

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

# Исследование самовозбуждающихся режимов работы схемы Чуа.

Авторы:

Шахматов Андрей Юрьевич

Гуревич Тимофей Денисович

Б02-304 Б02-312

Долгопрудный 2024

## Аннотация

Надо написать.

# Введение

В современном мире проблема обеспечения безопасности информации становится все более актуальной. Одним из перспективных решений данной задачи является использование хаотических сигналов в качестве несущей волны. Такой подход значительно повышает уровень защиты данных, так как злоумышленник сталкивается с практически неразрешимой задачей расшифровки хаотического сигнала.

Для генерации хаотических сигналов широко применяется схема Чуа, включающая два конденсатора, индуктивность, сопротивление и нелинейный элемент — диод Чуа. Простота конструкции делает эту схему привлекательной для различных отраслей промышленности. Однако, несмотря на наличие теоретической модели, описывающей поведение схемы Чуа, её практическое применение сталкивается с рядом сложностей, такими как высокая чувствительность контура и ограниченная область хаотического поведения.

Целью данной работы является детальное исследование хаотических режимов работы схемы Чуа, а также устойчивых нехаотических режимов, существующих с хаотическими.

# Теоретическая часть

## Хаотические системы

Предметом изучения теории хаоса являются системы, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = v(x,t)$$

Стоит отметить, что левая часть должна быть нелинейной (линейные системы никогда не являются хаотическими). Давайте поймем, какую систему стоит считать хаотической:

1. Она обладает свойством сильной зависимости от начальных условий. Кванторно это можно записать так:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,y : \rho(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f^n(x),f^n(y)) > \delta$ . Геометрически это можно интерпретировать следующим образом:

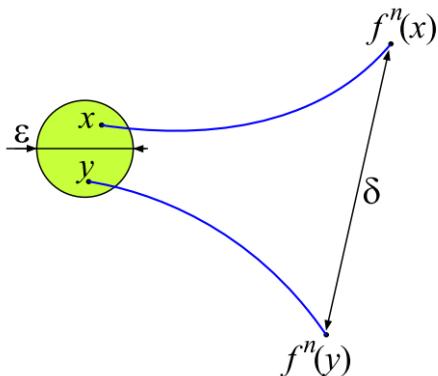


Рис. 1: Демонстрация сильной зависимости поведения системы от начальных условий

2. Динамическая система должна обладать свойством топологического смешивания (быть транзитивной): то есть для любых двух множеств нашего фазового пространства системы поток от одного рано или поздно должен пересечься со вторым выбранным множеством.

3. Периодические орбиты системы должны быть всюду плотными в нашем фазовом портрете.

Важным объектом в вопросе изучения хаотических систем являются аттракторы: подмножества нашего фазового пространства к которому стремятся все наши решения, т.е:  $g^\tau(A) = A$  &  $\forall U_\varepsilon(A) : g^\tau(U_\varepsilon(A)) \rightarrow A$

## Устройство схемы Чуа

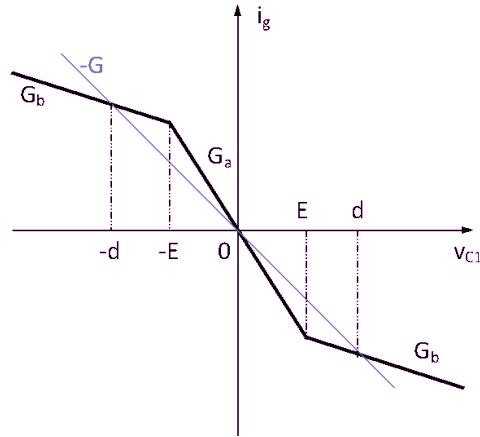
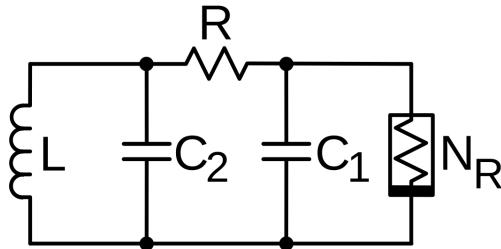


Рис. 2: Электрическая схема цепи Чуа и вольт-амперная характеристика диода Чуа  $N_R$ .

Классическая схема Чуа состоит из двух конденсаторов, сопротивления, индуктивности и диода Чуа. Диод Чуа возможно реализовать при помощи использования двух операционных усилителей и шести резисторов (Рис. 3). Также в реальности использование физической индуктивности может приводить к плохим результатам из-за наличия большого внутреннего сопротивления. По этой причине в нашей работе индуктивность была заменена схемой на основе операционных усилителей — гиратором (Рис. 3). Эквивалентную индуктивность полученной схемы можно рассчитать

$$L = \frac{R_7 R_9 R_{10} C}{R_8}, \quad (1)$$

где  $R$  пронумерованы в порядке от верхнего к нижнему на схеме.

