Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

13 ноября 2024 г.

Содержание

1 T1

Множество X задаётся следующим неравенством:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq az(x^2+y^2)$$

Тогда

$$\mu X = \int_X 1\, dxdydz$$

Введём сферическую замену координат, его якобиан $|J| = r^2 \sin\theta$, и неравенство преобразуется как

$$r^4 \leq azr^2 \sin^2\theta \implies r^2 \leq \sin^2\theta$$

Тогда объём равен:

$$\mu X = \int_{r^2\leq \sin^2\theta} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{|\sin\theta|} r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{2\pi}{3}\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

2 T2

б)

$$\int_{|\frac{y}{b}|\leq\frac{x}{a}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2c^2}} dxdy$$

Домножим существующие координаты на $x = ax, y = by$

$$ab\int_{-x\leq y\leq x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{by}{c}\right)^2\right\} dxdy = ab\int_0^\infty dx \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{c}\right)^2\right\}\int_{-x}^{x} dy \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{by}{c}\right)^2\right\}$$

((((потом сделаю))))

в)

$$\int_{a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2} x^2+y^2-z^2 dxdydz$$

Перейдём в сферическую систему координат:

$$\int_{a^2\leq r^2\leq b^2} r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta) r^2 \sin\theta drd\theta d\phi = 2\pi\int_a^b r^4 dr \int_0^\pi (\sin^3\theta - \sin\theta\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\frac{2}{3}\left(\frac{b^5-a^5}{5}\right)$$

Тогда ответ:

$$I = \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$$

д)

$$I = \int_{x^2+y^2\leq az\leq b^2} z^2 dxdydz$$

Перейдём в циллиндрическую систему координат:

$$I = \int_{r^2\leq az\leq b^2} z^2 rdrd\phi dz = 2\pi\int_0^{b^2} z^2 dz \int_0^{\sqrt{az}} rdr = a\pi\int_0^{b^2} z^3 dz = \frac{\pi}{4}ab^8$$

e)

$$\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} x^2+y^2+z^2 dxdydz = \frac{1}{abc}\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}(ax)^2+(by)^2+(cz)^2 dxdydz$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$I = \frac{1}{abc}\int_{r^2\le 1} r^2 dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(a\sin\theta\cos\phi)^2+(b\sin\theta\sin\phi)^2+(c\cos\theta)^2 d\theta d\phi$$

$$I = \frac{2}{3abc}\left(a^2\frac{\pi^2}{2}+b^2\frac{\pi^2}{2}+c^2\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2(a^2+b^2+c^2)}{3abc}$$

3 T3

б) Плотность тела примем равной 1. Введём циллиндрическую систему координат, $x = ar\cos\phi$, $y = ar\sin\phi$, $h = zc$.

$$M = a^2c\int_{r\le h\le 1} rdrd\phi dh = 2\pi a^2 c\int_0^1 dh\int_0^h dr = \pi a^2 c$$

Тогда так как тело является телом вращения, то $x_0 = y_0 = 0$. Найдём z_0

$$z_0 = 2\pi a^2 c\int_{r\le h\le 1} chrdrd\phi dh = 2\pi a^2 c^2\int_0^1 hdh\cdot h = a^2c^2\frac{2\pi}{3} = \frac{2Mc}{3}$$

4 T4

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

Интеграл существует при любых значениях параметра a т.к. он мажорируется сходящимся. Введём полряные координаты.

$$I = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-ar^2}\sin\left(r^2\right)rdr = \pi\int_0^{+\infty}e^{-at}\sin tdt = \frac{\pi}{a^2+1}$$

Последний интеграл мы находили в прошлом году беря его два раза по частям.

5 8.201

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ x\ge 1, y\ge 1\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Введём сферическую замену координат, рассмотрим пока что область $x\ge 1, y\ge 1$

$$f(x,y) = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\cos 2\phi,$$

Интеграл по ограниченной области A соответственно равен

$$F = \int_A \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \cos 2\phi r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi = \int_A \sin^3\theta \cos 2\phi \, dr d\theta d\phi$$

Тогда в дальнейшем при $r \geq \sqrt{2}$ в интеграле возникнет $\int_0^{2\pi} \cos 2\phi d\phi = 0$. Тогда интеграл при $r \geq \sqrt{2}$ равен 0, а при $r \leq \sqrt{2}$ очевидно сходится так как ограничен на множестве конечной меры.

