Двумерная задача акустики на криволинейных расчётных сетках с использованием сеточно-характеристических схем первого и второго порядка точности

Семёнов, Смирнов

26 мая 2022 г.

1 Теория

1.1 Численный метод

Хотим решить двумерную акустическую задачу. В общем виде уравнение 2D акустики выглядит следующим образом:

$$\overrightarrow{q_t} + A_1\overrightarrow{q_x} + A_2\overrightarrow{q_y} = \overrightarrow{f} \tag{1}$$

где
$\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & p \end{pmatrix}$

$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}$

Для решения будем использовать сеточно-характеристический метод. Который состоит в том, что мы разбиваем исходное уравнение сперва на два однородных (по x и по y), а затем решаем $\overrightarrow{q_t} = \overrightarrow{f}$.

Первые два шага для x и y аналогичны, поэтому для сокращения будем писать индекс i вместо них.

Шаг1. Рассмотрим одномерное уравнение:

$$\overrightarrow{q_t} + A_i\overrightarrow{q_i} = \overrightarrow{0} \tag{2}$$

В таком случае можем представить матрицу в виде:

$$A_i = \Omega_i^{-1}\Lambda\Omega_i \tag{3}$$

Эти матрицы равны: $\Omega_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\rho c/2 & 0 & 1/2 \\ \rho c/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; $\Omega_x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\Omega_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

$\Omega_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Риманов инвариант:

$$\overrightarrow{\omega} = \Omega_i\overrightarrow{q} \tag{4}$$

Шаг2. Умножая (2) на Ω_i получим:

$$\overrightarrow{\omega_t} + \Lambda\overrightarrow{\omega_i} = \overrightarrow{0} \tag{5}$$

Шаг3.Решим уравнение (5) используя характеристическое свойство:

$$\omega_j(t+dt, x) = \omega_j(t, x - \lambda_j dt) \tag{6}$$

Это нам необходимо чтобы проводить интерполяцию. Приступим к ней:
дифференцируя по i(либо x либо y)гладкую (предполагаем) функцию $\overrightarrow{q}$

$$(\overrightarrow{q_i})_t + A_i(\overrightarrow{q_i})_i = \overrightarrow{0} \tag{7}$$

Примем $\overrightarrow{q_i}$ за новую переменную и введем ещё один Риманов инвариант:

$$\overrightarrow{w} = \Omega_i \overrightarrow{q_i} \tag{8}$$

Т.о., после процедуры интерполяции, мы будем знать ω и w для следующего шага $t+dt$ и перейдя обратно к $\overrightarrow{q_i}$, $\overrightarrow{q}$ через обратные матрицы Ω_i.
Для корректности проведения данной процедуры на следующих шагах нам надо также знать значения вторых производных $\overrightarrow{q_{xy}}$ и $\overrightarrow{q_k}$ $(k \neq i)$. В таком случае получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{q_k})_t + A_i(\overrightarrow{q_k})_i = \overrightarrow{0} \\ (\overrightarrow{q_{xy}})_t + A_i(\overrightarrow{q_{xy}})_i = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{9}$$

1.2 Криволинейная сетка

Наша задача $--$ перейти в исходном уравнении в полярные координаты (r, φ) и выяснить как изменятся матрицы A_1, A_2 на $\widetilde{A_1}$, $\widetilde{A_2}$.
Тогда известные нам производные преобразуются в как:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r}\cot\varphi\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\tan\varphi\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \cot\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_r}{\partial r} - \tan\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \tag{13}$$

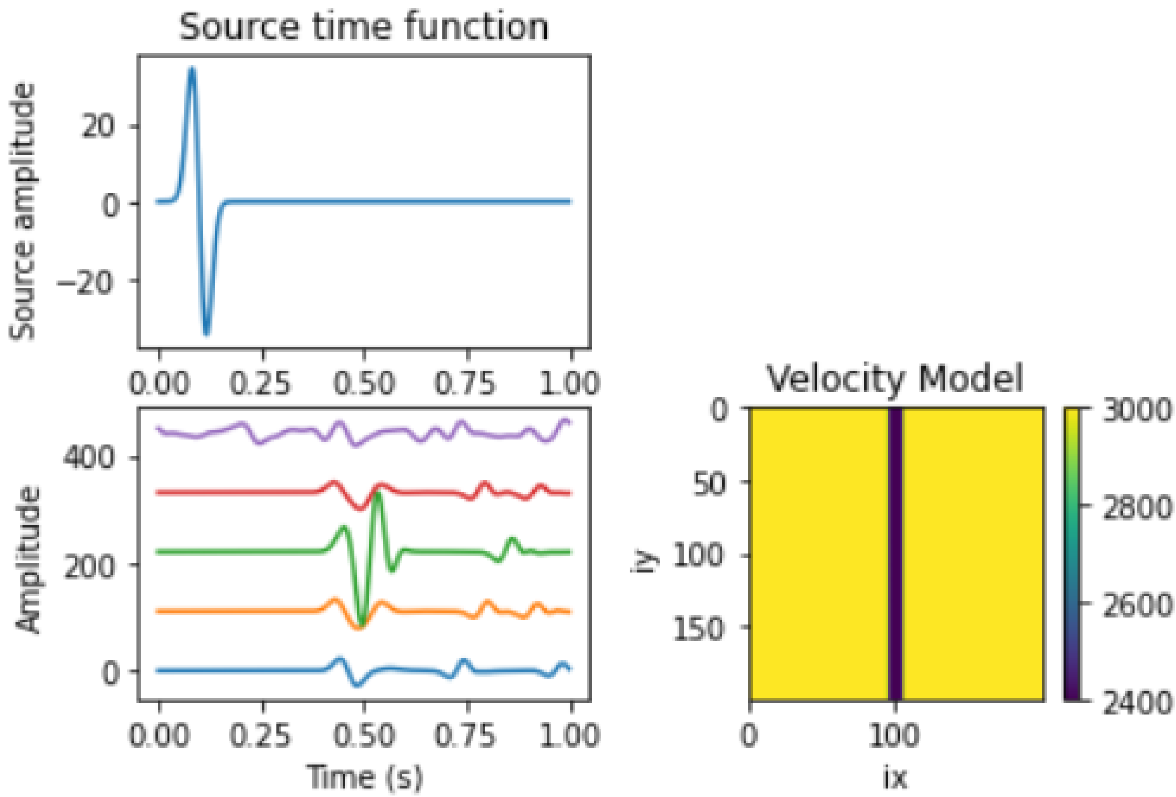
Следовательно, система уравнений (1) преобразуется в:

