

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

## Исследование самовозбуждающихся режимов работы схемы Чуа.

Авторы:

Шахматов Андрей Юрьевич Б02-304  
Гуревич Тимофей Денисович Б02-312  
Борисов Дмитрий Владимирович Б02-305

Долгопрудный 2024

## Аннотация

Исследованы самовозбуждающиеся режимы работы схемы Чуа. Получена качественная теоретическая модель режимов работы схемы Чуа. Численно промоделировано поведение схемы при различных бифуркационных параметрах. Проведён анализ полученных состояний. Собран прототип схемы Чуа на основе операционных усилителей, сопротивлений и конденсаторов. Исследована бифуркационная диаграмма схемы на реальном прототипе. Проведён сравнительный анализ полученных результатов. Определены возможные причины расхождения теоретической модели и эксперимента.

## Введение

В современном мире проблема обеспечения безопасности информации становится все более актуальной. Одним из перспективных решений данной задачи является использование хаотических сигналов в качестве несущей волны. Такой подход значительно повышает уровень защиты данных, так как злоумышленник сталкивается с практически неразрешимой задачей расшифровки хаотического сигнала.

Для генерации хаотических сигналов широко применяется схема Чуа, включающая два конденсатора, индуктивность, сопротивление и нелинейный элемент — диод Чуа. Простота конструкции делает эту схему привлекательной для различных отраслей промышленности. Однако, несмотря на наличие теоретической модели, описывающей поведение схемы Чуа, её практическое применение сталкивается с рядом сложностей, такими как высокая чувствительность контура и ограниченная область хаотического поведения.

Целью данной работы является детальное исследование хаотических режимов работы схемы Чуа, а также устойчивых нехаотических режимов, существующих с хаотическими.

## Теоретическая часть

### Хаотические системы

Предметом изучения теории хаоса являются системы, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = v(x,t)$$

Стоит отметить, что левая часть должна быть нелинейной (линейные системы никогда не являются хаотическими). Давайте поймем, какую систему стоит считать хаотической:

1. Она обладает свойством сильной зависимости от начальных условий. Кванторно это можно записать так:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y : \rho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(g^\tau(x), g^\tau(y)) > \delta$ . Геометрически это можно интерпретировать следующим образом:

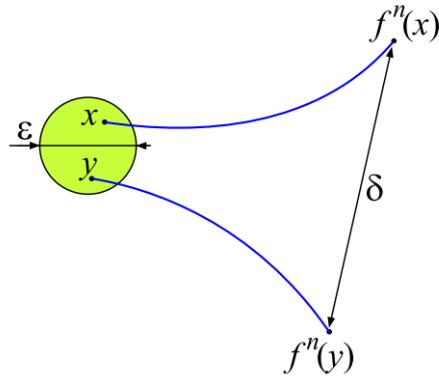


Рис. 1: Демонстрация сильной зависимости поведения системы от начальных условий

2. Динамическая система должна обладать свойством топологического смешивания (быть транзитивной): то есть для любых двух множеств нашего фазового пространства системы поток от одного рано или поздно должен пересечься со вторым выбранным множеством.

3. Периодические орбиты системы должны быть всюду плотными в нашем фазовом портрете.

Важным объектом в вопросе изучения хаотических систем являются аттракторы: подмножества нашего фазового пространства к которому стремятся все наши решения, т.е:  $g^\tau(A) = A$  &  $\forall U_\varepsilon(A) : g^\tau(U_\varepsilon(A)) \rightarrow A$

## Устройство схемы Чуа

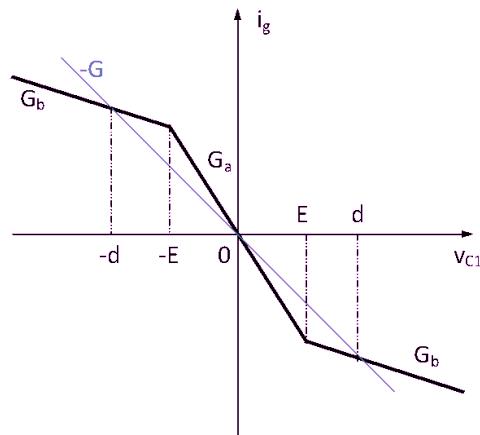
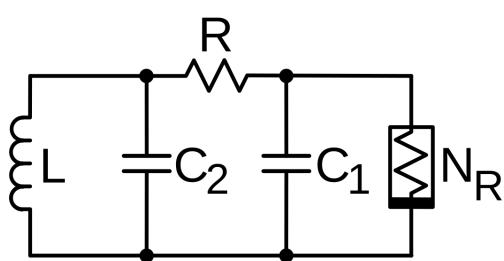


Рис. 2: Электрическая схема цепи Чуа и вольт-амперная характеристика диода Чуа  $N_R$ .

Классическая схема Чуа состоит из двух конденсаторов, сопротивления, индуктивности и диода Чуа. Диод Чуа возможно реализовать при помощи использования двух операционных усилителей и шести резисторов (Рис. 3). Также в реальности использование физической индуктивности может приводить к плохим результатам из-за наличия большого внутреннего сопротивления. По этой причине в нашей работе индуктивность была заменена схемой на основе операционных усилителей

— гиратором (Рис. 3). Эквивалентную индуктивность полученной схемы можно рассчитать

$$L = \frac{R_7 R_9 R_{10} C}{R_8}, \quad (1)$$

где  $R$  пронумерованы в порядке от верхнего к нижнему на схеме.

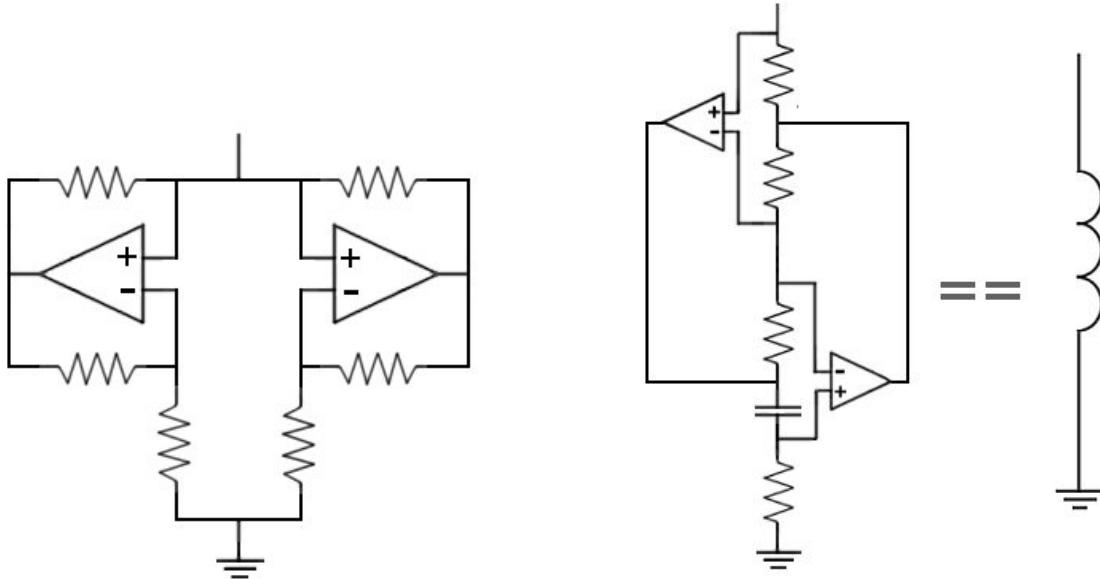


Рис. 3: Реализация диода Чуа на основе операционных усилителей и эквивалентная индуктивности схема гиратора.

