T.2. Докажите, что если для действительного x число $x+\frac{1}{x}$ оказалась целым, то при любом натуральном n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ тоже будет целым.

1) $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$, найдём $a_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}+x\right)^2 - 2 = a_1^2 - 2$ - целое

2) База: a_1, a_2 - целое

Шаг: для $n \geq 3$, тогда $a_n a_1$ {

a_n - целое

$a_{n+1} = \underbrace{a_n a_1 - a_{n-1}}_{\text{целое}}$

$S = \left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)\left(\frac{1}{x}+x\right) = \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n+1} + \frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1} = a_{n+1} + a_{n-1}$

T.3. Найдите формулу без многоточий для суммы геометрической прогрессии для действительного числа $x \neq -1$:

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n. = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

T.5. Докажите формулу для любого натурального числа n:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

n^3+6n^2+9n

База: $n=1$: $S_1 = \frac{1\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{6}$

Шаг инд: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+4)\cancel{(n+1)}^2}{4\cancel{(n+1)}(n+2)(n+3)}$ $n+1$

$(1+i)^{11} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{11} = \sqrt{2}^{11}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

$(\sqrt{3}+i)^8 = 2^8 e^{i\frac{\pi}{6}\cdot 8} = 256\cos\frac{4\pi}{3} + 256 i\sin\frac{4\pi}{3} = -128 - 128\sqrt{3}i$

T.7. Докажите, что три положительных действительных числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

$\begin{cases} a+b-c>0 \\ a+c-b>0 \\ c+b-a>0 \end{cases}$ - усл. сущ. тр $\Leftrightarrow$ $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)>0$

$(a^2+b^2+2ab-c^2)(c+a-b)(c-(a-b))>0$

$(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)>0$

$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2>0$

$a^4+b^4+c^4<2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$

T.17. Представьте в тригонометрическом виде комплексные числа

а) $\sqrt{3}+i$; б) $1+\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$.

а) $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ б) $1+\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9} =$ {  $x = \frac{\pi}{9} - x$, $x = \frac{\pi}{18}$, $|a| = 2\cos\frac{\pi}{18}$ } $= 2\cos\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$

T.18. Представьте в алгебраическом виде комплексные числа

а) $(1+i)^{11}$; б) $(\sqrt{3}+i)^8$.

T.16. Определите, какое множество на комплексной плоскости задаёт уравнение

а) $|z|^2 = z + \bar{z}$; б) $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$.

$x^2+y^2=2x$

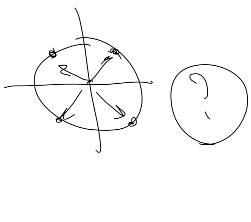
$(x-1)^2+y^2=1$

$z = x+iy \to (x-2)^2+y^2+(x+2)^2+y^2=26$

$2x^2+8+2y^2=26$

$x^2+y^2=9$

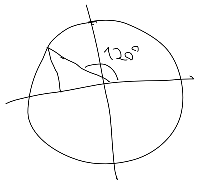
T.19. Найдите все корни уравнения $z^4+1=0$ и разложите многочлен $P(z)=z^4+1$ в произведение квадратных трёхчленов с действительными коэффициентами.



$z^4+1 = \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

T.20. Для данного натурального n найдите сумму всех биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ с k, делящимися на три.

Т.20. Для данного натурального n найдите сумму всех биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ с k, делящимися на три.



$$Q_1=\left(1+e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^n=\binom{n}{0}+e^{\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{1}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+e^{\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{4}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{5}+\binom{n}{6}$$

$$Q_2=\left(1+e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^n=\binom{n}{0}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{1}+e^{\frac{2\pi i}{3}}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots$$

$$\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}}+e^{-\frac{2\pi i}{3}}=-1\right\}$$

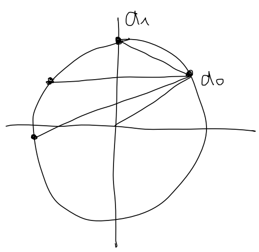
$$\left.\begin{matrix}Q_1+Q_2=2\binom{n}{0}-\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\ldots\\ Q_3=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\end{matrix}\right\}\ \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{3}=\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\ldots$$

$$\left.\begin{matrix}Q_1=\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=e^{\frac{i\pi n}{3}}\\ Q_2=\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=e^{-\frac{i\pi n}{3}}\end{matrix}\right\}\ Q_1+Q_2=2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$S=\frac{2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+2^n}{3}$$

