Матан третья домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

9 апреля 2024 г.

Содержание

1 **T.25** **1**

2 **T.29** **1**

3 **8.3** **2**

4 **8.4** **2**

5 **T.36** **2**

1 T.25

Такое множество является объединением двух множеств $X = X_1 \cup X_2$:

$$X_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

В свою очередь X_1:

$$X_1 = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}}^{\infty} \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Так как $\{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ по существу является прямой, то оно измеримо с мерой 0. Тогда X_1 в силу счётной аддитивности тоже измеримо с мерой 0. Аналогично измеримо и X_2. Тогда X измеримо так как является объединением измеримых.

2 T.29

Я не уверен, но

$$\mu(X \setminus (X + t)) = \mu(X) - \mu$$

3 8.3

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((i, +\infty])$$

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((-i, +\infty])$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = A \setminus \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}(\{+\infty\})\big)$$

4 8.4

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((b - \frac{1}{i}, +\infty])\right)$$

5 T.36

Нужно доказать измеримость множества:

$$X = \{x \in X \mid f'(x) < c\} = \left\{x \in X \mid \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < c\right\} = \left\{x \in X \mid \exists n \, f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) < \frac{c}{n}\right\}$$

Представим ввиде объёдинения:

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) < \frac{c}{n}\right\}$$

Теперь, так как $f(x)$ - измерима, то и $f(x + \frac{1}{n})$ - измерима. Также так как сумма измеримых измерима, то $f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ - измерима. Тогда получим, что множество X - измеримо как счётное объединение измеримых.