

Матан первая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

24 февраля 2024 г.

Содержание

1	T1	2
2	T2	4
3	T3	5
4	T5	5
5	T6	5
6	2.39	6
7	T10	6
8	T11	6
9	T12	7
10	T14	8
11	T15	9
12	T16	9
13	T17	9
14	T18	10
15	T19	10
16	T20	10
17	T21	11

1 T1

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Тогда область определения $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0)\}$

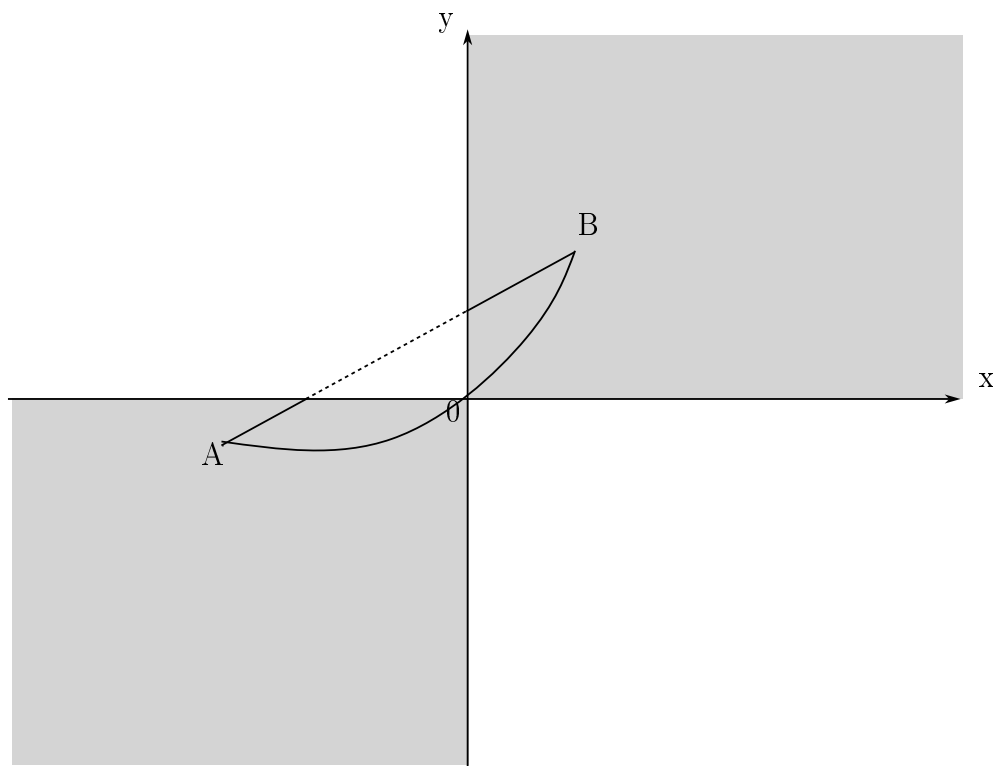


Рис. 1: Область определения функции

Область определения будет замкнутым множеством, так как совпадает со своим замыканием. Из рисунка 1 видно, что множество не является выпуклым, однако является линейно связным, ведь любые 2 точки можно соединить кривой проходящей через точку $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{1}{x^4 + y^4 - 1}$$

Область определения данной функции $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 x^4 + y^4 \neq 1\}$

