

# Подготовка всего необходимого

In [2]:

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [3]:

```
PRETTY_NAMES = {'dijkstra': 'Dijkstra',
                 'floyd_warshall': 'Floyd-Warshall',
                 'ford_bellman': 'Ford-Bellman'}

GRAPH_TYPES = {'complete_graph': 'Complete Graph',
               'medium-density_graph': 'Medium-density Graph',
               'spanning_tree': 'Spanning Tree'}

COLORS = {'dijkstra': 'red', 'floyd_warshall': 'blue', 'ford_bellman': 'green',
          'complete_graph': 'red', 'medium-density_graph': 'blue', 'spanning_tree': 'green'}

VERTICES_AMOUNT = range(10, 1011, 50)
```

In [4]:

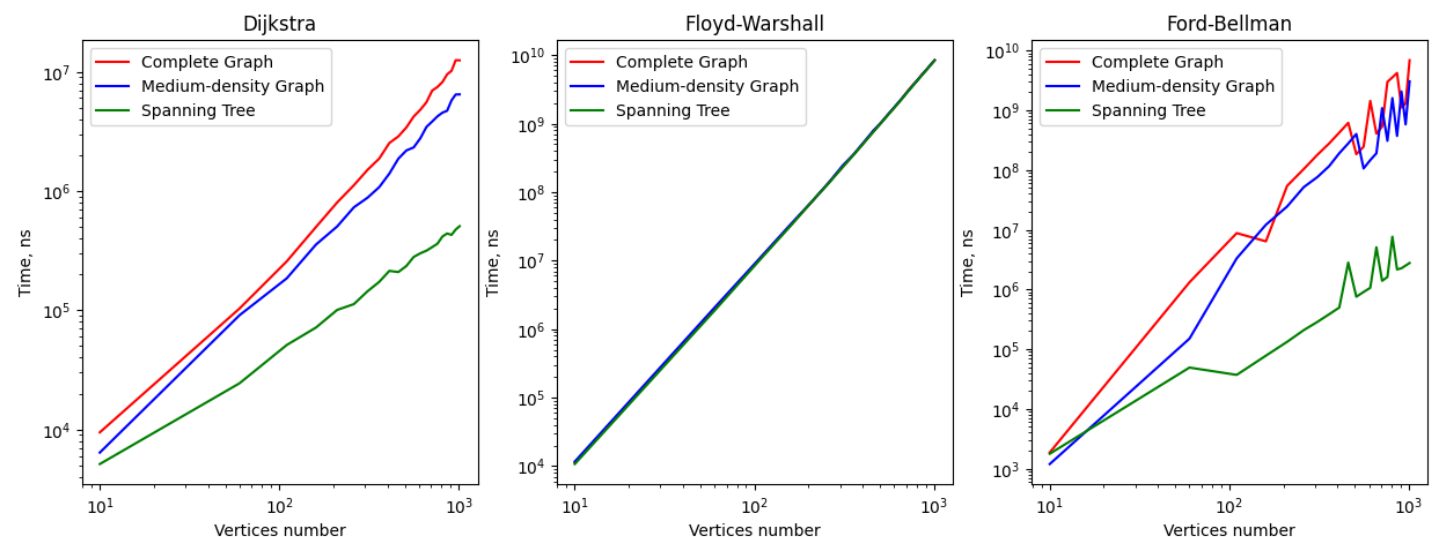
```
algorithms = {algorithm : pd.read_csv(f'../Measurements/{algorithm}.csv', sep=';') for algorithm in PRETTY_NAMES.keys()}
graph_types = {graph_type : pd.read_csv(f'../Measurements/{graph_type}.csv', sep=';') for graph_type in GRAPH_TYPES.keys()}
```

## Сравнения по алгоритмам

In [5]:

```
fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))

for i, algorithm in enumerate(PRETTY_NAMES.keys()):
    axs[i].set_title(PRETTY_NAMES[algorithm])
    axs[i].set_xlabel('Vertices number')
    axs[i].set_ylabel('Time, ns')
    for graph_type in GRAPH_TYPES.keys():
        axs[i].loglog(VERTICES_AMOUNT, algorithms[algorithm][GRAPH_TYPES[graph_type]], color=COLORS[graph_type], label=GRAPH_TYPES[graph_type])
    axs[i].legend()
    pass
```



Асимптотика алгоритма Дейкстры в представленной реализации:  $O(|E|\log|V|)$ , поэтому он ожидаемо работает лучше всего на тех графах, где меньше всего рёбер, то есть на остовах, затем на средне-плотном графе и хуже всего на полном графе.

