**18.1.** Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0;$

$$\to \begin{pmatrix}5&-8&3&3\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&-1&-5\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim \left(\begin{matrix}1&0\\0&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&5\\2&7\end{matrix}\right)$$

$$a_1\begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}10\\7\\0\\2\end{pmatrix}$$

9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0;$

$$\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\3&6&9&-1\\1&2&3&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$a_1\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

**19.6.** Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить

4) $\|A_{239}|\mathbf{c}_{67}\|$; $\to \left(\begin{matrix}0&1&2\\-1&0&-2\\-2&2&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&0&2\\0&1&2\\-1&1&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&0&2\\0&1&2\\0&1&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-1\\0\\0\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&0&2\\0&1&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right)$

$$b=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad a\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

20) $\|A_{511}|\mathbf{c}_{74}\|$; $\left(\begin{matrix}1&2&-7&-3\\-5&4&63&29\\5&24&-7&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\71\\41\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&2&-7&-3\\5&24&-7&-1\\0&28&56&28\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\41\\112\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&2&-7&-3\\0&14&28&-14\\0&28&56&28\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\112/2\\112\end{matrix}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{matrix}1&2&-7&-3\\0&1&2&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&0&-11&-5\\0&1&2&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-11\\4\end{matrix}\right)$$

$$b=\begin{pmatrix}-11\\4\\0\\0\end{pmatrix} \quad a_1\begin{pmatrix}11\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}5\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\|A^T_{444}|\mathbf{c}_{167}\|$; $\left(\begin{matrix}5&2&3&1\\4&1&2&3\\1&1&1&-2\\3&4&1&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}9\\-1\\1\\2\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&1&1&-2\\4&1&2&3\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{-2}\\3&4&1&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\-1\\\cancel{1}\\2\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1&0&3&-10\\0&1&-2&8\\0&0&-8&35\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-4\\5\\10\end{matrix}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{matrix}1&0&0&\frac{25}{8}\\0&1&0&-\frac{3}{4}\\0&0&-1&\frac{35}{8}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\end{matrix}\right) \Rightarrow b\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix} \quad a_1\begin{pmatrix}-25/8\\3/4\\35/8\\1\end{pmatrix}$$

**18.13.** Зная одну фундаментальную матрицу Φ, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

$\Phi' = \Phi A$ , где столбцы $A$ – ЛНЗ, т.е. $\det A \neq 0$

**18.17.** Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

4) $\Phi = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\\1&3\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}1&1&x_1\\1&2&x_2\\1&1&x_3\\1&3&x_4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&1&x_4-x_2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-2x_2+x_1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_3 - x_1 = 0\\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0\end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$

**19.14.** Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

$Ax = b$ пусть $A_{n\times m}$ и строки ЛНЗ, тогда по т. о рангах $\exists$ $n$ ЛНЗ столбцов, тогда в базисе р-вно $n$ с-ма столбцов явл. порождающей. т.е. $\exists x$ т.ч. $Ax = b$.

**19.21.** Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

$b_1$ $a_1 \dots a_n$ ; $b_2$ $a_1' \dots a_n'$ $\}$ тогда $b_2 = b_1 + \sum \lambda_i a_i$ тогда решение 2-с-мы $b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

тогда $\forall \mu_i$ $\sum \mu_i a_i + \cancel{b_1} = \cancel{b_1} + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

$\sum (\mu_i - \lambda_i) a_i = \sum \lambda_i' a_i'$, возьм. $\mu_i = \lambda_i$ если $i \neq j$ и $\mu_i \neq \lambda_i$ если $i = j$ получим

$a_j = \sum \lambda_i' a_i'$

аналогично для $\{a_i \to a_i'$ получаем, что обе с-мы лин. в-ются через друг друга.