6 T6

в) Я не уверен, но стереографической проекцией из точки шара $(0, 0, -1)$ получим, что полусфера диффеоморфна диску на плоскости (а для него мы доказывали в предыдущем пункте). Замена координат следующая:

$$\begin{cases} t_A^1 = \dfrac{x}{1+z} \\ t_A^2 = \dfrac{y}{1+z} \end{cases}$$

7 T7

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Судя по всему единственным случаем, когда нули не являются многообразием это случай пересекающихся прямых, так как выбросив точку пересечения получим 4 компоненты связности, чего невозможно получить на прямой выбросом одной точки.

8 T8

Введём 2 карты, соответствующие двум стереографическим проекциям сферы на две плоскости. $\phi_A : V_A \to U_A$, $V_A = \mathbb{R}^2$, $U_A = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} t_A^1 = \dfrac{x}{1-z} \\ t_A^2 = \dfrac{y}{1-z} \end{cases}$$

Обратное имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t_A^1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ y = \dfrac{2t_A^2}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ z = \dfrac{(t_A^1)^2 + (t_A^2)^2 - 1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \end{cases}$$

Найдём ранг карты:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}$$

На V_A ранг карты очевидно равен двум. Аналогично строится вторая карта $\phi_B : V_B \to U_B$, разве, что $1 - z \leftrightarrow 1 + z$. То есть:

$$\begin{cases} t_B^1 = \dfrac{x}{1+z} \\ t_B^2 = \dfrac{y}{1+z} \end{cases}$$

Все остальные формальные утверждения делаются аналогично, из чего следует, что сфера является вложенным многообразием. Посмотрим на гладкость функции свзяки:

$$\begin{cases} t_A^1 = \dfrac{1}{t_B^1} \\ t_A^2 = \dfrac{1}{t_B^2} \end{cases}$$

Такие функции очевидно бесконечно гладкие, а значит такой набор карт будет являтся атласом для сферы ранга 2.

9 T11

б) $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\int_\gamma (2xy - y)dx + x^2 dy = \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} (2x - (2x-1))\, dx \wedge dy = \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} dx \wedge dy = \mu \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\} = \pi ab$$

10 T12

а) По формуле Остроградского-Гаусса

$$\iint_S x^2 y^2 z dy \wedge dz = \int_{x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0} 2xzy^2 dx \wedge dy \wedge dz$$

В сферических координатах

$$2\int_{-a\leq r\leq a, z\geq 0} r^6 \cos\theta \sin^4\theta \cos\varphi \sin^2\varphi dr d\theta d\varphi = 4\frac{a^7}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos\theta dr d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi = 0$$

((((Странный ответ))))
в) Перейдём к интегралу по циллиндру по формуле Остроградского

$$\int_{x^2+y^2=a^2, 0\leq z\leq b, x\geq 0, y\geq 0} (x+y+z) dx \wedge dy \wedge dz = 2\int_{x^2+y^2=a^2, 0\leq z\leq b, x\geq 0, y\geq 0} x dx dy dz + \int_{x^2+y^2=a^2, 0\leq z\leq b, x\geq 0, y\geq 0} z dx dy dz$$

В цилиндрических координатах первый интеграл равен

$$\int_{0<r\leq a, 0<z<b, x\geq 0, y\geq 0} r^2 \cos\theta dr d\theta dz = b\frac{a^3}{3}$$

Второй интеграл равен $I_2 = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\pi a^2}{4}$ Тогда ответ:

$$I = \frac{a^3 b}{3} + \pi \frac{a^2 b^2}{8}$$

д)

$$\int_{x^2+y^2+z^2=a^2, x,y,z\geq 0} (x+y+z) dx \wedge dy \wedge dz = 3 \int_{x^2+y^2+z^2=a^2, x,y,z\geq 0} x dx dy dz = 3I$$

Перейдём в сферические координаты

$$I = \int_a^0 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^4}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{8}$$

И исходный интеграл равен

$$3I = \frac{3\pi a^4}{8}$$

(((Тут ещё вычесть интегралы через боковые поверхности)))

11 T18

Докажем лемму о том, что у замкнутой гладкой кривой существует точка, в которой касательная к кривой делит пространство на две части, одна из которых полностью содержит кривую. Так как кривая замкнута, то она ограничена, тогда рассмотрим расстояние от точки $(0,0)$ до кривой, по теореме 1 семестра максимальное и минимальное расстояние достигается. Тогда расстморим окружность $B((0,0), \rho_{\max})$. Такая окружность касается кривой и кривая полностью лежит внутри окружности, в таком случае вся кривая лежит в одном полупространстве от касательной к окружности в этой точке.