Асимптотика алгоритма Флойда-Уоршелла:  $\Theta(|V|^3)$ , то есть он не зависит от количества рёбер, поэтому и видим три сливающиеся линии.

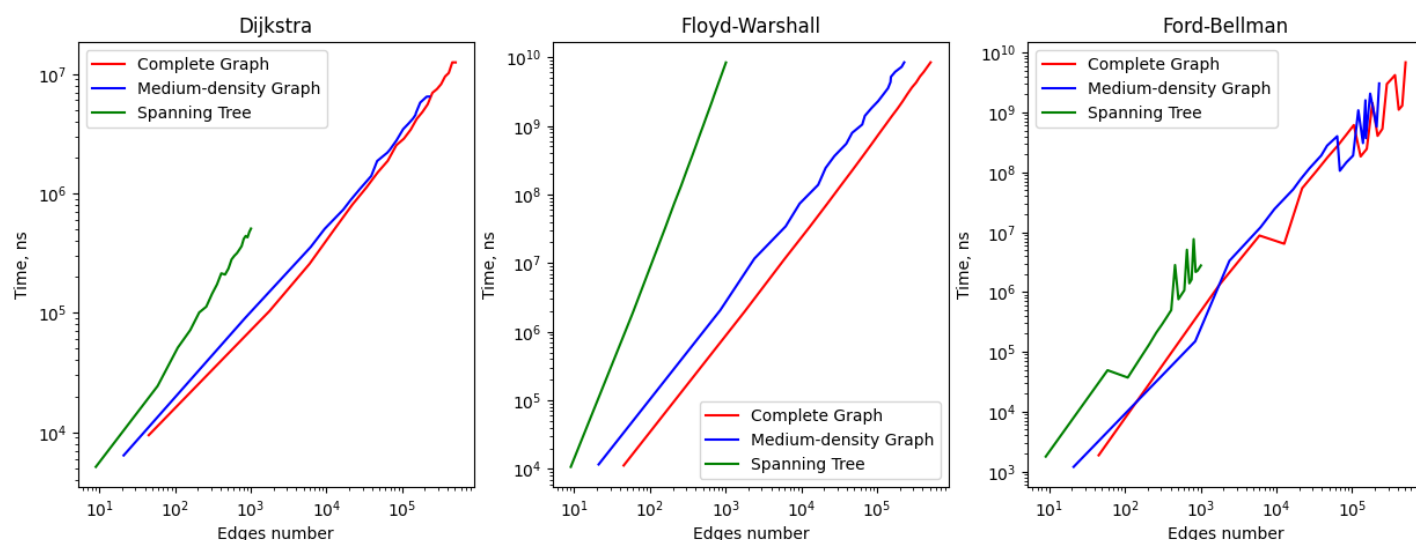
Асимптотика алгоритма Форда-Беллмана:  $O(|E||V|)$ , значит, в нашем случае разница между полным графом и средне-плотным должна быть в **2-2,5** раза, что примерно и достигается при достаточно большой мощности множества вершин. Для остова дерева  $|E| = |V| - 1$ , поэтому видим квадратичную зависимость.

In [6]:

```
fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))

for i, algorithm in enumerate(PRETTY_NAMES.keys()):
    axs[i].set_title(PRETTY_NAMES[algorithm])
    axs[i].set_xlabel('Edges number')
    axs[i].set_ylabel('Time, ns')

    for graph_type in GRAPH_TYPES.keys():
        axs[i].loglog(algorithms[algorithm][GRAPH_TYPES[graph_type] + 'Edges'], algorithms[algorithm][GRAPH_TYPES[graph_type]], color=COLORS[graph_type], label=GRAPH_TYPES[graph_type])
    axs[i].legend()
pass
```



В принципе, графики ожидаемые, для Дейкстры - чем больше рёбер, тем больше время работы, при этом для остова время наименьшее из всех, так как в нём очень мало и вершин, и рёбер, далее средне-плотный граф. Зелёный график находится выше всех потому, что при одинаком количестве рёбер, остова будет содержать наибольшее количество вершин, и, следовательно, большее время работы.