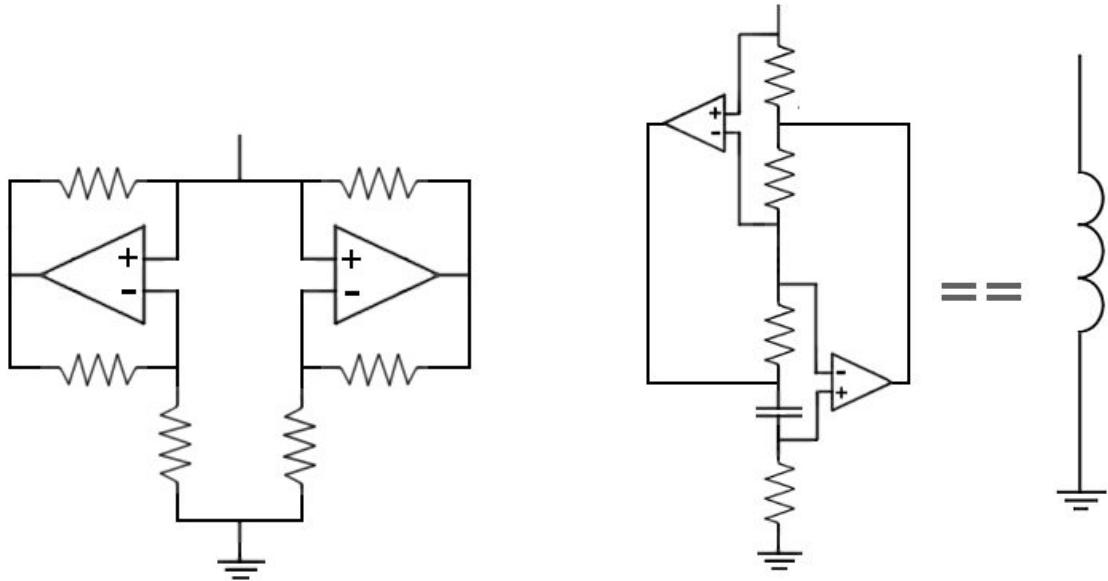


Рис. 3: Реализация диода Чуа на основе операционных усилителей и эквивалентная индуктивности схемы гиратора.

Применяя полученные модификации получим исходную вариацию схемы с использованием только операционных усилителей, конденсаторов и сопротивлений (Рис. 4).

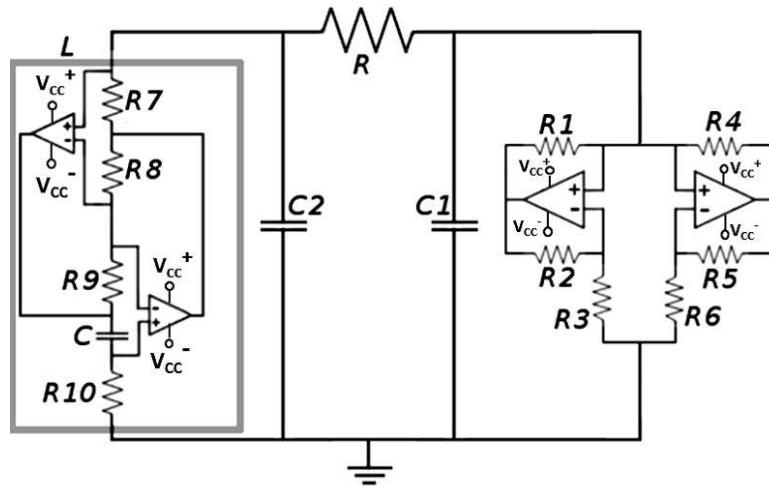


Рис. 4: Итоговая электрическая схема цепи Чуа, использующаяся в данной работе.

Резисторы  $R$  и  $R_{10}$  являются переменными ползунковыми резисторами. Точные характеристики элементов приведены в приложении (Таблица 1).

## Математическая модель схемы Чуа

Обозначив за  $U_{C_1}, U_{C_2}, I_L$  напряжения на конденсаторах и ток через катушку соответственно можно записать систему уравнений, описывающую цепь Чуа:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{U_{C_2} - U_{C_1}}{R} - g(U_{C_1}), \\ C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{U_{C_1} - U_{C_2}}{R} + I_L, \\ L \frac{dI_L}{dt} = -U_{C_2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R$  — сопротивление резистора,  $L$  — индуктивность катушки,  $C_1, C_2$  — ёмкости конденсаторов, а  $g$  — функция зависимости тока от напряжения на диоде Чуа:

$$g(U_{C_1}) = G_b U_{C_1} + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|U_{C_1} + E| - |U_{C_1} - E|),$$

где  $G_b, G_a, E$  — проводимости соответствующих участков и точки излома на рисунке 2.

Введя новые обозначения можно привести систему к новым безразмерным переменным:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - h(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m_0 = RG_a$ ,  $m_1 = RG_b$ ,  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ ,  $\beta = \frac{R^2 C_2}{L}$ ,  $\tau = \frac{t}{RC_2}$ ,  $x = \frac{U_{C_1}}{E}$ ,  $y = \frac{U_{C_2}}{E}$ ,  $z = \frac{I_L R}{E}$ , и функция  $h(x)$  равна

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) (|x + 1| - |x - 1|).$$

В реальности, однако, вольт-амперная характеристика диода Чуа несколько отличается (Рис. 5), это связано с тем, что операционный усилитель не является идеальным и после некоторого напряжения появляются возрастающие участки. В таком случае удобно определять положения равновесия графически, нужно провести нагрузочную прямую  $I = -\frac{U}{R}$  и рассмотреть её точки пересечения с вольт-амперной характеристикой диода.

