1. Т1. 1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k} \rightarrow \delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij}$ $\Big\}$ $\boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$

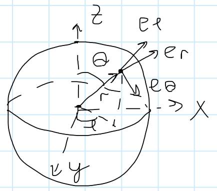
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

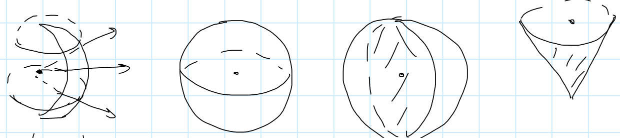
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

Т2.



$\vec R = x\vec i + y\vec j + z\vec k = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec i + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec j + r\cos\theta\,\vec k$

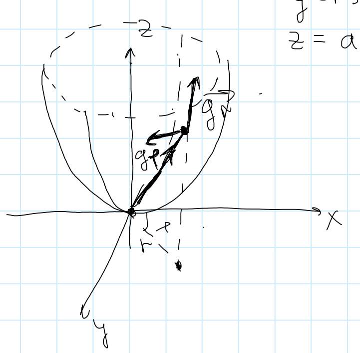
$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



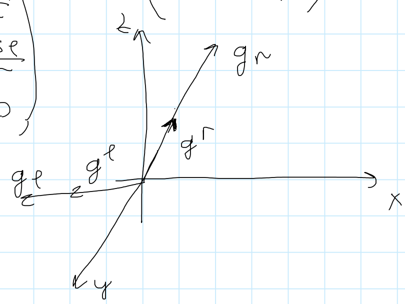
прямая/огр/окр сфера плоскость конус

Т3. $z = a(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = ar^2 \end{array} \Rightarrow M_{r\varphi} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_r & g_\varphi \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$



$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$



Т4*. т.к. ковар произв явл тензором, то её свёртка не изм при смене С.К.

Найдём $a^i_{;i}$ в ДСК, вектор $a = (x, y, z)$, а $\Gamma_{ijk} = 0$ //, тогда

$$a^i_{;i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow \boxed{a^i_{;i} = 3}$$

2.

1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \mathrm{const}$.

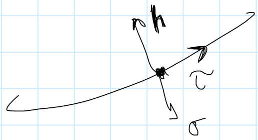
$\vec w \parallel \vec r$ если $0 = w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot\varphi = const \overset{exp}{\Leftrightarrow}$

$\overset{exp}{\Leftrightarrow} r^2\dot\varphi = const$

1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

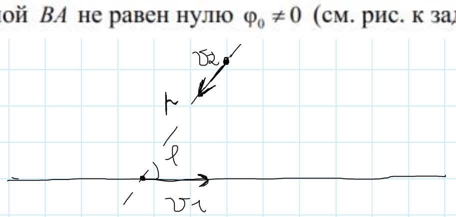
$\vec w = \dot v\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$, т.к. $\begin{cases}\vec w \perp \vec v \\ \vec v \parallel \vec\tau\end{cases} \Rightarrow \dot v = 0$

$\frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$

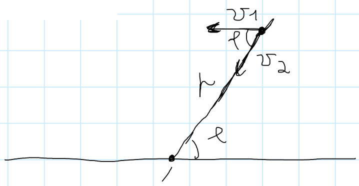


$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec n\right| = |a(\vec v\times\vec r)| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a||\vec v\times\vec r| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a||\vec v\times\vec r|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



в С.О. уб.

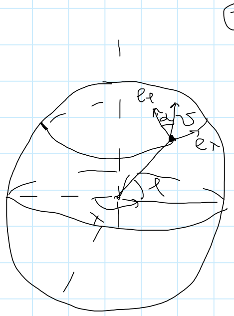


$\left.\begin{aligned}\dot r = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi) \\ r\dot\varphi = v_\varphi = v_1\sin\varphi\end{aligned}\right\} -\frac{v_2 + v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{tg\,\varphi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = r_0 e^{-\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$

T.5.*



$\begin{cases} v_r = \dot r = 0 \\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda = v\sin\alpha \\ v_\varphi = r\dot\varphi = v\cos\alpha \end{cases}$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{tg\,\alpha} = \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)e^{ctg\,\alpha(\lambda - \lambda_0)}$ //

2)

T6.* $v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = v_i \dot{v}^i - g^{ik} v_k \frac{d}{dt}\left(g_{ij} v^j\right) =$

$= v_i \dot{v}^i - g^{ik} v_k \dot{v}^j g_{ij} - g^{ik} v_k v^j \dot{g}_{ij} = \left\{ 0 = (g^{ik} g_{ij})^{\cdot} = \dot{g}^{ik} g_{ij} + g^{ik} \dot{g}_{ij} \right\} =$

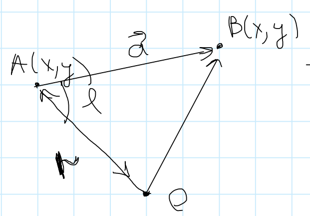
$= v_i \dot{v}^i - v_k \dot{v}^j \delta^k_j + \dot{g}^{ik} g_{ij} v^j v_k = \underline{v_i \dot{v}^i} - \underline{v_k \dot{v}^k} + \dot{g}^{ik} v_i v_k =$

$= (\dot{g}^i, g^k) v_i v_k = (\dot{g}^i, g^k v_k) v_i + (g^i v_i, \dot{g}^k) v_k = (v, v_i \dot{g}^i) + (v, v_k \dot{g}^k) =$

$= (v, 2 \cdot v_i \dot{g}^i) = 2 (v, v_i \dot{g}^i)$

3.

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.



$\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{OA} \Rightarrow A = \omega \cdot OA$

$\vec{B} = \vec{\omega} \times (\vec{OA} + \vec{a}) = \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{a} \Rightarrow B = \omega \cdot |OA + a|$

$\lambda = \frac{|OA + a|}{OA} \Rightarrow \lambda^2 OA^2 = OA^2 + a^2 + 2a \cdot OA \cos\varphi$

$(1-\lambda^2) r^2 + 2ar\cos\varphi + a^2 = 0$

$r = \frac{-a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi - a^2(1-\lambda^2)}}{1-\lambda^2} = a \cdot \frac{\pm\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\varphi} - \cos\varphi}{1-\lambda^2}$ – видимо эллипс.

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x,y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.