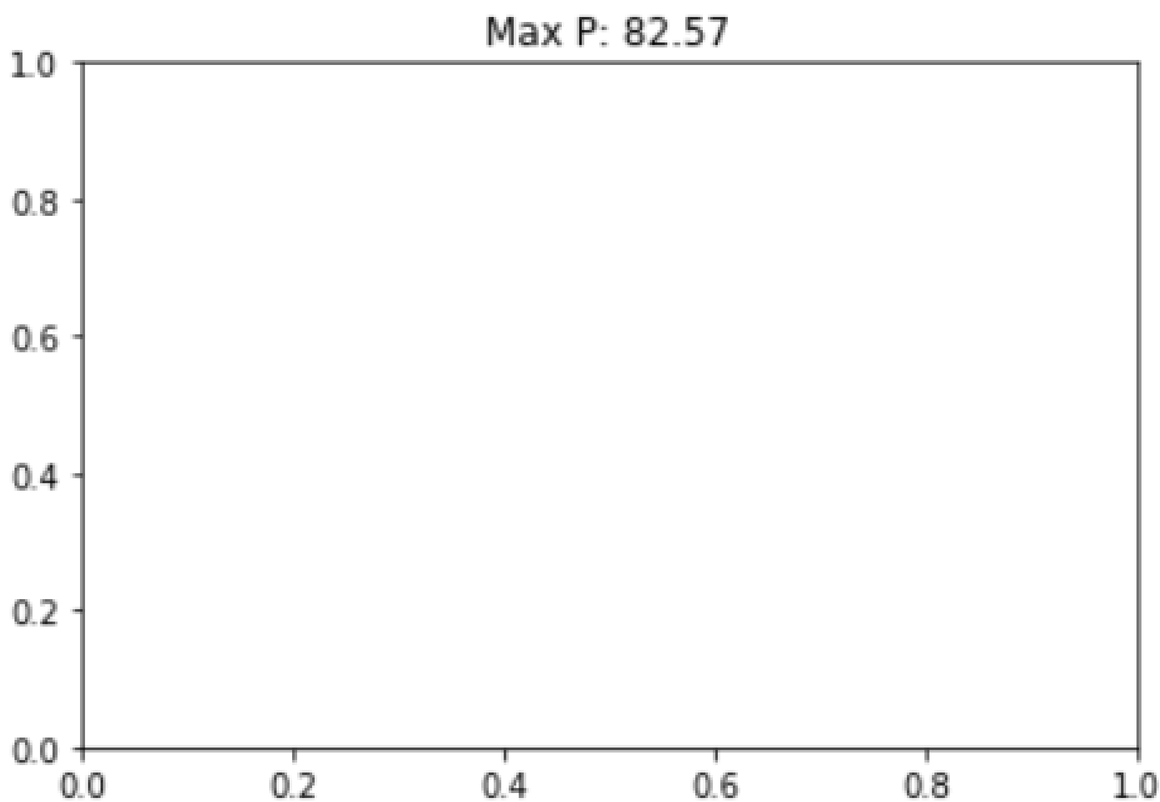
$$\overrightarrow{q_t} + \widetilde{A_1}\overrightarrow{q_r} + \widetilde{A_2}\overrightarrow{q_\varphi} = \overrightarrow{f} \tag{14}$$

где
$\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} v_r & v_\varphi & p \end{pmatrix}$

$\widetilde{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho\cos\varphi} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho\sin\varphi} \\ 2\rho c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\widetilde{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{r\rho}\cot\varphi \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\rho}\tan\varphi \\ 0 & 2\rho c^2\cot 2\varphi & 0 \end{pmatrix}$
По сеточно-характеристическому методу составим матрицы:

2 Реализация на Python





3 Выводы