Применяя полученные модификации получим исходную вариацию схемы с использованием только операционных усилителей, конденсаторов и сопротивлений (Рис. 4).

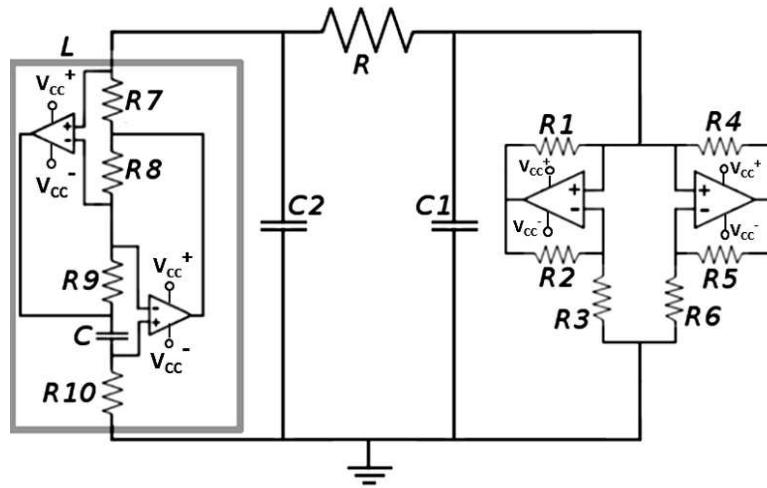


Рис. 4: Итоговая электрическая схема цепи Чуа, использующаяся в данной работе.

Резисторы  $R$  и  $R_{10}$  являются переменными ползунковыми резисторами. Точные характеристики элементов приведены в приложении (Таблица 1).

## Математическая модель схемы Чуа

Обозначив за  $U_{C_1}, U_{C_2}, I_L$  напряжения на конденсаторах и ток через катушку соответственно можно записать систему уравнений, описывающую цепь Чуа:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{U_{C_2} - U_{C_1}}{R} - g(U_{C_1}), \\ C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{U_{C_1} - U_{C_2}}{R} + I_L, \\ L \frac{dI_L}{dt} = -U_{C_2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R$  — сопротивление резистора,  $L$  — индуктивность катушки,  $C_1, C_2$  — ёмкости конденсаторов, а  $g$  — функция зависимости тока от напряжения на диоде Чуа:

$$g(U_{C_1}) = G_b U_{C_1} + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|U_{C_1} + E| - |U_{C_1} - E|),$$

где  $G_b, G_a, E$  — проводимости соответствующих участков и точки излома на рисунке 2.

Введя новые обозначения можно привести систему к новым безразмерным переменным:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - h(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m_0 = RG_a$ ,  $m_1 = RG_b$ ,  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ ,  $\beta = \frac{R^2 C_2}{L}$ ,  $\tau = \frac{t}{RC_2}$ ,  $x = \frac{U_{C_1}}{E}$ ,  $y = \frac{U_{C_2}}{E}$ ,  $z = \frac{I_L R}{E}$ , и функция  $h(x)$  равна

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) (|x + 1| - |x - 1|).$$

В реальности, однако, вольт-амперная характеристика диода Чуа несколько отличается (Рис. 5), это связано с тем, что операционный усилитель не является идеальным и после некоторого напряжения появляются возрастающие участки. В таком случае удобно определять положения равновесия графически, нужно провести нагрузочную прямую  $I = -\frac{U}{R}$  и рассмотреть её точки пересечения с вольт-амперной характеристикой диода.

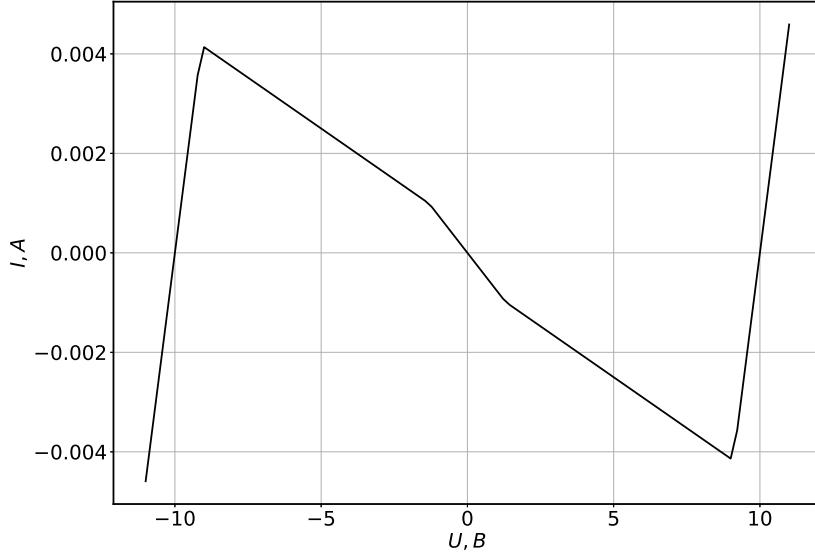


Рис. 5: Вольт-амперная характеристика диода Чуа, реализованного на операционных усилителях.

## Теоретическое описание формы аттрактора Чуа

В общем случае форма векторного поля описывается автономным векторным уравнением:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X} + \bar{b}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m_{0,1}) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} E(G_b - G_a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Где индекс  $m$  принимает значение 0 или 1, а вектор  $\bar{b} = \bar{0}$ , в случае если  $|x| < 1$  и  $\bar{b}$  в случае если  $|x| > 1$ . Следовательно для каждой области мы получаем 2 разных дифференциальных уравнения. Изучим их по отдельности. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — корни характеристического многочлена, тогда решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{X} = C_1 \exp(\lambda_1 t) \bar{\xi}_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) \bar{\xi}_2 + C_3 \exp(\lambda_3 t) \bar{\xi}_3 + \bar{X}_Q, \quad \text{где } \bar{X}_Q = -A^{-1}\bar{b} \quad (5)$$

Тут  $\xi_i$  — собственные векторы. Собственные значения могут быть как все вещественные так и может иметься среди них пара сопряжённых комплексных чисел. Понятно, что устойчивые состояния могут быть тогда и только тогда когда имеются 2 комплексных (сопряжённых) собственных числа и действительный корень характеристического многочлена меньше нуля. Пусть они равны соответственно:  $-\gamma$ , и  $\sigma \pm i\omega$ . Тогда ясно что соответствующие им собственные векторы  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$  тоже могут быть комплексными и соответственно тоже сопряжёнными.

