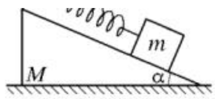


Рис. 101

5.22. Гантель длиной $2l$ скользит без трения по сферической поверхности радиусом r (рис. 100). Гантель представляет собой две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении: а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении; б) в плоскости рисунка.

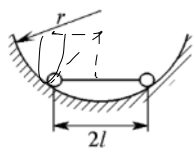
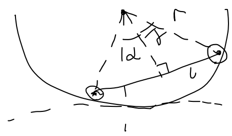


Рис. 100

а) в перпенд. пл. рисунка $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $l_1 = \sqrt{r^2 - l^2}$

$T = 2\pi\sqrt[4]{\frac{r^2-l^2}{g^2}}$

б)



$\Pi = mg(r - r\cos(\alpha+\gamma)) - mg(r - r\cos\gamma) + mg(r - r\cos(\gamma-\alpha)) - mg(r - r\cos\gamma) =$

$= mgr\left(\cos\gamma - \cos(\alpha+\gamma) + \cos\gamma - \cos(\gamma-\alpha)\right) =$

$= mgr(2\cos\gamma - 2\cos\gamma\cos\alpha) = 2mgr\cos\gamma(1-\cos\alpha) \approx mgr\cos\gamma\cdot\alpha^2$

$E = \Pi + K = \frac{2mv^2}{2} + mgr\cos\gamma\cdot\alpha^2 \Rightarrow \frac{E}{m} = r^2\dot\alpha^2 + gr\cos\gamma\cdot\alpha^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2}{gr\cos\gamma}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\cos\gamma}}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{r^2-l^2}}{r}$

5.43. Найти частоту малых колебаний шарика массой m, подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорци-

онально квадрату растяжения, т. е. $F = k(l - l_0)^2$, где l_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии.

1) п-равн: $k(l_1 - l_0)^2 = mg$

2) $m\Delta\ddot{x} = mg - k(l_1 + \Delta x - l_0)^2 - mg + k(l_1 - l_0)^2 =$

$= -k(2l_1 - 2l_0 + \Delta x)\Delta x = -2k(l_1 - l_0)\Delta x = -2k\sqrt{\frac{mg}{k}}\Delta x = -2\sqrt{mgk}\,\Delta x$

$\Delta\ddot{x} + 2\sqrt{\frac{gk}{m}}\Delta x = 0$

$\omega = \sqrt{2\sqrt{\frac{gk}{m}}} = \sqrt[4]{\frac{4gk}{m}}$

Рис. 291

10.47. Однородный диск A массой M и радиусом $2R$ может совершать колебания, катаясь по поверхности неподвижного цилиндра B, имеющего радиус R (рис. 291). Центры цилиндра и диска стянуты стержнем массой m так, что при

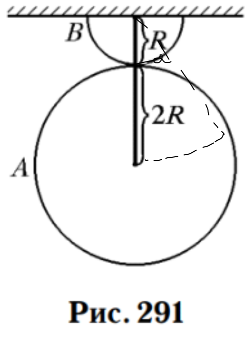


Рис. 291

качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.

$\frac{I\dot\alpha^2}{2} + mg\cdot 3R(1-\cos\alpha) + \frac{m(3R)^2}{3}\dot\alpha^2$, $I = \frac{M(2R)^2}{2} + M(2R)^2 = 6MR^2$

качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.

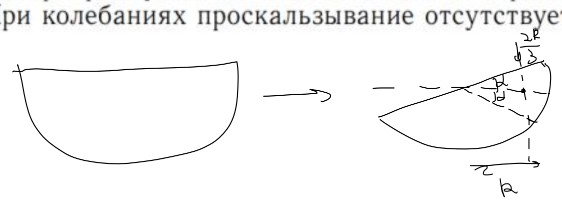
$$E = Mg\cdot 3R(1-\cos\alpha) + \frac{I\dot\alpha^2}{2} + mg\cdot\frac{3R}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{\frac{m(3R)^2}{3}\dot\alpha^2}{2}, \quad I = \frac{M(2R)^2}{2} + M(2R)^2 = 6MR^2$$

$$E = \left(M+\frac{m}{2}\right)3Rg\cdot\frac{\alpha^2}{2} + \frac{3mR^2\dot\alpha^2}{2} + 3MR^2\dot\alpha^2$$

$$\frac{E}{3R} = \left(M+\frac{m}{2}\right)g\frac{\alpha^2}{2} + \dot\alpha^2 R\left(\frac{m}{2}+M\right)$$

Ответ не совпал.