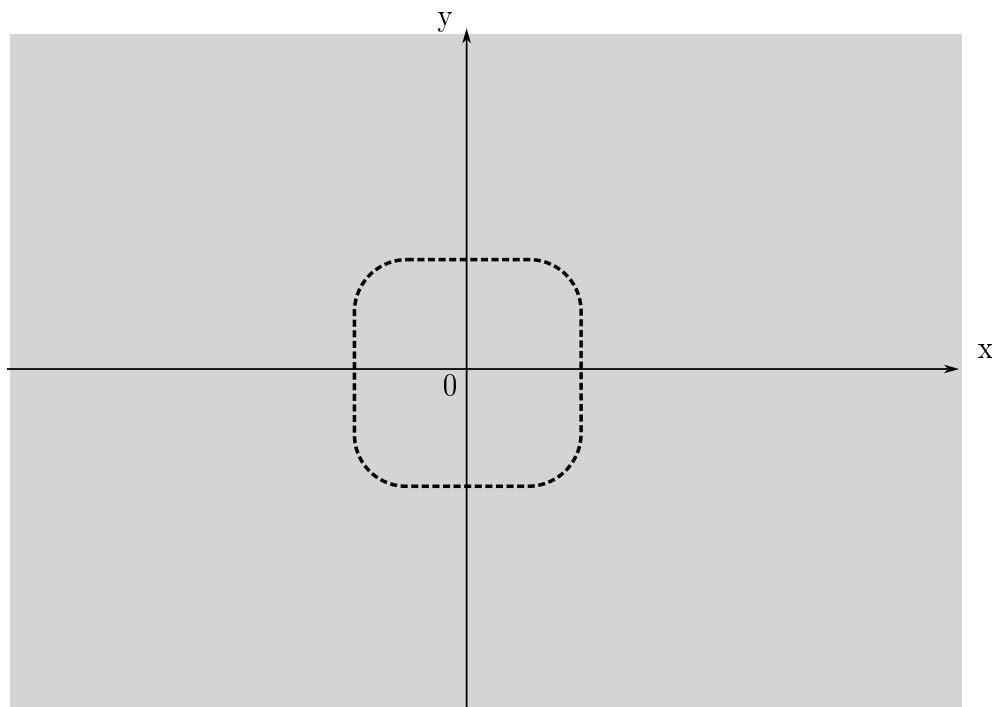


Рис. 2: Область определения функции

Областью определения является всё пространство кроме кривой $x^4 + y^4 = 1$. Так как такая кривая является замкнутой, то её дополнение открыто, а значит область определения открыта. Также область определения не является выпуклой, связной или линейно связной, так как разбивается кривой на два открытых непересекающихся множества.

$$f(x, y) = \ln(1 - 2x - x^2 - y^2)$$

Тогда область определения $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 - 2x\}$. Решим полученное неравенство $x^2 + 2x + 1 + y^2 < 2$, что эквивалентно $(x + 1)^2 + y^2 < \sqrt{2}^2$, что соответствует открытому шару радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(-1, 0)$.