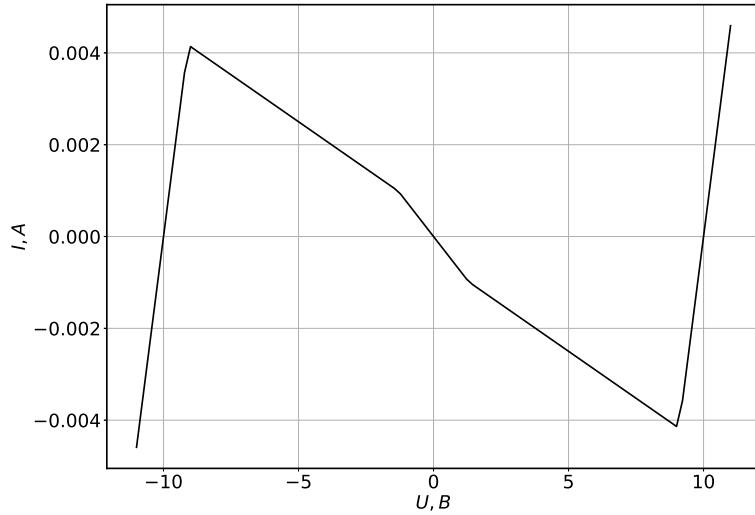


Рис. 5: Вольт-амперная характеристика диода Чуа, реализованного на операционных усилителях.

## Результаты и их анализ

### Численное моделирование бифуркационной диаграммы

Проведено численное моделирование схемы Чуа с указанными в приложении параметрами, согласно дифференциальным уравнениям 2. Моделирование проводилось с шагом  $\Delta R = 50$  Ом и  $\Delta R_L = 150$  Ом. После моделирования получен набор изображений фазовых портретов системы при различных её параметрах 6.

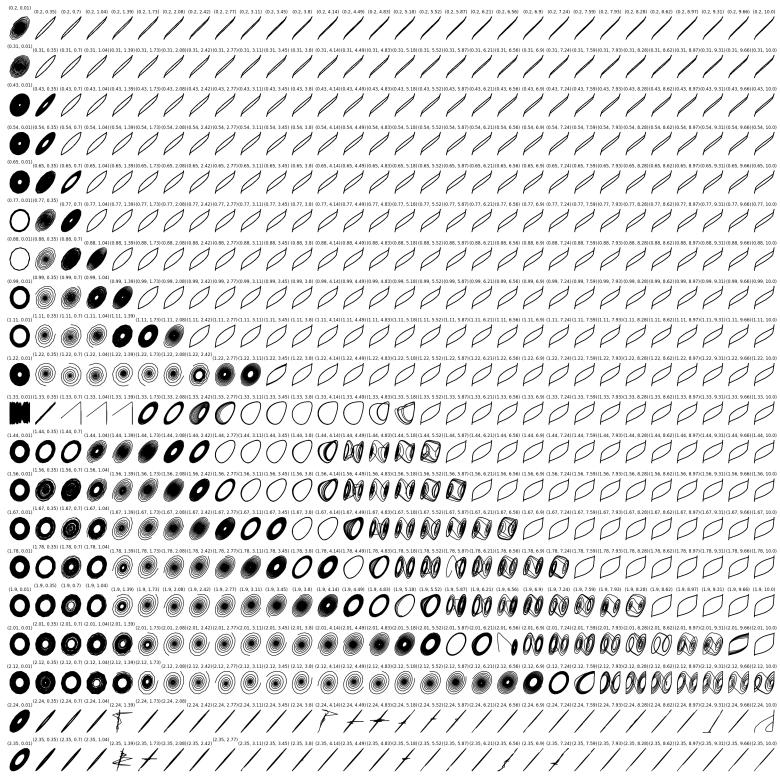


Рис. 6: Пример результата симуляции, полученной при  $\Delta R = 110$  Ом и  $\Delta R_L = 350$  Ом.

На полученной диаграмме можно выделить несколько областей с принципиально различными состояниями. По диаграмме определены пограничные кривые между различными состояниями системы и построен график 7. У системы можно выделить 5 основных состояний: большой предельный цикл, двухпетлевой аттрактор, аттрактор Рёссlerа, устойчивый фокус и малый предельный цикл. Отдельно рассмотрим систему при  $R > 2.25$  КОм, в данной области у системы существует три положения равновесия, и нагрузочная прямая  $-R$  пересекает график диода Чуа (Рис. 5) в точка, которые лежат на крайних правой и левой прямой после второго излома. В данной области система может находиться только лишь в этих положениях равновесия и на фазовой диаграмме наблюдается точка, изредка перескакивающая между положениями равновесия. Интересующая нас область хаотического поведения наблюдается при  $R < 2.25$  КОм. При больших  $R_L$  система переходит в большой предельный цикл, который возникает из-за существования второго излома на графике вольт-амперной характеристики диода Чуа. При понижении  $R_L$  в системе начинает наблюдаться двухпетлевой аттрактор, понижая  $R_L$  далее, в системе последовательно наблюдается переход сначала в аттрактор Рёссlerа, затем в малый предельный цикл, далее в устойчивый фокус и затем снова в предельный цикл. При понижении  $R$  далее, кривые перехода между состояниями стремятся в одну точку, соответственно при  $R_{crit}$  область существования аттракторов заканчивается. Это связано с тем, что нагрузочная кривая  $R$  совпадает с прямой  $G_a$  до первого излома (Рис. 5). В такой конфигурации в системе существует бесконечное число положений равновесия и система дрейфует между ними. После дальнейшего понижения  $R$  в системе существует только одно положение равновесия — точка  $(0, 0, 0)$ . В зависимости от его устойчивости фазовая диаграмма системы представляет собой либо большой предельный цикл, либо в малый предельный цикл, либо в точку.