10.84. Найти период малых колебаний половинки сплошного цилиндра радиусом R, находящейся на горизонтальной поверхности. При колебаниях проскальзывание отсутствует.



$$I\ddot\alpha = -\frac{2\alpha}{\pi/2}mg\cdot\frac{2R}{3} = -\frac{8mgR}{3\pi}\alpha$$

$$\frac{mR^2}{2}\ddot\alpha + \frac{8mgR}{3\pi}\alpha = 0$$

$$\ddot\alpha + \frac{16g}{3\pi R}\alpha = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi R}{16g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\pi R}{g}}$$

5.49. По гладкой доске без трения скользят со скоростью v_0 два груза с равными массами m, соединенные пружиной жесткостью k, находящейся в несжатом состоянии (рис. 118). В момент $t = 0$ левый груз находится на расстоянии L от вертикальной стенки, в направлении к которой они оба движутся. Через какое время t центр масс

окажется в том же положении, что и в момент $t = 0$? Удар о стенку считать мгновенным и абсолютно упругим.

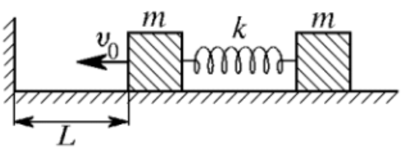
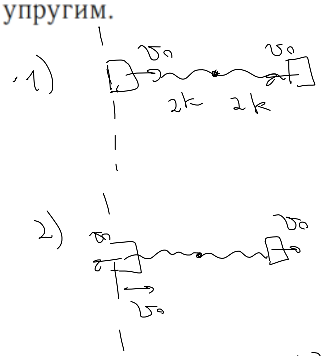


Рис. 118

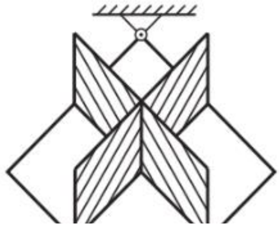


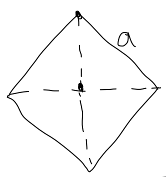
$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad t_0 = \frac{v_0}{L}$$

$$t_2 = \frac{v_0}{L}$$

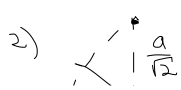
3) $t = t_0 + t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{L} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

10.78. Елочная игрушка изготовлена из трех одинаковых тонких квадратов, расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях так, что их центры, совпадают. Игрушка подвешена за вершину одного из квадратов (см. рис. 299). Определить период T колебаний игрушки как физического маятника. Сторона квадрата равна a.





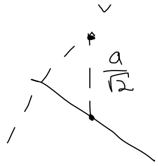
$$I_0 = \frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)^2 = \frac{ma^2}{6} + \frac{3ma^2}{2\cdot3} = \frac{2ma^2}{3}$$



$$I_1 = I_2 = \frac{ma^2}{12} + \frac{6ma^2}{2\cdot6} = \frac{7ma^2}{12}$$

Рис. 299

2)



$I_1 = I_2 = \frac{ma}{12} + \frac{\dots}{2\cdot 6} = \frac{\dots}{12}$

3) $I = I_0 + I_1 + I_2 = \frac{14ma^2}{12} + \frac{2ma^2}{3} = \frac{7ma^2}{6} + \frac{4ma^2}{6} = \frac{11ma^2}{6}$

4) $m\frac{a}{\sqrt{2}}\varphi g + \frac{11m\cancel{a^2}}{6}\cdot\ddot{\varphi} = 0$

$\frac{6g}{11\sqrt{2}a}\varphi + \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{11a\sqrt{2}}{6g}}$

10.43. На конце стержня длиной l и массой m прикреплен сплошной диск радиусом R и массой M. Определить период малых колебаний стержня с диском вокруг оси A, если диск может свободно вращаться вокруг оси B, проходящей через центр диска (рис. 288).