Далее перейдём к доказательству того, что вектор скорости делает только один поворот на замкнутой гладкой кривой без пересечений. Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, где $t \in [0,1]$ — натуральный параметр. Тогда введём вектор

$$e(t,s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{|\gamma(s) - \gamma(t)|}$$

Рассмотрим треугольник $D = \{(t,s) \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$. Так как кривая не имеет самопересечений, то на внутренности D вектор e всегда определён. Доопределим e на диагонали по непрерывности:

$$e(t,s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s-t} : \left| \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s-t} \right| \to \frac{\dot{\gamma(t)}}{|\dot{\gamma(t)}|} = \dot{\gamma(t)}$$

Аналогично показывается, что при $s \to 1, t \to 0$, $e \to -\gamma(0)$. Мы определили непрерывную функцию на треугольнике D, тогда так как $|e| = 1$, можем представить $e = (\cos\phi(t,s), \sin\phi(t,s))$. Вращение вектора скорости есть число оборотов e вдоль диагонали D:

$$\alpha = \phi(1,1) - \phi(0,0) = (\phi(1,1) - \phi(0,1)) + (\phi(0,1) - \phi(0,0))$$

Согласно лемме найдётся точка, что кривая лежит по одну сторону от касательной, если определить эту точку за $t = 0$, тогда $\phi(1,1) - \phi(0,1) = \pm\pi$ и аналогично $\phi(0,1) - \phi(0,0) = \pm\pi$ тогда

$$\alpha = \pm 2\pi$$

Что и требовалось доказать.

12 T.20

Пусть $d\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = d\omega$, Тогда

$$d((-1)^{\deg}\omega_1 \wedge \omega) = (-1)^{\deg} d\omega_1 \wedge \omega + \omega_1 \wedge d\omega = 0 + \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

Всё, форма точная.

13 11.68

Рассмотрим кривую заданную пересечением уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Тогда введём параметризацию:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ z = a\sin\varphi \\ y = -a\cos\varphi \end{cases}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$. У такой параметризации другая ориентация, поэтому при переходе к ней поставим перед инетгралом знак минус.

$$\int_L z^3dx + x^3dy + y^3dz = -a^4\int_0^{2\pi}(-\sin^4\varphi + \cos^3\varphi\sin\varphi - \cos^4\varphi)d\varphi = -a^4\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi a^4}{2}$$

14 11.67

$$\int_L (y^2+z^2)dx + (z^2+x^2)dy + (x^2+y^2)dz = 2\int_S (y-z)dy\wedge dz + zdz\wedge dx + xdx\wedge dy$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = 2bx \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(b-a) = z^2 \\ (x-b)^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

Возьмём карту $\varphi(t,p) = (\frac{p^2}{2(b-a)}, t, p)$, Из чего следует: $dx = \frac{p}{(b-a)}dp$. Интеграл:

$$2\int_S (y-z)dy\wedge dz + zdz\wedge dx + xdx\wedge dy = 2\int_{\left(\frac{p^2}{2(b-a)}-b\right)^2+t^2=b^2} (t-p)dt\wedge dp + 0 + \frac{p^2}{2(b-a)}\cdot\frac{p}{(b-a)}dp\wedge dt$$

Что равно:

$$2\int_{\left(\frac{p^2}{2(b-a)}-b\right)^2+t^2=b^2}\left(t - p - \frac{p^3}{2(b-a)^2}\right)dtdp$$

((((НУ дальше в полярне и что-то получится...))))

15 T.24

а)

$$(\boldsymbol{\nabla} r)_\alpha = r'(r)\frac{x_\alpha}{r} = \frac{x_\alpha}{r} \implies \boldsymbol{\nabla} r = e_r$$

б)

$$(\boldsymbol{\nabla}|a,r|^2)_\sigma = \partial_\sigma(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta r_\gamma \varepsilon_{\alpha\mu\nu}a_\mu r_\nu) = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta\delta_{\sigma\gamma}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}a_\mu r_\nu = 2\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}a_\beta a_\mu r_\nu =$$

Что равно

$$2(\delta_{\beta\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\sigma\mu})a_\beta a_\mu r_\nu = 2r_\sigma a^2 - 2a_\sigma(r,a)$$

И тогда в векторной форме:

$$\boldsymbol{\nabla}|a,r|^2 = 2[r(a,a) - a(r,a)]$$

16 T.25

б)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot[a,r] = (r, rot\, a) - (a, rot\, r) = 0 - 0 = 0$$

17 T.26

б)

$$rot[a,r] = a\boldsymbol{\nabla}\cdot r - (a\nabla)r = 3a - (a\nabla)r$$