В случае с Флойдом-Уоршеллом график выглядит чуть сложнее, выглядит так, как будто для дерева асимптотика хуже, хотя на самом деле  $10^3$  рёбер для остова означает примерно столько же вершин, а  $10^3$  для других типов графов это числа на порядки ниже -- в общем, можно сделать такой же вывод, как и на графиках с вершинами -- зависит только от количества вершин.

На третьем графике наблюдается та же проблема с графиком для дерева, что и на двух других, она уже объяснена. Синий и красный графики находятся очень близко, но в большинстве точек синий всё же выше, как при одном и том же количестве рёбер в средне-плотном графе будет больше вершин, чем в плотном графе, поэтому и время работы будет выше.

## Сравнения по типам графа

In [7]:

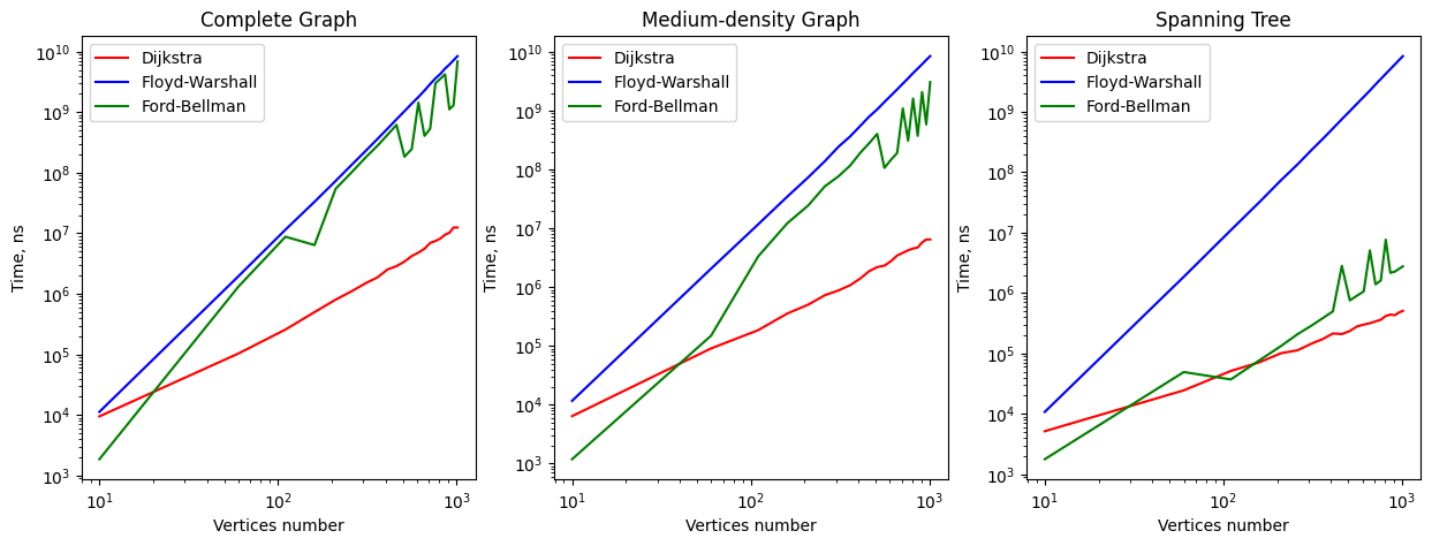
```
fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))
```

```

for i, graph_type in enumerate(GRAPH_TYPES.keys()):
    axs[i].set_title(GRAPH_TYPES[graph_type])
    axs[i].set_xlabel('Vertices number')
    axs[i].set_ylabel('Time, ns')
    for algorithm in PRETTY_NAMES.keys():
        axs[i].loglog(VERTICES_AMOUNT, graph_types[graph_type][algorithm], color=COLORS[algorithm], label=PRETTY_NAMES[algorithm])

    axs[i].legend()
pass

```



Флойд-Уоршелл работает одинаково на всех графах, а вот Форд-Беллман с уменьшением количества рёбер в графе, работает всё лучше и лучше и на остоле сопоставим с алгоритмом Дейкстры.

