18.1. Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0;$

$\to \begin{pmatrix}5&-8&3&3\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix}1&0&-1&-5\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&5\\0&2&2&7\end{array}\right)$

$a_1 \begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix}10\\7\\0\\2\end{pmatrix}$

9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0;$

$\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\3&6&9&-1\\1&2&3&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$a_1 \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

19.6. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить

4) $\|A_{239}|\mathbf{c}_{67}\|$; $\to \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\-1&0&-2&1\\-2&2&0&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\-1&1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\end{array}\right)$

$b = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad a \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$

20) $\|A_{511}|\mathbf{c}_{74}\|$; $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\-5&4&63&29&71\\5&24&-7&-1&41\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\5&24&-7&-1&41\\0&28&56&28&112\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\0&14&28&-14&112/2\\0&28&56&28&112\end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\0&1&2&1&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-11&-5&-11\\0&1&2&1&4\end{array}\right)$

$b = \begin{pmatrix}-11\\4\\0\\0\end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix}11\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix}5\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\|A^T_{444}|\mathbf{c}_{167}\|$; $\left(\begin{array}{cccc|c}5&2&3&1&9\\4&1&2&3&-1\\1&1&1&-2&1\\3&4&1&2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-2&1\\4&1&2&3&-1\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{-2}&\cancel{1}\\3&4&1&2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-10&-4\\0&1&-2&8&5\\0&0&-8&35&10\end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{25}{8}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{3}{4}&\frac{5}{2}\\0&0&-1&\frac{35}{8}&\frac{5}{4}\end{array}\right) \Rightarrow b \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix}-25/8\\3/4\\35/8\\1\end{pmatrix}$

18.13. Зная одну фундаментальную матрицу Φ, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

$\Phi' = \Phi A$, где столбцы A – ЛНЗ, т.е. $\det A \neq 0$

18.17. Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

4) $\Phi = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\\1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&x_1\\1&2&x_2\\1&1&x_3\\1&3&x_4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&1&x_4-x_2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-2x_2+x_1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x_3 - x_1 = 0\\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$

19.14. Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

$Ax = b$ пусть $A_{n\times m}$ и строки ЛНЗ, тогда по т. о рангах $\exists$ n ЛНЗ столбцов, тогда в базисе р-аю n с-ма столбцов явл. порождающей. т.е. $\exists x$ т.ч. $Ax = b$.

19.21. Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

$\left.\begin{array}{l} b_1 \quad a_1 \dots a_n \\ b_2 \quad a_1' \dots a_n' \end{array}\right\}$ тогда $b_2 = b_1 + \sum \lambda_i a_i$ тогда решение 2-с-мы $b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

тогда $\forall \mu_i$ $\sum \mu_i a_i + \cancel{b_1} = \cancel{b_1} + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

$\sum (\mu_i - \lambda_i) a_i = \sum \lambda_i' a_i'$, взяв. $\mu_i = \lambda_i$ если $i \neq j$ и $\mu_i \neq \lambda_i$ если $i = j$ получим

$a_j = \sum \lambda_i' a_i'$

аналогично для $\{a_i \to a_i'$ получаем, что обе с-мы лин в-ются через друг друга.

20.22. Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 2) $A_{238}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 3) $A_{249}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 4) $A_{391}\mathbf{x} = \mathbf{o}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ – размерность 1

20.23. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

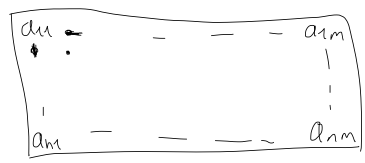
1) $\mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{c}_{83}$; 2) $\mathbf{c}_{31}$, $\mathbf{c}_{30}$; 3) $\mathbf{c}_{30}$, $\mathbf{c}_{29}$;
4) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{196}$; 5) $\mathbf{c}_{197}$; 6) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{198}$, $\mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{c}_{201}$;

4) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T.1*. Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Докажите, что всегда можно, причем единственным образом, расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.



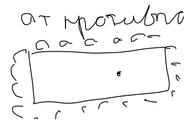
Составим с-му ур-ния из $k = (m-1)(n-1)$ переменных.

$Ax = B$, $A = A_{k\times k}$.

Д-жем, что может сущ. только ед. решение, т.е. $Ax \neq 0$. $\forall x \neq 0$

Д-жем, что может сущ. только ед. решение, т.е. $Ax \neq 0$ $\forall x \neq 0$. Это соотв сис-ме с $a_{11} = a_{\dots} = 0$.