Т.21. Пусть правильный n-угольник $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ вписан в единичную окружность. Найдите произведение длин отрезков

$$S=|A_0A_1|\cdot|A_0A_2|\ldots|A_0A_{n-1}|.$$



$$x^n+1=0\Rightarrow(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots\Rightarrow\boxed{(x-a_1)(x-a_2)\ldots=\frac{x^n+1}{x-a_0}}=f(x)$$

$$S^2=\prod_{k=1}^{n}(a_0-a_k)\prod_{k=1}^{n}\overline{(a_0-a_k)}=\underbrace{\lim_{x\to a_0}\frac{x^n+1}{x-a_0}}_{w}\ \overline{\lim_{x\to a_0}\frac{x^n+1}{x-a_0}}$$

$$w=\lim_{x\to a_0}\frac{x^n+1}{x-a_0}=\lim_{x\to a_0}\frac{nx^{n-1}}{1}=na_0^{n-1}$$

Ответ: n

1) n-нечёт: $a_0=-1$; $S^2=n\cdot(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(-1)^{n-1}=n^2\Rightarrow S=n$

n-чёт, $n=4k-2$: $S^2=n\,i^{n-1}\,n(-i)^{n-1}=n^2\Rightarrow S=n$

n-чёт, $n=4k$: $S^2=n(-i)^{n-1}\,n(i)^{n-1}=n^2\Rightarrow S=n$

Т.22. Докажите, что если натуральные числа a и b представляются в виде суммы двух квадратов различных натуральных чисел, то их произведение ab представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

$$\left.\begin{matrix}a=|m_1|^2\\ b=|m_2|^2\end{matrix}\right\}\ ab=\left[|m_1||m_2|\right]^2=m_1\overline{m_1}m_2\overline{m_2}=m_1\overline{m_2}\cdot m_2\overline{m_1}=(aq+bp)^2+(bq-pa)^2$$

$$\left.\begin{matrix}m_1=a+bi\\ m_2=q+pi\end{matrix}\right\}\ m_1\overline{m_2}=(a+bi)(q-pi)=$$

$$=aq+bp+i(bq-pa)$$

$$\overline{m_1}m_2=(a-bi)(q+pi)=$$

$$=aq+bp-i(bq-pa)$$

Т.10. В условиях предыдущей задачи, при каких m и $r\in\mathbb{Z}/(m)$ можно корректно определить деление на r в $\mathbb{Z}/(m)$?

1) Пусть m-простое: рассм $[k\cdot r]$, $k\in\{0,1\ldots m-1\}$ $[r]\neq[0]$

Док-жем, что $\neg\exists\,k_1,k_2$, что $k_1r\sim k_2r$: Пусть $[k_1r]=[k_2r]$

$[k_1][r]=[k_2][r]$

$[k_1-k_2][r]=[0]=[m]\Rightarrow(k_1-k_2)r\,\vdots\,m\Rightarrow\left.\begin{cases}r<m\\ k_1,k_2<m\end{cases}\right\}\Rightarrow m$-составное-противоречие, ЧТД.

т.к. $|\mathbb{Z}/m|=m$ и $\{k\cdot r\,|\,k\in\{1,2\ldots m-1\}\}$, то найдется $[k]\cdot[r]=[1]\Rightarrow[k]=[r]^{-1}$

$\{[0]\ [1]\ [2]\ \ldots\ [m-1]\}=\mathbb{Z}/m$

$\{[0\cdot r]\ [1\cdot r]\ \ldots\ [(m-1)\cdot r]\}=\mathbb{Z}/m$

$m\,\vdots\,r$ тогда $m=r\cdot k$,

$\{[0\cdot r]\,[1\cdot r]\,\ldots\,[(m-1)\cdot r]\} = \mathbb{Z}/m$

2) Пусть m-составное: 1) пусть $m \vdots r$, $[r] \neq 1 \in \mathbb{N}$, тогда $m = r \cdot k$,

$[r][k] = [m] = [0]$

Д-жем: если $[r][k] = [0]$, то для $[r]$ не сущ $[r]^{-1}$: Пусть $[r][k] = [0]$ и $\exists [r]^{-1}$, тогда

$[r]^{-1}[r][k] = [r]^{-1}\cdot[0] = [0]$

$[k] = [0]$

$k = qm \Rightarrow m = qm \cdot r$

$r = \frac{1}{q} \Rightarrow r = 1$ — противоречие.