Тогда решение перепишется в виде

$$\bar{X} = C_1 \exp(-\gamma t) \bar{\xi}_1 + C_2 \exp(\sigma t) (\cos(\omega t) \bar{\eta}_1 + \sin(\omega t) \bar{\eta}_2) + \bar{X}_Q, \quad (6)$$

где  $\eta_1, \eta_2$  — проекции пространства  $\langle \xi_2, \xi_3 \rangle$  на вещественное подпространство. Тогда в случае положительной  $\sigma$  решение дифференциального уравнения сматывается с вектором  $\bar{X}_Q$ , в случае отрицательной — наоборот наматывается на вектор  $\bar{X}_Q$ . Однако такие решения нас не интересуют

— они соответствуют точке или уходу на большой предельный цикл картины на осциллографе. Нас интересуют случаи когда  $\sigma$  равна 0. Так как вектор  $\bar{\xi}_1$  со временем вырождается то этот случай соответствует предельному циклу лежащему в плоскости  $\langle \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3 \rangle$ . Решение окончательно перепишется:

$$\bar{X} = C_2 (\cos(\omega t) \bar{\eta}_1 + \sin(\omega t) \bar{\eta}_2) + \bar{X}_Q, \quad (7)$$

Отсюда следует что в фазовом пространстве есть 3 плоскости (две из которых параллельны) соответствующие разным векторным полям, каждое из которых соответствует разным допустимым притягивающим множествам решений дифференциального уравнения. Они и их взаимное расположение определяют форму аттрактора. Первая плоскость проходит через точку 0 и образована собственными векторами системы дифференциального уравнения соответствующего случаю когда  $m_i = m_0$  и  $\bar{b} = \bar{0}$ . Обозначим эту плоскость как  $D_1$ . Вторые две плоскости ( $D_2^+$  и  $D_2^-$ ) образованы собственными векторами системы дифференциального уравнения соответствующего случаю когда  $m_i = m_1$  и  $\bar{b} = (E(G_b - G_a), 0, 0)^T$ . Эти вектора, и соответственно уравнения плоскостей, на практике не поддаются аналитическим вычислениям, однако легко можно вычислить вектор  $\bar{X}_Q$  — положение узлов равновесия в пространстве:

$$\bar{X}_Q = -A^{-1}\bar{b} \quad \text{где} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\alpha(1+m_1)} & 0 & \frac{-1}{\beta(1+m_1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\alpha(1+m_1)} & 1 & \frac{-m_1}{\beta(1+m_1)} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} E(G_b - G_a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Тогда подставив в это уравнение значения  $\alpha$  и  $m_1$  получим окончательно:

$$\bar{X}_Q = \begin{pmatrix} \frac{-E(G_b - G_a)}{\alpha(1+m_1)} \\ 0 \\ \frac{E(G_b - G_a)}{\alpha(1+m_1)} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{2EC_1(G_b - G_a)}{C_2(1 + RG_a)}, \quad (9)$$

где  $d$  — расстояние между 2-мя фокусами в проекции на плоскость  $\langle y, z \rangle$  с которой снимались данные осциллографом. Заметим что это расстояние не зависит от  $R_l$  а только  $R$  от что далее подтвердится нами в ходе эксперимента.

Теперь мы можем качественно понять причину фазовых переходов аттракторов. Предположим что аттрактор зарождается в верхней полуплоскости, тогда если аттрактор не выходит за верхнюю плоскость, где он родился (радиус его предельного цикла меньше расстояния от точки равновесия до границы пересечения плоскостей) то он в ней так и остаётся в виде малого предельного цикла. Далее по мере изменения параметра либо растёт радиус малого предельного цикла, либо точка равновесия движется к границе пересечения плоскостей, либо наоборот — мы не знаем, так как радиус предельного цикла, геометрия плоскостей и т. д. выражаются через  $\xi_1, \xi_2$  зависимость которых от  $R$  и  $R_L$  на практике получить невозможно.... Однако мы точно знаем что со временем малый предельный цикл выходит за границу своей плоскости и тогда (и только тогда) начинается фазовый переход сначала в двойной предельный цикл, потом в 4-ой предельный цикл и т. д..... пока в пределе не достигается аттрактор Рёслера. Далее, по мере роста аттрактора Рёслера, решение выходит из плоскости  $D_1$  и попадает в плоскость  $D_2^-$  где «наматывается» на нижнюю точку равновесия, тем самым осуществляя переход к двухплетевому аттрактору.

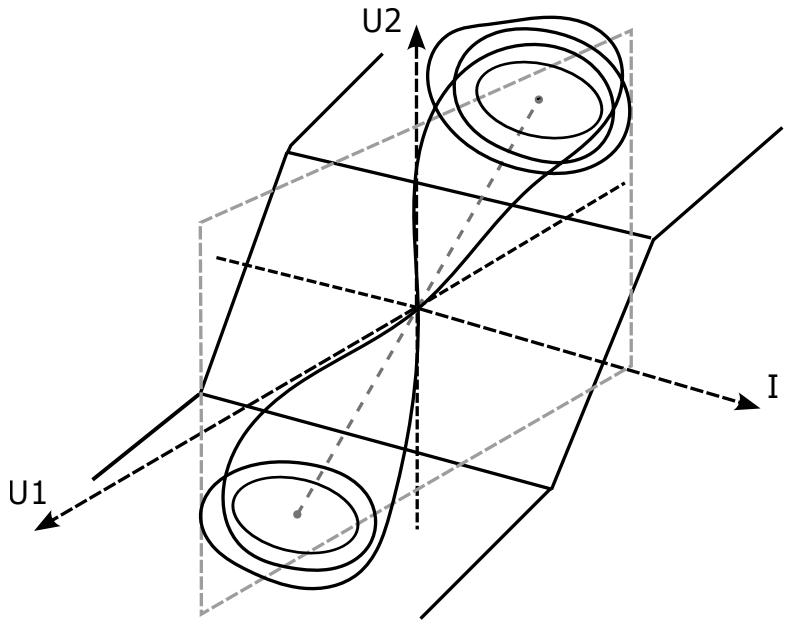


Рис. 6: Схематическое изображение фазового пространства системы.

## Результаты и их анализ

### Численное моделирование бифуркационной диаграммы

Проведено численное моделирование схемы Чуа с указанными в приложении параметрами, согласно дифференциальным уравнениям 2. Моделирование проводилось с шагом  $\Delta R = 50$  Ом и  $\Delta R_L = 150$  Ом. После моделирования получен набор изображений фазовых портретов системы при различных её параметрах 7.

