Практика 1.

Шахматов Андрей, Б02-304

6 февраля 2024 г.

Содержание

1 1.1

$$M = \mathbb{Q} \times \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Внутренность M - пустое множество, так как для любой $m = \left(\frac{p}{q}, \frac{1}{n}\right)$ и любой её окрестности U есть точка $q = \left(i \in \mathbb{I}, \frac{1}{n}\right)$. Граничными точками являются все прямые вида $y = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}$ и $y = 0$. Внешними точками является множество $extM = \mathbb{R}^2 \setminus \partial M \setminus intM = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \land y = \frac{1}{n} n \in \mathbb{N}\}$. Изолированных точек нет, так как $\forall m \in M$ и для любой её окрестности есть точка множества лежащая в этой окрестности. Предельные точки совпадают с границей.

2 1.2

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Множество определения $D_f = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

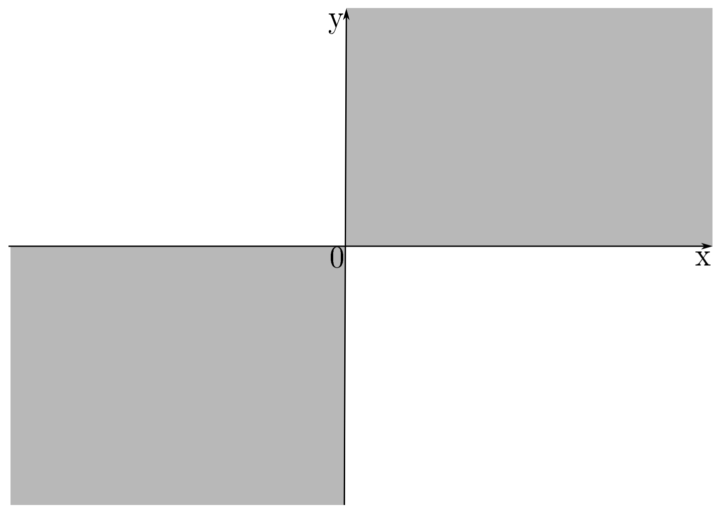

Рис. 1: Область определения функции

(а) D_f - открыто, так как совпадает со своей внутреннстью. $D_f \cup 0$ - не открыто, так как 0 - граничная точка.
(б) D_f - не замкнуто $D_f \cup 0$ - не замкнуто, так как все точки на прямых $x = 0$ и $y = 0$ являются граничными и не лежат в множестве.
(в) Ни одно множество не компакт так как не замкнуто.
(г) D_f - не связно, так как не линейно связно и открыто и находится в $\mathbb{R}^2$. $D_f \cup 0$ - связно, так как линейно связно.
(д) D_f - не линейно связное, так как любая кривая должна проходить через $(0,0) \notin M$. $D_f \cup 0$ - линейно свзяно.
(е) D_f - не область так как не связно. $D_f \cup 0$ - не область так как не открыто.

3 1.3

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

Перейдём к замене $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$.

$$|f(x,y)| = \rho \left| \frac{\sin^3 \phi + \cos^3 \phi}{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} \right| = \rho |\sin^3 \phi + \cos^3 \phi| \leq 2\rho$$

Тогда при $x \to 0$ и $y \to 0$ выполняется $\rho \to 0 \Rightarrow |f(x,y)| \to 0 \Rightarrow f(x,y) \to 0$.

4 1.4

(а)

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Введя замену $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ получим

$$|f(x,y)| = \rho|\cos^3\phi| \le \rho \Rightarrow |f(x,y)| \to 0, \text{ при } \rho \to 0$$

(б)

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Введя $x = \alpha t$, $y = \beta t$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

Тогда при разных α и β будут получаться разные пределы по направлениям, соответственно основного предела не будет существовать.

(в)

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Так как не существует предела $\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$, то не существует обратного повторного предела. Так как $\sin\frac{1}{y}$ - ограничен, то $x\sin\frac{1}{y} \to 0$, при $x \to 0, y \to 0$.