**20.22.** Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 2) $A_{238}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 3) $A_{249}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 4) $A_{391}\mathbf{x} = \mathbf{o}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ - размерность 1

**20.23.** Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

1) $\mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{c}_{83}$; 2) $\mathbf{c}_{31}$, $\mathbf{c}_{30}$; 3) $\mathbf{c}_{30}$, $\mathbf{c}_{29}$;
4) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{196}$; 5) $\mathbf{c}_{197}$; 6) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{198}$, $\mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{c}_{201}$;

4) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

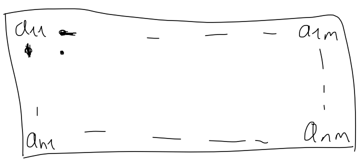
$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**T.1*.** Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Докажите, что всегда можно, причем единственным образом, расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.

Составим с-му ур-ся из $k = (m-1)(n-1)$ переменных.

$Ax = B$, $A = A_{k\times k}$.

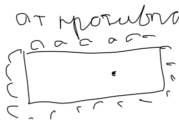



Д-жем, что может сущ. только ед. решение, т.е. $Ax \neq 0$. $\forall x \neq 0$

это соотв сис-ме с $a_{11} = a_{\dots} = 0$.

от противного $\exists x_1 \neq 0$ т.ч. $Ax_1 = 0$

тогда все клетки рядом с



выберем $y \in x_1$ т.ч. $y = \max(x_1)$, тогда все клетки рядом с $y_{max}$ тоже равны $y_{max}$ и так далее до степок. по т-к. на степках нах. нули, то $y_{max} = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$.

Получим, что $\det A \neq 0$ - А - ЛНЗ $\Rightarrow$ строки А - ЛНЗ $\Rightarrow \forall B$ $\exists X$ т.ч. $Ax = B$ ЧТД на степени max. нули, то $y_{max} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Получим, что ст. A – ЛНЗ => строки A – ЛНЗ => $\forall B \ \exists X$ т.ч. $AX = B$ ЧТД

Подпространства и факторпространства.

**21.2.** Доказать, что пространство многочленов степени не выше $n$ является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше $n$ и подпространства нечетных многочленов степени не выше $n$.

1) Если $\exists f(x)$, что $f(-x) = f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ т.е. $\mathbb{K}(x)^+ \cap \mathbb{K}(x)^- = \{0\}$

2) $\forall f(x) \in \mathbb{K}(x)$: $f^+(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Тогда $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$

**21.3.** 2) Дана матрица $A$ из $n$ строк. Доказать, что $n$-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов $A$ и подпространства решений системы линейных уравнений $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

1) $\dim\langle a_n \rangle = r = \operatorname{rk} A$

$\dim\langle \Phi \rangle = n - r$, тогда осталось д-ть, что $\langle a_n \rangle \cap \langle \Phi \rangle = \{0\}$ т.ч.

$\dim\langle a_n \rangle \cup \langle \Phi \rangle = r + n - r - \dim \cap = n - \dim \cap = n$ если $\cap = 0$

2) ?

**21.6.** Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x}$ из $n$-мерного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathcal{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, а $\mathcal{Q}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 4$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{201}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{197}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{198}$.

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Тогда $\operatorname{пр} x = -a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

**21.7.** Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств $n$-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 3$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{116}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{145}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{122}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{146}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{147}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \quad a_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \quad b_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \quad b_2\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} \quad b_3\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-3\\0&-2&-3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&4&1\\5&-2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\\0&-22&-6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\end{pmatrix}$$

7) $n = 4$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{200}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{217}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{211}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{218}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{219}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}-1\\8\\-6\\5\end{pmatrix} \quad a_3\begin{pmatrix}0\\10\\-5\\8\end{pmatrix}$$

$$b_1\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix} \quad b_2\begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix} \quad b_3\begin{pmatrix}4\\2\\5\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\-1&8&-6&5\\0&10&-5&8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\\0&10&-5&8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\\\cancel{4}&\cancel{2}&\cancel{5}&\cancel{8}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\2&10&4&-2\\1&-5&-1&6\\3&8&5&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&10&2&-8\\0&-5&-2&3\\0&8&2&-6\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&5&1&-4\\0&0&1&1\\0&4&1&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{-1}\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right) \to \varphi = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

