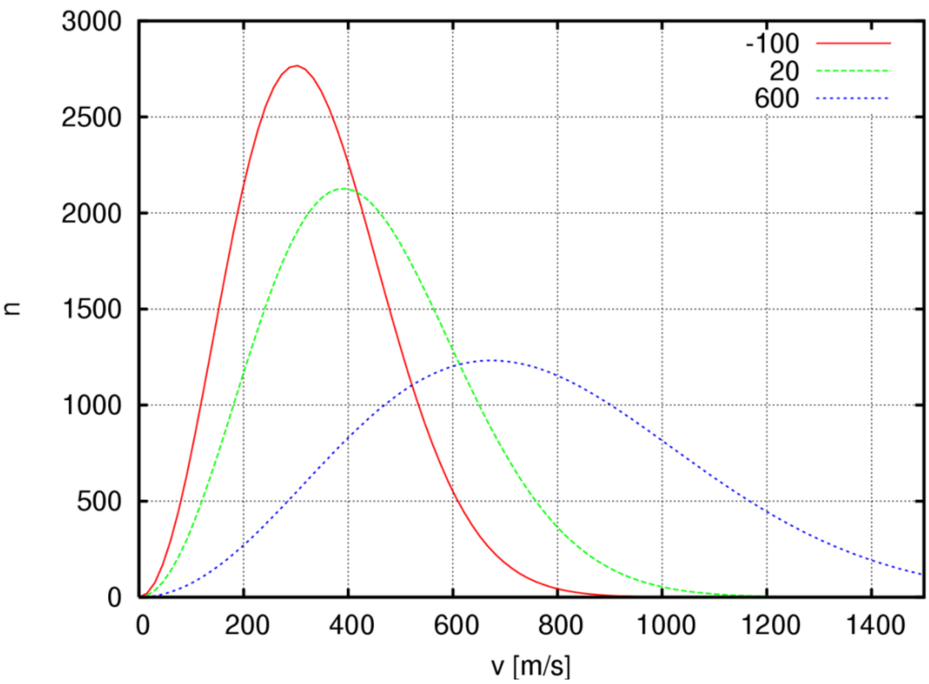
$$\frac{dn}{n_0}=\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)d\upsilon_x d\upsilon_y=\frac{m}{2\pi k_Б T}\exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2)}{2k_Б T}\right)d\upsilon_x d\upsilon_y=$$

$$=\frac{m}{2\pi k_Б T}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2k_Б T}\right)\cdot 2\pi\upsilon d\upsilon=\frac{m}{k_Б T}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2k_Б T}\right)\cdot\upsilon d\upsilon$$

Трехмерное распределение Максвелла:

$$\frac{dn}{n_0}=\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z=\left(\frac{m}{2\pi k_Б T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2k_Б T}\right)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z=$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi k_Б T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2k_Б T}\right)\cdot 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$$



Теория

Якобиан – переход между фазовыми объемами: $J = \det\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)$

А) Полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$ds = dxdy = J(r,\varphi)drd\varphi = r\cdot drd\varphi$$

Б) Сферические координаты:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

$$dV = dxdydz = J(r,\theta,\varphi)drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta\cdot drd\theta d\varphi$$

Распределение Максвелла по энергии $\varepsilon = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$:

$$\frac{dn}{n_0} = 2\pi\left(\frac{1}{\pi k_Б T}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_Б T}\right)d\varepsilon$$

Интегралы:

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp\left(-ax^2\right)dx = \frac{1}{2}(2n-1)!!(2a)^{-n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\exp\left(-ax^2\right)dx = \frac{1}{2}n!(a)^{-(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Условия применимости **модели** распределения Максвелла по скоростям:

1. Размеры сосуда много больше длины волны де Бройля, температура достаточно велика (нет квантовых эффектов).
2. Нет релятивистских эффектов ($\upsilon << c$).
3. Система является равновесной.
4. Система является изотропной (нет направленных пучков).
5. Число частиц велико (можем пренебречь флуктуациями).
6. Частицы не участвуют в быстрых процессах, характерное время которых много меньше времени между столкновениями частиц.

Средняя энергия молекул, вылетевших через отверстие

Рассмотрим молекулы со скоростями [υ;υ+dυ] В единицу времени через единичную площадку вылетит $\frac{dn\cdot\upsilon}{4}$. Они унесут энергию $\frac{dn\cdot\upsilon}{4}\frac{m\upsilon^2}{2}$.

Полная энергия молекул: $E=\int\limits_0^\infty \frac{n_0\upsilon}{4}\frac{m\upsilon^2}{2}f\left(\upsilon\right)d\upsilon$.

Полное число вылетевших молекул: $N=\int\limits_0^\infty \frac{n_0\upsilon}{4}f\left(\upsilon\right)d\upsilon$.

Средняя энергия:

$$\varepsilon=\frac{E}{N}=\frac{\int\limits_0^\infty \frac{n_0\upsilon}{4}\frac{m\upsilon^2}{2}f\left(\upsilon\right)d\upsilon}{\int\limits_0^\infty \frac{n_0\upsilon}{4}f\left(\upsilon\right)d\upsilon}=\frac{m}{2}\frac{\int\limits_0^\infty \upsilon^5\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon}{\int\limits_0^\infty \upsilon^3\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right)d\upsilon}=kT\frac{\int\limits_0^\infty x^5e^{-x^2}dx}{\int\limits_0^\infty x^3e^{-x^2}dx}=2kT$$