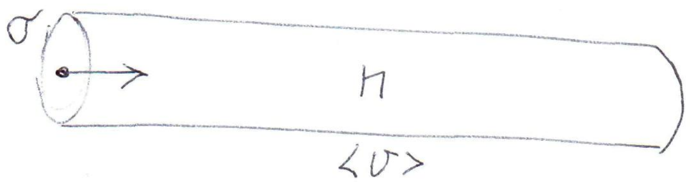
Семинар 12

Столкновения, длина свободного пробега. Явления переноса.

10.2. Сколько столкновений ν происходит ежесекундно в 1 см^3 между молекулами кислорода, находящегося при нормальных условиях? Газокинетический диаметр молекулы кислорода $d = 3{,}1 * 10^{-8}$ см.

Решение.



1 молекула за 1 с в среднем проходит расстояние $\langle \upsilon \rangle$, встречая $\sigma \langle \upsilon \rangle n$ молекул.

Всего молекул $N = nV$

$$\Rightarrow Z = \sigma \langle \upsilon \rangle \frac{n^2}{2} \cdot V \text{ столкновений.}$$

$$\sigma = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (3{,}1 \cdot 10^{-8}\,\text{см})^2}{4} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-16}\,\text{см}^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-22}\,\text{м}^2$$

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273\,\text{К}}{\pi \cdot 32 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 425\,\text{м/с}.$$

$$n = \frac{p}{k_Б T} = \frac{10^5\,\text{Па}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 273\,\text{К}} = 2{,}7 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3} = 2{,}7 \cdot 10^{19}\,\text{см}^{-3}$$

$$Z = 7{,}5 \cdot 10^{-22}\,\text{м}^2 \cdot 425\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{2} (2{,}7 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}) \cdot 10^{-6}\,\text{м}^3 \approx 10^{22}\,\frac{1}{\text{м}^3}$$

28. Вязкость азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Оценить коэффициент теплопроводности азота, а также диаметр молекулы азота.

Ответ: $d = 4 \cdot 10^{-10}$ м, $\kappa = 10^{-2}$ Вт/м·К.

Решение.

Вычислим вспомогательные величины:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 298 К}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}}} = 475 \text{ м/с}.$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = \frac{28 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль} \cdot 10^5 Па}{8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 298 К} \approx 1{,}13 \frac{кг}{м^3}$$

а) $$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \Rightarrow \lambda = \frac{3\eta}{\langle v \rangle \rho} = 10^{-7} \text{ м}.$$

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{10^5 Па}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К} \cdot 298 К} = 2{,}43 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda n} = \frac{1}{10^{-7} м \cdot 2{,}43 \cdot 10^{25} м^{-3}} = 4{,}1 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2.$$

$$\sigma = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4\sigma}{\pi}} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 7 \text{ Å}$$

б) $$\varkappa = \eta \frac{C_V}{\mu} \approx 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}.$$

29. Оцените количество тепла в расчёте на 1 м^2, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет. Расстояние между стеклами h = 23 мм. Разность температур между комнатой и улицей составляет ΔT =30 °C. Теплопроводность воздуха считать не зависящей от температуры и равной κ = 2,3·10^{-2} Вт/м·К.
Ответ: q = 30 Вт/м^2.

Решение.

Уравнение теплопроводности (Фурье):

$$q = -\varkappa \frac{dT}{dx} \quad \text{(уд. поток тепла).}$$

$$Q = q \cdot St = -\varkappa \frac{dT}{dx} St \approx -\varkappa \frac{\Delta T}{h} St$$

$$|Q| = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot \frac{30\ \text{К}}{2{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{м}} \cdot (1\ \text{м}^2)(\underline{1\ \text{с}}) \approx 30\ \cancel{\text{Вт}}\ \text{Дж}$$

или $30\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$.

10.8. Во сколько раз изменится число столкновений z, испытываемых одной молекулой в единицу времени, и длина свободного пробега λ молекул одноатомного газа, если в процессе, при котором теплоемкость газа равна $C_P/2$, объем газа увеличивается вдвое?

Решение.

а) Рассмотрим процесс: $C = \frac{C_p}{2}$, $V_2 = 2V_1$.

Одноатомный газ: $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$, $\gamma = \frac{5}{3}$.

$C = \frac{C_p}{2} = \frac{5}{4}R$. $\quad \frac{C}{C_V} = \frac{5}{6}$.

$C = C_V \cdot \frac{n-\gamma}{n-1} \Rightarrow \frac{5}{6}(n-1) = n - \frac{5}{3} \Rightarrow n = 5$

б) $pV^n = const \Rightarrow p_1V_1^5 = p_2V_2^5 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

$pV = RT \Rightarrow TV^4 = const \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

в) $z = \langle v \rangle \sigma n \qquad \langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, $n \sim \frac{p}{T} \Rightarrow z \sim \frac{p}{\sqrt{T}}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2} = \frac{1}{32} \cdot 4 = \frac{1}{8}$

г) $\lambda = \frac{1}{\sigma n} \sim \frac{T}{p} \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{16} \cdot 32 = 2.$

10.15*. Урановый шар радиуса R = 10 см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия q = 100 Вт/см^3. Температура воды T_0 = 373 К, теплопроводность урана χ = 400 Вт/(м·К). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

Решение.