А базисный вектор: $-\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\-6\\7\\-2\end{pmatrix}}}$

**21.11.** Доказать, что сумма $\mathcal{L}$ двух линейных подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда будет прямой суммой,



когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\forall x \in L$ тогда р-рим $x = y + P$ тогда $\exists\, y_1 \in P\ z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$ $\underline{\underline{*4}}$ $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$ $\Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$

виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ Пусть $\forall x \in L$ тогда р-рим $x = y + p$ тогда $\exists\, y_1 \in P\ z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$ $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$ т.е. $P \cap Q \neq \{0\}$

$\Leftarrow$ Пусть $L$ − не пр. сумма. тогда $t \in P \cap Q$, $t \neq 0$, $\langle p_1 \dots p_n \rangle = P$, $\langle q_1 \dots q_n \rangle = Q$ − базисы.

$t = \sum \lambda_i p_i = \sum \mu_i q_i \Rightarrow \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = 0$

р-рим произв $x \in L$: $x = \sum \gamma_i p_i + \sum \varphi_i q_i$ по тогда

$x = \sum \gamma_i p_i + \sum \varphi_i q_i + \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = \underbrace{\sum (\gamma_i - \lambda_i) p_i}_{\in P} + \underbrace{\sum (\varphi_i - \mu_i)}_{\in Q} -$

$x$ расп. не единственно.

**21.12.** Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1) если сумма размерностей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ больше размерности всего пространства, то пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ содержит ненулевой вектор;

2) если размерность суммы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

1) $\dim L \geqslant \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) > \dim L - \dim(P \cap Q)$

$\dim L - \dim L > -\dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) > 0 \Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$

2) $P \cap Q \subseteq P \subseteq P + Q \Rightarrow$ либо $P = P \cap Q$ либо $P = P + Q$

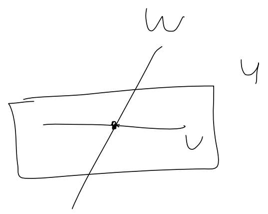
Если $P = P \cap Q$ то $P = P \cap Q \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq Q$

Если $P = P + Q$ то $Q \subseteq P + Q \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P$.

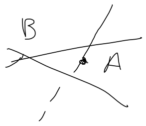
**35.13.** Пусть $U$, $V$, $W$ — подпространства векторного пространства.

а) Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

б) Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.




а) Контр. пример три прямые




$U \cap (V + W) = \{A\}$

$(U \cap V) + (U \cap W) = \varnothing$

б) $U \cap V = V$ $\quad U \cap V + U \cap W = V + U \cap W = \langle V \cup (U \cap W) \rangle =$

$= \langle (V \cup U) \cap (V \cup W) \rangle = \langle U \cap (V \cup W) \rangle = U \cap \langle V \cup W \rangle = U \cap (V + W)$

**T.2.** В условиях задачи 21.7(7) докажите, что пересечение $W$ данных линейных оболочек содержится в подпространстве $U$, заданном уравнением $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, и дополните базис в $W$ до базиса в $U$.

**Т.3.** Пусть $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – пространство квадратных матриц порядка $n$ с элементами из $\mathbb{R}$, а $U$, $W$, $W_1$ – его подпространства, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Докажите, что $W$ и $W_1$ – различные прямые дополнения к $U$ в $V$. Разложите матрицу $A_{233}$ (см. **Б**) двумя способами, исходя из равенств $V = U \oplus W$, $V = U \oplus W_1$.