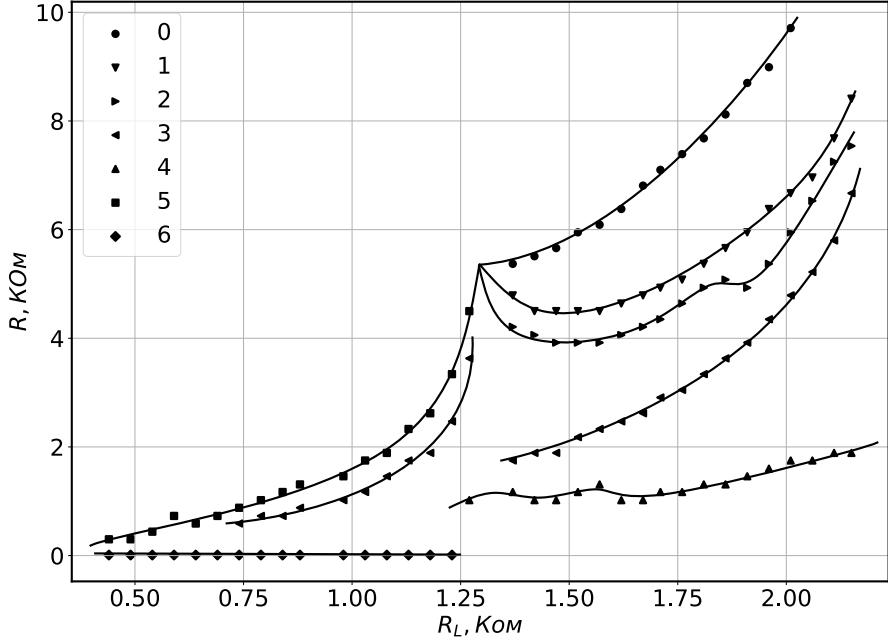


Рис. 7: Диаграмма состояний системы при различных  $R$  и  $R_L$ . Цифрами обозначены граничные кривые для состояний: 0 — большой предельный цикл и двухпетлевой аттрактор, 1 — двухпетлевой аттрактор Рёсслера, 2 — аттрактор Рёсслера и малый предельный цикл, 3 — малый предельный цикл и фокус, 4 — фокус и малый предельный цикл, 5 — большой предельный цикл и малый предельный цикл, 6 — фокус и малый предельный цикл.

## Теоретическое описание положений равновесия

Исследована область при  $R < -\frac{1}{G_a}$ . При таких параметрах в системе будет одно положение равновесия  $(0, 0, 0)$ . Рассмотрим приведённую систему дифференциальных уравнений 3. В таком случае можно исследовать устойчивость положения равновесия по линейному приближению. В таком случае система перепишется как:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - x - m_0x), \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y. \end{cases}$$

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости является отрицательная действительная часть всех собственных значений характеристического многочлена матрицы  $f(\lambda)$ :

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha + \alpha m_0) + \lambda(\beta + \alpha m_0) + \alpha\beta + \alpha\beta m_0.$$

Согласно критерию Гурвица для выполнения критерия устойчивости необходимо выполнение условия  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ :

$$(1 + \alpha + \alpha m_0)(\beta + \alpha m_0) - \alpha\beta + \alpha\beta m_0 > 0.$$

После расскрытия скобок и приведения подобных слагаемых имеем:

$$\beta > -\alpha m_0 - \alpha^2 m_0 - \alpha^2 m_0^2$$

Вернёмся к исходным обозначениям,  $\beta = \frac{C_2 R^2}{L}$ ,  $m_0 = G_a R$ :

$$R > -\frac{\alpha + 1}{\alpha G_a + \frac{C_2}{\alpha L G_a}}, \quad (4)$$

где  $L$  для нашей схемы выражается согласно выражению 1. В таком случае зависимость критического значения  $R$  от сопротивления  $R_L$ . При стремлении  $R_L \rightarrow \infty$  имеем

$$R_\infty = -\frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{1}{G_a}.$$

Однако, так как рассматриваемое рассуждение верно только при  $R < -\frac{1}{G_a}$  кривая обрывается раньше, при  $R = -\frac{1}{G_a}$ . В таком случае точку пересечения кривых на графике 7 можно найти как решение уравнения:

$$-\frac{1}{G_a} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha G_a + \frac{C_2}{\alpha L G_a}}$$

Из чего следует:

$$L = \frac{C_2}{\alpha G_a^2} = \frac{C_1}{G_a^2}$$

Тогда подставив используемые данные имеем точку пересечения кривых:

$$(R, R_L) = (1.32 \text{ КОм}, 5.75 \text{ КОм})$$

Для проверки теории, построена бифуркационная диаграмма, с нанесённой на неё критической кривой (Рис. 8). Теоретическая зависимость хорошо описывает переходный процесс, однако существует отклонение при приближении к критическому значению, оно вызвано малой областью устойчивости в критическом режиме  $R \rightarrow -\frac{1}{G_a}$ . Однако совпадение поведения при малых значениях  $R$  позволяет использовать данную модель для оценки параметров эксперимента.

