5.7. Камень массы m отпущен без начальной скорости на высоте H над Землей. Пренебрегая силами сопротивления, найти время падения T, по истечении которого камень достигнет высоты h, если сила притяжения меняется с высотой z по закону $\frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$, где γ – гравитационная постоянная, M и R – масса и радиус Земли. В выражении для времени падения перейти к пределу при $R \to \infty$ (случай однородного поля тяжести).

$$-\frac{\gamma m M}{(R+z)^2} = m\ddot z$$

$$\frac{m\dot z^2}{2} - \frac{\gamma m M}{R+z} + C = \gamma m M\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H}\right)$$

$$\dot z^2 = 2\gamma M\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H}\right)$$

$$\dot z^2 = \frac{2\gamma M}{R+H}\cdot\frac{H-z}{R+z}$$

$$\sqrt{\frac{2\gamma M}{R+H}}\,t = \int_0^H \sqrt{\frac{R+z}{H-z}}\,dz = \int_0^H \sqrt{\frac{R+H-z}{z}}\,dz =$$

$$= \sqrt{\frac{R+H-z}{z}}\cdot z\Big|_0^H + \int_0^H z\cdot\frac{\sqrt{z}\,(R+H)}{2z^2\sqrt{R+H-z}}\,dz = H\sqrt{\frac{R}{H}} - (R+H)\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{R}{H}}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

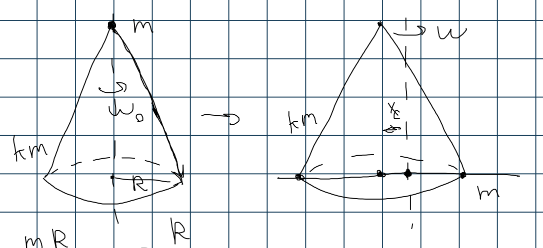
$$(R+H)\int_0^H \frac{dz}{2\sqrt{z}\sqrt{R+H-z}} = \left\{ t = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{R+H-z}{z}}\right),\ dt = -\frac{dz}{2z\sqrt{R+H-z}} \right\} = -(R+H)\int_0^H d\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{R+H}{z}-1}\right)\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{R+H}{2\gamma M}}\left(\sqrt{RH} - (R+H)\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R}{H}} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left\{p = \frac{H}{R}\right\} = \sqrt{\frac{1+p}{2\gamma M R}}\,R\left(\sqrt{p} - (1+p)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

При $R \gg H$, $p \to 0$: $t \approx \sqrt{\frac{R}{2\gamma M}}\left(\sqrt{p} - \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \approx 2\sqrt{p}\sqrt{\frac{R}{2\gamma M}} = \sqrt{\frac{2p^2R}{\gamma M}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ //

$$\lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{p}} = -1$$

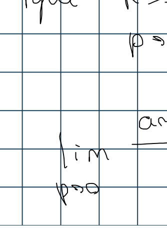
6.13. Прямой круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конусу сообщается угловая скорость ω_0 вокруг его оси симметрии. По его образующей из вершины к основанию опускается материальная точка, масса которой в k раз меньше массы конуса. Чему будет равна угловая скорость конуса, когда точка достигнет основания конуса?



Так как нет $F^{(e)}$, то ц.м. x ат на месте; $v_c = 0$. $x_c = \frac{mR}{m+M} = \frac{R}{1+k}$

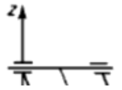
$K_z = const$; $K = J\omega_0 = \left(J + km x_c^2 + m(R - x_c)^2\right)\omega$

$$\omega = \frac{J}{J + \frac{mR^2}{1+k}}\,\omega_0 = \frac{k+1}{k+1+\left(\frac{mR^2}{J}\right)}\,\omega_0 = \left\{J = \frac{3}{10}mR^2\right\} = \frac{(k+1)\omega_0}{k+1+\frac{10}{3}} = \frac{3(k+1)}{3k+13}\,\omega_0$$