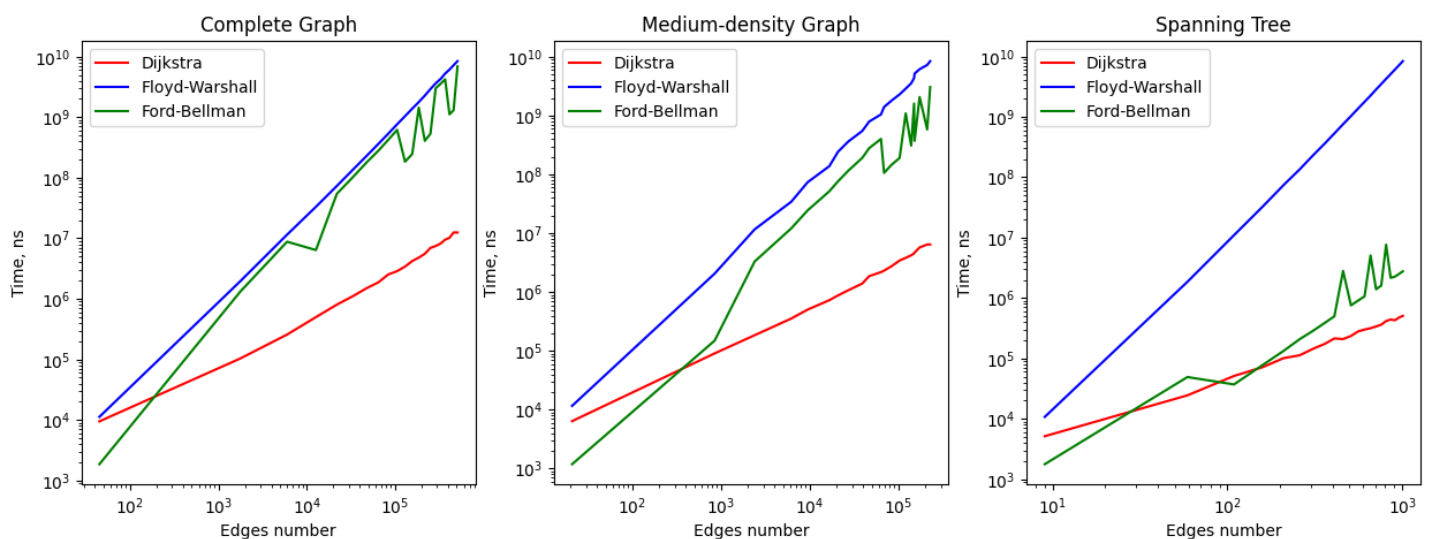
In [8]:

```

fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))

for i, graph_type in enumerate(GRAPH_TYPES.keys()):
    axs[i].set_title(GRAPH_TYPES[graph_type])
    axs[i].set_xlabel('Edges number')
    axs[i].set_ylabel('Time, ns')
    for algorithm in PRETTY_NAMES.keys():
        axs[i].loglog(graph_types[graph_type]['Edges'], graph_types[graph_type][algorithm], color=COLORS[algorithm], label=PRETTY_NAMES[algorithm])
    axs[i].legend()
pass

```



Наблюдаем графики, очень похожие на графики выше. Везде дольше всех работает алгоритм Флойда-Уоршелла, так как зависит только от количества вершин, а вот два других всё так же конкурируют между собой, но выигрывает всё же Дейкстра, как количество вершин входит в его асимптотику под логарифмом.

# Общий вывод

Сравнить алгоритмы Форда-Беллмана и Дейкстры просто, так как они выполняют одну задачу -- алгоритм Дейкстры асимптотически лучше, из-за того, что можно написать алгоритм так, чтобы их асимптотики были похожи, но количество вершин входило под логарифмом.

На первый взгляд, алгоритм Флойда-Уоршелла показал себя хуже всех, однако здесь следует помнить, что он выполняет более общую задачу - ищет кратчайшие расстояния между всеми парами вершин в графе, а не между начальной и всеми остальными.