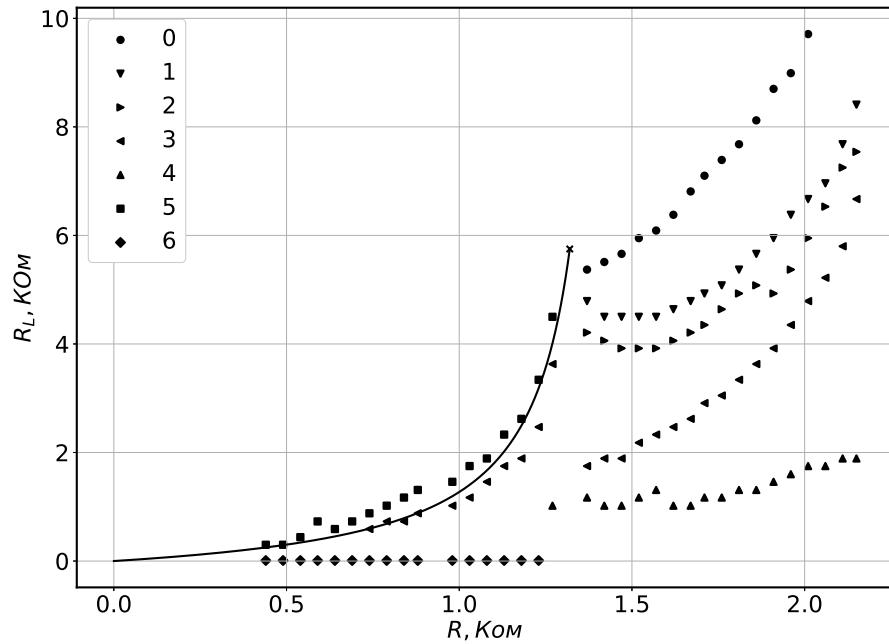


Рис. 8: Бифуркационная диаграмма схемы Чуа, с нанесённой на неё критической кривой для устойчивости нулевого положения равновесия.

### Экспериментальная бифуркационная диаграмма системы

Экспериментально была получена зависимость состояния системы, возбуждаемое из положения равновесия. По полученным данным построена бифуркационная диаграмма (Рис. 9).

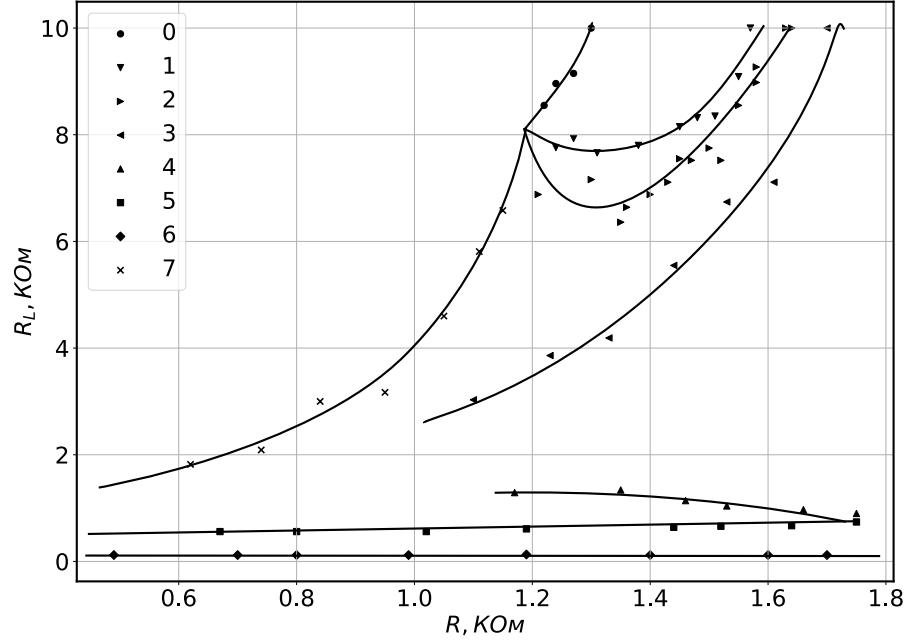
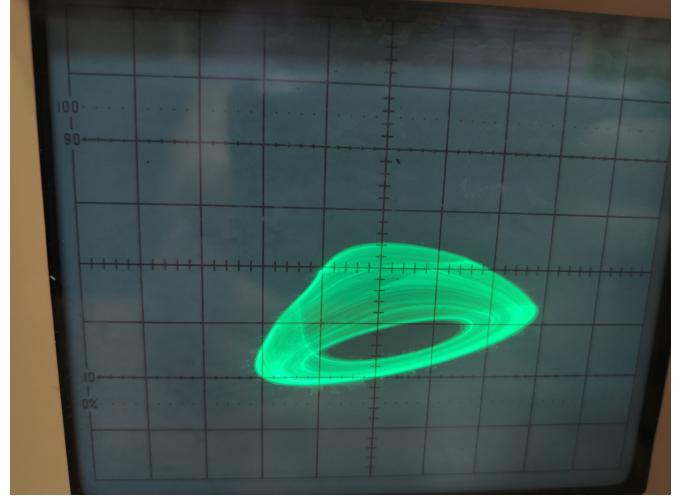


Рис. 9: Реальная диаграмма состояний системы при различных  $R$  и  $R_L$ . Цифрами обозначены граничные кривые для состояний: 0 — большой предельный цикл и двухпетлевой аттрактор, 1 — двухпетлевой аттрактор и аттрактор Рёсслера, 2 — аттрактор Рёсслера и малый предельный цикл, 3 — малый предельный цикл и фокус, 4 — фокус и малый предельный цикл, 5 — малый предельный цикл и большой предельный цикл, 6 — большой предельный цикл и малый предельный цикл, 7 — большой предельный цикл и малый предельный цикл.

