1. T1. 1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k} \rightarrow \delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$$g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij} \quad \Bigg\} \quad \boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$$

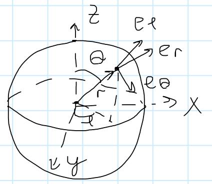
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

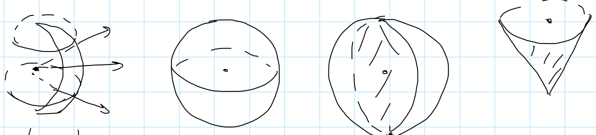
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

T2.



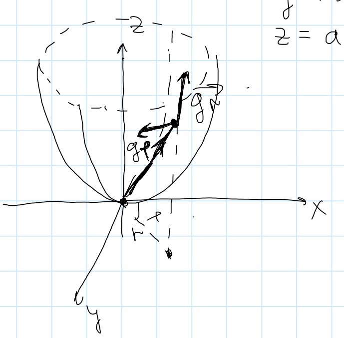
$$\vec R = x\vec i + y\vec j + z\vec k = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec i + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec j + r\cos\theta\,\vec k$$

$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



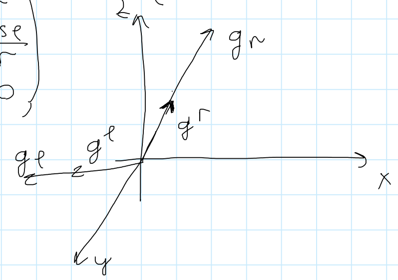
T3. $z = a(x^2+y^2) \Rightarrow$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = ar^2$ $\Rightarrow$

$$M_{r\varphi} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_r & g_\varphi \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$



$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$



T4*. т.к. ковар произв явл тензором, то её свёртка не изм при смене С.К.

Найдём $a^i_{;i}$ в ДСК, вектор $a = (x, y, z)$, а $\Gamma_{ijk} = 0$, тогда

$$a^i_{;i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow \boxed{a^i_{;i} = 3}$$

2.

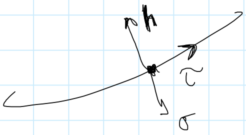
1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \mathrm{const}$.

$\vec{w} \parallel \vec{r}$ если $0 = w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot\varphi = const \overset{exp}{\Rightarrow}$

$\overset{exp}{\Rightarrow} r^2\dot\varphi = const$

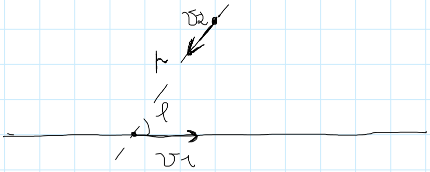
1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

$\vec w = \dot v\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$, т.к. $\begin{cases}\vec w\perp\vec v\\ \vec v\parallel\vec\tau\end{cases} \Rightarrow \dot v = 0$, $\quad \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$

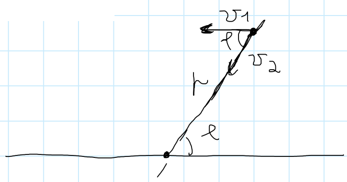


$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec n\right| = |a(\vec v\times\vec r)| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a||\vec v\times\vec r| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a||\vec v\times\vec r|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



в С.О.уб.

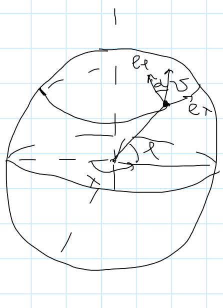


$\begin{cases}\dot r = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi)\\ r\dot\varphi = v_\varphi = v_1\sin\varphi\end{cases} \quad -\frac{v_2+v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{tg\,\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = r_0\, e^{-\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$

Т.5.*



$\begin{cases}v_r = \dot r = 0\\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda = v\sin\alpha\\ v_\varphi = r\dot\varphi = v\cos\alpha\end{cases}$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda-\lambda_0}{tg\,\alpha} = \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right) e^{ctg\,\alpha(\lambda-\lambda_0)}$ //

2)

T6*. $v_i\dot v^i - v^i\dot v_i = v_i\dot v^i - g^{ik} v_k \frac{d}{dt}\left(g_{ij} v^j\right) =$

$= v_i\dot v^i - g^{ik} v_k \dot v^j g_{ij} - g^{ik} v_k v^j \dot g_{ij} = \left\{ 0 = (g^{ik} g_{ij})^{\cdot} = \dot g^{ik} g_{ij} + g^{ik} \dot g_{ij} \right\} =$

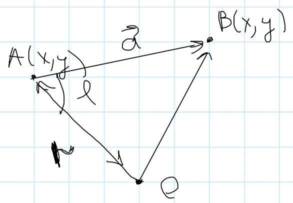
$= v_i\dot v^i - v_k \dot v^j \delta^k_j + \dot g^{ik} g_{ij} v^j v_k = \underline{v_i\dot v^i} - \underline{v_k\dot v^k} + \dot g^{ik} v_i v_k =$

$= (\dot g^i, g^k) v_i v_k = (\dot g^i, g^k v_k) v_i + (\dot g^i v_i, g^k) v_k = (v, v_i \dot g^i) + (v, v_k \dot g^k) =$

$= (v, 2\cdot v_i \dot g^i) = 2(v, v_i \dot g^i)$

3.

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.



