Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

1 октября 2024 г.

Содержание

1 T1

Множество X задаётся следующим неравенством:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq az(x^2+y^2)$$

Тогда

$$\mu X = \int_X 1\, dxdydz$$

Введём сферическую замену координат, его якобиан $|J| = r^2 \sin\theta$, и неравенство преобразуется как

$$r^4 \leq azr^2 \sin^2\theta \implies r^2 \leq \sin^2\theta$$

Тогда объём равен:

$$\mu X = \int_{r^2 \leq \sin^2\theta} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{|\sin\theta|} r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{2\pi}{3}\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

2 T2

б)

$$\int_{|\frac{y}{b}| \leq \frac{x}{a}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2c^2}} dxdy$$

Потом сделаю((()))

в)

$$\int_{a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2} x^2+y^2-z^2 dxdydz$$

Перейдём в сферическую систему координат:

$$\int_{a^2\le r^2\le b^2} r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = 2\pi\int_a^b r^4dr\int_0^\pi(\sin^3\theta-\sin\theta\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\frac{2}{3}\left(\frac{b^5-a^5}{5}\right)$$

Тогда ответ:

$$I=\frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$$

д)

$$\int_{x^2+y^2\le az\le b^2} z^2dxdydz$$

е)

$$\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} x^2+y^2+z^2dxdydz = \frac{1}{abc}\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}(ax)^2+(by)^2+(cz)^2dxdydz$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$I=\frac{1}{abc}\int_{r^2\le 1} r^2dr\int_0^{2\pi}\int_0^\pi (a\sin\theta\cos\phi)^2+(b\sin\theta\sin\phi)^2+(c\cos\theta)^2d\theta d\phi$$

$$I=\frac{2}{3abc}\left(a^2\frac{\pi^2}{2}+b^2\frac{\pi^2}{2}+c^2\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^2(a^2+b^2+c^2)}{3abc}$$

3 T4

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\sin\big(x^2+y^2\big)dxdy$$

Интеграл существует при любых значениях параметра a т.к. он мажорируется сходящимся. Введём полряные координаты.

$$I=2\pi\int_0^{+\infty}e^{-ar^2}\sin\big(r^2\big)rdr=\pi\int_0^{+\infty}e^{-at}\sin tdt=\frac{\pi}{a^2+1}$$