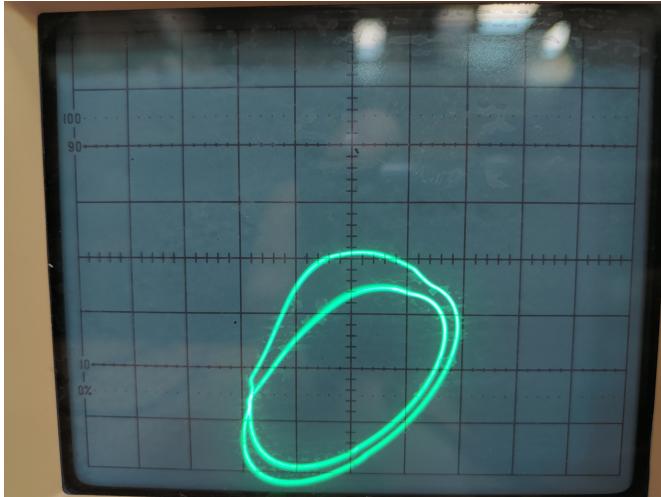
За исключением некоторых изменений, которые будут описаны далее, мы получили диаграмму структурно совпадающую с теоретически просчитанной. При малых значениях  $R_L$  мы наблюдаем появление еще одной границы: если в теории мы получали только переходы между малым предельным циклом и фокусом, то на практике мы еще получаем участок, на котором наблюдается большой предельный цикл, снова переходящий в малый и затем уже в фокус. При дальнейшем повышении значений  $R_L$  мы либо возвращаемся в большой предельный цикл (при достаточно малых  $R$ ), либо, переходя через малый, переходим к аттрактору Ресслера, а затем двухпетлевой аттрактор. Далее приведен путь перехода из двухпетлевого аттрактора к малому предельному циклу при фиксированном  $R$ . (Рис 10)



Двухпетлевой аттрактор



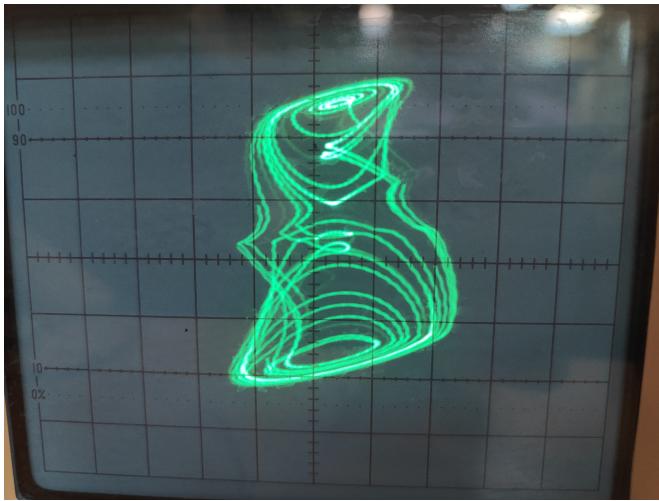
Аттрактор Реслера



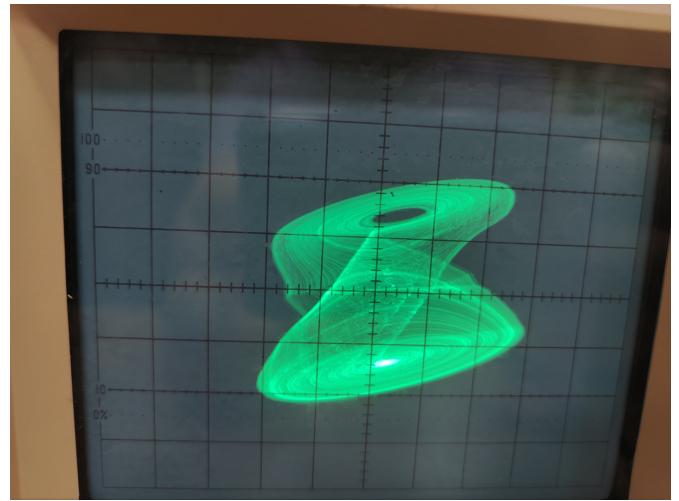
Двухпетлевой предельный цикл

Рис. 10: Фазовые портреты системы Чуа при различных параметрах  $R$  и  $R_L$ .

Также можем про наблюдать за изменением внешнего вида двухпетлевой аттрактора при  $R \rightarrow R_{\text{крит}}$  и сравнить его с аттрактором, удаленным он критической точки (Рис 11). Стоит отметить, что при приближении к критическому значению  $R$  и  $R_L$  поведение аттрактора становится менее стабильным, а сам аттрактор начинает деформироваться и приобретает множество точек излома.



Близко к критической точке



Далеко от критической точки

Рис. 11: Фазовые портреты двухпетлевых аттракторов возле критического значения и на достаточном удалении.