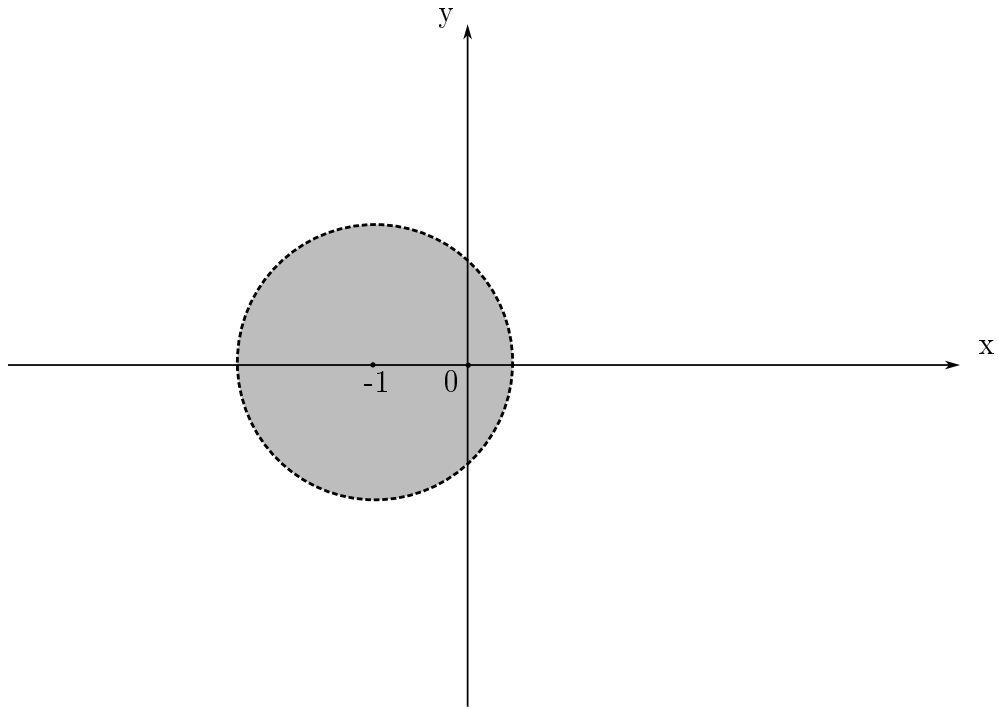


Рис. 3: Область определения функции

Так как область определения - открытый шар, то она открыта. Также область определения связна, линейно связна и выпукла.

2 Т2

$$M = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Данное множество является образом непрерывной кривой, потому оно линейно связно (любые две точки можно соединить данной кривой), потому M - связно. Данное множество не является открытым, поскольку содержит некоторые свои граничные точки. При этом замыкание множества содержит точку $(0, 0)$, однако сама кривая её не содержит, так как $R = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t > 0$, что означает незамкнутость M .

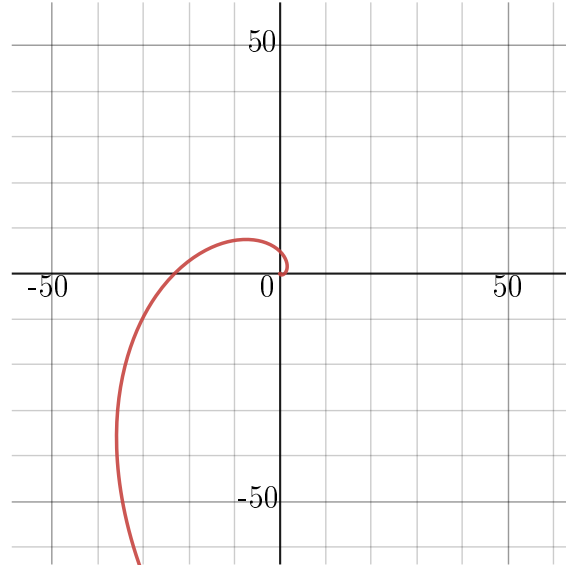


Рис. 4: График кривой

3 Т3

$$M = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$$

Рассмотрим функцию $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, такая функция является непрерывной. Рассмотрим прообраз множества $g^{-1}(Q)$, $Q = (0, +\infty)$, при этом прообраз равен исследуемому множеству M . По топологическому определению непрерывности прообраз открытого Q открыт, а значит M - открыто. Также множество M не является линейно связным, так как все кривые, соединяющие точки с координатами x_4 разных знаков должны проходить через точку с координатой $x_4 = 0$, которая не содержится в множестве M . Тогда так как M - открыто и не линейно связно, то оно не связно.

4 Т5

Нужно доказать, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) = \{0\}$. С одной стороны $\forall k \in \mathbb{N} 0 \in B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \{0\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right)$. С другой стороны рассмотрим множество $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для любого $a \in A$ существует k такое что $\frac{1}{k} < |a|$, а значит $a \notin B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \not\subseteq A \Rightarrow B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \in \{0\}$. Тогда через двойное включение получаем требуемый факт.

5 Т6

Рассмотрим множество значений последовательности Гейне $a_n \rightarrow 0$. Данное множество не будет замкнутым, так как его замыкание будет содержать 0, но ни один из членов последовательности не равен 0. А также каждая точка данного множества является членом последовательности a_n и потому изолирована.