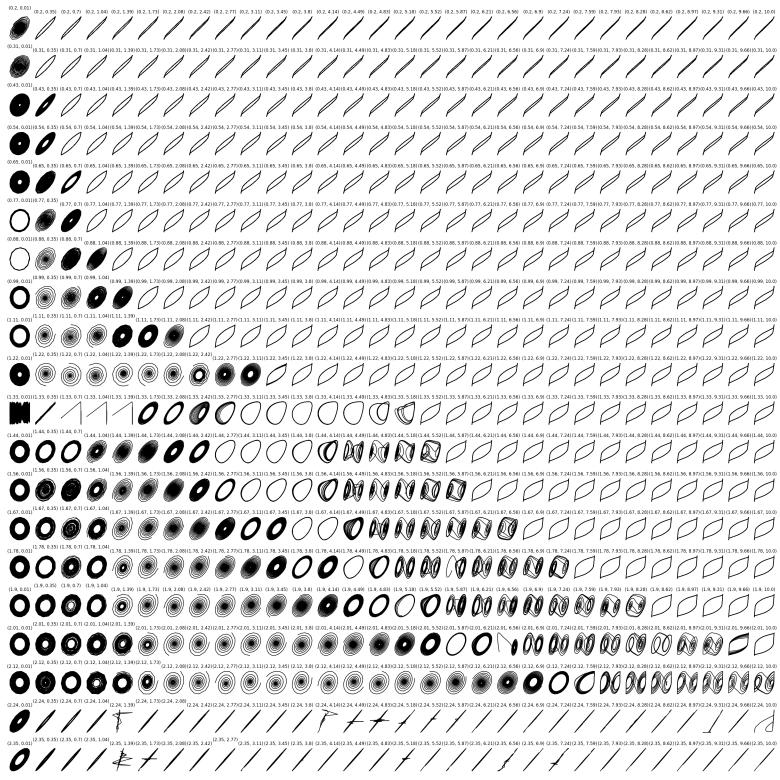


Рис. 7: Пример результата симуляции, полученной при  $\Delta R = 110$  Ом и  $\Delta R_L = 350$  Ом.

На полученной диаграмме можно выделить несколько областей с принципиально различными состояниями. По диаграмме определены пограничные кривые между различными состояниями системы и построен график 8. У системы можно выделить 5 основных состояний: большой предельный цикл, двухпетлевой аттрактор, аттрактор Рёссlerа, устойчивый фокус и малый предельный цикл. Отдельно рассмотрим систему при  $R > 2.25$  КОм, в данной области у системы существует три положения равновесия, и нагрузочная прямая  $-R$  пересекает график диода Чуа (Рис. 5) в точка, которые лежат на крайних правой и левой прямой после второго излома. В данной области система может находиться только лишь в этих положениях равновесия и на фазовой диаграмме наблюдается точка, изредка перескакивающая между положениями равновесия. Интересующая нас область хаотического поведения наблюдается при  $R < 2.25$  КОм. При больших  $R_L$  система переходит в большой предельный цикл, который возникает из-за существования второго излома на графике вольт-амперной характеристики диода Чуа. При понижении  $R_L$  в системе начинает наблюдаться двухпетлевой аттрактор, понижая  $R_L$  далее, в системе последовательно наблюдается переход сначала в аттрактор Рёссlerа, затем в малый предельный цикл, далее в устойчивый фокус и затем снова в предельный цикл. При понижении  $R$  далее, кривые перехода между состояниями стремятся в одну точку, соответственно при  $R_{crit}$  область существования аттракторов заканчивается. Это связано с тем, что нагрузочная кривая  $R$  совпадает с прямой  $G_a$  до первого излома (Рис. 5). В такой конфигурации в системе существует бесконечное число положений равновесия и система дрейфует между ними. После дальнейшего понижения  $R$  в системе существует только одно положение равновесия — точка  $(0, 0, 0)$ . В зависимости от его устойчивости фазовая диаграмма системы представляет собой либо большой предельный цикл, либо в малый предельный цикл, либо в точку.

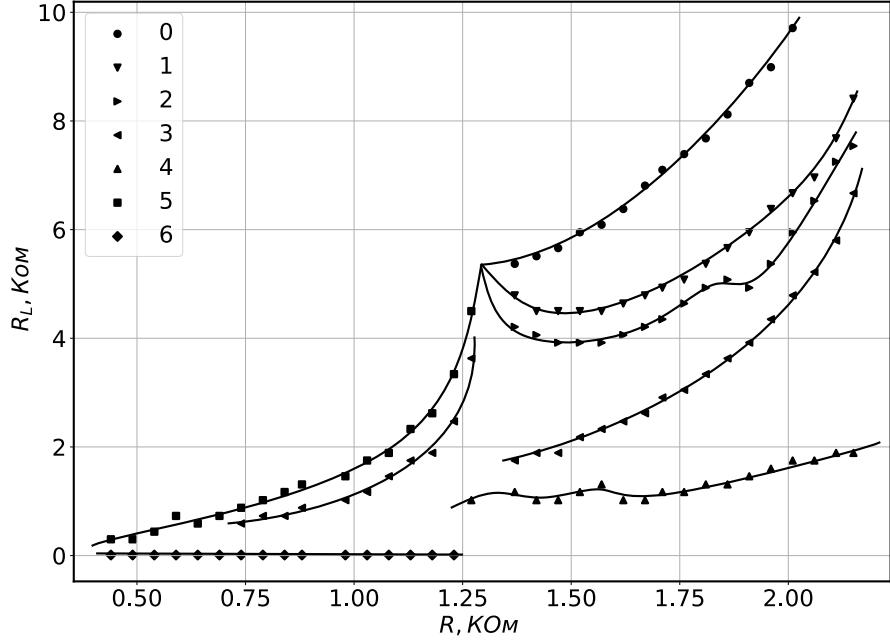


Рис. 8: Диаграмма состояний системы при различных  $R$  и  $R_L$ . Цифрами обозначены граничные кривые для состояний: 0 — большой предельный цикл и двухпетлевой аттрактор, 1 — двухпетлевой аттрактор Рёсслера, 2 — аттрактор Рёсслера и малый предельный цикл, 3 — малый предельный цикл и фокус, 4 — фокус и малый предельный цикл, 5 — большой предельный цикл и малый предельный цикл, 6 — фокус и большой предельный цикл.

## Анализ положений равновесия системы

Исследована область при  $R < -\frac{1}{G_a}$ . При таких параметрах в системе будет одно положение равновесия  $(0, 0, 0)$ . Рассмотрим приведённую систему дифференциальных уравнений 3. В таком случае можно исследовать устойчивость положения равновесия по линейному приближению. В таком случае система перепишется как:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - m_0x), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости является отрицательная действительная часть всех собственных значений характеристического многочлена матрицы  $f(\lambda)$ :

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha + \alpha m_0) + \lambda(\beta + \alpha m_0) + \alpha\beta + \alpha\beta m_0.$$

Согласно критерию Гурвица для выполнения критерия устойчивости необходимо выполнение условия  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ :

$$(1 + \alpha + \alpha m_0)(\beta + \alpha m_0) - \alpha\beta + \alpha\beta m_0 > 0.$$

После расскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем:

$$\beta > -\alpha m_0 - \alpha^2 m_0 - \alpha^2 m_0^2$$

Вернёмся к исходным обозначениям,  $\beta = \frac{C_2 R^2}{L}$ ,  $m_0 = G_a R$ :

$$R > -\frac{\alpha + 1}{\alpha G_a + \frac{C_2}{\alpha L G_a}}, \quad (10)$$

где  $L$  для нашей схемы выражается согласно выражению 1. В таком случае зависимость критического значения  $R$  от сопротивления  $R_L$ . При стремлении  $R_L \rightarrow \infty$  имеем

$$R_\infty = -\frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{1}{G_a}.$$