Тогда при $m \vdots r$ для $[r]$, $[r] \neq [1]$ $\neg\exists [r]^{-1}$

2) При $[r] = [1]$: $[1][1] = [1]$

3) При $m \not\vdots r$: Аналогично п 1.

Ответ: при m-простое "\" опр. для $\forall [r] \neq [0]$

при m-сост "\" опр для $\forall [r]$, ($[r] = [1]$ или $m \not\vdots r$) и $[r] \neq [0]$

T.12. Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant b_1$ и $a_2 \leqslant b_2$

Рассм множество $\{(1,2); (2,1); (2;2)\}$

$(1,2) \preccurlyeq (2;2) \Rightarrow (1,2)$ - мин. элемент

$(2,1) \preccurlyeq (2;2) \Rightarrow (2,1)$ - мин. элемент

T.13. Докажите, что в любом непустом множестве натуральных чисел существует минимальный элемент.

$A \subseteq \mathbb{N}$, без мин. эл.

Рассм $B(n) = A \cap C(n)$, $C(n) = \{q \in \mathbb{N} \mid q \leqslant n\}$

База инд: $B(1) = \varnothing$, иначе бы $1 \in A$, 1 - мин. эл.

Шаг. инд. $B(n) = \varnothing \overset{?}{\Rightarrow} B(n+1) = \varnothing$ Если $B(n+1) \neq \varnothing$, $B(n) = \varnothing$, то есть $q \leqslant n+1$, нет $q \leqslant n$ $\}$ $q = n+1$ - мин эл. в A. - прот.

Тогда доказано, что $B(n) = \varnothing$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \varnothing$ - противоречие.

T.25. На множестве четвёрок действительных чисел (a, b, c, d), записываемых в виде $a + ib + jc + kd$ (с формальными знаками i, j, k), введём умножение аналогично комплексным числам по более сложным правилам:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у всякого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

$A = a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1$, $B = a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2$ $\}$ $AB = a_1a_2 + ia_1b_2 + ja_1c_2 + ka_1d_2 + ib_1a_2 - b_1b_2 + kb_1c_2 - jb_1d_2 + jc_1a_2 - kc_1b_2 - c_1c_2 + ic_1d_2 + kd_1a_2 + jd_1b_2 - id_1c_2 - d_1d_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2) + j(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2) + k(a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) = 1$

$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 & 1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} a & -b & -c & -d & 1 \\ b & a & -d & c & 0 \\ & & & b & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ $\{$ найдем гл опр. Δ $\}$ $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \neq 0$ при $a \neq 0$

$kd_1a_2+j\ldots$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 & 1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & 0 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 & 0 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a & -b & -c & -d & 1 \\ b & a & -d & c & 0 \\ c & d & a & -b & 0 \\ d & -c & b & a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{найдем гл} \\ \text{опр. } \Delta \end{array}\right\} \Delta = \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \neq 0$$

при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

$\forall B\ \exists A$ т.ч. $A \cdot B = 1$ чтд.

Т.26. Решите в кватернионах уравнение

а) $q^2 - 1 = 0$; б) $q^2 + 1 = 0$.

а) $q^2 = 1 \Rightarrow |q| = 1 \Rightarrow |\tilde{q}| = 1 \Rightarrow |q^{-1}| = 1 \sim \tilde{q} = q^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} q = a+bi+cj+dk \\ q^{-1} = a-bi-cj-dk \end{array}\right\}$ $a+bi+cj+dk = a-bi-cj-dk \Rightarrow b,c,d = 0 \Rightarrow q = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow q = \pm 1$

$q = \pm 1$

б) $q^2 = -1 \Rightarrow |q| = |\tilde{q}| = |q^{-1}| = 1 \sim \tilde{q} = q^{-1}$

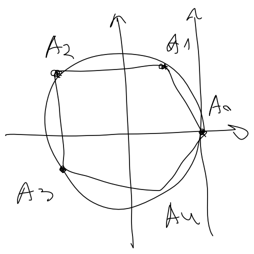
$q = -q^{-1}$

$a+bi+cj+dk = -a+bi+cj+dk$

$a = 0 \Rightarrow q = bi+cj+dk$

$|q| = 1 \Rightarrow \boxed{b^2+c^2+d^2 = 1}$

Т.21. Пусть правильный n-угольник $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ вписан в единичную окружность. Найдите произведение длин отрезков



$|A_0A_1| \cdot |A_0A_2| \ldots |A_0A_{n-1}|$. без пределов. $w = z-$

все т. $A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ это реш $z^n = 1$

Если ~~в~~ смотреть ур $(w+1)^n = 1$, то так о енр. сдвигает м-ть на -1 в право. в т. A_0.