1) $A \in U$ $\quad A^+ = \frac{A+A^T}{2} \in W$, $A^- = \frac{A-A^T}{2} \in U$ и $A = A^+ + A^-$

2) $A \in M_n$. $A = A^{\nearrow} + A^{\swarrow} = \underbrace{A^{\nearrow} + A^{\swarrow T}}_{\text{Верхтреуг}} + \underbrace{A^{\swarrow} - A^{\swarrow T}}_{\text{кососим}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\nearrow} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\swarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{\swarrow T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

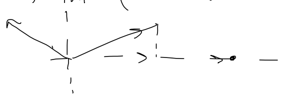
$$A^{\nearrow} + A^{\swarrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\swarrow} - A^{\swarrow T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Линейные отображения

**23.6.** Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ — фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования $\varphi$, заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

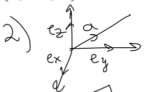
5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; $\quad$ 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x})\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

$\varphi(x_1+x_2) = x_1 - x_2 - 2(x_1+x_2, n)\frac{n}{|n|^2} = \left(x_1 - 2(x_1, n)\frac{n}{|n|^2}\right) - \left(x_2 - 2(x_2, n)\frac{n}{|n|^2}\right)$

— лин смысл:  — отражение отн.-тельно перпенд. пр-ва к. $n$.

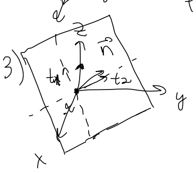
**23.9.** Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства $\mathcal{E}_3$ на подпространство $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}$ есть:

1) прямая $x = z = 0$;
2) прямая $x = y = z$;
3) плоскость $x + y + z = 0$;
4) плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$ и $\mathbf{b}(1, -3, 2)$.

2) 

$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\varphi(e_y) = a\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$

$1 - \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

3) 

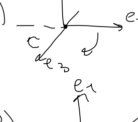
$\varphi(e_z) = t_1\sqrt{\frac{2}{3}} + 0$
$\varphi(e_x) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} - t_2\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$
$\varphi(e_y) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} + t_2\sqrt{\frac{1}{3}}$

**23.14.** В трехмерном геометрическом векторном пространстве $\mathcal{E}_3$ задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства:

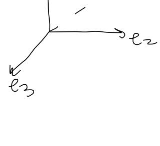
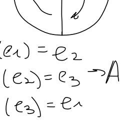
1) на угол $\alpha$ вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;



2) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;
3) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

2) 

$\varphi(e_1) = e_1$
$\varphi(e_2) = e_3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = -e_2$

3)  

$\varphi(e_1) = e_2$
$\varphi(e_2) = e_3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = e_1$

**23.15.** Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$.

1) Доказать, что преобразование $\varphi$ проектирования $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$ линейно. Найти ядро и множество значений $\varphi$. Записать матрицу преобразования $\varphi$ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$.

1) $L = L' \oplus L''$ $\quad \varphi = \text{Пр}_{L'}^{\parallel L''}$, т.е. $\varphi(a \in L) = b \in L'$ т.ч. $a = b + c$, $c \in L''$

т.к. $L$ – пр. сумма, то пусть $\left.\begin{matrix} a_1 = b_1 + c_1 \\ a_2 = b_2 + c_2 \end{matrix}\right\}$ т.к. р-ние ед то $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ – $\underline{\text{ед}}$
$\varphi(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 = \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$

2) Ядро: $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = c \in L'' \Rightarrow \ker\varphi = L''$

образ: $\forall q \in \mathrm{Im}\,\varphi$ $q \in L'$, также $\forall b \in L'$ $\varphi(b) = b \in L'$ т.е. $\mathrm{Im}\,\varphi = L'$

3) $\{e_1 \dots e_k\} \to L'$, $\{e_{k+1} \dots e_{k-m+1}\} \to L'' \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \varphi(e_1) = e_1 \\ \vdots \\ \varphi(e_k) = e_k \\ \vdots \\ \varphi(e_{k-m+1}) = 0 \end{matrix}\right\}$ $A = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

**23.19.** Доказать, что:

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

$\mathrm{Im}\,\varphi = V \Rightarrow \mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim V = n$ (число строк) $\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{rk}A = n}}$

**23.24.** Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — линейное отображение, и $\dim \mathcal{L} = \dim \widetilde{\mathcal{L}}$. Доказать утверждения:

1) Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y$ $(x \in \mathcal{L})$ было разрешимо при любом $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) = o$ имело только нулевое решение.

2) Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, то оно имеет для каждого $y$ единственное решение.

3) Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо не при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, но при некотором $y$ разрешимо. Тогда его решение не единственно.

1) $(\Rightarrow)$ $\varphi(x) = y$ разр $\Leftrightarrow A_\varphi x = y$ – разр т.е. $A$ – невырожд $\Rightarrow \dim L = \mathrm{rk}A = \dim \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \dim\ker\varphi = 0$
т.е. $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$(\Leftarrow)$ $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim L \Rightarrow \underline{\mathrm{Im}\,\varphi = \widetilde{L}}$

2) $\varphi(x) = y$ – разр, то $\mathrm{Im}\,\varphi = \widetilde{L} \Rightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{от. инъект}}$

3) $\varphi(x) = y$, тогда $\ker\varphi \neq 0$, р-рим $a \in \ker\varphi$ : $\varphi(a) = 0$ тогда $\varphi(x) + \varphi(a) = y + 0$
$\varphi(a + x) = y$ – 2 решение.

**23.29.** Линейное отображение $n$-мерного линейного пространства в $m$-мерное задано матрицей $A$ в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Числа $m$ и $n$ определяются размерами матрицы. Найти ядро и множество значений отображения. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, если:

**420.** $\left\| \begin{matrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ker\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

по ст-цам

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \mathrm{Im}\,\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

**23.30.** Линейное отображение $n$-мерного арифметического пространства в $m$-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей $A$. Числа $m$ и $n$ определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора $\mathbf{a}$, если:

1) $A = A_{513}$, $\quad \mathbf{a} = (-1, 0, 1)^T$;

**513.** $\left\| \begin{matrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{matrix} \right\| x = a \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & -4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ частное решение $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

базис $\begin{pmatrix} -14 & 2 \\ -6 & -7 \\ 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

**23.40.** Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше $m$.

1) Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование $D : \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования $D$:

а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^m$;

б) в базисе $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^m$;

в) в базисе $1, \dfrac{t}{1!}, \dots, \dfrac{t^m}{m!}$.

$P(x) = \text{const}.$

а) в стандартном базисе $1, t, \ldots, t^m$;
б) в базисе $1, t-t_0, \ldots, (t-t_0)^m$;
в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}$.

в) $\ker D$ - все мн-ны вида $P(x) = const$.
$D(1) = 0$, $D\left(\frac{t}{1!}\right) = 1$, ... $D\left(\frac{t^m}{m!}\right) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{m-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

**23.62.** Линейное преобразование $\varphi$ имеет в данном базисе матрицу $A$, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу $S$. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:
3) $A = A_{38}$, $S = A_{39}$;

$A\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $S\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \to S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

**23.70.** Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если:
1) поменять местами векторы $e_i$ и $e_j$;

$\left.\begin{array}{l} S \text{ - эл. м-ца изм. строки местами, тогда} \\ S^{-1} \text{ - эл. м-ца изм. столбцы местами} \end{array}\right\}$ $S^{-1}AS$ - меняем у $A$ столбец $j$ и $i$ и 2 строки с $j$ и $i$

**T.7.** Запишите (в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$) матрицу линейного преобразования $\varphi_{\mathbf{v}}$, заданного равенством $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{v}$ имеет координатный столбец $(v_1, v_2, v_3)^T$. Докажите, что $\mathbf{v} \mapsto \varphi_{\mathbf{v}}$ определяет линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметричных матриц в $\mathrm{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_x) = [\overline{v}, (1,0,0)] = v_3 e_y - v_2 e_z \\ \varphi(e_y) = -v_1 e_z - v_3 e_x \\ \varphi(e_z) = v_2 e_x - v_1 e_y \end{array}\right\} A\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(v) = Av$ $\quad \varphi^T(v) = -v^T A$ - кососим