Также можно сравнить аттракторы внутри одного состояния (на примере двухпетлевого аттрактора). Например, можно сравнить зависимость радиуса внутреннего диска от параметров системы (Рис 12). При изменении  $R_L$  радиус диска никак не изменяется, а вот между данной величиной и  $R$  уже существует зависимость, которая будет исследована отдельно.

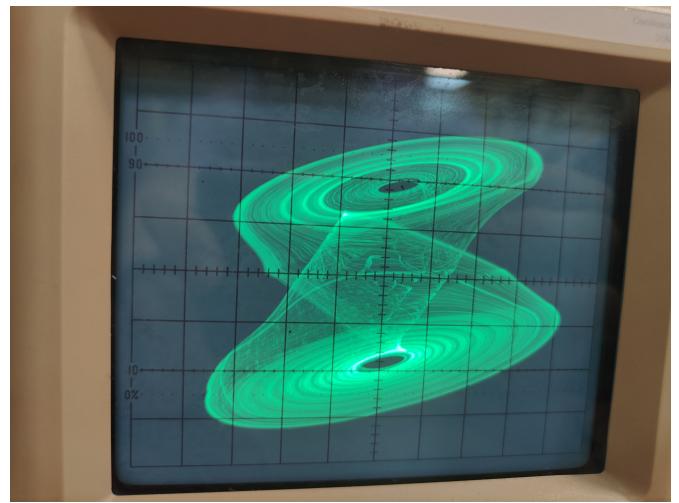
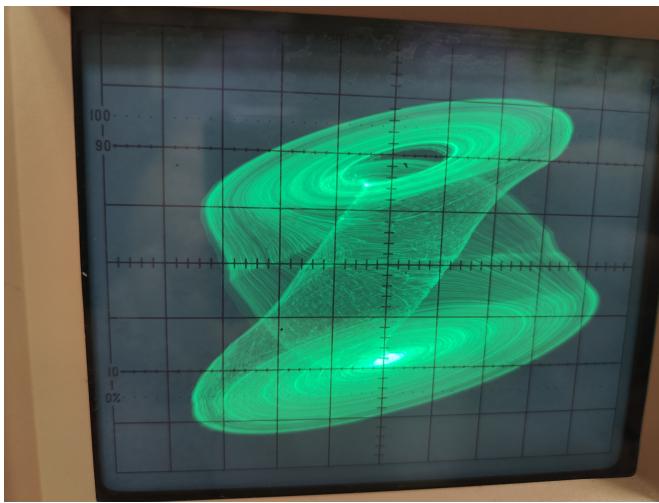


Рис. 12: Фазовые портреты двухпетлевого аттрактора с различными внутренними радиусами.

Если сравнивать полученный график с теоретически выведенным, то можно заметить несколько отличий:

1. Наличие еще одного фазового перехода: большой предельный цикл - малый предельный цикл при малых знаечния  $R_L$ . ПОСТАРАТЬСЯ ПОТОМ ОБЪЯСНИТЬ
2. Различие в координатах критической точки ( $R^{\text{крит}}, R_L^{\text{крит}}$ ), которое объяснено в след. пункте.

## Нахождение параметров расхождения

Так как хотя бифуркационные диаграммы в симуляции и в эксперименте и имеют схожий качественный вид, они расходятся в количественном смысле. Попытаемся найти какие параметры схемы отличаются от номинальных. Легко определить, как изменилось сопротивление  $G_a$ , так как  $R$  координата точки пересечения кривых равна  $R = -\frac{1}{G_a}$ , из чего получаем значение

$$G_e = (-8.3 \pm 0.8) \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1},$$

Что отличается от предполагаемой примерно на 10%, что укладывается в заявленную погрешность резисторов и не может создавать существенного изменения в поведении системы. Следующими элементами, для которых возможны отклонения от истинных значений являются конденсаторы. Для нахождения отклонения их параметров использована полученная теоретическая зависимость критической кривой устойчивости 4. Построена зависимость в линеаризованных координатах (Рис. 13):

$$\frac{1}{R} \left( \frac{1}{R_L} \right) = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} G_a - \frac{C_1}{(\alpha + 1) G_a k_L} \cdot \frac{1}{R_L},$$

где  $k_L = \frac{R_7 R_9 C}{R_8}$ .