К задаче 6.37

6.37. Однородный цилиндр катится по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы T, равной половине веса P цилиндра. Сила T касается цилиндра перпендикулярно его образующей и составляет с горизонтальной плоскостью угол α. Коэффициент трения скольжения равен $f = \frac{1}{3}$. Найти значение угла α^*, при котором возникает скольжение. Найти угловое ускорение цилиндра и ускорение его центра масс для значений угла $\alpha < \alpha^*$



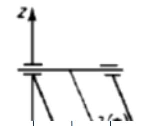
$$\frac{P}{2}\cos\alpha + F = ma$$

$$R\left(\frac{P}{2} - F\right) = J\varepsilon = \frac{mR^2}{2}\varepsilon$$

$$N + \frac{P}{2}\sin\alpha = P$$

$$P - 2F = \frac{P}{2}\cos\alpha + F$$

$$P\left(1 - \frac{\cos\alpha}{2}\right) = 3F = P - \frac{P}{2}\sin\alpha$$



котором возникает скольжение. Найти угловое ускорение цилиндра и ускорение его центра масс для значений угла $\alpha < \alpha^*$ и $\alpha > \alpha^*$.

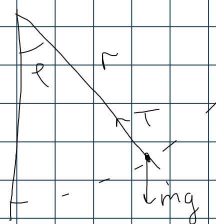
$P\left(1-\frac{\cos\alpha}{2}\right) = 3F = P - \frac{P}{2}\sin\alpha$

$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha^* = \frac{\pi}{4}$

При $\alpha > \alpha^*$: $F = \dfrac{P - \frac{P}{2}\sin\alpha}{3} \Rightarrow ma = \frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{P}{3} - \frac{P}{6}\sin\alpha$

$\alpha < \alpha^*$: $\varepsilon R = a$: $F = \dfrac{P - \frac{P}{2}\cos\alpha}{3} \Rightarrow ma = \frac{P}{2}\cos\alpha + \dfrac{P - \frac{P}{2}\cos\alpha}{3} = \frac{P}{3}\cos\alpha + \frac{P}{3}$

6.39. Как нужно изменять длину $l(t)$ плоского математического маятника, чтобы угол отклонения маятника от вертикали менялся по линейному закону $\varphi(t) = \omega t$, где $\omega = \text{const}$? Найти также нормальную реакцию в точке подвеса. (силу реакции)



$$-T + mg\cos\varphi = (\ddot r - r\dot\varphi^2)m$$
$$-mg\sin\varphi = (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)m$$

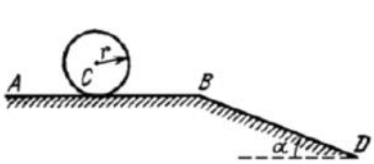
$\dot\varphi = \omega$, $\ddot\varphi = 0$

$$(1)\ -T + mg\cos(\omega t) = (\ddot r - r\omega^2)m$$
$$(2)\ -mg\sin(\omega t) = 2\dot r\omega m$$

(2): $\dot r = -\frac{mg}{2\omega}\sin\omega t \Rightarrow r = l_0 + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t - \frac{g}{2\omega^2} = \underline{l_0 - \frac{g}{2\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$

$\ddot r = -\frac{mg}{2}\cos\omega t \Rightarrow T = mg\cos\omega t - \left(-\frac{mg}{2}\cos\omega t - mr\omega^2\right) =$

$= \underline{\frac{3mg}{2}\cos\omega t + m\omega^2 l_0 - \frac{mg}{2}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$

