

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

# Колебания в электрических цепях

Автор:  
Шахматов Андрей Юрьевич  
Б02-304

Долгопрудный 2024

## Аннотация

Исследовано изменение периода колебаний колебательного RLC контура от его ёмкости. Исследовано изменение добротности контура при изменении его сопротивления. Изучен вид затухающих колебаний на фазовой диаграмме. Рассмотрен процесс установления колебаний в контуре.

## Введение

Цель работы заключается в исследовании характеристик колебательного контура, состоящего из катушки индуктивности, конденсатора и сопротивления.

## Методика

### Уравнение колебаний в последовательном контуре

Запишем равенство ЭДС в контуре относительно заряда:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t), \quad (1)$$

где  $L$  — индуктивность катушки,  $R$  — сопротивление резистора,  $C$  — ёмкость конденсатора. Поделим на  $L$  и введём новые обозначения:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon(t)}{L},$$

где  $\gamma = \frac{R}{2L}$  — коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  — собственная частота контура. Решение такого уравнения представляется в виде суммы частного решения общего решения уравнения:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Это обыкновенное квадратное уравнение имеет. Запишем его дискриминант:

$$\frac{D}{4} = \gamma^2 - \omega^2$$

Общее решение имеет вид  $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$  Тогда возможны 3 случая:  $\gamma > \omega$ ,  $\gamma = \omega$ ,  $\gamma < \omega$ . В первом случае дискриминант положителен, во втором случае уравнение имеет два совпадающих решения, в третьем случае уравнение имеет два комплексных решения. Можно ввести дополнительную величину

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} > R > 0, \quad (2)$$

называемая волновым сопротивлением контура. Тогда общее решение для первого и третьего случая имеет вид:

$$q = Ae^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + Be^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}. \quad (3)$$

В первом случае уравнение останется в таком виде, тогда заряд будет экспоненциально уменьшаться до нуля, колебаний не произойдет. Во втором случае комплексные экспоненты преобразуются в синусы и косинусы по формуле Эйлера (при этом комплексные части сократятся), тогда решение можно переписать в виде:

$$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \varphi_0) = q_0 e^{-\gamma t} \cos(w_1 t + \varphi_0). \quad (4)$$

Такой режим представляет затухающие колебания. Во втором же случае решение представляет собой

$$q = Ate^{\gamma t} + Be^{\gamma t}. \quad (5)$$

Такой режим также представляет экспоненциально затухающее аperiodическое поведение. После этого достаточно найти частное решение исходного уравнения и сложить с общим. Аналогичное уравнение может быть получено для  $U$  на конденсаторе делением полученного уравнения на  $C$ .

## Установление колебаний

Рассмотрим внешнее ЭДС изменяющееся по закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t.$$

Согласно предыдущему разделу общее решение представляется в виде:

$$U = U_0 e^{-\gamma t} \cos(w_1 t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + \psi).$$

Примем в качестве начальных условий  $U = 0$ ,  $\dot{U} = 0$  и преобразуем уравнение:

$$U = A (\sin(\omega t + \psi) - e^{-\gamma t} \sin(w_1 t + \psi))$$

В случае сильного отличия  $w_1$  от  $\omega$  будут наблюдаться биения, однако при небольшом отличии и высокой добротности контура уравнение установления колебаний будет иметь вид:

$$U = Q\varepsilon_0 (1 - e^{-\gamma t}) \sin \omega_0 t, \quad (6)$$

где  $Q$  - добротность контура.