Попробуем оценить, когда его использование оправдано, сравнив с алгоритмом Дейкстры, для этого нужно чтобы (для простоты константы в асимптотиках опустим):

$$|V|^3 \leq n$$
$$* |E| \log_2(|V|)$$

или

$$n \geq \frac{|V|^3}{|E| \log_2 |V|}$$

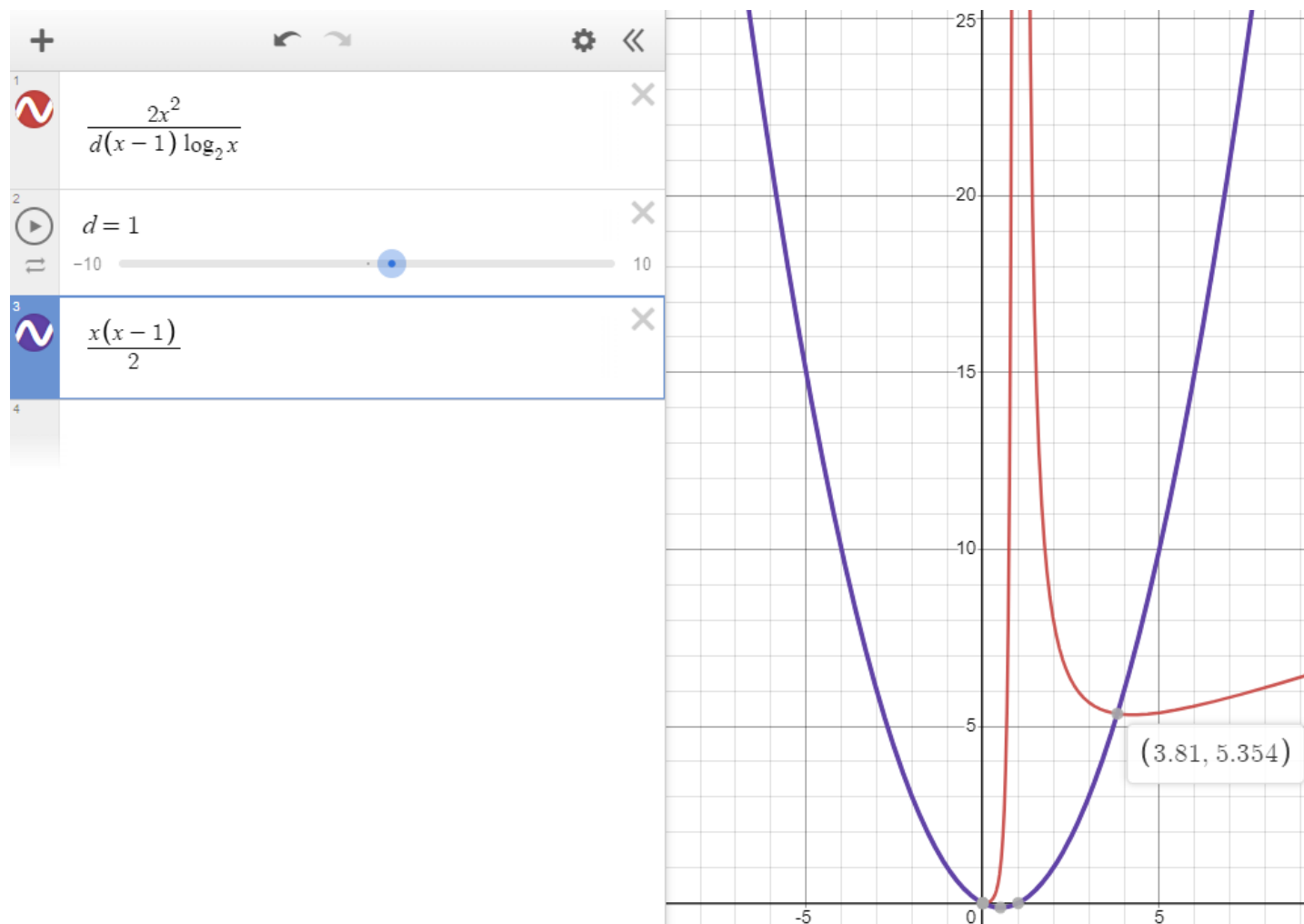
Выразим  $|E|$  через  $|V|$ :  $|E| = \delta \frac{|V|(|V|-1)}{2}$ , где  $\delta$  - коэффициент плотности.

