Практика 10.

Шахматов Андрей, Б02-304

19 апреля 2024 г.

Содержание

1 1.1

$$f^{-1}(\{1\}) = A, f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus A, f^{-1}(\{0,1\}) = \mathbb{R}^n$$

Так как A измеримо тогда и только тогда когда $\mathbb{R}^n \setminus A$ измеримо, то необходимым и достаточным условием измеримости является измеримость A.

2 1.2

Так как функция монотонна, то она имеет счётное число точек разрыва, тогда можно разбить её область определения на счётоное объединение непрерывных множеств:

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

На каждом из X_k функция непрерывна, а значит и измерима:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X_k \mid f(x) < c\}$$

Тогда такое множество является счётным объединением измеримых, а значит измеримо.

3 1.3

а)

$$f^3 = g \circ f,$$

где $g(y) = y^3$. Так как y^3 - непрерывна, то по теореме о композиции непрерывной и измеримой композиция измерима.
б) аналогично пункту а).
в)

$$f(x+a) = f \circ g,$$

где $g(x) = x + a$, тогда для любого борелевского X, $f^{-1}(X)$ - измеримо. Тогда так как мера Лебега инварианта относительно переноса, то $f^{-1}(X) - a$ - тоже измеримо. Тогда композиция тоже измерима.

4 1.4

$$\{x \in X \mid f(x) \geq c\} = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in X \mid f(x) < c\}$$

5 2.1

Так как $g(x)$ - непрерывна, то $g^{-1}(X)$ переводит открытые в открытые. А значит она переводит борелевские в борелевские. А так как как измеримое отображение, то оно переведёт борелевское в измеримое, тогда $g^{-1} \circ f^{-1}$ переводит борелевские в измеримые, а значит $f \circ g$ измеримо по определению.

6 2.3

Так как множество нигде не плотно, то множество его предельных точек совпадает со всем $\mathbb{R}$. Тогда для любого $y_0 \in \mathbb{R} \setminus E$ найдётся последовательность $y_k \to y_0$, выберем из y_k такую подпоследовательность где $y_{k_j} > y_0$ (если таковой нет, выберем $y_{k_j} < y_0$). Тогда

$$\{x \in X \mid f(x) < y_0\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in X \mid f(x) < y_{k_j}\}$$

7 2.4

Построим множество точек, для которых $\{f_k(x)\}$ ограничена:

$$\{x \in X \mid \forall k \in \mathbb{N} |f_k(x)| < M\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) < M|\}$$

- объединение измеримых измеримо.

8 2.5

а) Чтобы доказать требуемый факт, нужно доказать, что $q(x) = \{x\}$ - борелевская функция. Прообраз $q^{-1}((\alpha, \beta) \subset [0,1)) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (\alpha + z, \beta + z)$. Так как прообраз интервала является счётным пересечением интервалов, то функция дробной части действительно борелевская. Композиция борелевской и измеримой - измерима.
б) В данном пункте следует доказать, что $q(x)$ - "Лебег-измерима то есть прообраз измеримого измерим. Аналогично пункту а)

$$q^{-1}(A \in [0,1)) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \{a + z \mid a \in A\},$$

получили счётное объединение измеримых - измеримо.

9 3.1

а) Нужно доказать, что любой прообраз $p(x) = [x]$ является борелевским. Пусть $X \subset Z$.

$$p^{-1}(\{X\}) = \bigcup_{x \in X} [x, x+1),$$

счётное пересечение борелевских. б) Аналогичное нужно доказать для функции Римана. Прообраз любой точки из образа функции Римана, то есть точки вида $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ есть конечное число точек со знаменателем n. Тогда $\forall X \in R((0,1))$, причём X - счётно:

$$R^{-1}(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ \frac{i}{n} \right\} -$$

Каждую точку монжно представить как счётное пересечение отрезков, в итоге получим:

$$R^{-1}(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{p=1}^{\infty} \left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{p}\right] -$$

очевидно борелевское множество.

10 3.2

Если f - измерима, то

$$\{x \in X \mid f(x) = c\} = \{x \in X \mid f(x) \leq c\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \{x \in X \mid f(x) < c\})$$

Все такие множества измеримы, потому $\{x \in X \mid f(x) = c\}$ измеримо. В обратную сторону неверно, например, рассмотрим множество Витали на отрезке $[0, 1]$. Так как множество Витали неизмеримо, то его мощность не может быть счётной, а занчит она континум. Тогда существует биекция $f : V \to \mathbb{R}$. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c\} = \{a \in [0, 1]\}$ - очевидно измеримо, однако полный прообраз очевидно неизмерим.

11 3.3

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2}(x + c(x))$ на $(0, 1)$, где $c(x)$ - канторова лестница, такая функция непрерывна и монотонна, а значит измерима. Обозначим множество Кантора как K. Тогда $\mu(f(K)) = \frac{1}{2}$, так как $\mu(f((0, 1) \setminus f(K))) = \frac{1}{2}$, ведь $\mu(\frac{1}{2}c((0, 1) \setminus f(K))) = 0$, так как является счётным, а $\mu(\frac{1}{2}id((0, 1) \setminus f(K))) = \frac{1}{2}$. Тогда можно найти неизмеримое множество $X \subset f(K)$. Прообраз $f^{-1}(X) = A$ - измерим, так как является подмножеством множества Кантора с нулевой мерой. Тогда взяв в качестве измеримой функции $g = f^{-1}(x)$ и измеримово множества A получим, что $g^{-1}(A) = X$ - неизмеримо.

$\forall A\, \mu(A) > 0\, \forall \delta > 0\, \forall \gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ существует $(a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2})$ такой что

$$\mu(A \cap (a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2})) > \gamma\delta$$