## Описание установки

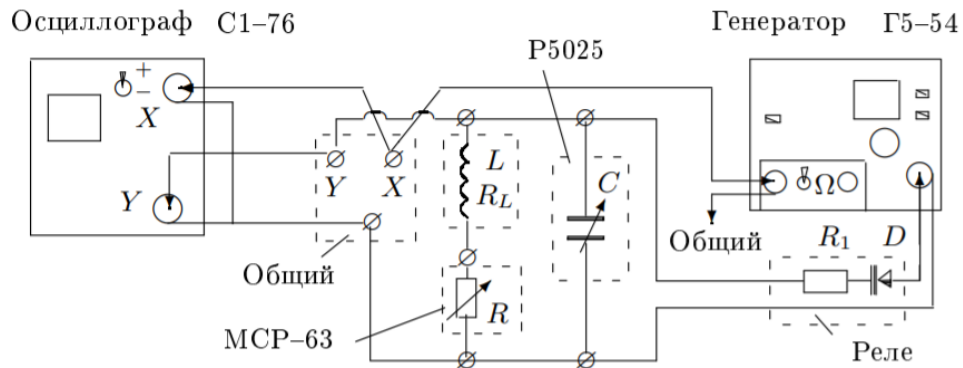


Рис. 1: Схема установки

На рисунке приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность  $L$  и переменные ёмкость  $C$  и сопротивление  $R$ . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит тиристор  $D$  и ограничительный резистор  $R_1$ . Импульсы заряжают конденсатор  $C$ . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ( $\approx 1$  МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

## Результаты и их обсуждение

При нулевой ёмкости на конденсаторе измерен период затухающих колебаний. По полученным данным найдена ёмкость контура, которая составила  $\Delta C \approx 1$  нФ. Далее катушке выставлена индуктивность  $L = 0,1$  Гн. Для первого опыта выставлено сопротивление  $R = 410$  Ом. Измерена зависимость периода колебаний от ёмкости конденсатора (Таблица 1).

$C$ , мкФ	$T$ , мкс
0	65
0,001	91
0,002	111
0,003	127
0,004	142
0,005	155
0,006	168
0,007	179
0,008	190
0,009	200

Таблица 1: Данные измерения зависимости периода затухающих колебаний  $T$  от ёмкости конденсатора  $C$ .

По полученным данным построен график зависимости периода колебаний от ёмкости конденсатора (Рис. 2). На основании теоретической зависимости  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  построена сглаживающая кривая. Видно, что кривая не выходит из точки  $(0, 0)$ , а сдвинута на ёмкость контура  $\Delta C$ .

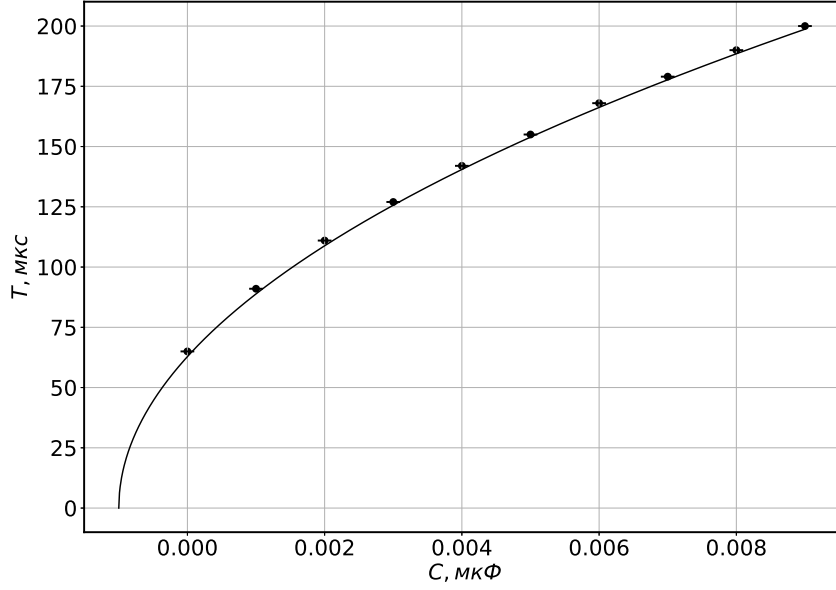


Рис. 2: График зависимости периода колебаний контура  $T$  от ёмкости конденсатора  $C$ .