$(w+1)^n - 1 = 0 \Leftrightarrow w^n + nw^{n-1} + \ldots nw + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow w(w^{n-1} + \ldots + n) = 0$

по т. Виетта:

$\underline{w_{A_0} = 0}$; $w_{A_1}w_{A_2} \ldots w_{A_{n-1}} = n$

$|A_0A_1||A_0A_2| \ldots |A_0A_{n-1}| = n$

Т.24. Покажите, что утверждение предыдущей задачи неверно, если кольцо $\mathbb{Z}[i]$ заменить на кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + \sqrt{-3}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

$(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = 4 = 2 \cdot 2$

Д-жем, что 2 - простое в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$: $2 = (a_1+\sqrt{-3}b_1)(a_2+\sqrt{-3}b_2)$ $\}$ пер. к N

$4 = (a_1^2+3b_1^2)(a_2^2+3b_2^2)$

т.к. $N(a_1+\sqrt{-3}b_1) > 1$, то $\left.\begin{array}{l} a_1^2+3b_1^2 = 2 \\ a_2^2+3b_2^2 = 2 \end{array}\right\}$ $b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}$ - против.

Т.27. Является ли ограниченной последовательность, заданная формулой

а) $\dfrac{n^4+n^2+1}{(n+1)^2}$; б) $2^{(10-n)(10n-1)}$; в) $n^{(-1)^n}$?

а) $\dfrac{n^4+n^2+1}{(n+1)^2} > M$

$\dfrac{n^4+n^2+1}{n^2(n+1)^2} > \dfrac{M}{n^2}$

$\dfrac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\ldots} > \dfrac{M}{n^2}$

б) $2^{(10-n)(10n-1)}$

1) $2^{(10-n)(10n-1)} > 0$

2) $(10-n)(10n-1) =$

$100n - 10 - 10n^2 + n =$

$= -10x^2 + 101x - 10 =$

$$\frac{\dots}{n^2(n+1)^2} > n^{\dots}$$

$$\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{(1+\frac{1}{n})^2} > \frac{M}{n^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4} \geqslant 3 \\ (1+\frac{1}{n})^2 \leqslant 2 \end{array} \right\}$$

$$\frac{3}{2} > \frac{M}{n^2}$$

$$\frac{3n^2}{2} > M, \quad \boxed{n = M}$$

$$100n - 10 - 10n^2 + n =$$

$$= -10x^2 + 101x - 10 =$$

$$= -(x - \frac{101}{20})^2 + \frac{9801}{40} \leqslant \frac{9801}{40} < 246$$

$$0 < 2^{(10-n)(10n-1)} < 2^{246}$$

T.28. Докажите, что заданная формулой последовательность является монотонной, начиная с некоторого момента:

а) $\sqrt{2n^2} - \sqrt{n^2+100}$; б) $\dfrac{n-2}{\sqrt{n^2+2}}$; в) $\sin\frac{100}{n}$.

а) $\sqrt{2(n+1)^2} - \sqrt{(n+1)^2+100} - \sqrt{2n^2} + \sqrt{n^2+100} > \sqrt{2} + n - \sqrt{(n+1)^2+100} \; \{n>99\} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $n>99$ пос. монотонна.

$$\sqrt{2}+n \vee \sqrt{(n+1)^2+100}$$

$$2+n^2+2\sqrt{2}n \vee (n+1)^2+100 = n^2+1+2n+100$$

$$2n(\sqrt{2}-1) \vee 99 \quad \{\sqrt{2}>1\}$$

$$n \vee \frac{99}{2(\sqrt{2}-1)}$$

при $n>99$: $\sqrt{2}+n-\sqrt{(n+1)^2+100}>0$

б) $\dfrac{n-1}{\sqrt{(n+1)^2+2}} - \dfrac{n-2}{\sqrt{n^2+2}}$

$$\frac{n-1}{\sqrt{(n+1)^2+2}} \vee \frac{n-2}{\sqrt{n^2+2}}$$

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2+2} \vee \frac{(n-2)^2}{n^2+2}$$

$$(n-1)^2(n^2+2) \vee (n-2)^2((n+1)^2+2)$$

$$\cancel{n^4} - \cancel{2n^3} + 3n^2 - 4n + 2 \vee \cancel{n^4} - \cancel{2n^3} - n^2 - 4n + 12$$

$$4n^2 \vee 10$$

$$n^2 \vee \frac{5}{2}$$

при $n>1$ пос. монотонна.