от противного $\exists x_1 \neq 0$ т.ч. $Ax_1 = 0$



выберем $y \in x_1$ т.ч. $y = \max(x_1)$, тогда все клетки рядом с y_{max} тоже равны y_{max} и так далее до стенок. по т-к. на стенках нол. нули, то $y_{max} = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$.

получим, что α. A – ЛНЗ $\Rightarrow$ строки $A \to$ ЛНЗ $\Rightarrow \forall B$ $\exists x$ т.ч. $Ax = B$ ЧТД на степень пол. нули, что $y\,max = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$

Получим, что ст. A – ЛНЗ => строки A – ЛНЗ => $\forall B\ \exists X$ т.ч. $AX = B$ ЧТД

Подпространства и фактор пространства.

21.2. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

1) Если $\exists f(x)$, что $f(-x) = f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ т.е. $\mathbb{K}(x)^+ \cap \mathbb{K}(x)^- = \{0\}$

2) $\forall f(x) \in \mathbb{K}(x)$: $f^+(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

тогда $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$

21.3. 2) Дана матрица A из n строк. Доказать, что n-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпространства решений системы линейных уравнений $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

1) $\dim\langle a_n\rangle = r = \mathrm{rk}\,A$
$\dim\langle\Phi\rangle = n - r$, тогда остается д-ть, что $\langle a_n\rangle \cap \langle\Phi\rangle = \{0\}$ т.ч.
$\dim\langle a_n\rangle \cup \langle\Phi\rangle = r + n - r - \dim\cap = n - \dim\cap = n$ если $\cap = 0$

2) ?

21.6. Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x}$ из n-мерного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathcal{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, а $\mathcal{Q}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 4$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{201}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{197}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{198}$.

$$x = \begin{pmatrix}1\\-7\\5\\-2\end{pmatrix} \quad a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\\7\\2\end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\1&-5&1&1&-7\\1&7&2&1&5\\1&2&2&3&-2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\0&-8&0&0&-8\\0&4&1&0&4\\0&-1&1&2&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&4&1&0&4\\0&1&-1&-2&3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&-2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&-2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Тогда $\mathrm{пр}_P x = -a_1 + a_2 = \begin{pmatrix}2\\-6\\6\\1\end{pmatrix}$

21.7. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 3$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{116}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{145}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{122}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{146}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{147}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \quad a_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \quad b_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \quad b_2\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} \quad b_3\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-3\\0&-2&-3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&4&1\\5&-2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\\0&-22&-6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\end{pmatrix}$$

7) $n = 4$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{200}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{217}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{211}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{218}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{219}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}-1\\8\\-6\\5\end{pmatrix} \quad a_3\begin{pmatrix}0\\10\\-5\\8\end{pmatrix}$$

$$b_1\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix} \quad b_2\begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix} \quad b_3\begin{pmatrix}4\\2\\5\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\-1&8&-6&5\\0&10&-5&8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\\0&10&-5&8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\\\cancel{4}&\cancel{2}&\cancel{5}&\cancel{8}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\2&10&4&-2\\1&-5&-1&6\\3&8&5&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&10&2&-8\\0&-5&-2&3\\0&8&2&-6\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&5&1&-4\\0&0&1&1\\0&4&1&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{-1}\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right) \to \Phi = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

А базисный вектор: $-\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\-6\\7\\-2\end{pmatrix}}}$

21.11. Доказать, что сумма $\mathcal{L}$ двух линейных подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда будет прямой суммой,

когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ Пусть $\forall x \in L$ Тогда р-рим $x = y \in P$ тогда $\exists\, y_1 \in P\ z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$ $\underline{\cancel{\ast}\,y}$ $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$ $\Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$

виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

(=>) Пусть $\forall x \in L$ тогда р-рим $x = y + p$ тогда $\exists\, y_1 \in P\ z_1 \in Q$ т.ч $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$ $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$ т.е. $P \cap Q \neq \{0\}$

(⇐) Пусть L – не пр. сумма. тогда $t \in P \cap Q$, $t \neq 0$, $\langle p_1 \ldots p_n \rangle = P$, $\langle q_1 \ldots q_n \rangle = Q$ – базисы.