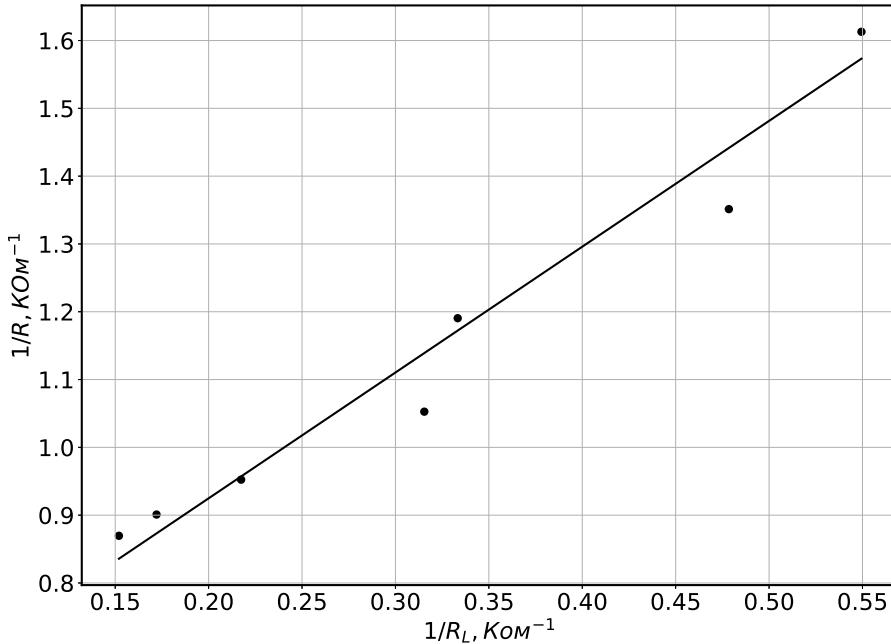


Рис. 13: Линеаризованная зависимость критической кривой перехода  $\frac{1}{R}$  от  $\frac{1}{R_L}$  между большим предельным циклом и малым предельным циклом.

Полученные коэффициенты линейной зависимости составили:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha}{\alpha + 1} G_a = 0.62 \pm 0.04 \text{ КОм}^{-1}, \\ -\frac{C_1}{(\alpha + 1) G_a k_L} = 1.58 \pm 0.16. \end{cases}$$

Из первого коэффициента находим параметр  $\alpha$ , при этом используем экспериментальное значение  $G_a$ :

$$\alpha = 2.9 \pm 0.2.$$

Нахождение остальных параметров не может оказаться точным, так как коэффициент  $k_L$  также зависит от ёмкости конденсатора и может изменяться. Однако в нашей оценке примем его неизменным и равным теоретическому, в таком случае можно найти  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 = 17 \pm 3 \text{ нФ}, \\ C_2 = 53 \pm 6 \text{ нФ}. \end{cases}$$

Эти значения сильно отличаются от закладываемых в схему

$$\begin{cases} C_{1t} = 10 \text{ нФ}, \\ C_{2t} = 100 \text{ нФ}. \end{cases}$$

Такое поведение конденсаторов можно связать с эффектом понижения ёмкости керамических конденсаторов с повышением напряжения (Рис. 14). Таким образом, лучше использовать другие виды конденсаторов для построения схем Чуа, однако даже при таких отклонениях получается найти хаотические режимы схемы.

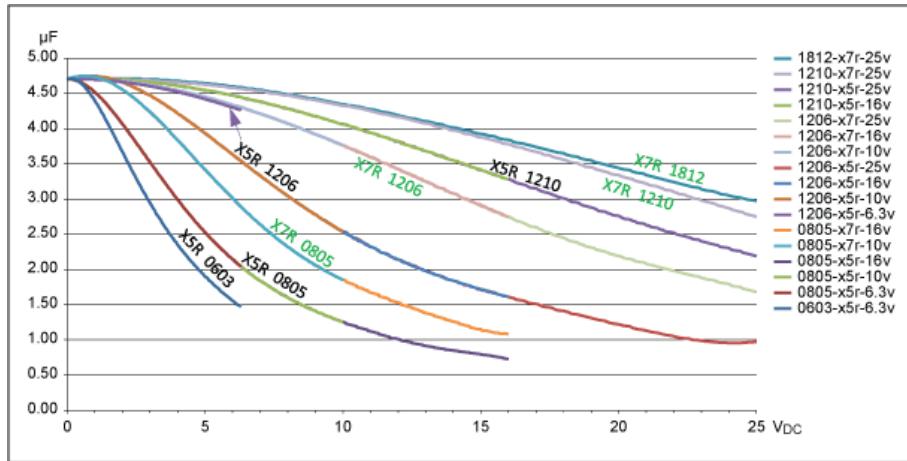


Рис. 14: График ёмкости керамических конденсаторов от напряжения [2].

## Измерение амплитуды сигнала

Для демонстрации динамики размера системы, при фиксированном  $R$  была измерена зависимость амплитуды сигнала в зависимости от  $R_L$  (Рис. ??).

ПОСТРОИТЬ ГРАФИК И ОПИСАТЬ.

## Измерение размеров аттрактора Рёссlerа

Так как экспериментально было получено, что в отличие от симуляции, аттрактор Рёссlerа занимает намного большую область на бифуркационной диаграмме, были измерены его размеры в зависимости от параметров  $R$  и  $R_L$ . Получены трёхмерные графики зависимости угла поворота аттрактора и его поперечного размера от  $R_L$  и  $R$  (Рис. ??).

ПОСТРОИТЬ ГРАФИК И ОПИСАТЬ.

# **Выводы**

## **Список литературы**

- [1] <https://www.chuacircuits.com>
- [2] Изменение ёмкости керамических конденсаторов от температуры и напряжения  
<https://habr.com/ru/articles/384833/>

# **Приложения**

## **Характеристики используемой схемы Чуа**

В качестве операционных усилителей были использованы TL082CP.

$R_1$	220 Ом	$R_6$	3.3 КОм	$R$	4.7 КОм
$R_2$	220 Ом	$R_7$	100 Ом	$C$	100 нФ
$R_3$	2.2 КОм	$R_8$	3.3 КОм	$C_1$	10 нФ
$R_4$	22.0 КОм	$R_9$	1.0 КОм	$C_2$	100 нФ
$R_5$	22.0 КОм	$R_{10}$	10.0 КОм		

Таблица 1: Характеристики используемых элементов.