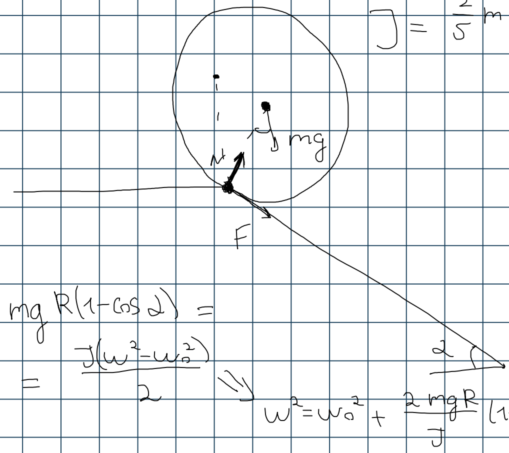


К задаче 7.42

7.42. Шар радиуса r катится без скольжения со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости AB. Достигнув точки B, шар, поворачиваясь вокруг нее, перекатывается на наклонную плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Найти значения угла α, при которых про-

екция силы реакции в угловой точке B на нормаль к траектории центра шара не равна нулю (движение без отрыва).

$J = \frac{2}{5}mR^2$



$mgR(1-\cos\alpha) = \dfrac{J(\omega^2-\omega_0^2)}{2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \dfrac{2mgR}{J}(1-\cos\alpha)$

$m\omega^2 R = mg\cos\alpha - N \Rightarrow$

$\Rightarrow mg\cos\alpha \geq m\omega^2 R = m\omega_0^2 R + \dfrac{2m^2R^2 g(1-\cos\alpha)}{J}$

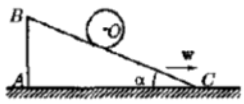
$g\cos\alpha \geq \omega_0^2 R + \dfrac{2mR^2 g(1-\cos\alpha)}{\frac{2}{5}mR^2 + mR^2} =$

$= \omega_0^2 R + \dfrac{10g(1-\cos\alpha)}{7}$

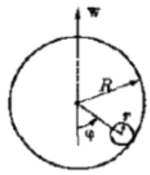
$\frac{17g}{7}\cos\alpha \geq \omega_0^2 R + \frac{10g}{7}$

$$\boxed{\cos\alpha \geq \frac{7\omega_0^2 R}{17g} + \frac{10}{17}}$$

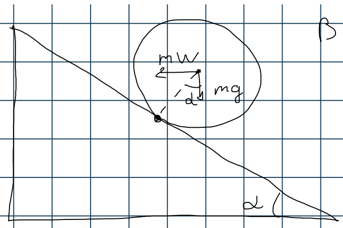
9.8. Клин ABC движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. На наклонную грань BC клина, образующую угол α с горизонтом, помещается с нулевой относительной скоростью однородный цилиндр, который может катиться по этой грани без скольжения. При каком ускорении клина цилиндр будет двигаться вверх?



К задаче 9.8



К задаче 9.9

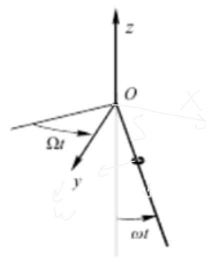


В неисо с w

$mw\cos\alpha \geq mg\sin\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha \leq \frac{w}{g}$

9.25. Тонкий стержень вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oy, проходящей перпендикулярно стержню через его точку O. Ось Oy в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. На стержень насажено колечко, размерами которого можно пренебречь. Составить дифференциальное уравнение движения колечка относительно стержня, определяя его положение расстоянием s от точки O. Коэффициент трения между колечком и стержнем равен f. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение.



К задаче 9.25

$r = \begin{pmatrix} s\sin\omega t \\ 0 \\ -s\cos\omega t \end{pmatrix}$

$w_к \perp w_п$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -\Omega\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s\sin\omega t \\ 0 \\ -s\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s\omega\Omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

1) $w = [\overbrace{\Omega\times\omega}^{\varepsilon}\times r] + [\omega\times[\omega\times r]] + w_п + 2[\omega\times v]$, $|v| = \dot s$, $|w_п| = \ddot s$

2) $\omega = \Omega + \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{([\omega\times[\omega\times r]], r)}{|r|} = \frac{(\omega, r)^2 - r^2\omega^2}{|r|} = +s\Omega^2\cos^2\omega t - s(\omega^2+\Omega^2) = -s\omega^2 - s\Omega^2\sin^2\omega t$

