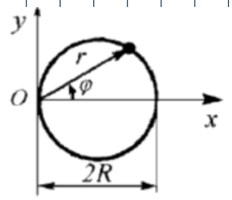
8.11. Материальная точка массы m движется в центральном поле под действием силы $F_r = -\frac{\alpha m}{r^5}$ $(\alpha = \text{const})$. При каком значении момента импульса K_0 траектория является окружностью $r = 2R\cos\varphi$? Показать, что такая траектория невозможна для других потенциальных центральных сил.



К задаче 8.11

$c = \frac{K_0}{m}$

1) Ф-ла Бине: $-\frac{1}{mc^2} F r^2 = \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}$

$1 + \sin^2 x =$

$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2R} \cdot \frac{2 - \cos^2\varphi}{\cos^3\varphi} = -\frac{1}{2R\cos\varphi} + \frac{4R^2 \cdot 2}{(2R\cos\varphi)^3} = -\frac{1}{r} + \frac{8R^2}{r^3}$

2) $-\frac{1}{mc^2} F r^2 = \frac{8R^2}{r^3} \Rightarrow F r^5 = -8mc^2R^2$, левая часть не з-на от $r \Rightarrow F \sim \frac{1}{r^5}$

$\alpha \cancel{m} = 8 \cancel{m} c^2 R^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\alpha}{8R^2}} \Rightarrow K_0 = m\sqrt{\frac{\alpha}{8R^2}} = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$ //

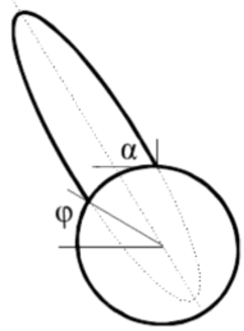
8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды массы M $(M >> m)$. Величина скорости кометы на бесконечности равна v_∞, а прицельное расстояние – d. Найти уравнение траектории кометы и угол θ, на который отклонится её траектория, когда она снова уйдет в бесконечность.

$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, 1) $p = \frac{\gamma M}{c^2}$, $c = v_0 d$, $\varepsilon = v_0^2$

2) $e^2 - 1 = 2c^2\varepsilon \frac{1}{\gamma^2 M^2} = 2 v_0^4 d^2 \frac{1}{\gamma^2 M^2}$

$e = \sqrt{1 + 2 v_0^4 d^2 / \gamma^2 M^2}$

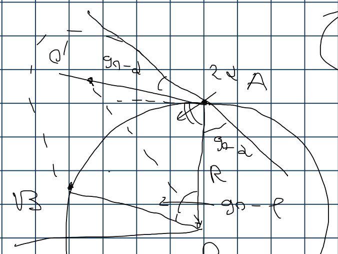
$\frac{\theta}{2} = \arccos\frac{1}{e} \Rightarrow \theta = 2\arccos\left(\frac{1}{e}\right)$

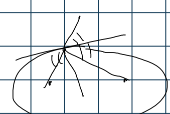


К задачам 8.24 – 8.26

начальная энергия минимальна.

8.24. С Северного полюса под углом α к горизонту запускают снаряд. Какой должна быть величина начальной скорости v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ (географическая широта отсчитывается от экватора, в северном полушарии $\varphi > 0$, а в южном – $\varphi < 0$)? Землю считать однородным шаром радиуса R.

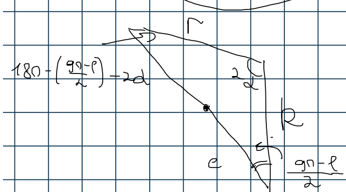




Условие попадания

$\frac{90-\varphi}{2} + 2\alpha < 180$

$\boxed{2\alpha - \frac{\varphi}{2} < 135}$



8.25. В условиях предыдущей задачи найти эксцентриситет $e(\alpha,\varphi)$ и фокальный параметр $p(\alpha,\varphi)$ траектории. При каких значениях α снаряд попадает на заданную широту φ_o?

1) $a = r + R = R + R\frac{\sin\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha + \frac{90-\varphi}{2}\right)}$

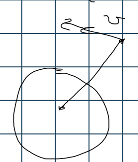
$c = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\left(2\alpha + \frac{90-\varphi}{2}\right)}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sin 2\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{90-\varphi}{2}\right) + \sin\left(2\alpha + \frac{90-\varphi}{2}\right)}$

2) $p = a(1-e^2) = R\left(1+\dfrac{\sin\left(\frac{9\pi-\varphi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha+\frac{9\pi-\varphi}{2}\right)}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin^2(2\alpha)}{\left(\sin\left(\frac{9\pi-\varphi}{2}\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{9\pi-\varphi}{2}\right)\right)^2}\right)$

8.52. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и фокальным параметром p_0. В положении, когда спутник находится на высоте H от поверхности Земли и имеет скорость $\mathbf{v}$, ему сообщается касательный импульс $\Delta\mathbf{q} = \lambda m\mathbf{v}$ (λ=const). Найти параметры новой орбиты спутника.