$t = \sum \lambda_i p_i = \sum \mu_i q_i \Rightarrow \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = 0$

Р-рим произв $x \in L$: $x = \sum \gamma_i p_i + \sum \rho_i q_i$ но тогда

$x = \sum \gamma_i p_i + \sum \rho_i q_i + \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = \underbrace{\sum (\gamma_i - \lambda_i) p_i}_{\in P} + \underbrace{\sum (\rho_i - \mu_i)}_{\in Q} -$

x распл. не единственно.

21.12. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1) если сумма размерностей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ больше размерности всего пространства, то пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ содержит ненулевой вектор;

2) если размерность суммы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

1) $\dim L \geq \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) > \dim L - \dim(P \cap Q)$

$\dim L - \dim L > -\dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) > 0 \Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$

2) $P \cap Q \subseteq P \subseteq P + Q \Rightarrow$ либо $P = P \cap Q$ либо $P = P + Q$

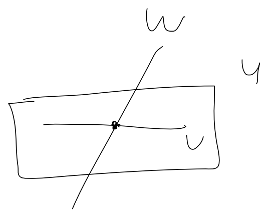
Если $P = P \cap Q$ то $P = P \cap Q \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq Q$

Если $P = P + Q$ то $Q \subseteq P + Q \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P$.

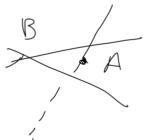
35.13. Пусть U, V, W — подпространства векторного пространства.

а) Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

б) Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.



а) Контр. пример три прямые



$U \cap (V + W) = \{A\}$

$(U \cap V) + (U \cap W) = \varnothing$

б) $U \cap V = V$

$U \cap V + U \cap W = V + U \cap W = \langle V \cup (U \cap W) \rangle = \langle (V \cup U) \cap (V \cup W) \rangle = \langle U \cap (V \cup W) \rangle = U \cap \langle V \cup W \rangle = U \cap (V + W)$

T.2. В условиях задачи 21.7(7) докажите, что пересечение W данных линейных оболочек содержится в подпространстве U, заданном уравнением $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, и дополните базис в W до базиса в U.

Т.3. Пусть $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – пространство квадратных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$, а U, W, W_1 – его подпространства, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Докажите, что W и W_1 – различные прямые дополнения к U в V. Разложите матрицу A_{233} (см. **Б**) двумя способами, исходя из равенств $V = U \oplus W$, $V = U \oplus W_1$.

1) $A \in U$ $\quad A^+ = \dfrac{A + A^T}{2} \in W$, $\quad A^- = \dfrac{A - A^T}{2} \in U$ и $A = A^+ + A^-$

2) $A \in M_n$. $A = A^{\nearrow} + A^{\swarrow} = \underset{\text{Верхтреуг}}{A^{\nearrow} + A^{\swarrow T}} + \underset{\text{кососим}}{A^{\swarrow} - A^{\swarrow T}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\nearrow} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\swarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{\swarrow T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\nearrow} + A^{\swarrow T} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad A^{\swarrow} - A^{\swarrow T} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

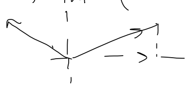
Линейные отображения

23.6. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ — фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ, заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; $\quad$ 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

$\varphi(x_1 + x_2) = x_1 - x_2 - 2(x_1 + x_2, n)\frac{n}{|n|^2} = \left(x_1 - 2(x_1, n)\frac{n}{|n|^2}\right) - \left(x_2 - 2(x_2, n)\frac{n}{|n|^2}\right)$

— наш смысл

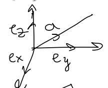


— отражение отн.-тельно перпенд. пр-ва к. $\underline{n}$.

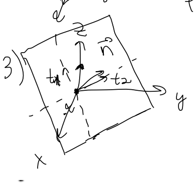
23.9. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства $\mathcal{E}_3$ на подпространство $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}$ есть:

1) прямая $x = z = 0$;
2) прямая $x = y = z$;
3) плоскость $x + y + z = 0$;
4) плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$ и $\mathbf{b}(1, -3, 2)$.

$1 - \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} =$

2) 

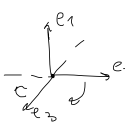
$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\varphi(e_y) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) 

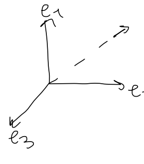
$\varphi(e_z) = t_1\sqrt{\frac{2}{3}} + 0$
$\varphi(e_x) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} - t_2\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$
$\varphi(e_y) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} + t_2\sqrt{\frac{1}{3}}$

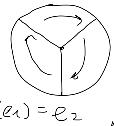
23.14. В трехмерном геометрическом векторном пространстве $\mathcal{E}_3$ задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства:

1) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

2) 

$\varphi(e_1) = e_1$
$\varphi(e_2) = e_3$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = -e_2$

3) 



$\varphi(e_1) = e_2$
$\varphi(e_2) = e_3$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = e_1$

2) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;
3) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

23.15. Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$.