Однако, так как рассматриваемое рассуждение верно только при  $R < -\frac{1}{G_a}$  кривая обрывается раньше, при  $R = -\frac{1}{G_a}$ . В таком случае точку пересечения кривых на графике 8 можно найти как решение уравнения:

$$-\frac{1}{G_a} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha G_a + \frac{C_2}{\alpha L G_a}}$$

Из чего следует:

$$L = \frac{C_2}{\alpha G_a^2} = \frac{C_1}{G_a^2}$$

Тогда подставив используемые данные имеем точку пересечения кривых:

$$(R, R_L) = (1.32 \text{ КОм}, 5.75 \text{ КОм})$$

Для проверки теории, построена бифуркационная диаграмма, с нанесённой на неё критической кривой (Рис. 9). Теоретическая зависимость хорошо описывает переходный процесс, однако существует отклонение при приближении к критическому значению, оно вызвано малой областью устойчивости в критическом режиме  $R \rightarrow -\frac{1}{G_a}$ . Однако совпадение поведения при малых значениях  $R$  позволяет использовать данную модель для оценки параметров эксперимента.

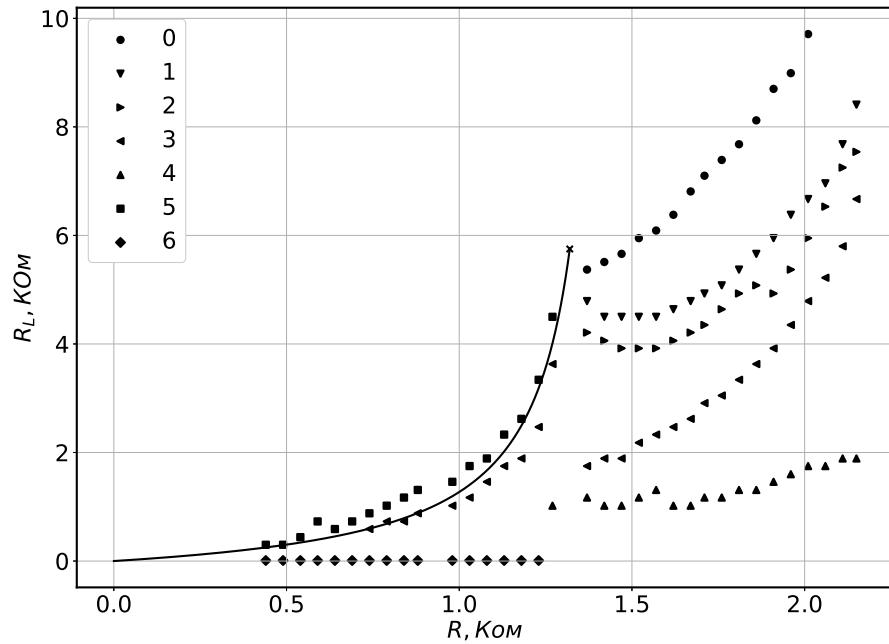


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма схемы Чуа, с нанесённой на неё критической кривой для устойчивости нулевого положения равновесия.

### Экспериментальная бифуркационная диаграмма системы

Экспериментально была получена зависимость состояния системы, возбуждаемое из положения равновесия. По полученным данным построена бифуркационная диаграмма (Рис. 10).

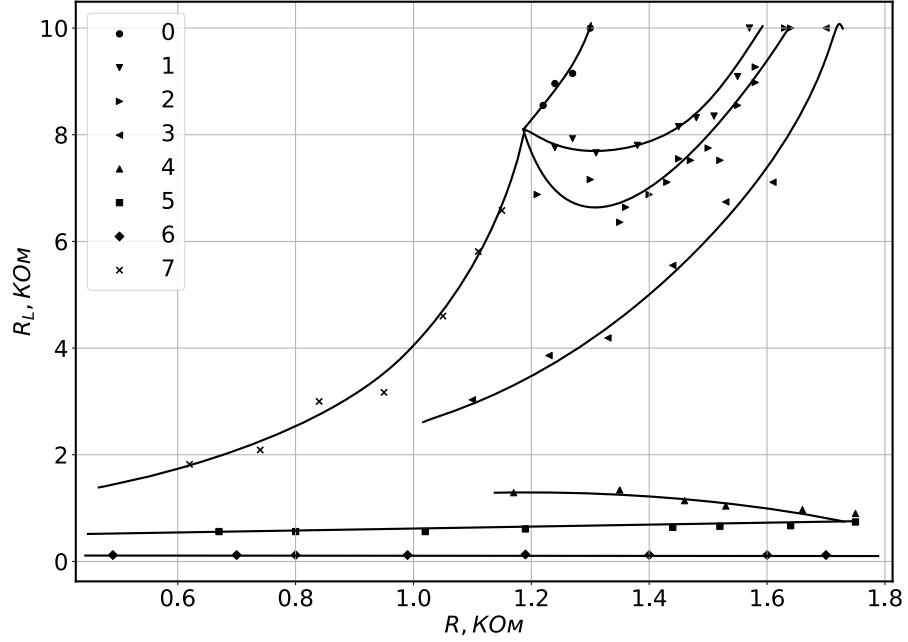
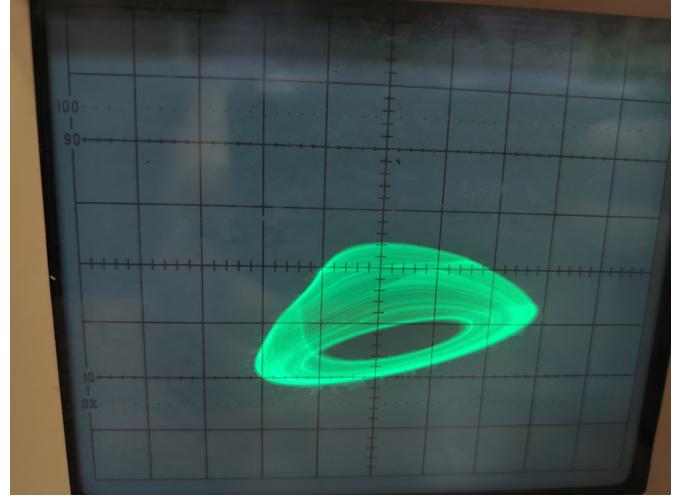


Рис. 10: Реальная диаграмма состояний системы при различных  $R$  и  $R_L$ . Цифрами обозначены граничные кривые для состояний: 0 — большой предельный цикл и двухпетлевой аттрактор, 1 — двухпетлевой аттрактор и аттрактор Рёсслера, 2 — аттрактор Рёсслера и малый предельный цикл, 3 — малый предельный цикл и фокус, 4 — фокус и малый предельный цикл, 5 — малый предельный цикл и большой предельный цикл, 6 — большой предельный цикл и малый предельный цикл, 7 — большой предельный цикл и малый предельный цикл.

