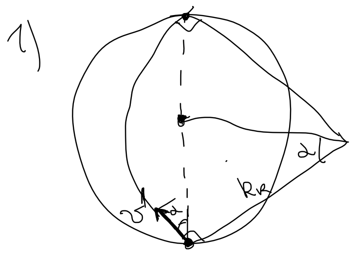
12.27. С какой скоростью v_0 должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы «взлететь» (потерять вес). Автобус преодолевает вершину холма (неровного участка дороги) с радиусом кривизны $R = 42$ м. Скорость автобуса $u = 72$ км/ч. Считать, что человек находится в центре автобуса.

Рис. 318

$$\omega = \frac{u}{R}, \quad F_K = 2m v_0 \omega = 2m v_0 \frac{u}{R} = mg \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{gR}{2u}}$$

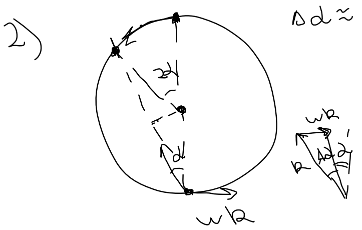
12.19. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

1)



$$a_1 = 2v\omega \to \frac{v^2}{R_k} = 2v\omega \Rightarrow R_k = \frac{v}{2\omega} \Rightarrow \sin\alpha = \left(\frac{2\omega R}{v}\right) \Rightarrow \alpha \approx 1{,}2^\circ$$

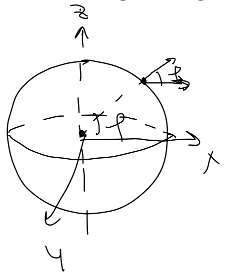
2)



$$\Delta\alpha \approx \frac{\omega R}{v}: \quad \left.\begin{aligned} \omega t &= 2\left(\alpha - \frac{\omega R}{v}\right) \\ v t &= 2\cos\left(\alpha - \frac{\omega R}{v}\right) R \end{aligned}\right\} \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\omega R}{v}\right)}{\alpha - \frac{\omega R}{v}} = \frac{v}{\omega R} \Rightarrow \alpha \ll 1$$

$\alpha \approx 1{,}2^\circ$

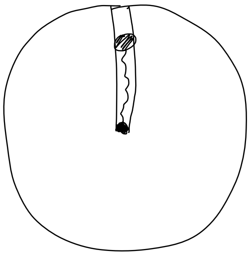
12.7. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.



Смещение на восток будет давать только сила Кориолиса. $F = 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}]$
причём из-за симметрии полёта её вклад будет симметричным вверх и вниз.

$g_э = \underline{g - \omega^2 R \cos^2\varphi}$

12.80. Диск достаточно большого радиуса вращается с угловой скоростью Ω в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси. В диске имеется узкий канал, проходящий через ось диска (рис. 338). В канале к пружине с жесткостью k, закрепленной на оси диска, присоединен груз массой m. Найти амплитуду колебаний груза. Трением груза о стенки трубки пренебречь, считать $\Omega^2 < k/m$.



$F_т = mg\cos(\Omega t)$

$ma = mg\cos(\Omega t) - kx + m\Omega^2 x$

$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)}_{\omega_0^2} x = g\cos(\Omega t)$

$\tilde{x} = A_0\cos(\Omega t) \Rightarrow \ddot{\tilde{x}} = -A_0\Omega^2\cos(\Omega t)$

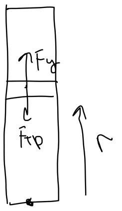
$-A_0\Omega^2 + A_0\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = g$

$A_0 = \frac{g}{\frac{k}{m} - 2\Omega^2}$

$x = \underbrace{\cancel{A\cos(\omega_0 t + \varphi)}}_{\to 0} + \left(\frac{g}{\frac{k}{m} - 2\Omega^2}\right)\cos(\Omega t)$

положении равновесия.