6 2.39

Рассмотрим две последовательности Гейне $x_n \rightarrow x_0$ и $y_k \rightarrow y_0$. Требуется доказать, что при условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_k) = B(y_k)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = A$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(y_k) = A$$

. В силу существования первых двух пределов для достаточно больших n, k выполняется:

$$|f(x_n, y_n) - A| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - B(y_k)| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| < \epsilon$$

Последнее неравенство выполняется в силу фундаментальности последовательности $f(x_n, y_k)_n$. Рассмотрим $|B(y_k) - A| < |B(y_k) - f(x_n, y_k)| + |f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k) - A| < 3\epsilon$. Что означает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(y_k) = A$$

7 T10

Пусть существует $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и g - непрерывна и инъективна. Рассмотрим сужение $g_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_y(x) = g(x, y)$. Тогда g_y также непрерывна, а значит он переводит связные множества в связные, из чего следует $g_y(\mathbb{R}) = Q(y)$, где $Q(y)$ - отрезок, интервал или полуинтервал. Тогда так как g - инъективна выполняется: $\mathbb{R} = \bigsqcup_{y \in \mathbb{R}} Q(y)$. Докажем промежуточную лемму: инъективная и непрерывная функция монотонна. Предположим противное: $\exists x_1 < x_2 < x_3 \mid f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \vee f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$, строгие знаки получены с учётом инъективности. Без ограничения общности рассмотрим первый вариант $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Пусть $f(x_3) > f(x_1)$, тогда по теореме о промежуточных значениях существует $x \in (x_1, x_2) \mid f(x) = f(x_3)$, тогда так как $x < x_3 \Rightarrow x \neq x_3$, но $f(x) = f(x_3)$ - противоречие с инъективностью. Тогда оказывается, что каждая из g_y - монотонна. Так как функция g_y монотонна то по теореме об обратной функции обратная f^{-1} - непрерывна, а значит f переводит открытые в открытые. А значит все множества $Q(y)$ - интервалы. Тогда так как из покрытия открытого множества интервалами можно выбрать счётное подпокрытие $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Q(y_n)$. Но тогда мы получили дизъюнктное разбиение действительной прямой непустыми интервалами - противоречие со связностью.

8 T11

Построим кривую Пеано. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и квадрат $[0, 1]^2$. Будем итеративно строить разбиения: на первом шаге разобьём отрезок на 4 равных отрезка, а квадрат на 4 равных квадрата, на втором разобьём квадрат на 16 квадратов и отрезок на 16 отрезков. Согласно Рис. 5 сопоставим отрезкам соответствующие квадраты.

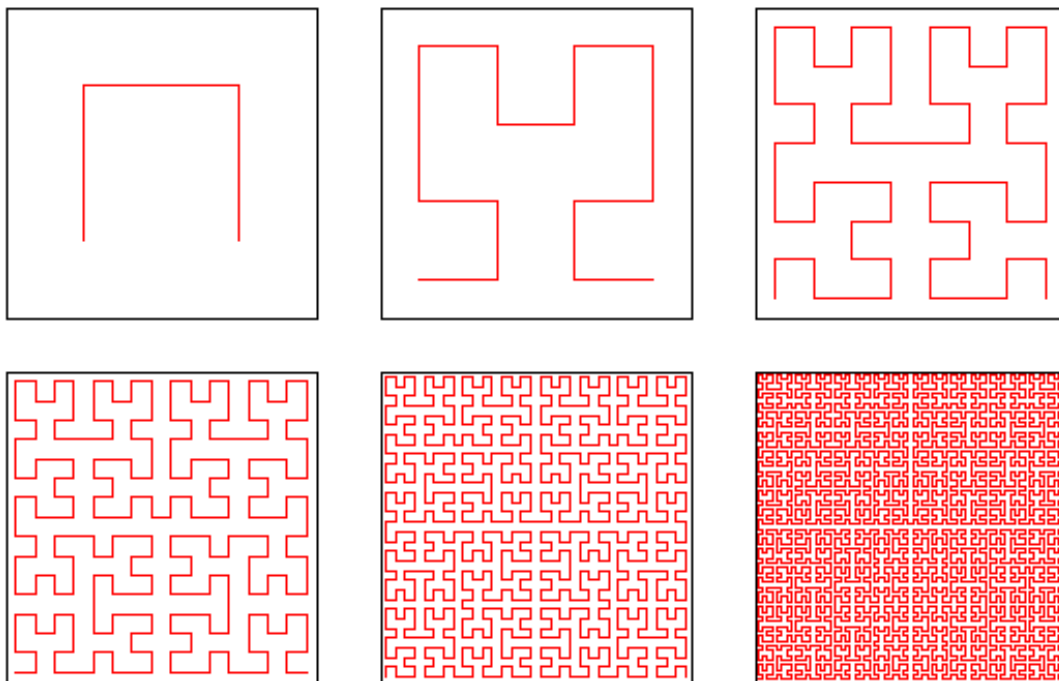


Рис. 5: Обходы для квадратов 1 - 6 уровня.