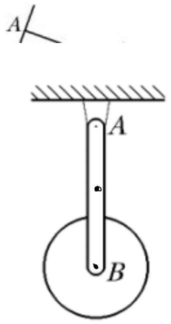


Рис. 288

$П = \left(\frac{m}{2}l(1-\cos\varphi)g + Ml(1-\cos\varphi)\right) \approx \left(\frac{m}{2}+M\right)l\frac{\varphi^2}{2}g$

$K = \frac{\frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{Ml^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\left(\frac{m}{3}+M\right)l^2\dot{\varphi}^2}{2}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{m}{3}+M\right)l^2}{\left(\frac{m}{2}+M\right)lg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3}+M}{\frac{m}{2}+M}}\sqrt{\frac{l}{g}}$

10.34. На горизонтальной плоскости находится цилиндр с моментом инерции I (относительно его геометрической оси), массой m и радиусом r. К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 279). Коэффициент упругости каждой пружины равен k; пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

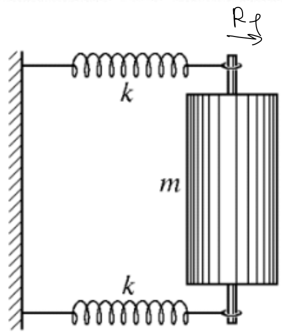
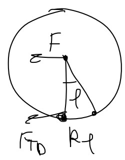


Рис. 279



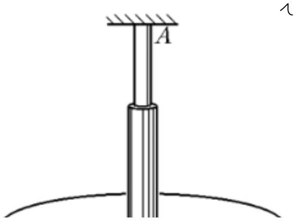
$F = 2kR\varphi$

$(I + mR^2)\ddot{\varphi} + 2kR\varphi = 0$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I+mR^2}{2kR}}$

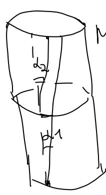
10.53. Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 294). Верхний конец A стержня неподвижно закреплен. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен T_1. Если бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным T_2.

Рис. 294



1) $M = -k\alpha$

2)



$M = k_0(\alpha_1+\alpha_2) = k_1\alpha_1 = k_2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = \frac{M}{k_1} + \frac{M}{k_2} = \frac{M}{k_0}$

$k_0 = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

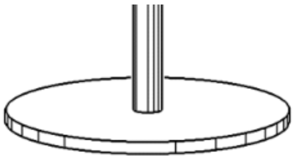
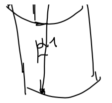


Рис. 294



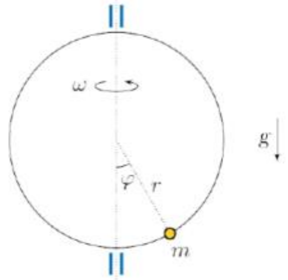
3) $I\ddot{\alpha}+k_1\alpha=0 \Rightarrow T_1=2\pi\sqrt{\frac{I}{k_1}}$

$I\ddot{\alpha}+k_2\alpha=0 \Rightarrow T_2=2\pi\sqrt{\frac{I}{k_2}}$

$I\ddot{\alpha}+k_0\alpha=0 \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{I}{k_0}}$

$\Bigg\} \quad T_1^2+T_2^2=T^2$

10. Гладкое кольцо радиуса r расположено вертикально и вращается относительно вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. По кольцу может двигаться небольшая бусинка массы m. Найдите положение равновесия бусинки и исследуйте их на устойчивость при различных значениях угловой скорости ω. Найдите частоту малых колебаний груза, если $r = 10$ см, $\omega = 5\ с^{-1}$. Для случая $\omega^2 r > g$ найдите значения ω, при котором частота колебаний груза будет равна $\omega/2$.



$$E=\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}+mg(1-\cos\varphi)r-\frac{m\omega^2r^2\sin^2\varphi}{2}$$

↑ г.п. ↑ ц.п.

1) Полож равн.: $E'=0$: $+mgr\sin\varphi-\frac{m\omega^2r^2}{2}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi=0$

$\dot{\varphi}=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\varphi=0\\ g-\omega^2r\cos\varphi=0\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\varphi=0 \rightarrow \cos\varphi=1 \quad \cos2\varphi=1\\ \cos\varphi=\frac{g}{\omega^2r}\rightarrow\cos2\varphi=\frac{2g^2}{\omega^4r^2}-1\end{array}\right.$

$E''>0$: $g\cos\varphi-\frac{\omega^2r}{2}\cdot 2\cos2\varphi>0$

$\sin\varphi=0$: $g-\omega^2r>0$ т.е. $\sin\varphi=0$ – уст. при $g>\omega^2r$

$\cos\varphi=\frac{g}{\omega^2r}$: $\frac{g^2}{\omega^2r}-\omega^2r\cdot\left(\frac{2g^2}{\omega^4r^2}-1\right)=\frac{g^2}{\omega^2r}-\frac{2g^2}{\omega^2r}+\omega^2r=\omega^2r-\frac{g^2}{\omega^2r}>0 \Leftrightarrow \omega^2r>g$ – уст. при $\omega^2r>g$.

