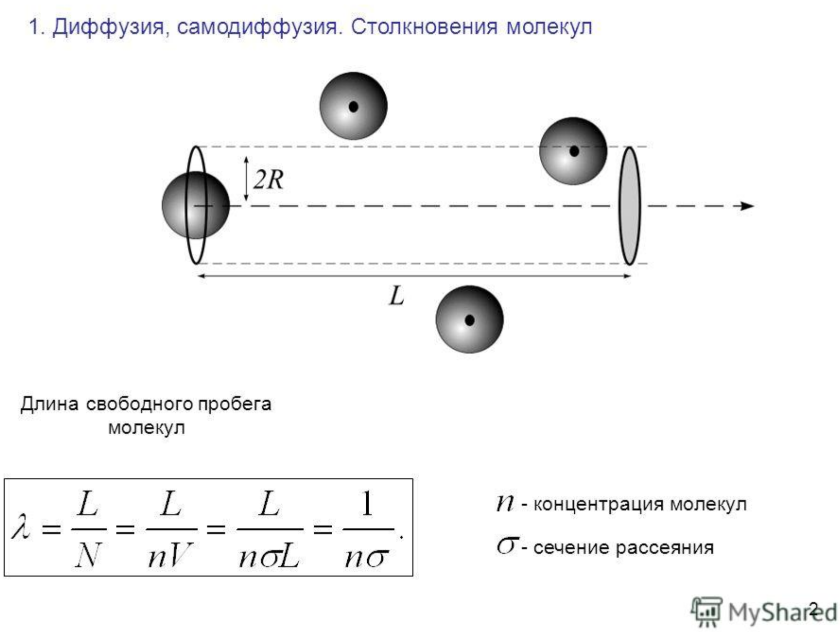
<u>Столкновения. Длина свободного пробега.</u>
<u>Явления переноса.</u>

Задачи: 10.8 10.15 10.36 10.149

ЗАДАНИЕ:10.38 10.16 10.134 10.143

1) Длина свободного пробега.

Длина свободного пробега молекулы — это среднее расстояние λ, которое пролетает частица за время между двумя последовательными столкновениями.



Тот же результат получается из требования, чтобы в объеме трубки оказалась одна частица, т.е. nV=1. Но $V = \sigma\lambda$, где σ поперечное сечение. Тогда $n\sigma\lambda = 1$ или $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$.

На самом деле это не значит, что столкновения происходят всегда при прохождении пути λ. Величина λ это среднее значение случайной величины x, где вероятность того, что столкновения произойдет на пути x.

Рассмотрим движение параллельного пучка молекул. Пусть в некоторый момент времени пучок имел интенсивность J_0. Найдем интенсивность J этого пучка на расстоянии x. Выберем пучок толщиной dx и единичным поперечным сечением. Число частиц в таком пучке равно $N = nSdx = ndx$. По определению эффективного сечения рассеяния число частиц выбывших из пучка из-за столкновений с молекулами газа:

$dN = -J\sigma ndx = -\frac{J}{\lambda}dx$ или $dJ = -\frac{J}{\lambda}dx$. Интегрируя получим

$J = J_0 e^{-\frac{x}{\lambda}},\ \ N = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}};$

2) Явления переноса.

1. Диффузия - перенос массы.

Поток молекул через площадку, перпендикулярную некоторой оси OX, за время $\triangle t$

$\triangle N = N_+ - N_- = \frac{1}{6}\bar{v}S\triangle t(n_1 - n_2)$; Тогда поток молекул:

$J = \frac{\triangle N}{S\triangle t} = \frac{1}{6}\bar{v}(n_1 - n_2) = -\frac{1}{3}\bar{v}\lambda\frac{n_1 - n_2}{2\lambda} = -\frac{1}{3}\bar{v}\lambda\frac{\triangle n}{\triangle x}$
Здесь считается, что все молекулы, проходящие через площадку, испытали свое последнее соударение с другими молекулами на одном и том же расстоянии от нее, равном λ, откуда $\triangle x = 2\lambda$. Тогда

$J = -D\frac{\triangle n}{\triangle x}$, где $D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda$ - коэффициент диффузии.