12.48. На горизонтально расположенный стержень надета небольшая муфта, которая может перемещаться вдоль стержня. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 324). В начальный момент времени муфта находится на расстоянии r_0 от оси вращения и имеет скорость v_0, направленную от оси вращения. Далее оказалось, что скорость муфты v относительно стержня растет линейно с удалением от оси вращения $v = v_0 r/r_0$. При каком коэффициенте трения k между муфтой и стержнем возможно такое движение? Силой тяжести пренебречь.



v раст. лин. т.е. $F_y - F_{тр} = const = ma$

$v = \frac{v_0 r}{r_0} \Rightarrow a = \frac{v_0}{r_0} v = \frac{v_0^2}{r_0^2} r$

$m\omega^2 r - kN = m\frac{v_0^2}{r_0^2} r$, $N = 2m\omega v = 2m\omega\frac{v_0 r}{r_0}$

$\omega^2 - 2k\frac{\omega v_0}{r_0} = \frac{v_0^2}{r_0^2}$

$k = \frac{\omega^2 - \frac{v_0^2}{r_0^2}}{2\frac{\omega v_0}{r_0}}$

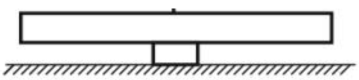


Рис. 341

12.82. Ноги циркового гимнаста прикреплены в точке O к вертикально расположенному стержню, который вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью $\Omega = 3{,}1\ с^{-1}$ (рис. 340). Гимнаст описывает круговой конус. Определить угол α между гимнастом и вертикальной осью, силу реакции N в точке O и угол φ между направлением силы реакции и вертикальной осью. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной $l = 1{,}75$ м.

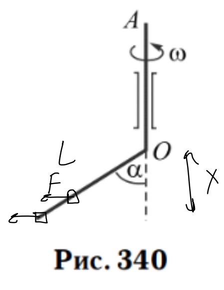
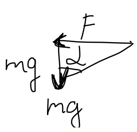


Рис. 340

$dF = dm\,\omega^2 x\,\mathrm{tg}\alpha$, $dm = dx\cdot\frac{m}{L}$

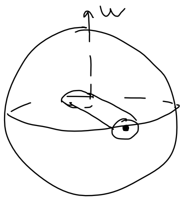
$dF = \frac{\omega^2\mathrm{tg}\alpha\, m}{L} x\,dx \Rightarrow F = \frac{\omega^2\mathrm{tg}\alpha\, m}{L}\cdot\frac{L^2\cos^2\alpha}{2} = \frac{m\omega^2 L\sin 2\alpha}{4}$



$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 L\sin\alpha\cos\alpha}{2g} \Rightarrow 2g = \omega^2 L\cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{2g}{\omega^2 L}}$

12.70. Представьте себе, что в земном шаре в плоскости эквато-

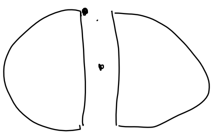
12.70. Представьте себе, что в земном шаре в плоскости экватора вырыта шахта до центра Земли. Оценить минимальный диаметр шахты, чтобы тело небольших размеров, брошенное в нее, долетело до центра Земли, не ударившись о стенку шахты. Плотность Земли считать постоянной, сопротивлением воздуха пренебречь.



$$g = g_0 \frac{r}{R} \to g^* = g_0 \frac{r}{R} - w^2 r = \left(\frac{g_0}{R} - w^2\right) r$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R} - w^2} \Rightarrow x = A \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R} - w^2}\, t\right)$$

$$\dot{x} = -A w_0 \sin(w_0 t)$$



$$F_k = 2mw\dot{x} = -2Amw_0 w \sin(w_0 t)$$

$$v_\perp = 2A\, w(\cos(w_0 t) - 1)$$

$$d = x_\perp = 2A\, w\left(\frac{\cos(w_0 t)}{w_0} - t\right)\Bigg|_0^{T/2}$$

$$d = 2R\, w\left(\frac{2}{w_0} - \pi \frac{1}{w_0}\right) \Rightarrow d = 2\frac{R w}{w_0}(2 - \pi)$$