при $\omega^2r=g$ $\sin\varphi=0$ – безразл. пол. равн.

2) При $g>\omega^2r$: $E=\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2+mgr\cdot\frac{\varphi^2}{2}-\frac{m\omega^2r^2}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}=\frac{mr^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2+\left(\frac{g}{r}-\omega^2\right)\varphi^2\right) \Rightarrow \Omega=\sqrt{\frac{g}{r}-\omega^2}$

При $\omega^2r>g$: $\dot{E}=0$: $mr^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+mgr\sin\varphi\,\dot{\varphi}-\frac{m\omega^2r^2}{2}\sin2\varphi\,\dot{\varphi}=0$

$r\ddot{\varphi}+g\sin\varphi-\frac{\omega^2r}{2}\sin2\varphi=0$

$\left|\begin{array}{l}\varphi=\tilde{\varphi}+\varphi_0,\quad\cos\varphi_0=\frac{g}{\omega^2r}\\ \sin\varphi=\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\tilde{\varphi}\\ \sin2\varphi=\sin2\varphi_0+\cos2\varphi_0\cdot2\tilde{\varphi}\end{array}\right\}$

$\ddot{\varphi}+\cancel{\frac{g}{r}\sin\varphi_0}+\frac{g}{r}\cos\varphi_0\tilde{\varphi}-\cancel{\frac{\omega^2}{2}\sin2\varphi_0}-\omega^2\cos2\varphi_0\tilde{\varphi}=0$

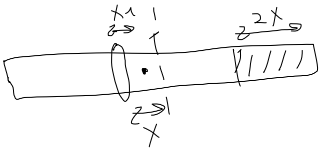
$\ddot{\tilde{\varphi}}+\tilde{\varphi}\left(\frac{g}{r}\cos\varphi_0-\omega^2\cos2\varphi_0\right)=0$

$\ddot{\varphi}+\tilde{\varphi}\left(\frac{g}{r}\cdot\frac{g}{\omega^2r}-\omega^2\left(\frac{2g^2}{\omega^4r^2}-1\right)\right)=0$

$\ddot{\varphi}+\tilde{\varphi}\left(\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2r^2}\right)=0 \Rightarrow \Omega=\sqrt{\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2r^2}}$

3) $\frac{\omega^2}{4}=\omega^2-\frac{g^2}{\omega^2r^2} \Rightarrow \frac{3\omega^2}{4}=\frac{g^2}{\omega^2r^2} \Rightarrow \omega^4=\frac{4g^2}{3r^2} \Rightarrow \omega=\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{g}{r}}$

9. В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.



$\left\{\begin{array}{l}m\upsilon_1+M\upsilon_2=0,\quad \upsilon=\upsilon_1-\upsilon_2\\ m\upsilon+m\upsilon_2+M\upsilon_2=0 \Rightarrow \upsilon_2=-\frac{m}{m+M}\upsilon\\ m\upsilon_1+M\upsilon_1-M\upsilon=0 \Rightarrow \upsilon_1=\frac{M}{m+M}\upsilon\end{array}\right\}$

$$F=-\frac{Gm}{(x+\frac{L}{2})^2}\cdot\frac{2x}{L}M=-\frac{8GmM}{L^3}\cdot\frac{x}{\left(1+\frac{2x}{L}\right)^2}\approx-\frac{8GmM}{L^3}x$$

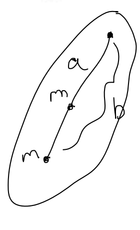
$$x_1 = \frac{M}{m+M}x \rightarrow m\ddot{x}_1 = F$$

$$m\ddot{x}_1 + \frac{8G\cancel{mM}}{L^3}\cdot\frac{M+m}{\cancel{M}}x_1 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{8G(M+m)}{L^3}$$

Колебания физического маятника (1А-2014)

К физическому маятнику массой m с моментом инерции J (относительно оси, проходящий через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний) прикрепляют в некоторой точке на расстоянии b от точки подвеса дополнительную точечную массу m. Найти расстояние b, при котором период колебаний окажется минимальным. Расстояние от точки подвеса маятника до исходного положения центра масс равно a. Точка подвеса маятника, центр масс и точка прикрепления дополнительного груза лежат на одной прямой.