Выберем точку из отрезка. Если точка не принадлежит 2 отрезкам никакого уровня, для каждого уровня разбиения отрезка получим соответствие отрезка, к которому принадлежит точка и квадрата. Тогда получаем что каждой точке соответствует последовательность вложенных стягивающихся квадратов. Их общая точка и будет образом точки отрезка. В случае если на каком-то шаге точка из отрезка принадлежит 2 подотрезкам, они обязательно будут связаны к квадратами с общей стороной (из построения обхода), тогда будем рассматривать прямоугольники, образованные данными квадратами, они также стягиваются и точка их пересечения - образ точки отрезка. Повторяя аналогичные рассуждения в обратном порядке получим, что исследуемое отображение сюръективно. Докажем непрерывность отображения. Для точки выберем квадрат, полностью лежащий в заданной ϵ окрестности. рассмотрим отрезок, соответствующий данному квадрату. Все точки из этого отрезка будут лежать в этом квадрате, так как близким отрезкам соответствуют близкие квадраты (обход такой).

Теперь пусть такое отображение называется $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$, тогда применяя к функции гомеоморфизм арктангенса слева и по координатный тангенс слева получим непрерывное отображение из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

9 T12

(б)

$$\begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{x^2 + y^2}\right\}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Найдём частные производные:

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\{-\frac{1}{x^2}\}}{x} = 0$$

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp\{-\frac{1}{x^2}\}}{y} y = 0$$

Проверим дифференцируемость функции:

$$\frac{1}{\rho} \left| \exp\left\{-\frac{1}{h^2 + h^2}\right\} \right| = \frac{1}{\rho} \left| \exp\left\{-\frac{1}{\rho^2}\right\} \right| \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$$

(в)

$$f(x, y) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y})$$

Частные производные равны нулю:

$$\left| \frac{1}{\rho} \ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y}) \right| = \left| \frac{1}{\rho} \ln(1 + \rho \sqrt[3]{\cos^2 \phi \sin \phi}) \right|$$

Предел такого выражения зависит от направления, например при $\phi = 0$ предел равен 0, а при других углах 1. Тогда разность приращения и дифференциала не равна $o(\rho)$, что недифференцируемость функции.

10 T14

$$f(x, y, z) = (1 + x)^\alpha (1 + y)^\beta (1 + z)^\gamma$$

$$\ln f(x, y, z) = \alpha \ln(1 + x) + \beta \ln(1 + y) + \ln(1 + z)^\gamma$$

$$d \ln f(x, y, z) = \frac{df(x, y, z)}{f(x, y, z)} = \frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1 + z^\gamma}$$

$$df(0, 0, 0) = \alpha dx + \beta dy$$

$$d^2 f(x, y, z) = d(f(x, y, z) \cdot d \ln f(x, y, z)) = df(x, y, z) \otimes d \ln f(x, y, z) + f(x, y, z) \cdot d^2 \ln f(x, y, z)$$

Первое слагаемое:

$$df(0, 0, 0) \otimes d \ln f(0, 0, 0) = (\alpha dx + \beta dy)^2$$

Второе слагаемое:

$$d^2 \ln f(x, y, z) = -\frac{\alpha dx^2}{(1 + x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1 + y)^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)z^{\gamma-2} - \gamma z^{2\gamma-2}}{(1 + z^\gamma)^2}$$

Тогда второй дифференциал в нуле равен:

$$d^2 f(0, 0, 0) = (\alpha dx + \beta dy)^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2 = (\alpha^2 - \alpha)dx^2 + (\alpha^2 - \alpha^2)dy^2 + 2\alpha\beta dx \otimes dy$$