Значения индуктивности катушки  $L$  и ёмкости конденсатора  $C$  установлены на 0,1 Гн и 5 + 1 мкФ соответственно, критическое сопротивление контура при таких параметрах можно рассчитать как  $R_{кр} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}} = 8,1 \pm 0,1$  кОм. Измерены значения амплитуд затухающих колебаний в нескольких точках и на основе формулы

$$\theta = \frac{1}{k} \ln \frac{U_n}{U_{n+k}}$$

рассчитаны декременты затухания и добротность контура (Таблица 2).

k	$R$ , Ом	$U_1$ , В	$U_2$ , В	$\theta$	$Q$
4	410	2,22	0,54	0,35	8,89
4	810	2,59	0,17	0,68	4,61
3	1215	2,09	0,09	1,05	3,00
2	1620	1,7	0,11	1,37	2,29
2	2025	1,38	0,06	1,57	2,00
1	2430	1,12	0,16	1,95	1,61

Таблица 2: Таблица зависимости характеристик колебательного контура от сопротивления резистора.  $\theta$  — логарифмический декремент затухания,  $Q$  — добротность

Согласно теории добротность контура может быть выражена как

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R_{кр}}{R}\right)^2 - 1}.$$

Построена линеаризирующая зависимость  $Q^2 \left( \frac{1}{R^2} \right)$  (Рис. 3) по которой найдено критическое сопротивление контура  $R_{кр} = 7,3 \pm 0,9$  кОм. Полученное значение совпало с рассчитанным теоретически с точность до погрешности.

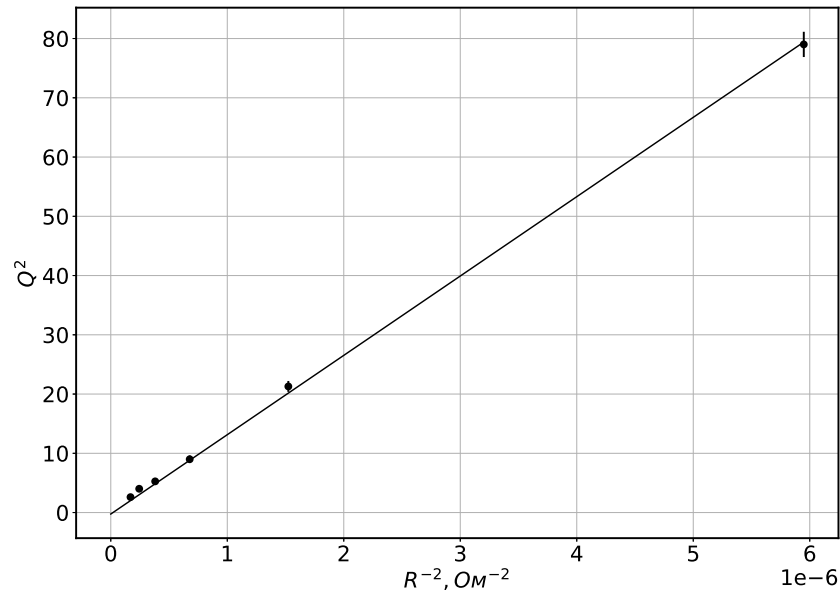


Рис. 3: График линеаризованной зависимости добротности контура  $Q^2$  от сопротивления контура  $R^{-2}$ .

Исследован процесс установления колебаний в контуре. Установлено, что при частоте источника, близкой к собственной частоте контура амплитуда колебаний монотонно возрастает (Рис. 4). В то время как при частотах, далёких от собственной наблюдаются биения (Рис. 5). Такое же поведение предсказывалось и теорией.