**12.40.** Записать формулы, задающие аффинное преобразование плоскости, переводящее точки $A$, $B$, $C$ соответственно в $A^*$, $B^*$, $C^*$:
1) $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $A^*(-3,5)$, $B^*(4,-3)$, $C^*(0,0)$;

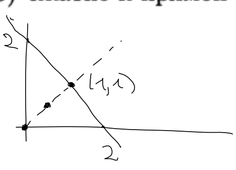
$\left.\begin{array}{l} AC: \left.\begin{array}{l} 3 = 0 + a_{12} \\ -5 = 0 + a_{22} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_{12} = 3 \\ a_{22} = -5 \end{array} \\ BC: \left.\begin{array}{l} -4 = a_{11} \\ 3 = a_{21} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_{11} = -4 \\ a_{21} = 3 \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l} b_1 = -10 \\ b_2 = 13 \end{array}$

**12.28.** Доказать, что:
1) если $A$ и $B$ — две различные неподвижные точки аффинного преобразования, то и все точки прямой $AB$ неподвижны;

$\left.\begin{array}{l} \overline{x_1} = A\overline{x_1} + \overline{b} \\ \overline{x_2} = A\overline{x_2} + \overline{b} \end{array}\right\}$ $\overline{x} = (\overline{x_2} - \overline{x_1})t + \overline{x_1}$

$A\overline{x} + \overline{b} = tA\overline{x_2} - tA\overline{x_1} + \underbrace{A\overline{x_1} + \overline{b}}_{\overline{x_1}} = t\underbrace{(A\overline{x_2} - A\overline{x_1})}_{\overline{x_2} - \overline{x_1}} + \overline{x_1} = (\overline{x_2} - \overline{x_1})t + \overline{x_1}$

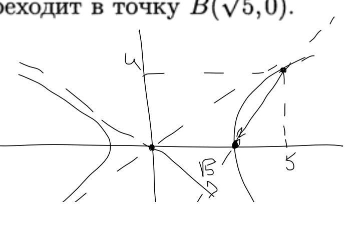
**12.53.** Написать формулы, задающие преобразования плоскости:
8) сжатие к прямой $x + y - 2 = 0$ с коэффициентом $1/3$;




$(0,0) \to (1,1)\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3} = b_1 = b_2$
$(0,2) \to (0,2)$: $0 = a_{11}\cdot 0 + 2\cdot a_{12} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{3}$
$2 = a_{21}\cdot 0 + 2\cdot a_{22} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{22} = \frac{2}{3}$
$(2,0) \to (2,0)$: $2 = a_{11}\cdot 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{2}{3}$
$0 = a_{21}\cdot 2 + \frac{2}{3}$ $\quad a_{21} = -\frac{1}{3}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

**12.51.** Записать формулы аффинного преобразования, переводящего гиперболу $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в себя так, что точка $A(5,4)$ переходит в точку $B(\sqrt{5}, 0)$.

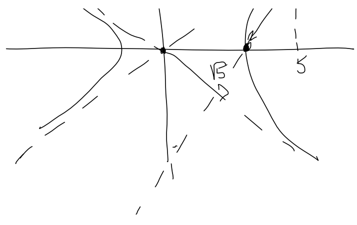



$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$

асимптоты перейд. в асс $\Rightarrow (0,0) \to (0,0)$ $\quad \underline{b = 0}$

Найдём в-ра асимптот: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$, т.е. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ и $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

I. $\sqrt{5} = 5a_{11} + 4a_{12}$




Найдём в-ра ассимпт.: $y = \frac{1}{\sqrt{5}}x$, т.е. $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1)$ и $(\ ,\ )$

I. $\sqrt{5} = 5a_{11} + 4a_{12}$

$0 = 5a_{21} + 4a_{21}$

VI. Собственные векторы и значения.

**24.13.** Доказать, что линейное преобразование нечетномерного (например, трехмерного) вещественного линейного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

**24.18.** Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ — ненулевые подпространства. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного преобразования $\varphi$; доказать, что $\varphi$ имеет базис из собственных векторов, и указать диагональный вид его матрицы, если $\varphi$ есть:

2) отражение в подпространстве $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$.