5 2.1

$\mathbb{R}^n$ - связно, так как оно линейно связно. Тогда пусть нашлось $M \neq \emptyset, M \neq \mathbb{R}^n$. Тогда так как M - замкнуто, то его дополнение $P = \mathbb{R}^n \setminus M$ открыто. Тогда мы получили разбиение на относительно открытые $\mathbb{R}^n = M \coprod P$ - ппротиворечие со связностью.

6 2.2

(а)

$$\partial X = clX \setminus intX \Rightarrow \partial^2 X = cl\partial X \setminus int\partial X = \partial X \setminus int\partial X$$

но тогда $\partial^2 X \subset \partial X$.
(б) Приведём пример $X = \mathbb{Q}_{[0,1]}$, тогда $\partial X = [0,1]$, а $\partial^2 X = \{0,1\}$. Очевидно, что $\partial X \not\subset \partial X^2$
(в) Пусть $X = (0,1)$, тогда $cl(intX) = clX = [0,1]$, а $int(clX) = int[0,1] = (0,1)$. Но $[0,1] \not\subset (0,1)$ - противоречие.
(г) Пусть $X = \mathbb{Q}_{[0,1]}$, тогда $cl(intX) = cl\emptyset = \emptyset$, $int(clX) = int[0,1] = (0,1)$. Но $(0,1) \not\subset \emptyset$ - противоречие.

7 2.3

Так как повторный предел существует, то в некоторой окрестности существует и $\lim_{y \to 0} f(x,y)$. Тогда данная задача сводится к доказательству задачи $K_3 2.39$.

39. Пусть функция f определена на множестве E, содержащем окрестность точки $(x_0; y_0)$: $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_2$, кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f = A$ и при любом $y \in (y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f$, то $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f = A$.

Решение к этой задаче:
Рассмотрим две последовательности Гейне $x_n \to x_0$ и $y_k \to y_0$. Требуется доказать, что при условии

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_k) = B(y_k)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = A$$

следует, что

$$\lim_{k \to \infty} B(y_k) = A$$

. В силу существования первых двух пределов для достаточно больших n, k выполняется:

$$|f(x_n, y_n) - A| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - B(y_k)| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| < \epsilon$$

Последнее неравенство выполняется в силу фундаментальности последовательности $f(x_n, y_k)_n$. Рассмотрим $|B(y_k) - A| \leq |B(y_k) - f(x_n, y_k)| + |f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k) - A| \leq 3\epsilon$. Что означает

$$\lim_{k \to \infty} B(y_k) = A$$

8 2.4

(a)

$$\frac{y^2 sh(x^3-y^3)}{x^4-x^2y^2+y^4}=\frac{y^2(x^2+y^2)}{x^6+y^6}sh(x^3-y^3)$$

Перейдя в полярные координаты и разложив sh в ряд Тейлора до 1 члена в точке $(0,0)$ получим:

$$\rho\frac{sin^2\phi(cos^2\phi+sin^2\phi)(cos^3\phi-sin^3\phi)}{cos^6\phi+sin^6\phi}+o(\rho^4)$$

Так как знаменатель дроби не достигает 0, ведь одновременно 0 синус и косинус равны быть не могут, то вся дробь ограничена и её значение меньше $K\rho$, где K - положительная константа, тогда $K\rho$ - мажорирует выражение, а значит предел равен 0.
(б)

$$f(x,y)=\frac{\arctan(x^3+y^3)}{\sqrt{x^6+y^6}}$$

Разложим арктангенс в ряд Тейлора и подставим в полярных координатах:

$$f(x,y)=\frac{cos^3(\phi)+\rho sin^4(\phi)}{\sqrt{cos^6(\phi)+\sin^6(\phi)}}+o(\rho)$$

Такая сумма разбивается на два слагаемых, одно из них мажорируется ρ, а другое от него не зависит, а значит оно зависит от направления, из чего следует несуществование предела.