Уравнение теплопроводности: c_v – удельная теплоемкость

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + q = \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + q$$

$\frac{кг}{м^3}$ $\frac{Дж}{кг\cdot К}$ $\frac{К}{с}$ $\frac{Вт}{м\cdot К}$ $\frac{К}{м^2}$ $\frac{Вт}{м^3}$

Перейдем в сферические координаты:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}$$

Система сферически симметрична: $T = T(r)$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

Стационарный случай: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \varkappa \cdot \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q = 0. \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{qr}{3\varkappa} + \frac{C}{r^2}$$

$C = 0$, иначе $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r\to 0} = \infty$

$T = T_0$ при $r = R$ $\Rightarrow T = T_0 + \frac{q}{6\varkappa}(R^2 - r^2)$

$$T_ц = T\big|_{r=0} = T_0 + \frac{qR^2}{6\varkappa} \approx 790 \text{ K}.$$

10.36. В цилиндрическом сосуде постоянного объема находится идеальный газ при температуре T_0 и давлении P_0. Боковые стенки сосуда — теплоизолирующие. Днище сосуда нагревают до $T = 4T_0$, а температуру крышки поддерживают равной T_0. Определить установившееся давление в сосуде. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

Решение.

Движение в газе отсутствует $\Rightarrow p = const$.

Меняются температура и плотность.

Масса газа: $p_0 V = \frac{m_0}{\mu} R T_0 \Rightarrow m_0 = \frac{p_0 S L \mu}{R T_0}$

Масса слоя газа толщиной dx:

$$p S dx = dm \frac{RT}{\mu} \Rightarrow dm = \frac{p S \mu}{R T(x)} dx$$

$$m_0 = \int dm \Rightarrow \frac{p_0 S L \mu}{R T_0} = \frac{p S \mu}{R} \int_0^L \frac{dx}{T(x)}$$

Закон Фурье: $q = -\varkappa \frac{dT}{dx}$

где $\varkappa = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n \frac{C_V}{\mu} = \frac{1}{3} \frac{C_V}{N_A \sigma} \left(\frac{8RT}{\pi \mu} \right)^{1/2} = A T^{1/2}$

$$\Rightarrow T^{1/2} dT = -\frac{q}{SA} dx$$

$$\frac{q}{SA} \cdot L = \frac{2}{3} \left[(4T_0)^{3/2} - T_0^{3/2} \right] = \frac{14}{3} T_0^{3/2}$$

$$dx = -\frac{SA}{q} T^{1/2} dT = -\frac{3}{14} \frac{L}{T_0^{3/2}} \cdot T^{1/2} dT$$

$$\frac{p_0 L}{T_0} = p \cdot \left(-\frac{3}{14} \right) \frac{L}{T_0^{3/2}} \int_{T_0}^{4T_0} \frac{dT}{T^{1/2}} \Rightarrow p = \frac{7}{3} p_0$$

10.149. В объеме сферического сосуда радиусом R = 2 см протекает реакция с образованием атомов водорода. Скорость реакции $W_0 = 6{,}0 \cdot 10^{19}$ атомов/(см$^3 \cdot$с). При столкновении со стенкой сосуда атомы водорода захватываются с вероятностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Определить среднюю концентрацию атомов водорода в сосуде, если температура в сосуде T = 788 К, а коэффициент диффузии D = 60 см^2/с.

Решение.

Число образовавшихся и погибших атомов равно (КСК):

$$\frac{dN}{dt} = W_0 V - \frac{n_{ст}\langle v\rangle}{4} S\varepsilon \approx 0 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{у стенки}}}{n_{ст}} = \frac{4 W_0 V}{\langle v\rangle S\varepsilon} = \frac{4}{3}\frac{W_0 R}{\langle v\rangle \varepsilon}$$

Поток к стенке: $\overset{\leftarrow}{j} = -D\dfrac{dn}{dr} \cdot 4\pi r^2 = const = A.$

$$\Rightarrow n(r) = \frac{A}{4\pi D} \cdot \frac{1}{r} + \left(n_{ст} - \frac{A}{4\pi D R}\right)$$

Без $n_{ст}$: $n_1(r) = n(r) - n_{ст} = \dfrac{A}{4\pi D r} - \dfrac{A}{4\pi D r}$

(A) находим из сумм. числа частиц в потоке:

$$\int_0^R n_1(r) \cdot 4\pi r^2 dr = W_0 V \cdot \tau \approx W_0 V \underbrace{\frac{R^2}{6D}}$$

характ. время диффузии (см. №13)

Средняя концентрация:

$$n_{ср} = \frac{1}{V}\int_0^R n(r) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V}\int_0^R (n_{ст} + n_1(r)) 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{V}\left(n_{ст} \cdot V + W_0 V \frac{R^2}{6D}\right) = \frac{4}{3}\frac{W_0 R}{\langle v\rangle\varepsilon} + \frac{W_0 R^2}{6D} =$$

$$= \frac{W_0 R}{3}\left[\frac{R}{2D} + \frac{4}{\langle v\rangle\varepsilon}\right] = 2 \cdot 10^{17} \frac{\text{атомов}}{\text{см}^3}$$

$$!\ \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 4 \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$