$v \in V$ $\quad \underset{L'}{\underset{\uparrow}{v = u}} + \underset{L''}{\underset{\uparrow}{w}} \Rightarrow \varphi(v) = v - 2w$

Р-рим базис $\{e_1 \ldots e_k\}$ в $L'$, тогда дополним его до $\{e_1 \ldots e_k \ldots e_n\}$ в $L$

Тогда $\varphi(e_1) = e_1$ и $\varphi(e_k) = e_k$, но $\varphi(e_{k+1}) = -e_{k+1} \ldots \varphi(e_n) = -e_n \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

**24.20.** Найти собственные значения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования, определенного в задаче:

2) 23.9

**24.22.** 1) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\varphi$, заданного матрицей



$$A = (a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n) \neq O.$$

2) Найти необходимое и достаточное условие диагонализируемости преобразования $\varphi$.

3) Выяснить, диагонализируемы ли преобразования, заданные матрицами: а) $A_{213}$; б) $A_{222}$.

1) Заметим, что $\varphi: V \to \langle a \rangle$, т.е. все с-нные в-ры имеют вид $\gamma a$.

Тогда $ab^T(\gamma a) = \lambda \gamma a$, т.е. $ab^T a = \lambda a \Rightarrow b^T a = \lambda$ - ед-нное с-нное значение равное $b^T a$.

2)

**24.30.** Линейное преобразование вещественного $n$-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить



собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования:

7) $A_{12}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 2$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – проектор на вектор (1,1), увел. в 2 раза.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19) $A_{221}$; $\left\| \begin{matrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{matrix} \right\|$ 1) $\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0$

$\lambda = 2$, $\lambda = \underline{3}$ – крат. корень.

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – ЛЗ с. в-ра

30) $A_{283}$; **283.** $\left\| \begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{matrix} \right\|$ 1) $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = \underline{-1}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**24.42. Найти собственные значения и собственные векторы (собственные функции) дифференцирования $D$ как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств вещественных функций ($n$ — фиксированное натуральное число):**

**1) пространство всех многочленов степени не выше $n$;**

Только константы с $\lambda = 0$.

**24.53.** В пространстве $\mathcal{R}_{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n$ рассматривается операция транспонирования $\tau: A \to A^T$. Проверить, что $\tau$ — линейное преобразование и $\tau^2 = \iota$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования $\tau$. Разложить пространство $\mathcal{R}_{n\times n}$ в прямую сумму собственных подпространств преобразования $\tau$.

1) линейность очевидна $\tau(aA) = A^T a^T = A^T a = aA^T = a\tau(A)$

$\tau(A+B) = A^T + B^T = \tau(A) + \tau(B)$

2) $(A^T)^T = A \Rightarrow \tau^2 = i$

3) $A^T = \lambda A \Rightarrow A = \lambda A^T \Rightarrow A^T = \lambda^2 A^T$ т.е. $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ – это соотв. сим. и кососим. матрицам

4) $\forall B \in R_{n\times n}$ $B = \frac{B+B^T}{2} + \frac{B-B^T}{2}$

**24.55.** Пусть $A$ — матрица второго порядка. Формула $\varphi(X) = AX$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка (задача 23.47). Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования $\varphi$. В случае, когда эта система является базисом, записать в нем матрицу преобразования $\varphi$:

1) $A = A_{46}$; 2) $A = A_{52}$;

$AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) $\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \varphi = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \sim \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

?

$$2)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$