18.1. Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0;$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0;$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

19.6. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить

4) $\|A_{239}|\mathbf{c}_{67}\|;$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20) $\|A_{511}|\mathbf{c}_{74}\|;$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \\ 0 & 28 & 56 & 28 & 112 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & 28 & -14 & 112/2 \\ 0 & 28 & 56 & 28 & 112 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|A^T_{444}|\mathbf{c}_{167}\|;$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} & \cancel{1} \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 35 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{35}{8} & \frac{5}{4} \end{array}\right) \Rightarrow b \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix} -25/8 \\ 3/4 \\ 35/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18.13. Зная одну фундаментальную матрицу Φ, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

$\Phi' = \Phi A$, где столбцы A – ЛНЗ, т.е. $\det A \neq 0$

18.17. Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

4) $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$

19.14. Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

$Ax = b$ пусть $A_{n \times m}$ и строки ЛНЗ, тогда по т. о рангах $\exists$ n ЛНЗ столбцов, тогда в базисе р-аво n с-ма столбцов явл. порождающей. т.е. $\exists x$ т.ч. $Ax = b$.

19.21. Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

b_1 $a_1 \dots a_n$
b_2 $a_1' \dots a_n'$ $\}$ тогда $b_2 = b_1 + \sum \lambda_i a_i$ тогда решение 2-с-мы $b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

тогда $\forall \mu_i$ $\sum \mu_i a_i + \cancel{b_1} = \cancel{b_1} + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

$\sum (\mu_i - \lambda_i) a_i = \sum \lambda_i' a_i'$, возьм. $\mu_i = \lambda_i$ если $i \neq j$ и $\mu_i \neq \lambda_i$ если $i = j$ получим

$a_j = \sum \lambda_i' a_i'$

аналогично для $\{a_i \to a_i'$ получаем, что обе с-мы лин в-ются через друг друга.