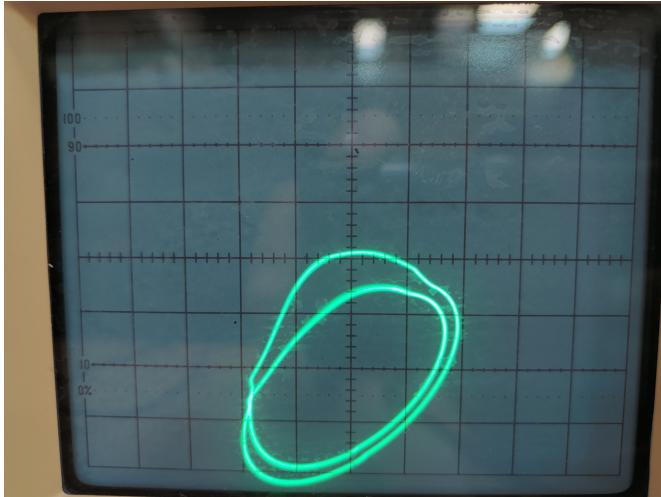
За исключением некоторых изменений, которые будут описаны далее, мы получили диаграмму структурно совпадающую с теоретически просчитанной. При малых значениях  $R_L$  мы наблюдаем появление еще одной границы: если в теории мы получали только переходы между малым предельным циклом и фокусом, то на практике мы еще получаем участок, на котором наблюдается большой предельный цикл, снова переходящий в малый и затем уже в фокус. При дальнейшем повышении значений  $R_L$  мы либо возвращаемся в большой предельный цикл (при достаточно малых  $R$ ), либо, переходя через малый, переходим к аттрактору Реслера, а затем двухпетлевой аттрактор. Далее приведен путь перехода из двухпетлевого аттрактора к малому предельному циклу при фиксированном  $R$ . (Рис 11)



Двухпетлевой аттрактор



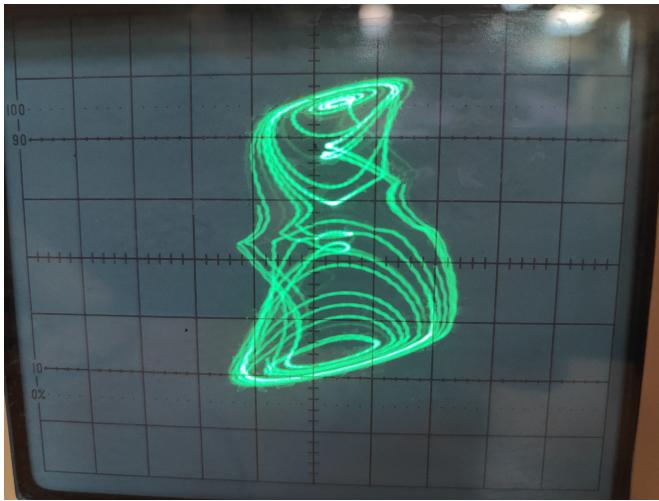
Аттрактор Реслера



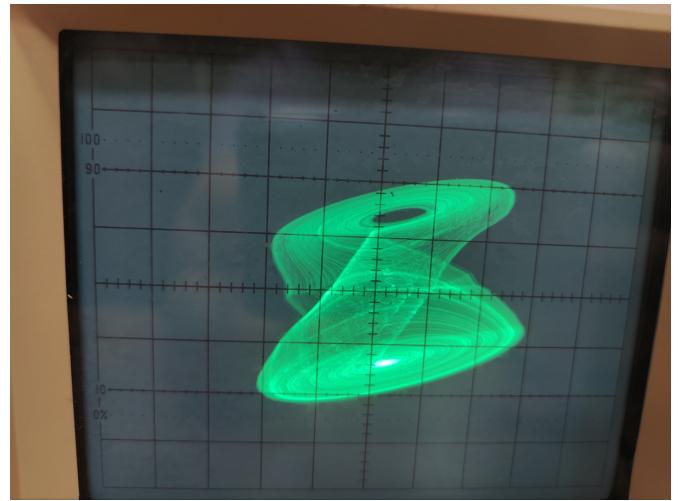
Двухпетлевой предельный цикл

Рис. 11: Фазовые портреты системы Чуа при различных параметрах  $R$  и  $R_L$ .

Также можем проанаблюдать за изменением внешнего вида двухпетлевой аттрактора при  $R \rightarrow R_{\text{крит}}$  и сравнить его с аттрактором, удаленным он критической точки (Рис 12). Стоит отметить, что при приближении к критическому значению  $R$  и  $R_L$  поведение аттрактора становится менее стабильным, а сам аттрактор начинает деформироваться и приобретает множество точек излома.



Близко к критической точке



Далеко от критической точки

Рис. 12: Фазовые портреты двухпетлевых аттракторов возле критического значения и на достаточном удалении.

Также можно сравнить аттракторы внутри одного состояния (на примере двухпетлевого аттрактора). Например, можно сравнить зависимость радиуса внутреннего диска от параметров системы (Рис 13). При изменении  $R_L$  радиус диска никак не изменяется, а вот между данной величиной и  $R$  уже существует зависимость, которая будет исследована отдельно.

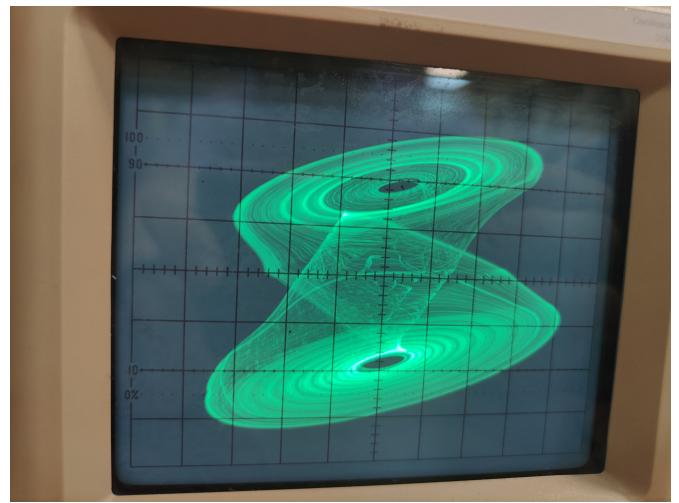
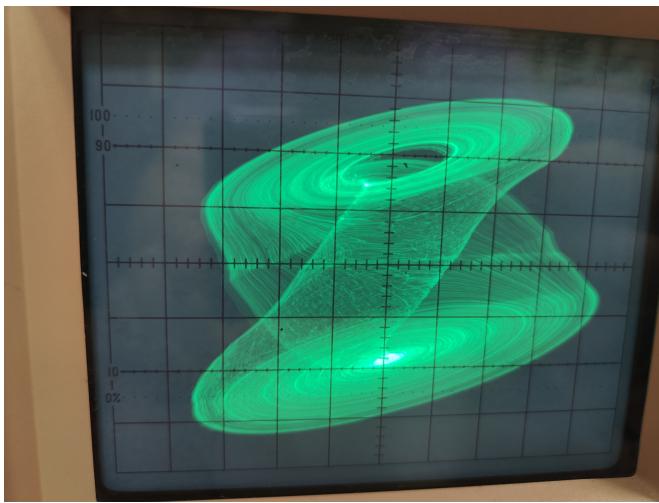


Рис. 13: Фазовые портреты двухпетлевого аттрактора с различными внутренними радиусами.

