Дифференциальные уравнения 2.

Шахматов Андрей, Б02-304

1 ноября 2024 г.

Содержание

1 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

8.5

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

8.8

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 + 3i \\ \lambda = 1 - 3i \end{cases}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda x} \cos 3x + C_2 e^{\lambda x} \sin 3x$$

8.25

$$y'''' - 5y''' + 7y'' - 3y' = 0$$

Сделаем замену $z = y'$, тогда

$$z''' - 5z'' + 7z' - 3z = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7z - 3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 1 - \text{кратный корень} \end{cases}$$

Решением будет являться

$$z = C_1 e^{3x} + C_2 x e^x + C_3 e^x$$

Проинтегрируем это уравнение и получим вырадение для y:

$$y = C_1' e^{3x} + C_2' x e^x + C_3' e^x + C_4$$

8.36

$$y'''' + 3y'' + 2y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = 0 \implies \begin{cases} \lambda^2 = -2 \\ \lambda^2 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -\sqrt{2}i \\ \lambda = \sqrt{2}i \\ \lambda = -i \\ \lambda = i \end{cases}$$

Решение уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

8.47

$$y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x$$

Сначала найдём общее решение

$$y'' + 4y = 0$$

С учётом решений характеристических уравнений $\lambda^2 = -4$ общее решение имеет вид

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

(((((Доделать)))))

8.69

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1 - \text{кратный корень}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + xC_2)e^{-x}$$

Методом вариации постоянной

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'(1+x)e^{-x} = 0 \implies C_1' + (1+x)C_2' = 0 \\ -C_1'e^{-x} - C_2'xe^{-x} = xe^{-x} \implies -C_1' - C_2'x = x \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_2' = x \\ C_1' = -x - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = \dfrac{x^2}{2} + A \\ C_1 = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + B \end{cases}$$

И финальное решение имеет вид

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + A\right)xe^{-x} + \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + B\right)e^{-x}$$

((((Не понятно чёт не сошлось))))

8.159

$$y'' + y = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Сделаем замену $z = -y + 1$, тогда

$$-z'' - z + 1 = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \implies z'' + z = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

После замены $q \leftrightarrow x - \frac{\pi}{2}$ имеем уравнение

$$z'' + z = \frac{1}{\cos^2 q}$$

Такой пример был разобран перед параграфом, а значит решение:

$$-y + 1 = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right|\cos x - 1$$

8.195

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^3$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$. Тогда

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{3t}$$

Общее решение имеет вид

$$y = (A + Bt)e^{2t}$$

Частное решение ищем в виде $y = ae^{3t}$:

$$9ae^{3t} - 12ae^{3t} + 4ae^{3t} = 4e^{3t} \implies a = 4$$

Тогда решение:

$$y = (A + Bt)e^{2t} + 4e^{3t} = \left(A + \frac{B}{\ln x}\right)x^2 + 4x^3$$

8.196

$$x^2y'' + xy' + y = 10x^2$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' + y = 10e^{2t}$$

Общее решение иммет вид:

$$y = A\cos x + B\sin x$$

В качестве частного решение подойдёт $y = 2e^{2t}$ Тогда решение:

$$y = A\cos\ln x + B\sin\ln x + 2x$$

T.1

$$y'' + ay = \sin x$$

Отдельно рассмотрим случай $a = 1$:

$$y'' + y = \sin x$$

В таком случае решением будет являтся

$$y = A\sin x + B\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$$

Такие решения всегда являются неограниченными и апериодическими. В другом случае частным решением является $y = \frac{1}{a-1}\sin x$, которое является ограниченным и периодическим. А таком случае рассмотрим $a < 0$, тогда общее решение будет:

$$y = Ae^{-\sqrt{a}x} + Be^{\sqrt{a}x} + \frac{1}{a-1}\sin x$$

В таком случае существует ограниченное решение при $B = 0$, и имеет единственное периодическое решение при $A = B = 0$. При $a = 0$ решение будет иметь вид:

$$y = A + Bt + \frac{1}{a-1}\sin x$$

Что также являются ограниченным и периодическим при $B = 0, A \in \mathbb{R}$. При $a > 0$ решение имеет вид:

$$y = A\sin\sqrt{a}x + B\cos\sqrt{a}x + \frac{1}{a-1}\sin x$$

Такое решение всегда является ограниченным и периодическим. Подведём итоги, существует хотя бы одно ограниченное решение при

$$a \neq 1$$

Тогда как существует единственное периодическое решение при

$$a \in (-\infty, 0)$$

614

Подойдёт уравнение:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Проверим:

$$\begin{cases} y = e^{2x}\cos x \\ y' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x \\ y'' = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x \end{cases}$$

Легко убедится, что при подстановке в уравнение выполняется торждество.

