

Семинар №10 – теория

Момент импульса: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Момент сил: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Угловая скорость: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Уравнение движения: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Момент инерции системы материальных точек: $I = \sum_i m_i r_i^2$

Момент инерции твердого тела (непрерывного распределения массы): $I = \int r^2 dm$

Момент инерции вдоль оси $\vec{s} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$:

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{xz}s_xs_z + 2I_{yz}s_ys_z$$

Тензор инерции: $\hat{I} = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$

Когда такая система координат, что $I_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то I_{ii} – главные моменты инерции.

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$ - в общем случае вектора L и ω не параллельны.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \hat{I}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

По координатам:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = M_x$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = M_y$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = M_z$$

Частные случаи, когда $\vec{L} = I\vec{\omega}$:

1. Ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции тела.
2. Задано плоскопараллельное движение тела.
3. Волчок Эйлера.

$$\Rightarrow I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Теоремы о моменте инерции:

1. Моменты инерции аддитивны: $I = \sum_k I_k$

2. Теорема Гюйгенса-Штейнера: $I = I_c + ma^2$, где I_c – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, a – расстояние между этими осями.

3. $I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$
4. Для плоских тел: $I_x + I_y = I_z$.
5. Момент инерции относительно точки: $2I_0 = I_x + I_y + I_z$.
6. Отношение моментов инерции подобных тел: $I_k/I_0 = k^4$.

Темы вопросов по выбору, связанные с моментом инерции:

1. Тензор и эллипсоид инерции.
2. Метод пар моментов Хиршельфельдера для определения произведения главных моментов инерции молекул.
3. Китайский волчок
4. Затухающие колебания на трифилярном подвесе
5. Эффект Джанибекова
6. Кельтский камень (кельтская лодочка).