Тогда итоговая формула:

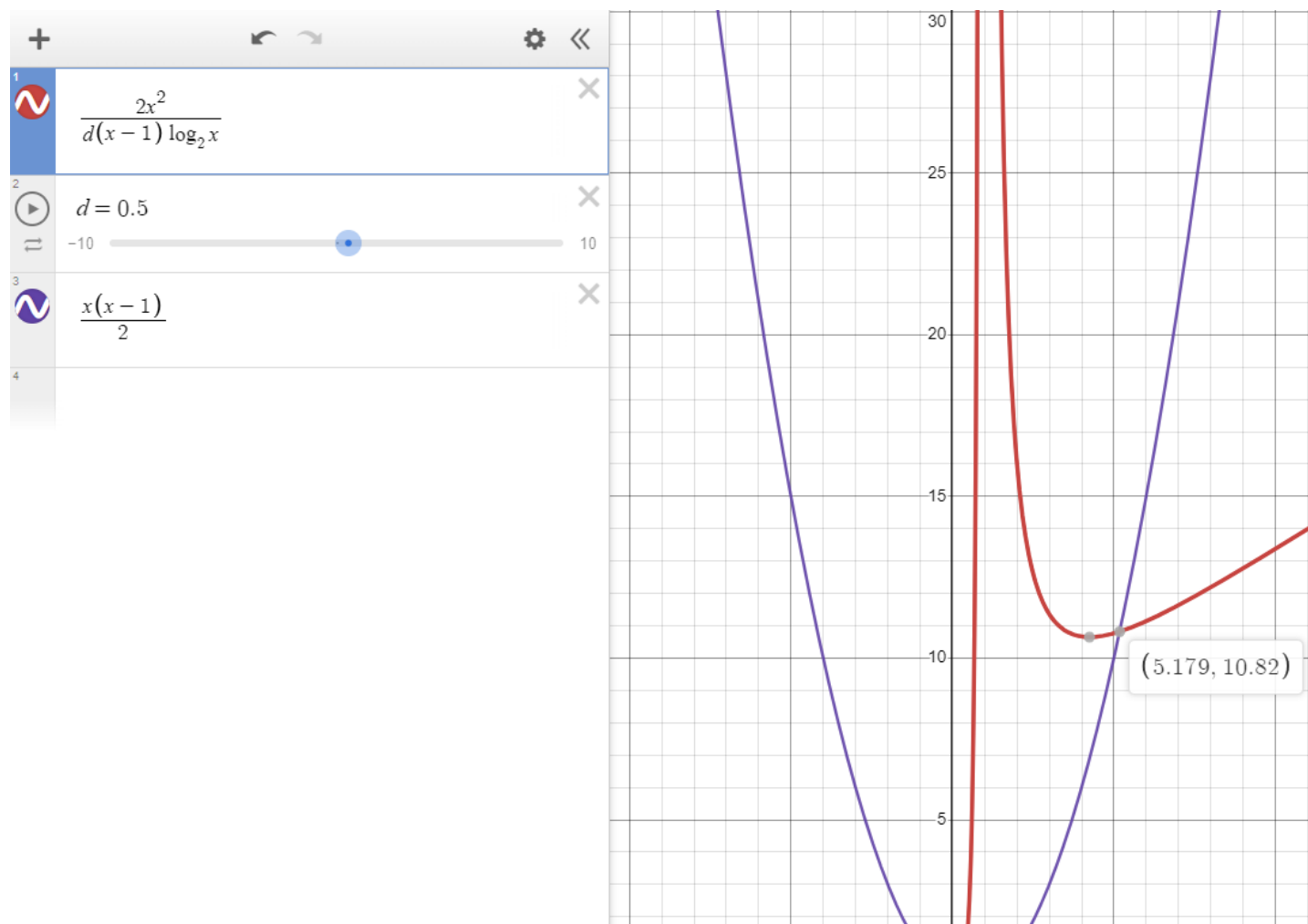