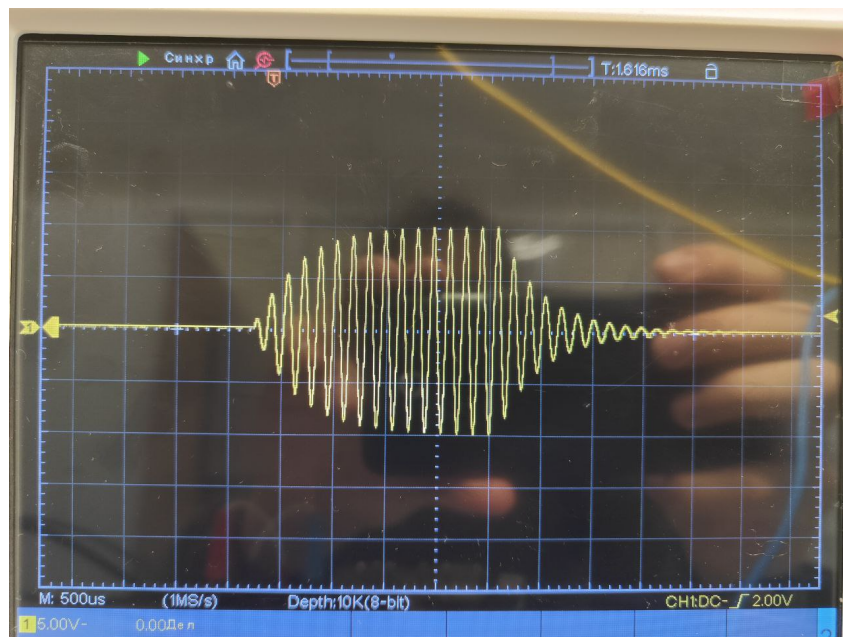


Рис. 4: График установления колебаний при частоте источника, близкой к собственной частоте контура.

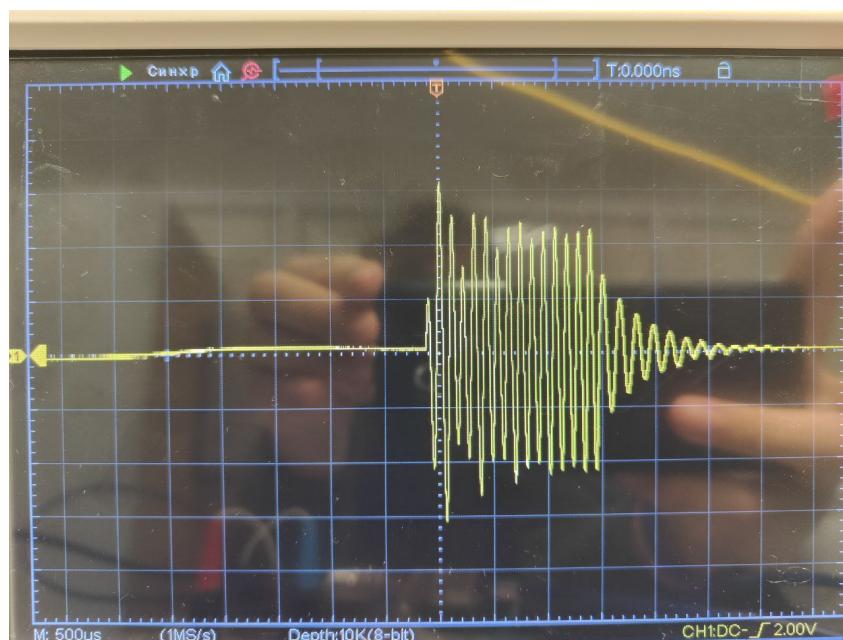


Рис. 5: График установления колебаний при частоте источника, далёкой от собственной частоты контура.

## Выводы

Измерена зависимость свободных колебаний контура в зависимости от его ёмкости. Полученная зависимость полностью совпала с теоретически предсказанной. Получена зависимость добротности

сти контура от его сопротивления. Несколькими способами определено критическое сопротивление контура. Рассмотрен процесс установления колебаний в контуре при различных частотах. Установлено, что при частотах, близких к собственной частоте контура наблюдается монотонно-возрастающая зависимость амплитуды колебаний от частоты, тогда как при частотах источника, сильно отличающихся от собственной частоты, наблюдаются биения.

## Использованная литература

### Список литературы

- [1] Лабораторный практикум по общей физике, Том 2, под редакцией А. Д. Гладуна