9 3.1

$$f(x,y)=\frac{(1-\cos(x+y)+\sin(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2))}{\sqrt[3]{x^4+x^2y^2+y^4}}$$

Рассмотрим отдельно знаменатель дроби, переёдём к полярным координатам:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x^2y^2+y^4}}=\rho^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^4\phi+\sin^2\phi\cos^2\phi+\sin^4\phi}}=\rho^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{\sin^2 2\phi}{4}}}<2\rho^{-\frac{4}{3}}$$

Рассмотрим числитель:

$$Q=(1-\cos(x+y)+\sin\left(x^2-y^2\right))\ln\left(x^2+y^2\right)=(2\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(x^2-y^2\right))\ln\left(x^2+y^2\right)$$

Тогда модуль числителя $|Q|$ меньше:

$$|Q|\le\left(\frac{(x+y)^2}{2}+|x^2-y^2|\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$$

Переходя к полярным координатам получим:

$$|Q|\le\rho^2\left(\frac{1+\sin 2\phi}{2}+|\cos 2\phi|\right)\ln\rho^2$$

Тогда для всей функции справедлива оценка:

$$|f(x,y)|\le 4\rho^{\frac{2}{3}}\ln\rho^2\to 0\Rightarrow f(x,y)\to 0$$

10 3.2

Каждая из функций непрерывна на своей области определения. Осталось доказать, что при $x \to y$ $\frac{\arctan x - \arctan y}{x-y} \to \frac{1}{1+x^2}$. Введя замену $x - y = t$ получим $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(y+t) - \arctan y}{t}$, что по по определению производной арктангенса существует и равно $\frac{1}{1+y^2}$ для любого y. Учитывая, что $y = x$ получим:

$$\lim_{x\to y} \frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Из чего следует непрерывность функции $f(x, y)$ на всех области определения.

11 3.3

(а) Предельная точка x_0 - точка для которой сущствует последовательность $x_n \to x_0$. Тогда выберем точку $a_0 \in A^{(n+1)}$, для неё найдём последовательность $(a_m) \to a_0 \mid a_m \in A^{(n)}$, причём для каждой из точек a_m существует последовательность $(\alpha_k)_m \to a_m \mid \alpha_k \in A^{(n-1)}$. Тогда предложим последовательность $b_m = (\alpha_m)_m$. Докажем, что такая последовательность стремится к x_0. Для достаточно больших m:

$$|b_m - x_0| \leq |b_m - a_m| + |a_m - x_0| \leq 2\epsilon$$

Тогда получили, что точка x_0 - предельная точка $A^{(n-1)}$, то есть $x_0 \in A^{(n)} \Rightarrow A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$
(б) Рассмотрим множество $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, множество её предельных точек $A^{(1)} = \{0\}$, В таком случае $A^{(2)} = \emptyset$, очевидно что $A^{(2)} \neq A^{(1)}$.
(в) Рассмотрим множество $A_n = \{0\} \cup \{\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_n} \mid (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n\}$. Очевидно, что множество $A_{n-1} \subset A^{(1)}$, так как если $a_0 \in A_{n-1}$, то можно построить последовательность $a_n = a_0 + \frac{1}{k} \in A_n$. Докажем, что других предельных точек нет. От противного, пусть $\exists a \in A^{(1)}, a \notin A_{n-1}$. Тогда существует последовательность $(a_n) \subset A_n \mid a_n \to a$:

$$|\frac{1}{k_{1m}} + ... + \frac{1}{k_{nm}} - a| < \epsilon$$

Выделим все стационарные подсуммы k_{im}, тогда все остальные подсуммы стремяться к 0, а значит $a_n \to \sum_i k_i \in A_{n-1}$ - противоречие. Тогда выходит, что в (a_n) нет стационарных подсумм, но тогда все подсуммы стремяться к 0, а значит $a_n \to 0 \in A_{n-1}$ - противоречие. Тогда $A_{n-1} = A^{(1)}$ и по индукции $A_{n-k} = A^{(k)}$, соответственно $A^{(n)} = A_0 = \{0\}$, а $A^{(n+1)} = A_{-1} = \emptyset$, тогда $A^{(n+1)} \neq A^{(n)}$.