2. Вязкость - перенос импульса.

$f_{tr} = -\eta\frac{dv}{dx},\ \ \eta = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda\rho$

3. Теплопроводность - перенос энергии.

$q = -\kappa\frac{dT}{dx},\ \ \kappa = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda\rho c_V$, где c_V - удельная теплоемкость.

Законы Фика:

Законы Фика описывают диффузию и могут быть использованы для нахождения коэффициента диффузии D.

1. Первый закон Фика.

В одномерной системе с градиентом концентрации вещества dC/dx в направлении x диффузионный поток J определяется первым законом Фика

$j = -D\frac{\partial\rho}{\partial x};$

где j – поток вещества через единицу поверхности и D — коэффициент диффузии (знак «-» указывает направление потока от больших концентраций к меньшим). ρ - плотность вещества, диффузия которого рассматривается.

В общем случае градиент концентрации направлен в пространстве трёх измерений, то надо использовать более общую формулу:

$J = -D\nabla C$

1. Второй закон Фика.

В одномерной системе с градиентом концентраций вещества dC/dx в направлении x, скорость изменения концентрации вещества в данной точке, обусловлена диффузией, и определяется вторым законом Фика:

$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)$

где t - время.

Во втором уравнении Фика в левой части стоит скорость изменения концентрации во времени, а в правой части уравнения — вторая частная производная, которая выражает пространственное распределение концентрации, в частности, выпуклость функции распределения температуры, проецируемую на ось x.

3) Броуновское движение.

Броуновское движение — беспорядочное движение макроскопических видимых взвешенных частиц твёрдого вещества в жидкости или газе , вызываемое тепловым движением частиц жидкости или газа.

Броуновское движение частиц, взвешенных в окружающем веществе, тесно связано с явлением диффузии. Из за флуктуаций концентрации молекул окружающего вещества возникает их диффузия, которая оказывает давление на взвешенную частицу.

Движение броуновской частицы характеризуется ее подвижностью B, то есть величиной, связывающей скорость броуновской частицы u с силой F,приложенной к этой частице:

$$u = BF$$

Потенциальная энергия газа или жидкости равна –Fx, а наличие градиента концентрации обеспечивает диффузионный поток $J = -D\frac{dn}{dx}$. Этот поток, в состоянии равновесия, уравновешивается силовым потоком BFn, обусловленным наличием потенциальных сил:

$$-D\frac{dn}{dx} + BFn = 0$$

Для флуктуаций концентрации частиц справедливо распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

Беря производную из распределения Больцмана и используя U=-Fx получим

$$-D\frac{F}{kT}n + BFn = 0, \text{ откуда}$$

$$D = kTB$$

Последнее выражение называется соотношением Смолуховского-Эйнштейна для связи коэффициентов диффузии и подвижности.

По формуле Стокса для частиц радиуса r сила $F = 6\pi\eta r u$ и $B = \frac{1}{6\pi\eta r}$; Откуда

$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$.

Смещение броуновской частицы:

1. $\sqrt{x^2} = 2D\tau = 2kTB\tau$ - одномерный случай;

2. $\sqrt{l^2} = 4D\tau = 4kTB\tau$ - двумерный случай;

3. $\sqrt{r^2} = 6D\tau = 6kTB\tau$ - трехмерный случай;

Задача 10.8

10.8. Во сколько раз изменится число столкновений z, испытываемых одной молекулой в единицу времени, и длина свободного пробега λ молекул одноатомного газа, если в процессе, при котором теплоемкость газа равна $C_P/2$, объем газа увеличивается вдвое?