11 T15

(a)

$$ef = e^{x-y+f}$$

$$edf = (dx - dy + df)ef \implies df = \frac{f}{1-f}(dx - dy)$$

$$d^2f = df \otimes (dx - dy + df) + f d^2f + df^2$$

$$d^2f = \frac{1}{1-f}(2df^2 + df \otimes dx - df \otimes dy)$$

б)

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0, f(1, 1) = 2$$

$$3f^2df - 3yfdx - 3xfty - 3xydf = 0 \implies df = \frac{dx + dy}{f^2 - xy}$$

Значение $df(1, 1) = \frac{dx+dy}{3}$

$$d^2f = d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) \otimes (dx + dy)$$

$$d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) = -\frac{2fdf - ydx - xdy}{(f^2 - xy)^2} = -\frac{4df - dx - dy}{9}$$

$$d^2f(1, 1) = (dx + dy) \otimes -\frac{\frac{4}{3}dx + \frac{4}{3}dy - dx - dy}{9} = \frac{1}{27}(dx + dy)^2$$

Тогда частные производные одинаковы и равны: $\frac{1}{27}$.

12 T16

$$f(x, y, z) = \ln x + y + z = \ln g$$

$$d^n f(x, y, z) = \partial_{g^n} f \cdot dg^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \cdot (dx + dy + dz)^n$$

То есть все частные производные равны между собой и равны: $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n}$.

13 T17

а) Нужно доделать))).

$$f(x, y) = (1+x)^y = e^{y \ln(1+x)}$$

$$df = (1+x)^y(dy \ln(1+x) + \frac{ydx}{1+x})$$

Тогда $df(0, 0) = 0$.

$$d^2f = df \otimes (dy \ln(1+x) + \frac{ydx}{1+x}) + f(x, y)(dy \otimes \frac{dx}{1+x} + dx \otimes \frac{dy(1+x) - ydx}{(1+x)^2})$$

Тогда $d^2f(0, 0) = 2dy \otimes dx$

$$f(h) = 1 + h^1 h^2 + o(||h||^2)$$

14 T18

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$$

15 T19

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha n} n^{\beta}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\alpha n} n^{\beta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha} (n^{\frac{1}{n}})^{\beta} = e^{\alpha}$$

При $\alpha > 0$ ряд расходится, при $\alpha < 0$ ряд сходится. Рассмотрим случай $\alpha = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{\beta}$$

Но так как экспонента растёт быстрее степени, то не выполняется необходимое условие сходимости, а значит ряд расходится.

16 T20

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится абсолютно, то и исходный ряд сходится абсолютно.

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n! 3^n}$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Так как $q < 1$ то исходный ряд сходится абсолютно.

г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+6} \right)^{n^2} = \frac{1}{e} < 1$$

Ряд сходится.

е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Сделать)))

ж)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$$

По признаку Дирихле: $(-1)^n$ - ограничена. А для достаточно больших n последовательность $\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$ монотонна и стремится к 0. Что означает, что ряд сходится. Теперь рассмотрим модуль последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\cos 4x}{\sqrt{n}}$$

Один из подрядов расходится а второй сходится по тригонометрическому признаку, потому общий ряд тоже расходится.

з)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\sin^3 n}{6n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$$

Подсумма с $O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ сходится абсолютно, подсумма $\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ сходится по тригонометрическому признаку.

$$\frac{\sin^3 n}{6n} = \frac{1}{24n} (3 \sin x - \sin 3x)$$

Оба ряда сходятся по тригонометрическому признаку. А значит исходный ряд сходится.

17 T21

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Последовательность из $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ сходится абсолютно. Тогда рассмотрим первые 2 члена суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^{\alpha-1} - 1} \right] \right)$$

При $\alpha = 1$ сумма равна 0 и ряд сходится. при остальных α сумма расходится.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \ln^\alpha n}$$

По тригонометрическому признаку Блин мне надоело, потом сделаю...