Если сравнивать полученный график с теоретически выведенным, то можно заметить несколько отличий:

1. Наличие еще одного фазового перехода: большой предельный цикл - малый предельный цикл при малых значения  $R_L$ .
2. Различие в координатах критической точки  $(R^{\text{крит}}, R_L^{\text{крит}})$ , которое объяснено в след. пункте.

## Измерение амплитуды сигнала

Для демонстрации динамики размера системы, при фиксированном  $R$  была измерена зависимость амплитуды сигнала в зависимости от  $R_L$ . При  $R_{fixed} = 1.55\text{Ом}$ , изменяя параметры  $R_L$ , мы будем получать следующие фазовые переходы: малый предельный -(0.1 Ом)- большой предельный -(0.5 Ом) - малый предельный -(0.7 Ом)- фокус -(7.0 Ом)- малый предельный -(9.5 Ом)- аттрактор Реслера. Построен график зависимости характерного диаметра от величины  $R_L$  (Рис. 14).

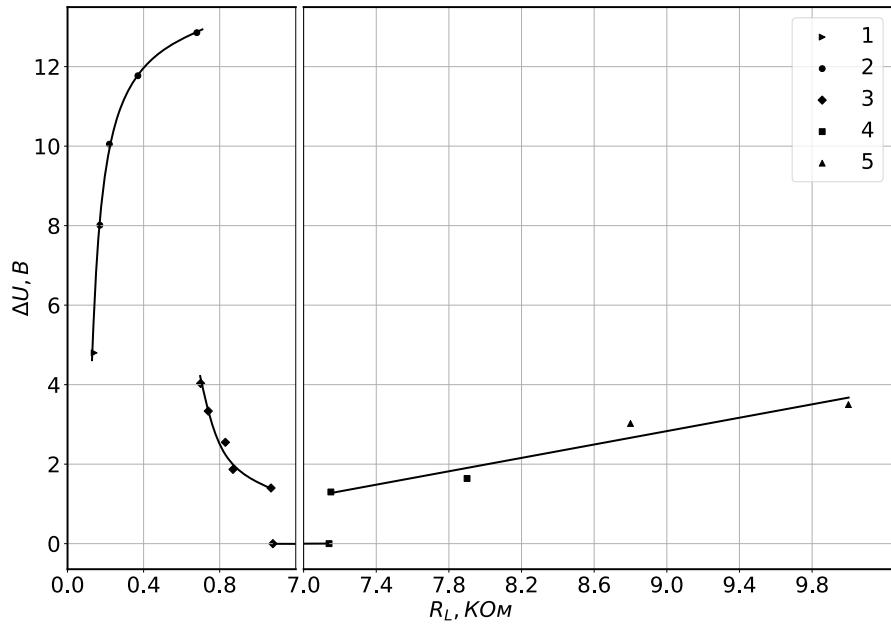


Рис. 14: График зависимости диаметра соответствующего аттрактора  $\Delta U$  от сопротивления  $R_L$ . Цифрами обозначены: 1 — малый предельный цикл, 2 — большой предельный цикл, 3 — малый предельный цикл, 4 — малый предельный цикл, 5 — аттрактор Рёссlera

Стоит отметить, что точки, лежащие на оси Ох, соответствуют переходу от малого предельного цикла к фокусу и обратно. Зависимость размера аттрактора Рёссlera и малого предельного цикла плавно перетекают друг в друга, что ещё раз подтверждает теорию их формирования. При этом зависимость размера аттрактора Рёссlera и малого предельного цикла оказывается слабо зависимой от  $R_L$  и может быть аппроксимирована прямой линией с малым углом наклона. В то время как размер большого предельного цикла и малого предельного цикла при малых значениях  $R_L$  сильно зависит от параметра. Также подтверждается гипотеза о том, что большой предельный цикл вызван ограничением операционного усилителя. Так как напряжение на операционном усилителе равно  $-10 \text{ В}, 10 \text{ В}$ , то ожидается размер большого предельного цикла также порядка  $10 \text{ В}$ , что совпадает с данными.

## Измерение размеров аттрактора Рёссlera

Так как экспериментально было получено, что в отличие от симуляции, аттрактор Рёссlera занимает намного большую область на бифуркационной диаграмме, были измерены его размеры в зависимости от параметров  $R$  и  $R_L$ . Получен трёхмерный график зависимости поперечного размера

аттрактора от  $R_L$  и  $R$  (Рис. 15). Графики подтверждают ранее установленные зависимости, размер аттрактора вдалеке от критического значения почти не зависит от  $R_L$  и поверхность представляет собой плоскость. При этом размер аттрактора явно зависит от сопротивления  $R$ , уменьшаясь с уменьшением  $R$ .

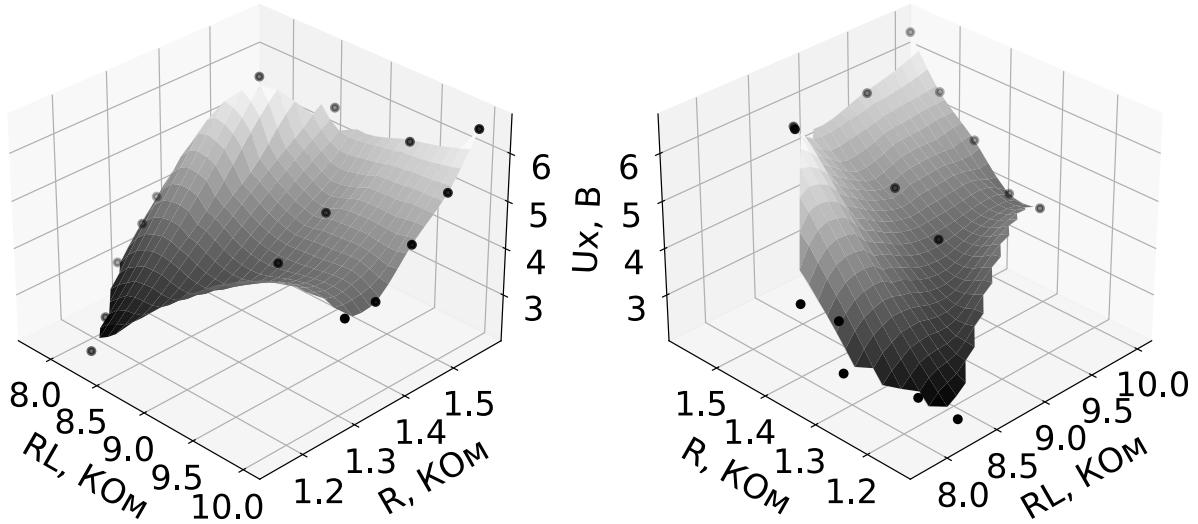


Рис. 15: График зависимости размера аттрактора  $U$  от сопротивлений  $R_L$  и  $R$  в нескольких проекциях.