В модели твердых шаров число столкновений одной молекулы в единицу времени $z = n\bar{v}\sigma$ и длина прбега $\lambda = \bar{v}/z = \frac{1}{n\sigma}$;

Из распределения Максвелла $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ и $n = \frac{P}{kT}$, тогда для идеального газа

$z \sim \frac{P}{\sqrt{T}}$ и $\lambda = \bar{v}/z \sim \frac{T}{P} \sim V$

Теплоемкость С = $C_P/2$=const, т.е. это политропа с показателем $n = \frac{C-C_P}{C-C_V} = 5$

$PV^5 = const \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2^5$

$TV^4 = const \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 2^4$

Число соударений: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{P_2}{P_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{1}{8}$ уменьшается в 8 раз;

Длина пробега: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2$ увеличивается в два раза;

Задача 10.15

10.15* Урановый шар радиусом $R = 10$ см, помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия $\dot{q} = 100$ Вт/см^3. Температура воды $T_0 = 373$ К, теплопроводность урана $\varkappa = 400$ Вт/(м · К). Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

Для однородного изотропного тела уравнение теплопроводности при наличии источников тепла имеет вид в сферических координатах:

$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q$

где c$_V$-удельная теплоемкость, q-количество теплоты выделяемой в единицу времени, ρ - плотность.

В стационарном случае $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тогда:

$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q = 0$

$\int\limits_0^r \frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr + \int\limits_0^r q r^2 dr = \left(\kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) \frac{1}{3} q r^3 + C = 0$. Деля на r^2, получим

$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\kappa} r + \frac{C}{r^2}$

Постоянная интегрирования C=0, т.к. $\frac{C}{r^2} = \infty$ при r=0;

$\int\limits_{T_0}^{T} dT = T - T_0 = \int\limits_r^R \frac{q}{3\kappa} r dr = \frac{q}{6\kappa}(R^2 - r^2)$

$T = T_0 + \frac{q}{6\kappa}(R^2 - r^2)$, тогда температура в центре

$T_c = T_0 + \frac{qR^2}{6\kappa} = 790K.$

Задача 10.36

10.36. В цилиндрическом сосуде постоянного объема находится идеальный газ при температуре T_0 и давлении P_0. Боковые стенки сосуда — теплоизолирующие. Днище сосуда нагревают до $T = 4T_0$, а температуру крышки поддерживают равной T_0. Определить установившееся давление в сосуде. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

$\kappa = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda\rho c_V$;

Коэффициент теплопроводности пропорционален $\bar{v}$, $\kappa \sim \bar{v} \sim \sqrt{T}$, поэтому $\kappa = a\sqrt{T}$.

Из сохранения потока тепла

$\sqrt{T}\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{Sa}$; Интегрируя получим

$\frac{QL}{Sa} = \int\limits_{4T0}^{T_0} \sqrt{T}dT = \frac{2}{3}\left[(4T_0)^{3/2} - T_0^{3/2}\right] = \frac{14}{3}T_0^{3/2}$, где $L = \int dx$;

С расстоянием x меняются температура газа и плотность. Давление остается постоянным, т.к. процесс теплопередачи стационарный, движения газа нет, поэтому нет разности давлений.

Уравнение состояния идеального газа в слое dx

$PSdx = \frac{dm}{\mu}RT$; Интегрируя по dm, получим

$m = \int dm = \rho SL = P\frac{S\mu}{R}\int\limits_0^L \frac{dx}{T} = P\frac{S\mu}{R}\int\limits_{T_0}^{4T_0}\left(\frac{Sa}{Q}\frac{dT}{\sqrt{T}}\right) =$

$= 2P\frac{S\mu}{R}\frac{Sa}{Q}\sqrt{T_0}$, где $dx = \frac{Sa\sqrt{T}dT}{Q}$.

Отсюда после подстановки $\frac{QL}{Sa} = \frac{14}{3}T_0^{3/2}$ давление

$P = \frac{7}{3}\frac{m}{\mu}\frac{RT_0}{V_0} = \frac{7}{3}P_0$;

$P = \frac{7}{3}P_0$;

Задача 10.149

10.149. В объеме сферического сосуда радиусом $R = 2$ см протекает реакция с образованием атомов водорода. Скорость реакции $W_0 = 6{,}0 \cdot 10^{19}$ атомов/(см$^3 \cdot$ с). При столкновении со стенкой сосуда атомы водорода захватываются с вероятностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Определить среднюю концентрацию атомов водорода в сосуде, если температура в сосуде $T = 788$ К, а коэффициент диффузии $D = 60$ см^2/с.