1) $I' = I + mb^2$

2) $a' = \frac{ma+mb}{2m} = \frac{a+b}{2}$

3) $m' = 2m$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{m'ga'}} = 2\pi\sqrt{\frac{I+mb^2}{2mg\left(\frac{a+b}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{I+mb^2}{mg(a+b)}}$$

$$\frac{I+mb^2}{mg(a+b)} \rightarrow \max!\quad \frac{2mb\cdot \cancel{mg}(a+b) - (I+mb^2)\cancel{mg}}{(mg(a+b))^2} = 0$$

$$2mba + 2mb^2 = I + mb^2$$

$$mb^2 + 2ma\cdot b - I = 0$$

$$b = \frac{-ma + \sqrt{m^2a^2 + Im}}{m} = \sqrt{a^2 + \frac{I}{m}} - a$$

Вынужденные колебания (3А-2020)

При частотах синусоидальной вынуждающей силы $f_1 = 120$ Гц и $f_2 = 480$ Гц, приложенной к маятнику с вязким трением, амплитуды скоростей вынужденных малых колебаний одинаковы. Полагая амплитуду вынуждающей силы неизменной, найдите частоту f_0, соответствующую максимуму амплитуды скорости (резонансу скоростей).

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = A\cos\Omega t, \quad A\cos\Omega t = \mathrm{Re}\,Ae^{i\Omega t}$$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega^2 z = Ae^{i\Omega t}$$

$$z = Be^{i\Omega t}$$

$$\dot{z} = Bi\Omega e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{z} = -B\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

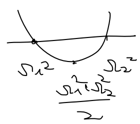
$$\rightarrow -B\Omega^2\cancel{e^{i\Omega t}} + 2\gamma Bi\Omega\cancel{e^{i\Omega t}} + \omega^2 B\cancel{e^{i\Omega t}} = A\cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$B = \frac{A}{2\gamma\Omega i + \omega^2 - \Omega^2} \Rightarrow B \in \mathbb{C}$$

$$|B| = \frac{A}{\sqrt{(2\gamma\Omega)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}} \rightarrow$$

при $\Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2 + \omega^4 + 4\gamma^2\Omega^2$

- кв. в. от. Ω^2 тогда



$$\rightarrow \boxed{\Omega_0^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2}}$$

10.22. Абсолютно твердый однородный стержень длиной l и массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов A (рис. 267). Стержень соединен с неподвижной точкой поверхности B невесомой пружиной жесткостью k, перпендикулярной стержню. В незакрепленный конец стержня C перпендикулярно ему ударяется со скоростью v маленький шарик массой m и прилипает к стержню. Найти амплитуду малых колебаний пружины. Считать, что за время удара пружина не деформируется.

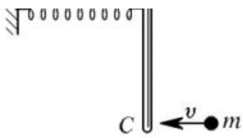
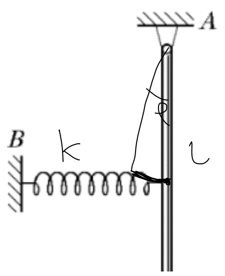


Рис. 267



1) $E = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2}{2} \Rightarrow \frac{kl^2}{8}\alpha^2 = E$

2) $\left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\omega_0 = mvl \rightarrow E = \frac{1}{2}\cdot\frac{(mvl)^2}{\frac{Ml^2}{3} + ml^2}$

$$\alpha^2 = \frac{8^4}{kl^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(mvl)^2}{Ml^2 + 3ml^2} = \frac{12m^2v^2}{(M+3m)kl^2}$$

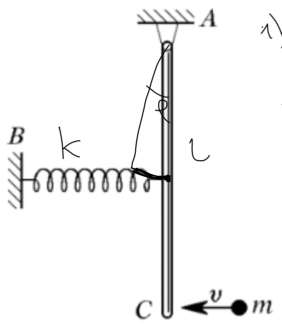


Рис. 267

1) $E = \left(\frac{Ml^2}{3}+ml^2\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2}{2} \Rightarrow \frac{kl^2}{8}\alpha^2 = E \quad \alpha^2 = \frac{8}{kl^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(mvl)^2}{Ml^2+3ml^2} =$

2) $\left(\frac{Ml^2}{3}+ml^2\right)\omega_0 = mvl \to E = \frac{1}{2}\cdot\frac{(mvl)^2}{\frac{Ml^2}{3}+ml^2} \quad = \frac{12m^2v^2}{(M+3m)kl^2}$