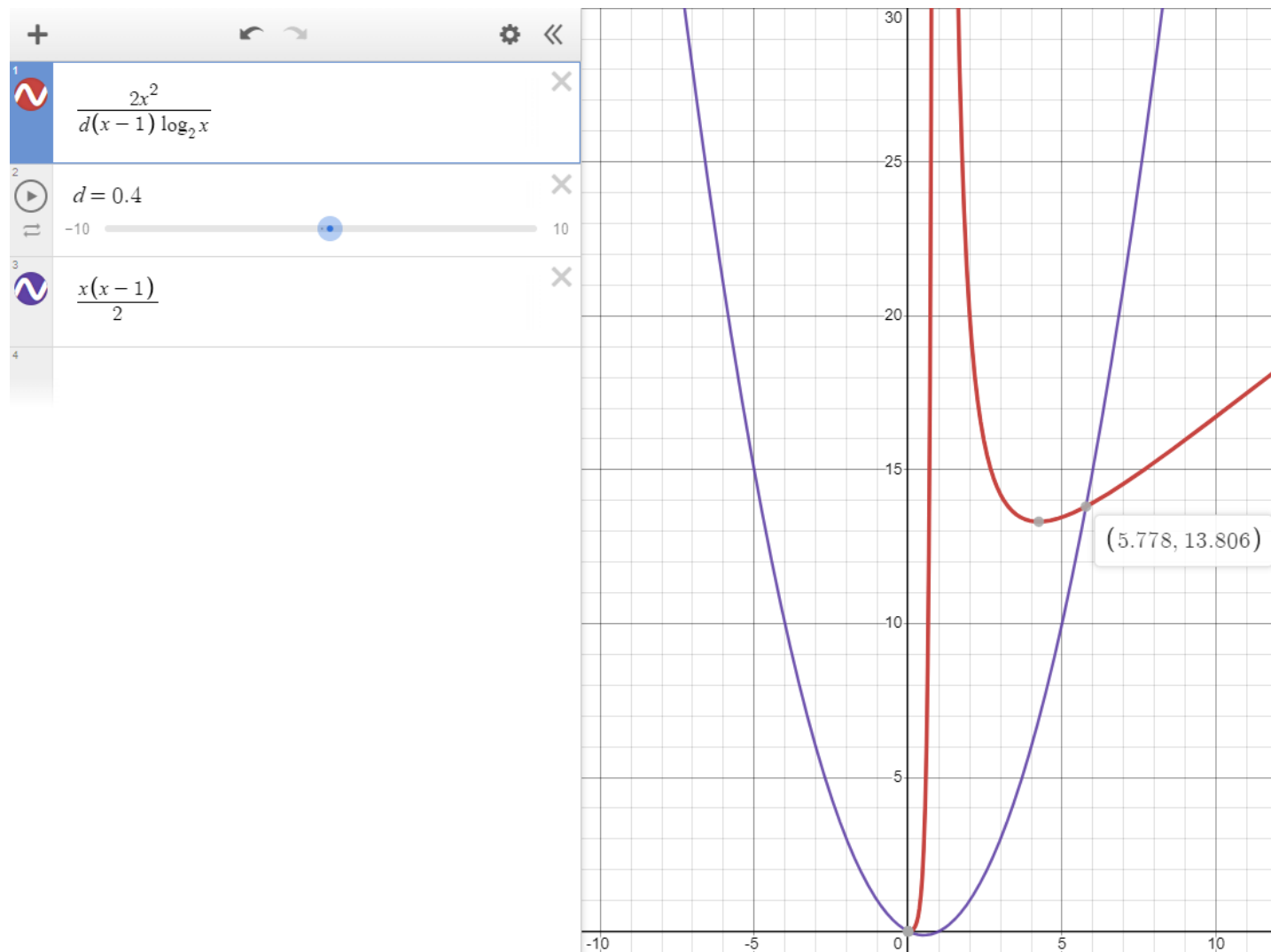
$$\geq \frac{n}{\frac{2|V|^2}{\delta(|V|-1)\log_2 |V|}}$$