$\frac{1}{s}(2[\omega\times v], r) = \frac{2}{s}(\omega, \underbrace{[v\times r]}_{0}) = 0$

3) $2[\omega\times v] = 2\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \dot s\sin\omega t \\ 0 \\ -\dot s\cos\omega t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\omega\dot s\cos\omega t \\ -\Omega\dot s\sin\omega t \\ -\omega\dot s\sin\omega t \end{pmatrix}$, $w_к \perp r$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} s\sin\omega t \\ 0 \\ -s\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s\omega\cos\omega t \\ -\Omega s\sin\omega t \\ -\omega s\sin\omega t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -s\omega\cos\omega t \\ -\Omega s\sin\omega t \\ -\omega s\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 s\sin\omega t + \Omega^2 s\sin\omega t \\ -s\omega\Omega\cos\omega t \\ s\omega^2\cos\omega t \end{pmatrix}$

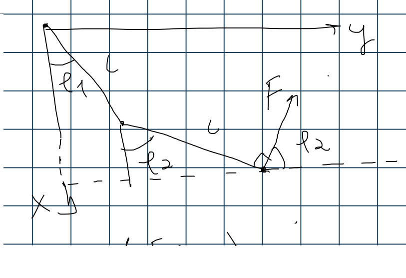
$w_\parallel = \begin{pmatrix} -s\omega^2\sin\omega t - s\Omega^2\sin^3\omega t \\ 0 \\ -s\omega^2\cos\omega t - s\Omega^2\sin^2\omega t\cos\Omega t \end{pmatrix} \Rightarrow w_{п\perp} = \begin{pmatrix} +s\Omega^2\sin\omega t\cos^2\omega t \\ -s\omega\Omega\cos\omega t \\ s\Omega^2\sin^2\omega t\cos\Omega t \end{pmatrix}$

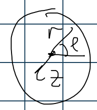
$N^2 = \left(s\Omega^2\sin\omega t\cos^2\omega t - \omega\dot s\cos\omega t - g\sin\omega t\right)^2 m^2 + \left(s\Omega^2\sin^2\omega t\cos\Omega t - \omega\dot s\sin\omega t\right)^2 m^2 +$

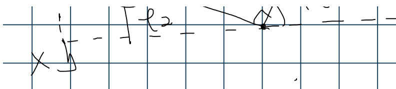
$+ m^2(-2s\omega\Omega\cos\omega t - \Omega\dot s\sin\omega t)^2$

4) $\ddot s - s\omega^2 - s\Omega^2\sin^2\omega t = mg\cos\omega t - fN\,\mathrm{sgn}(\dot s)$ //

7.59. Двойной плоский маятник состоит из двух одинаковых шарнирно соединенных между собой стержней AC и CB



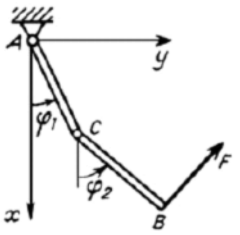




$$F = \begin{pmatrix} -F\sin\varphi_2 \\ F\cos\varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{rot}\,F| = \left|\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right| =$$

$$= \left|-F\sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + F\cos\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| =$$



длины l. Положение системы определяется углами φ_1, φ_2 между неподвижной осью Ax и стержнями. В точке B стержня CB под прямым к нему углом приложена постоянная по величине сила F. Выяснить, является ли сила F потенциальной.

$$\left.\begin{aligned} x &= l(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \\ y &= l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= -l\left(\sin\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) \\ 0 &= \cos\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \cos\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \end{aligned}\right\} - \frac{1}{l} = \left(\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} - \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= \sin\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \\ 1 &= l\left(\cos\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \cos\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \frac{1}{l} = \left(\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1} - \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}$$

Тогда $\mathrm{rot}\,F = \frac{F}{l}\left(\cos\varphi_2 \cdot \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)} - \sin\varphi_2 \cdot \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\right) = \frac{F\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{l\sin(\varphi_1-\varphi_2)}(\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ – не потенциальная.