Analyse II

Joachim Favre

Dimanche 27 février 2022

1 Démonstrations à connaître

Théorème (existence et unicité d'une solution des EDVS) Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$, et soit $g : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Existence: Alors, pour tout couple (x_0, b_0) où $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$, l'équation

$$f(y)y' = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \mapsto I$ vérifiant la condition initiale.
Unicité: Si $y_1 : J_1 \mapsto I$ et $y_2 : J_2 \mapsto I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors:

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \forall x \in J_1 \cap J_2$$

Démonstration du théorème

Nous allons seulement montrer l'existence de la solution.
Soit la fonction suivante:

$$F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)dt$$

On sait que $F(y)$ est dérivable par le théorème fondamental du calcul intégral. De plus, on sait que $F'(y) = f(y) \neq 0$ sur I, donc $f(y)$ ne change pas pas de signe et donc $F(y)$ est monotone. Puisque $F(y)$ est continue et monotone, on sait qu'elle est inversible sur I.
Soit aussi la fonction suivante:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, on sait aussi que $G(x_0) = 0$ et que G est dérivable sur J.
Définissons aussi la fonction suivante dans un voisinage de x_0 (on sait que F est inversible sur I, et $F^{-1}(G(x_0)) = b_0 \in I$):

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Nous allons démontrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y)y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et qu'elle satisfait $y(x_0) = b_0$.
En manipulant notre définition, on obtient que, dans un voisinage de $x_0 \in J$:

$$F(y(x)) = G(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} F'(y(x))y'(x) = G'(x) \implies f(y)y'(x) = g(x)$$

De plus, nous savons par la définition de G et F que $G(x_0) = 0$ et $F(b_0) = 0$, donc:

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0$$

□

Idée de la preuve

Nous partons de notre équation:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Et, notre théorème nous dit que c'est plus ou moins équivalent à:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \iff F(y) = G(x)$$