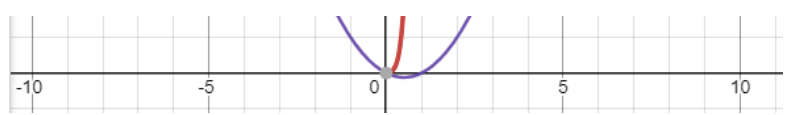
При этом количество запросов  $n$  не должно превышать количество пар в графе, равное  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Построим графики для разных коэффициентов плотности:

Для полного графа:

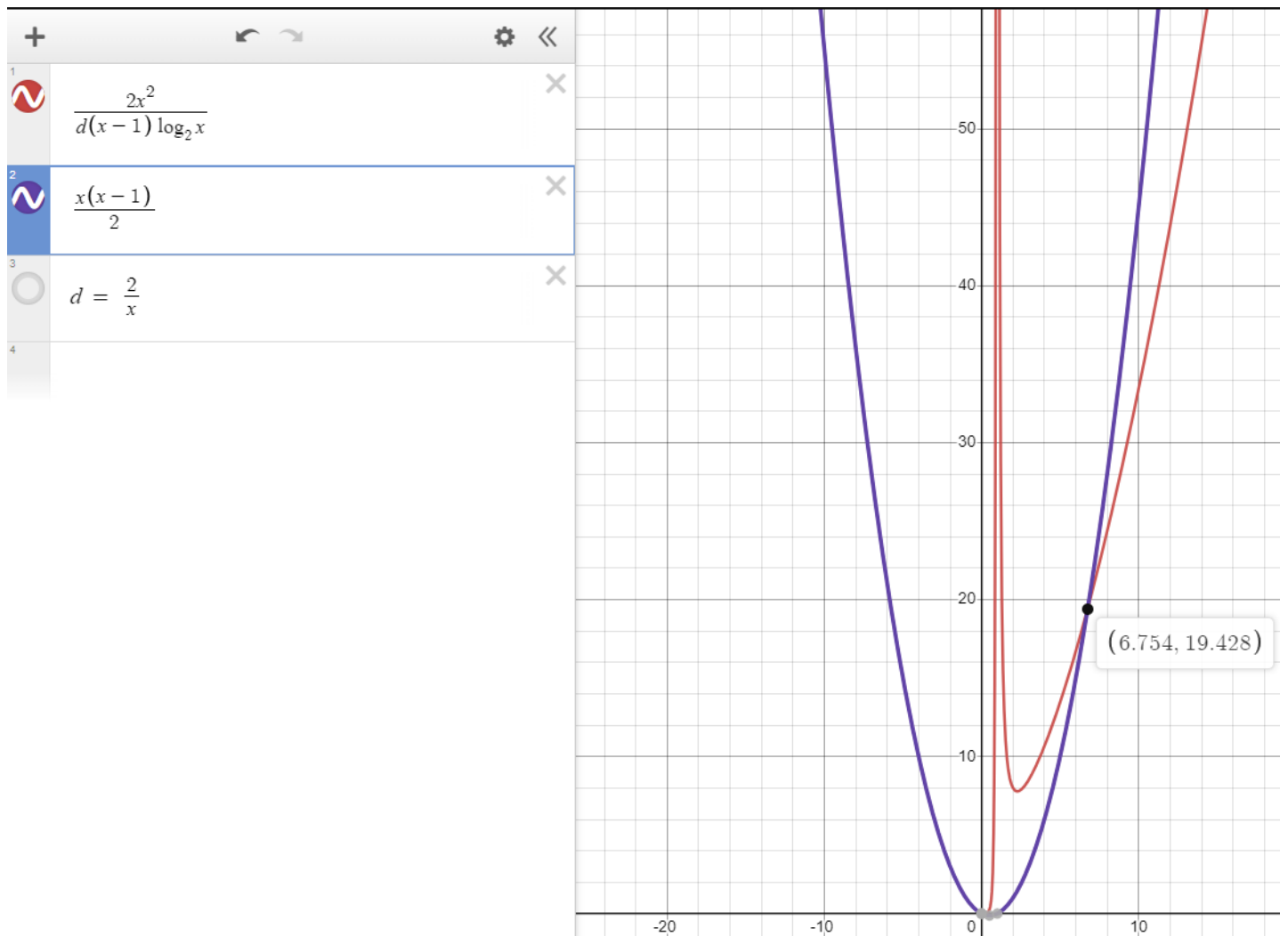


Для коэффициентов **0.4** и **0.5**:





Для остоного дерева:



Графики интерпретировать так: например, имеем полный граф на 10 вершинах и хотим сделать 20 запросов на получение расстояния между парой различных точек, тогда смотрим на соответствующий график - 20 больше, значение красного графика в точке 10 и меньше значения фиолетового графика в той же точке, поэтому для такой задачи лучше подойдёт алгоритм Флойда-Уоршелла.

При определённых условиях, алгоритм Флойда-Уоршелла может быть использовать даже для разреженных графов.

Общий вывод таков: если нужно уметь быстро отвечать на запросы на получение расстояние между одной фиксированной точкой и какой-то другой, то лучшим выбором станет алгоритм Дейкстры в текущей реализации или с использованием фибоначиевых куч, в противном случае - подбирайте параметры в представленных формулах и выбирайте между полным просчётом алгоритмом Флойда-Уоршелла и множественными запросами, используя алгоритм Дейкстры.