$\vec A = \vec\omega \times \vec{OA} \Rightarrow A = \omega\cdot OA$

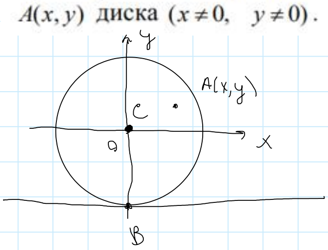
$\vec B = \vec\omega \times (\vec{OA} + \vec a) = \vec\omega \times \vec{OA} + \vec\omega \times \vec a \Rightarrow B = \omega\cdot|OA + a|$

$\lambda = \frac{|OA+a|}{OA} \Rightarrow \lambda^2 OA^2 = OA^2 + a^2 - 2a\cdot OA\cos\varphi$

$(1-\lambda^2) r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 = 0$

$r = \frac{+a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi - a^2(1-\lambda^2)}}{1-\lambda^2} = a\cdot\frac{\pm\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi}{1-\lambda^2}$ – видимо окружность Аполлония.

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x,y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.



1) $\omega = \frac{v_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{w_c}{R}$

2) $\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_c\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v_c/R\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_c + \frac{v_c y}{R}\\ -v_c x/R\\ 0\end{pmatrix} = v_c\begin{pmatrix}1+\frac{y}{R}\\ -x/R\, v_c\\ 0\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_c\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-w_c/R\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v_c/R\end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}0\\0\\-v_c/R\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix}w_c\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{w_c}{R}y\\ -\frac{w_c}{R}x\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v_c/R\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{v_c y}{R}\\ -\frac{v_c x}{R}\\ 0\end{pmatrix} =$

$= w_c\begin{pmatrix}1+\frac{y}{R}\\ -\frac{w_c x}{R}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{v_c^2}{R^2}x\\ -\frac{v_c^2}{R^2}y\\ 0\end{pmatrix}$

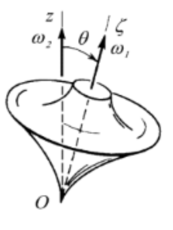
4.4. Юла вращается вокруг своей

К задаче 4.4

39

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2, образуя с ней постоянный угол



1) $\vec\Omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$

$|\Omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta}$

2) Ось поворот со ск. ω_2 при этом

$|\Omega| = const \Rightarrow$

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.

К задаче 4.4

2) Ось поворот со ск. w_2 при этом

$|\Omega| = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\overline{w_\Omega}} = [w_2, \Omega] = [w_2, w_1] + \underbrace{[w_2, w_2]}_{0} =$

$= [w_2, w_1]$ //

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$a = [\varepsilon, r] + [w, [w, r]]$ 1) $a_\varepsilon = [\varepsilon, r] = \frac{(a, v)}{v^2} v = \frac{(a, v)}{v^2} [w, r]$

$v = [w, r]$

$[r, \varepsilon - \frac{(a, v)}{v^2} w] = 0$ т.е $r \parallel$ в $\in \langle \varepsilon, w \rangle$

2) $r = \alpha w + \beta \varepsilon \Rightarrow v = \beta [w, \varepsilon]$

$a_\varepsilon = \alpha [\varepsilon, w]$

$a = \alpha [\varepsilon, w] + [w, \beta [w, \varepsilon]]$

Тогда $\frac{(a, v)}{v^2} v = -\frac{\alpha \beta [w, \varepsilon]^2}{\beta^2 [w, \varepsilon]^2} \cdot \beta [w, \varepsilon] + \left(\frac{\beta [w, \varepsilon]}{\beta^2 [w, \varepsilon]^2}, \beta \underbrace{[w, \overset{w(w,\varepsilon) - \varepsilon w^2}{[w, \varepsilon]}]}_{0} \right) =$

$= -\alpha [w, \varepsilon] = \alpha [\varepsilon, w] = a_\varepsilon$ ЧТД

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

A – ортогональная матрица, из линейной алгебры у неё есть $\lambda = 1$ – с.зн. и с.в-тор v.

Тогда поворачивая отн. v (ось) получим переход от $Oxyz \to OXYZ$.

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника ($\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$).


К задаче 3.35

1) $\overline{B} \parallel \overline{w}$

2) $[w, \tau] = \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{n} |v|$

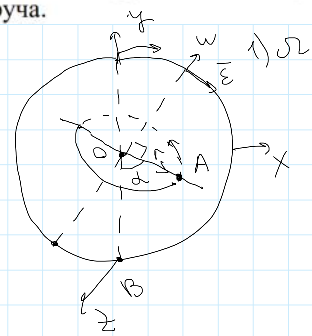
$|w| = \frac{|v|}{\rho} = \frac{v}{\rho}$

3) $\overline{\varepsilon} \parallel \overline{w} \parallel B$; $\varepsilon = \dot{w} = \frac{\dot{v}\rho - \dot{\rho} v}{\rho^2}$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.

y v $|v|$ $= \begin{pmatrix} w\cos\alpha \\ w\sin\alpha \end{pmatrix}$

соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



1) $\Omega = \frac{v}{R}$

2) $v_O = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \omega = \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$r_A = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_A = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} //$$

3) $|\omega| = const \Rightarrow \varepsilon = [\Omega, \omega] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{R} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v\omega\sin\alpha}{R} \\ -\frac{v\omega\cos\alpha}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_A = 0 + \underbrace{\begin{pmatrix} v\omega\sin\alpha/R \\ -v\omega\cos\alpha/R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{0} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\sin\alpha \\ \omega^2 r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} //$$