617

Тогда общее решение уравнения должно иметь вид:

$$y = Axe^x + Be^x + Ce^{-x}$$

т.е характеристическое уравнение иммет вид:

$$0 = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Тогда исходное дифференциальные уравнение можно записать как

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

618

Аналогично предыдущей задаче общее решение имеет вид:

$$y = A + Bx + C\sin x$$

С характеристическим уравнением

$$0 = x^2(x-i)(x+i) = x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$$

В таком случае дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'''' + y'' = 0$$

2 Элементы вариационного исчисления

19.14

$$J(y) = \int_1^2 \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + 4y\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2\ln 2$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{2y}{x} + 4 = \frac{d}{dx}\left(2xy'\right) = 2y' + 2xy'' \implies x^2y'' + xy' - y = 2x$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y_t', y'' = e^{-2t}(y_t'' - y_t')$.

$$y'' - y = 2e^t$$

Его общим решением является:

$$y = Ae^t + Be^{-t}$$

Тогда как частное решение ищем в виде $y = ate^t$:

$$y' = ae^t + ate^t$$

$$y'' = 2ae^t + ate^t$$

Подставляя в исходное уравнение:

$$2ae^t + ate^t - ate^t = 2ae^t = 2e^t \implies a = 1$$

Тогда уравнение имеет решение:

$$y = Ae^t + Be^{-t} + te^t$$

Переходя к перемнной x:

$$y = Ax + \frac{B}{x} + x\ln x$$

Подставляя граничные условия найдём экстремальную функцию:

$$y = x\ln x$$

Исследуем на максимум-минимум:

$$J(y+h) - J(y) = \int_1^2 x(y'+h')^2 + \frac{(y+h)^2}{x} + 4(y+h) - x(y')^2 - \frac{y^2}{x} - 4ydx$$

Первые степени по h сокращаются в силу уравнения Лагранжа:

$$\Delta J(y,h) = \int_1^2 x(h')^2 + \frac{h^2}{x}dx \geq 0$$

Значит существует минимум на $y = x\ln x$.

19.39

$$J(y) = \int_{-2}^{-1} [x^3(y')^2 + 3xy^2]dx,\ y(-2) = \frac{15}{2},\ y(-1) = 0$$

Уравнение Лагранжа:

$$6xy = \frac{d}{dx}(2x^3y') = 6x^2y' + 2x^3y'' \implies x^3y'' + 3x^2y' - 3xy = 0 \implies x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Решениями хар. уравнения являются $\lambda = 1$, $\lambda = -3$:

$$y = Ae^t + Be^{-3t} \implies y = Ax + \frac{B}{x^3}$$

Подставляя граничные условия находим:

$$y = \frac{1}{x^3} - x$$

Проверим на максимум и минимум, сразу сократим члены первого порядка по h:

$$\Delta J(x,h) = \int_{-2}^{-1} x^3(h')^2 + 3xh^2dx = \int_{-2}^{-1} x\left(x^2(h')^2 + 3h^2\right)dx \leq 0, \text{ так как } x < 0$$

Существует максимум на решении $y = \frac{1}{x^3} - x$.

19.58

$$J(y) = \int_1^2 \left[x^2(y')^2 + yy' + 12xy\right]dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = 5$$

Уравнение Лагранжа:

$$12x + y' = \frac{d}{dt}\left(y + 2x^2y'\right) = y' + 2x^2y'' + 4xy' \implies xy'' + 2y' - 6 = 0$$

Введя замену $z = y'$ решаем уравнение:

$$xz' + 2z - 6 = 0$$

Решением является:

$$z = \frac{A}{x^2} + 3$$

Тогда относительно y:

$$y = \frac{A}{x} + B + 3x$$

Подставляя граничные условия получим:

$$y = 3x - \frac{2}{x}$$

Проверим на минимум-максимум:

$$\Delta J(y,h) = \int_1^2 x^2(h')^2 + hh'dx = \int_1^2 \left(xh' + \frac{h}{2x}\right)^2 - \frac{h^2}{4x^2}dx$$

(((((А как дальше не ясно)))))

19.102

$$J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{16}{9}y^2 + 2y\sin x\right]dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Уравнение Лагранжа:

$$2\sin x - \frac{32}{9}y = 2y'' \implies y'' + \frac{16}{9}y = \sin x$$

Общее решение имеет вид:

$$y = A\sin\frac{4}{3}x + B\cos\frac{4}{3}x$$

Частное решение найдём в виде $a\sin x$:

$$-a\sin x + \frac{16}{9}a\sin x = \sin x \implies \frac{7}{9}a = 1 \implies a = \frac{9}{7}$$

Всё решение выглядит как

$$y = A\sin\frac{4x}{3} + B\cos\frac{4x}{3} + \frac{9}{7}\sin x$$

Подставим начальные условия:

$$y = \sin\frac{4x}{3}$$

Такс:

$$\Delta J(y,h) = \int_0^\pi \left[(h')^2 - \frac{16}{9}h^2\right]dx$$

Заменим $x \leftrightarrow \frac{x}{\pi} \implies h' \leftrightarrow \frac{h'}{\pi}$:

$$\Delta J(y,h) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[(h')^2 - \frac{16\pi^2}{9}h^2\right]dx$$

Так как $\frac{4\pi}{3} > \pi$, то согласно упражнению из параграфа к задаче нет ни минимума ни максимума.