## Нахождение параметров расхождения

Так как хотя бифуркационные диаграммы в симуляции и в эксперименте и имеют схожий качественный вид, они расходятся в количественном смысле. Попытаемся найти какие параметры схемы отличаются от номинальных. Легко определить, как изменилось сопротивление  $G_a$ , так как  $R$  координата точки пересечения кривых равна  $R = -\frac{1}{G_a}$ , из чего получаем значение

$$G_e = (-8.3 \pm 0.8) \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1},$$

Что отличается от предполагаемой примерно на 10%, что укладывается в заявленную погрешность резисторов и не может создавать существенного изменения в поведении системы. Следующими элементами, для которых возможны отклонения от истинных значений являются конденсаторы. Для нахождения отклонения их параметров использована полученная теоретическая зависимость критической кривой устойчивости 10. Построена зависимость в линеаризованных координатах (Рис. 16):

$$\frac{1}{R} \left( \frac{1}{R_L} \right) = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} G_a - \frac{C_1}{(\alpha + 1) G_a k_L} \cdot \frac{1}{R_L},$$

где  $k_L = \frac{R_7 R_9 C}{R_8}$ .

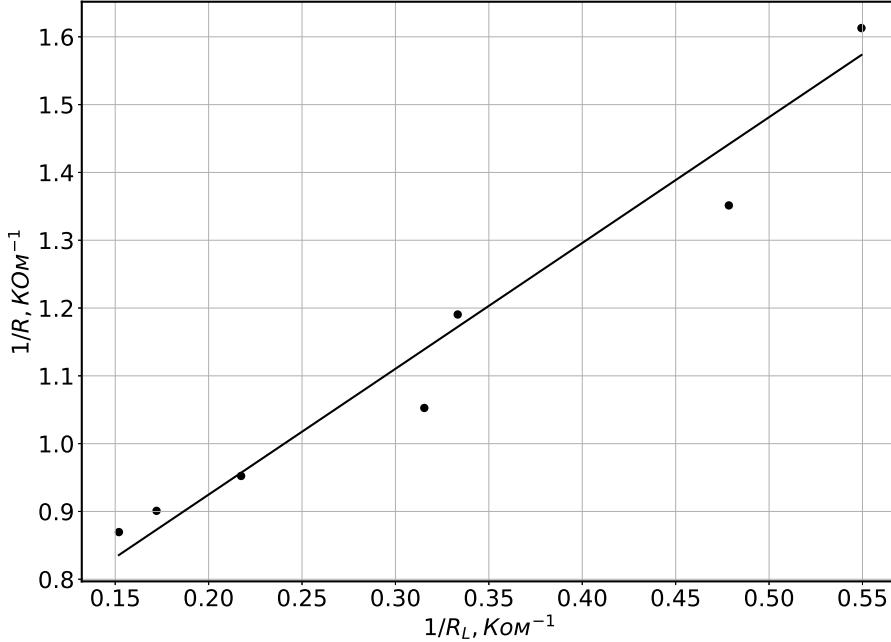


Рис. 16: Линеаризованная зависимость критической кривой перехода  $\frac{1}{R}$  от  $\frac{1}{R_L}$  между большим предельным циклом и малым предельным циклом.

Полученные коэффициенты линейной зависимости составили:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha}{\alpha+1}G_a = 0.62 \pm 0.04 \text{ К}\Omega^{-1}, \\ -\frac{C_1}{(\alpha+1)G_a k_L} = 1.58 \pm 0.16. \end{cases}$$

Из первого коэффициента находим параметр  $\alpha$ , при этом используем экспериментальное значение  $G_a$ :

$$\alpha = 2.9 \pm 0.2.$$

Нахождение остальных параметров не может оказаться точным, так как коэффициент  $k_L$  также зависит от ёмкости конденсатора и может изменяться. Однако в нашей оценке примем его неизменным и равным теоретическому, в таком случае можно найти  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 = 17 \pm 3 \text{ нФ}, \\ C_2 = 53 \pm 6 \text{ нФ}. \end{cases}$$

Эти значения сильно отличаются от закладываемых в схему

$$\begin{cases} C_{1t} = 10 \text{ нФ}, \\ C_{2t} = 100 \text{ нФ}. \end{cases}$$

Такое поведение конденсаторов можно связать с эффектом понижения ёмкости керамических конденсаторов с повышением напряжения (Рис. 17). Таким образом, лучше использовать другие виды

конденсаторов для построения схем Чуа, однако даже при таких отклонениях получается найти хаотические режимы схемы.

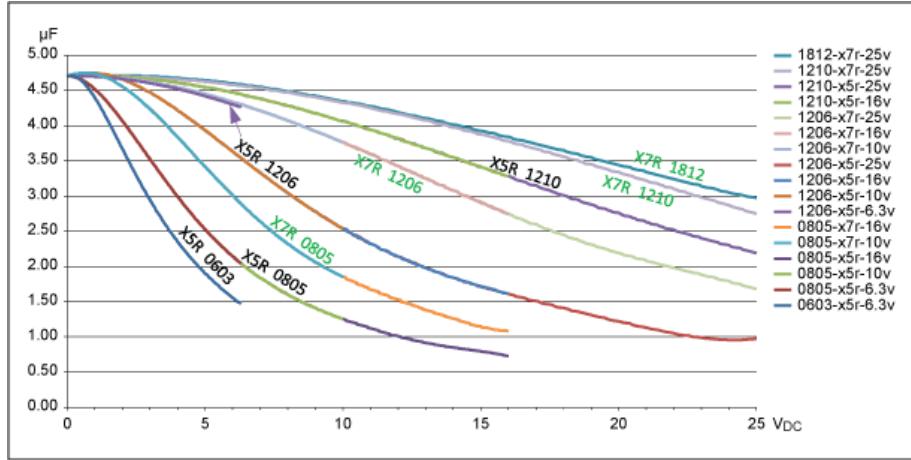


Рис. 17: График ёмкости керамических конденсаторов от напряжения [2].

## Выводы

Теоретически получено, что области притяжения схемы Чуа можно характеризовать тремя плоскостями, содержащими в себе 3 положения равновесия. Проведена численная симуляция и построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметров  $R$  и  $R_L$ . Также соответствующая бифуркационная диаграмма исследована на экспериментальной установке. Установленно, что теоретическая и экспериментальная бифуркационные диаграммы имеют общий вид, однако различаются количественно. Полученные расхождения проанализированы и обнаружено, что при напряжениях, используемых в схеме, керамические конденсаторы уменьшают свою ёмкость, что и объясняет расхождения в результатах.

## Список литературы

- [1] <https://www.chuacircuits.com>
- [2] Изменение ёмкости керамических конденсаторов от температуры и напряжения  
<https://habr.com/ru/articles/384833/>

## Приложения

### Характеристики используемой схемы Чуа

В качестве операционных усилителей были использованы TL082CP.

$R_1$	220 Ом	$R_6$	3.3 КОм	$R$	4.7 КОм
$R_2$	220 Ом	$R_7$	100 Ом	$C$	100 нФ
$R_3$	2.2 КОм	$R_8$	3.3 КОм	$C_1$	10 нФ
$R_4$	22.0 КОм	$R_9$	1.0 КОм	$C_2$	100 нФ
$R_5$	22.0 КОм	$R_{10}$	10.0 КОм		

Таблица 1: Характеристики используемых элементов.