1) Доказать, что преобразование φ проектирования $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$ линейно. Найти ядро и множество значений φ. Записать матрицу преобразования φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$.

1) $L = L' \oplus L''$ $\quad \varphi = \text{Пр}_{L'}^{\parallel L''}$, т. е. $\varphi(a \in L) = b \in L'$ т.ч. $a = b + c$, $c \in L''$

т.к. L – пр. сумма, то пусть $\left.\begin{array}{l} a_1 = b_1 + c_1 \\ a_2 = b_2 + c_2 \end{array}\right\}$ т.к. р-ние ед, то $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ – ед
$\varphi(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 = \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$

2) Ядро: $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = c \in L'' \Rightarrow \ker\varphi = L''$

образ: $\forall q \in \operatorname{Im}\varphi$ $q \in L'$, также $\forall b \in L'$ $\varphi(b) = b \in L'$ т. е. $\operatorname{Im}\varphi = L'$

3) $\{e_1 \dots e_k\} \to L'$, $\{e_{k+1} \dots e_{k-m+1}\} \to L''$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1) = e_1 \\ \vdots \\ \varphi(e_k) = e_k \\ \vdots \\ \varphi(e_{k-m+1}) = 0 \end{array}\right\}$ $A = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

23.19. Доказать, что:

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

$\operatorname{Im}\varphi = V \Rightarrow rkA = \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V = n$ (число строк) $\Rightarrow \underline{\underline{rkA = n}}$

23.24. Пусть $\varphi: \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — линейное отображение, и $\dim\mathcal{L} = \dim\widetilde{\mathcal{L}}$. Доказать утверждения:

1) Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y$ $(x \in \mathcal{L})$ было разрешимо при любом $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) = o$ имело только нулевое решение.

2) Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, то оно имеет для каждого y единственное решение.

3) Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо не при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, но при некотором y разрешимо. Тогда его решение не единственно.

1) ($\Rightarrow$) $\varphi(x) = y$ разр $\Leftrightarrow$ $A_\varphi x = y$ – разр т. е. A – невырожд $\Rightarrow \dim L = rkA = \dim\operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \dim\ker\varphi = 0$
т. е. $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

($\Leftarrow$) $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim L \Rightarrow \underline{\operatorname{Im}\varphi = \widetilde{L}}$

2) $\varphi(x) = y$ – разр, то $\operatorname{Im}\varphi = \widetilde{L} \Rightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow$ <u>от. инъект</u>

3) $\varphi(x) = y$, тогда $\ker\varphi \neq 0$, р-рим $a \in \ker\varphi$: $\varphi(a) = 0$ тогда $\varphi(x) + \varphi(a) = y + 0$
$\varphi(a + x) = y$ – 2 решение.

23.29. Линейное отображение n-мерного линейного пространства в m-мерное задано матрицей A в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Числа m и n определяются размерами матрицы. Найти ядро и множество значений отображения. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, если:

420. $\left\|\begin{matrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{matrix}\right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ker\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

по ст-цам

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

23.30. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A. Числа m и n определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора $\mathbf{a}$, если:

1) $A = A_{513}$, $\mathbf{a} = (-1, 0, 1)^T$;

513. $\left\|\begin{matrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{matrix}\right\| x = a \to \left(\begin{matrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -11 & -6 & -7 \\ 0 & -22 & -12 & -14 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right) \to$ частное решение $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

базис $\begin{pmatrix} -14 & 2 \\ -6 & -7 \\ 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

23.40. Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m.

1) Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование $D: \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования D:

а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^m$;

б) в базисе $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^m$;

в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}$.

$P(x) = \text{const}.$

а) в стандартном базисе $1, t, \ldots, t^m$;

б) в базисе $1, t-t_0, \ldots, (t-t_0)^m$;

в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}$.

в) $\ker D$ - Все мн-ны вида $P(x) = const$.

$D(1) = 0$, $D\left(\frac{t}{1!}\right) = 1$, ... $D\left(\frac{t^m}{m!}\right) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{m-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

23.62. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:

3) $A = A_{38}$, $S = A_{39}$;