Université catholique de Louvain

Devoir 2

LEPL1101 – Algèbre
Professeurs R. Jungers, V. Wertz

Nom: ONCIUL
Prénom: ANDRU

LEPL1101 – Devoir 2

Votre devoir est attendu sur Gradescope pour le *4 décembre 2018 à minuit*. Veuillez insérer vos réponses dans les cadres prévus à cet effet. Une grande importance sera apportée à la clarté, la précision et la concision de vos réponses.

Préalable : Veuillez recopier l'engagement suivant dans l'espace ci-dessous : Sur l'honneur, je certifie que le contenu de cette production est le fruit de mon travail personnel.

Question 1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$, avec a et b deux coefficients réels.

a. Pour quelles valeurs de a, b la matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

- Toute matrice A est diagonalisable si et seulement si, Pour chaque lambda $\Rightarrow m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$
- Trouvons λ :
  $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & a-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix} \iff (1-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda)$
  $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$, $\lambda_3 = b$
- Si $1 \neq a \neq b$, alors la matrice est diagonalisable car $m_a(\lambda) = 1$ et $m_g(\lambda) = 1$
- Si $a = b$, $\lambda_2 = \lambda_3$, $m_a(\lambda_2) = 2$ et $m_g(\lambda_2) = 1$ ~~donc~~ non-diagonalisable
- Si $a = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2$, pour tout b, $m_a(\lambda_1) = 2$ et $m_g(\lambda_1) = 1$
- Si $b = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3$, et ssi $a = 3$ alors
  $m_a(\lambda_1) = 2$ et $m_a(\lambda_1) = 2$, $m_a(\lambda_2) = 1$ et $m_g(\lambda_2) = 1$
  la matrice est diagonalisable

$\rightarrow$ Diagonalisable si $a \neq b$ et si $1 \neq a \neq b$ sauf si $b = 1$ et $a = 3$

Université catholique de Louvain

Devoir 2

LEPL1101 – Algèbre
Professeurs R. Jungers, V. Wertz

Nom: ONCiUL
Prénom: ANDRU

b. Fixons maintenant $a = 2, b = 4$. Que vaut l'élément (1,3) (1ère ligne, 3ème colonne) de la matrice e^A ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X^{-1} e^A X = e^\lambda$

$\downarrow$

matrice des vecteurs propres

$e^\lambda = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0_4 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

$e^A = X e^\lambda X^{-1}$

il reste à calculer X^{-1}: $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^A = \begin{pmatrix} 3e & 6e(e+1) & 4e(1-3e+2e^3) \\ 0 & 3e^2 & 6e^2(e^2-1) \\ 0 & 0 & 3e^4 \end{pmatrix}$

L'élément en (1,3) vaut donc : $4e(1-3e+2e^3)$

Université catholique de Louvain | Devoir 2

LEPL1101 – Algèbre
Professeurs R. Jungers, V. Wertz

Nom: ONCIUL
Prénom: ANDRU

Question 2 : Soit V un espace vectoriel réel et soit $\Diamond : V \times V \to R$ une application bilinéaire et symétrique. Soient $v_1, v_2 \in V$ deux vecteurs distincts tels que $v_1 \Diamond v_1 + v_2 \Diamond v_2 = 2 v_1 \Diamond v_2$. L'application $\Diamond$ peut-elle être un produit scalaire ? Justifiez votre réponse.

Démonstration:

- si $\Diamond$ est un produit scalaire alors il est définit positivement:

  $\forall x \in V, x \neq 0, \Rightarrow x \Diamond x > 0$

- Il suffit donc de trouver un x qui ne respecte pas cette égalité
- Prenons $X = v_1 - v_2$ donc $v_1 - v_2 \Diamond v_1 - v_2 > 0$
- Si $\Diamond$ est un produit scalaire alors il est distributif

  $v_1 - v_2 \Diamond v_1 - v_2 \iff v_1 \Diamond v_1 - v_1 \Diamond v_2 - v_2 \Diamond v_1 + v_2 \Diamond v_2$

  $\iff v_1 \Diamond v_1 + v_2 \Diamond v_2 - 2 v_1 \Diamond v_2$

- On par hypothèse $v_1 \Diamond v_1 + v_2 \Diamond v_2 = 2 v_1 \Diamond v_2$

→ donc pour $X = v_1 - v_2$, $x \Diamond x = 0$ ce qui pouve que $\Diamond$ n'est pas défini positivement.