Практика 9.

Шахматов Андрей, Б02-304

1 апреля 2024 г.

Содержание

1 1.1

Если $x \in A \triangle C$, то он принадлежит либо в $A \setminus C$, либо в $C \setminus A$. Тогда без ограничения общности $x \in A$ и $x \notin C$. Тогда если $x \in B$, то он принадлежит $B \triangle C \implies x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, иначе $x \in (A \triangle B)$.

2 1.2

Так как мера множества равна нулю, то существует покрытие элементарными $X \in A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, такое, что:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \varepsilon$$

Возьмём множество A_1:

$$\mu^*(X \triangle A_1) \leq \mu(A_1 \triangle A) + \mu(A \triangle X) < 2\varepsilon$$

3 1.3

Если мера Лебега равна 0, то его внешняя мера Лебега тоже равна 0, тогда по субаддитивности верхней меры лебега:

$$\mu^*(X_1 \subset X) \leq \mu^*(X) = 0$$

Тогда по предыдущей задаче X_1 - измеримо.

4 1.4

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B) = 0$$

Тогда $\mu(A) = \mu(B)$. А дальше как...

5 2.2

Построим такое множество, разделим отрезок на 10 частей и выбросим из него 3 часть, тогда в полученном множестве F_1 не будет чисел с 4 в первом разряде. Далее из каждой из 9 оставшихся частей проведём аналогичную операцию - в полученном множестве F_2 не будет чисел с 4 в первом и втором разряде. Тогда множество:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

не будет иметь 4 в своей десятичной записи. Такое множество измеримо по Лебегу, так как является пересечением измеримых множеств. При этом мера $\mu F_n = \frac{9}{10}\mu F_{n-1}$, тогда $\mu F_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n \to 0, n \to \infty$, тогда из непрерывности меры Лебега $\mu F = 0$.