в) $\sin\frac{100}{n+1} - \sin\frac{100}{n} = 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{100}{n+1}-\frac{100}{n}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{100}{n+1}+\frac{100}{n}\right) = 2\sin\left(-\frac{50}{n(n+1)}\right)\cos\left(\frac{100n+50}{n(n+1)}\right) \ominus$

$\ominus -2\sin\left(\frac{50}{n(n+1)}\right)\cos\left(\frac{100n+50}{n(n+1)}\right) < 0 \; \{n>100\}$ чтд.

при $n>100$: $n(n+1)>10000$ $\quad \left| \alpha \frac{100n+50}{n(n+1)} = \frac{100+\frac{50}{n}}{n+1} < \frac{150}{n+1} < \{n>100\} < \frac{3}{2} \right|$

$0 < \frac{50}{n(n+1)} < 0{,}005$ $\quad \Downarrow$

$\Downarrow$ $\quad \cos\left(\frac{100+\frac{50}{n}}{n+1}\right) > 0$

$\sin\frac{50}{(n+1)n}$ — лежит 1 ч. >0

T.29. Докажите по определению предела последовательности

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{2+n} = -1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2} = 1$.

а) $\forall \varepsilon>0 \; \exists N\in\mathbb{N} \; \forall n>N \; |a_n-a|<\varepsilon$

$$0 < \left|\frac{2-n}{2+n}+1\right| = \left|\frac{2-n+2+n}{2+n}\right| = \left|\frac{4}{2+n}\right| < \frac{4}{n}$$

$$0 < |a_n - a| < \frac{4}{n}$$

$\{$по лемме $\forall\varepsilon>0 \; \exists n\in\mathbb{N} \; \frac{1}{n}<\varepsilon\}$

$|a_n-a| < 4\varepsilon$ чтд.

б) $\left|\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}-1\right| = \left|\dfrac{n^2+1-n^2-1-2n}{(n+1)^2}\right| = \dfrac{2n}{(n+1)^2} < \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$

$|a_n - a| = \frac{2}{n} < 2\varepsilon$ чтд.

T.31. Приведите примеры последовательностей (x_n) и (y_n), стремящихся к нулю, и таких, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$:

а) равен 0; б) равен 1; в) равен $+\infty$; г) не существует.

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$ $\; y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$

$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{n} \to 0$

$0 < b < 0$

б) $x_n = \frac{1}{n}$ $\; y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$

в) $x_n = \frac{1}{n}$ $\; y_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{1/n}{1/n^2} = n \to \infty$

$0 < \frac{b}{a} < \frac{y}{a}$

б) $x_n = \frac{1}{n}$ $y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$

в) $x_n = \frac{1}{n}$ $y_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{1/n}{1/n^2} = n \to \infty$

г) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{1/n}{(-1)^n/n} = (-1)^n$ – расх.

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$$
$$0 \le 0 \le 0$$

T.34. Найдите предел последовательности, заданной формулой с действительным $a > 0$:

а) $\sqrt[n]{a}$; б) $\dfrac{a^n}{n!}$; в) $\dfrac{n^k}{a^n}$, где k целое.

б) $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a^a}{a!} \cdot \dfrac{a!\,a^{n-a}}{n!} < \left\{ \dfrac{n!}{a!} > (a+1)^{n-a} \right\} < \dfrac{a^a}{a!} \cdot \dfrac{a^{n-a}}{(a+1)^{n-a}} = \dfrac{a^a}{a!} \cdot \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{n-a} \to 0 \quad \left\{ \dfrac{a}{a+1} < 0 \right\}$

в) $\dfrac{n^k}{a^n}$:

	$k<0$	$k=0$	$k>0$
$0<a<1$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$a=1$	0	1	$+\infty$
$a>1$	0	0	0