$v = v(1+\lambda)$



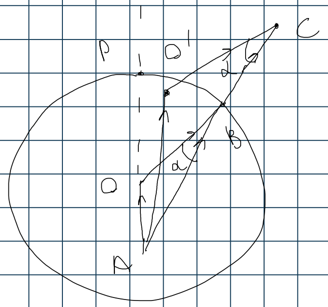
$C_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{p_0}}$

$C = (1+\lambda)C_0$

$\dfrac{1}{\sqrt{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{p_0}}(1+\lambda)$

$\boxed{p = p_0/(1+\lambda)^2}$

Нарисуем годограф скорости



$$\begin{cases} BC = \lambda v \\ AB = v \\ OB = \dfrac{GM}{C_0} \to \sqrt{GMp_0} \\ OA = e_0\dfrac{GM}{C_0} \to e_0\sqrt{GMp_0} \end{cases}$$

Паралл-пер-ом $O'C = \dfrac{GM}{C} = \dfrac{GM}{C_0}\cdot\dfrac{1}{1+\lambda} = \dfrac{OB}{1+\lambda}$

угол между $O'C$ и v сохранился $\to \alpha$

$O'A^2 = \dfrac{e_0^2 GMp_0}{(1+\lambda)^2} + (1+\lambda)^2 v^2 - 2v\,e_0\sqrt{GMp_0}\cos\alpha$

$\shortparallel$

$e^2(GMp)$

$e^2 p = \dfrac{e_0^2 p_0}{(1+\lambda)^2} + \dfrac{v^2(1+\lambda)^2}{GM} - 2v\,e_0\sqrt{\dfrac{p_0}{GM}}\cos\alpha$

$$\boxed{e^2\frac{p_0}{(1+\lambda)^2} = \frac{e_0^2 p_0}{(1+\lambda)^2} + \frac{v^2(1+\lambda)^2}{GM} - 2v\,e_0\sqrt{\frac{p_0}{GM}}\cos\alpha}$$

Т.к. для луча света верно: $\begin{cases} v^2 = 0 \\ w_r = 0 \\ w_\varphi = 0 \end{cases}$

Тогда $v^2 = \dfrac{ds^2}{dt^2} = \left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1-\dfrac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 = 0$

$w_r = \dfrac{d}{dt}\left(\left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot{t}\right) = 0 \Rightarrow \left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot{t} = D = \text{const}_1$

$w_\varphi = -\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = C = \text{const}_2$

Подставим в 1 ур-ние

$0 = D^2\left(1-\dfrac{a}{r}\right)^{-1} - \left(1-\dfrac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - C^2/r^2$

$\dfrac{C^2}{r^2}\left(1-\dfrac{a}{r}\right) = D^2 - \dot{r}^2$

$r = \dfrac{1}{u} \Rightarrow \dot{r} = r_\varphi\dot{\varphi} = Cr_\varphi/r^2 = -u_\varphi C$

Тогда $\boxed{C^2u^2(1-au) = D^2 - C^2u_\varphi^2}$

Продифференцируем по φ: $2C^2u'u'' + C^2(2u - 3au^2)u' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{u''_{\varphi\varphi} + u = \dfrac{3}{2}au^2}$ – ур-ние Бине.

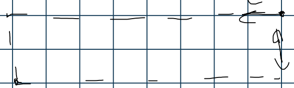
(вариант ли-е)

Если свет падает на ч. дыру, то $\exists$ т. где $u'' = u' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}au = 1$ и $C^2u^2(1-au) = D^2$ –

$\shortparallel$

$u = \dfrac{2}{3a}$ $\Rightarrow \dfrac{4C^2}{9a^2}\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = D^2 \Rightarrow D^2 = C^2\cdot\dfrac{4}{27a^2} \Rightarrow D = C\,\dfrac{2}{3\sqrt{3}\,a}$

при  $r\to\infty$: $\begin{matrix} D = \dot{t} \\ C = r^2\dot{\varphi} \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{C}{D} = r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = 1\cdot a^* = \dfrac{3\sqrt{3}\,a}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^* = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$ //

Т9. Для мат точки 1 инт: $u'' + u = \frac{a}{2C^2} + \frac{3}{2}au^2$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{R} = const \\ u'' = 0 \end{array}\right\} \frac{1}{R} = \frac{a}{2C^2} + \frac{3a}{2R^2} \Rightarrow \frac{1}{C^2} = \frac{2}{aR} - \frac{3}{R^2}$$

Первый инт. ур будет: $(1-au)^{-1} D^2 - (1-au)^{-1} C^2 (u')^2 - C^2 u^2 = 1 \Rightarrow |u' = 0| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{a}{R}\right) D^2 = 1 + \frac{C^2}{R^2} \Rightarrow \frac{D^2}{C^2}\left(1 - \frac{a}{R}\right) = \frac{1}{C^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{2}{aR} - \frac{2}{R^2}$$

$$D/C = \frac{1 - \frac{a}{r}}{r^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right) \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{a}{R}\right)^3}{R^4} = \frac{2}{aR} - \frac{2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2 \omega^2} = \frac{2}{\left(1 - \frac{a}{R}\right)^3} \cdot \left(\frac{R}{a} - 1\right) = \frac{2R}{a} \cdot \left(1 - \frac{a}{R}\right)^{-2} \Rightarrow v^2 = \left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 \cdot \frac{a}{2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \left(1 - \frac{a}{R}\right)\sqrt{\frac{a}{2R}} \quad //$$