$k>0;\ a>1$: $\dfrac{n^k}{a^n} = \left(\dfrac{n}{a^{n/k}}\right)^k = \left\{ q = a^{n/k} > 1 \right\} =$

$= \left(\dfrac{n}{q^n}\right)^k = \left[\dfrac{n}{(1+b)^n}\right]^k \{b>0\} <$

$< \left[\dfrac{n}{1+bn+\frac{n(n-1)b}{2}}\right]^k < \left[\dfrac{n}{\frac{n^2 b}{4}}\right]^k < \left[\dfrac{4}{bn}\right]^k \to 0$

$0 < \dfrac{n^k}{a^n} < 0$, $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0$

$k<0;\ 0<a<1;$ аналог. $k' = -k$, $a' = \frac{1}{a}$ | $\dfrac{a'^n}{n^{k'}} \to +\infty$

T.36. Найдите предел последовательности, заданной формулой:

а) $\sqrt[n]{n}$; б) $\sqrt[n]{3^n + n^2 2^n}$.

а) $0 < \sqrt[n]{n} - 1 \overset{?}{<} \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$

$\underline{\underline{n}} < \left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{n} + O(n) =$

$= 1 + n - 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} + O(n) = \underline{\underline{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + O(n)$

$\sqrt{\frac{2}{n}} + O(n) > 0$ – т. истина.

б) $\sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{3^n + n^2 2^n} < \sqrt[n]{3^n + n^2 3^n}$

$3 < \sqrt[n]{3^n + n^2 2^n} < 3\sqrt[n]{1+n^2} < 3 \cdot \sqrt[n]{n^3} = 3 \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n]{n} \to 1$

$3 \to 3$, $\sqrt[n]{3^n + n^2 2^n} \to 3$

T.37. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентно как

а) $x_1 = 13$, $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$; б) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

$\left.\begin{array}{l} x_{n+1}^2 = 12 + x_n \\ x_{n+2}^2 = 12 + x_{n+1} \end{array}\right\} (x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} + x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n$

База инд: $x_2 = 5$ $x_1 = 13 \Rightarrow x_2 < x_1$

Шаг. инд: $x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow (x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} + x_{n+1}) < 0 \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} < 0$

Тогда послед. монотонно уб и $\forall n\ x_n > 0$. $\Rightarrow$ по т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Тогда $a = \sqrt{12 + a}$

$a = 4$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$

Т.38. Приведите пример последовательностей (x_n) и (y_n), для которых $x_n < y_n$ при любом n, но они сходятся к одному и тому же числу.

$(x_n) = \frac{1}{n+1}$

$(y_n) = \frac{1}{n}$ $\to$ $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$; $0 \to 0$, $\frac{1}{n+1} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

Т.40. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin \cancel{2} k}{\cancel{k}a^2}$,

фундаментальна.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{\sin k}{k^2}\right| < \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ при $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$

Т.43. Имеет ли предел последовательность $n^{(-1)^n}$?

$n^{(-1)^n} = \begin{cases} n, & n = 2k \\ \frac{1}{n}, & n = 2k-1 \end{cases}$, тогда пусть $n_k = 2k$, тогда $n^{(-1)^n} = n$

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} = +\infty$

пусть пусть $n_k = 2k-1$, тогд $n^{(-1)^n} = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = 0$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n \neq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} n$

Т.45. Может ли множество частичных пределов последовательности (x_n) быть равно $\left\{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$?

Р-рим $U(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, тогда $\exists n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} \in U \Rightarrow$ т.к. $\frac{1}{n}$-част. предел, то $\frac{1}{n}$-т. сгущения $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в U поп. беск. мн. эл. $(x_n) \Rightarrow 0$ - тоже т. сгущ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0$ - част. предел (x_n), но $0 \notin \left\{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

ЧТД.

Т.15. $g: Y \to X$ и $f: X \to Y$ $\quad f \circ g = id_Y \Leftrightarrow f$-сюръективна.

1) $\Rightarrow$ $\forall y \in Y$ $\quad f(g(y)) = y \Rightarrow \forall y\ \exists x \in X, x = g(y)$ т.ч. $f(x) = y$

2) $\Leftarrow$ $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ $f(x) = y$, тогда построим $\quad g(y) = x$, т.ч. $f(x) = y$

если $\exists$ если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ выберем в g один из x_1, ~~[illegible]~~ x_2.