Системы лин. ур.

7 февраля 2024 г. 12:21

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$ – с-ма лин. ур.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ тогда с-ма экв. $A\bar{x} = \bar{b}$

$\tilde{A}$ – расш. матрица с-мы $\tilde{A} = (A \mid \bar{b})$

Также можно записать $A = (\bar{a}_1 | \bar{a}_2 | \ldots \bar{a}_n) \to A\bar{x} = \bar{b} \sim \bar{a}_1 x_1 + \ldots + \bar{a}_n x_n = \bar{b}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ с-ма совместна если имеет хотя бы 1 решение.

$\boxed{\text{Критерий совместности}}$: $\langle \bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n \rangle \subseteq K^m$, тогда с-ма разрешима $\Leftrightarrow \bar{b} \in \langle \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \rangle$

$\dim \langle \bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \rangle = \operatorname{rk} A = r$, тогда с-ма разрешима $\Leftrightarrow \underline{\operatorname{rk}\tilde{A} = \operatorname{rk} A}$.

– Т-ма Кронекера-Капелли.

I. с-ма ур. разрешима $\forall \bar{b} \Leftrightarrow \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle = K^m \Leftrightarrow \operatorname{rk} \underset{m\times n}{A} = m \Leftrightarrow$ строки A – ЛНЗ.

II. Пусть с-ма разрешима для $\bar{b}$ тогда реш. ед $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n \Leftrightarrow$ столбцы – ЛНЗ.

III. если $A = A_{n\times n}$ и $\det A \neq 0$, то решение ед для $\forall \bar{b}$.

С-ма наз-тся однородной если $\bar{b} = \bar{0}$ (СЛОУ)

С-ма неоднородна если $\bar{b} \neq \bar{0}$ (СЛУ)

(Т) 1) М-во решений одн с-мы $A\bar{x} = \bar{0}$ явл. лин. подпр. пр. K^n

2) М-во решений совм. с-мы $A\bar{x} = \bar{b}$ явл. суммой частного решения и общего решения $A\bar{x} = \bar{0}$

(Д-во) 1) $U \subset V$ если $U \neq \varnothing$ $U \ni \bar{0}$, $\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in U$
$\forall \lambda \in K, \bar{u} \in U$ $\lambda\bar{u} \in U$

$$\left.\begin{aligned} &\sim U\text{ – непуст. р.к. } \bar{0} \in U \\ &\sim \left.\begin{aligned} A\bar{u}_1 = 0 \\ A\bar{u}_2 = 0 \end{aligned}\right\} A(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = 0 \Rightarrow \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in U \\ &\sim A\bar{u}_1 = 0 \to A(\lambda\bar{u}_1) = 0 \Rightarrow \lambda\bar{u}_1 \in U \end{aligned}\right\} U = \operatorname{sol}(A\bar{x} = \bar{0})$$

2) $\exists \bar{x}_1$ – ещё одно решение $A\bar{x} = 0$, то $\bar{x}_1 - \bar{x}_0$ – реш $A\bar{x} = 0$

$A\bar{x}_0 = b = -\bar{x}_1 \Rightarrow A(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \bar{y}$, $\bar{y} \in \operatorname{sol}(A\bar{x} = 0)$

$(\Leftarrow)$ $\bar{x}_0 + \bar{y}$ $\quad A(\bar{x}_0 + \bar{y}) = \underbrace{A\bar{x}_0}_{\bar{b}} + \underbrace{A\bar{y}}_{0} = \bar{b} \Rightarrow \bar{x}_0 + \bar{y} \in \operatorname{sol}(A\bar{x} = \bar{b})$

Размерность пр-ва $\quad$ - . $\operatorname{sol}(A\bar{x} = \bar{0}) \subseteq K^n$

(Т). $\dim \operatorname{sol}(A\bar{x} = \bar{0}) = n - \operatorname{rk} A$

(Д-во). (Опр) две с-мы экв если у них идент. мн-ва решений.

$A \to A' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$ назовём главные столбцы / главные переменные
остальные переменные – свободные.

... в/дк ... свободные.

Тогда получим выражение для главных переменных через свободные.

Пусть главные пер. идут подряд $(x_1 \dots x_r)$ — главные пер

$$A' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + c_{11}x_{r+1} + \dots + c_{1\,n-r}x_n = 0 \\ \vdots \\ x_r + c_{r1}x_{r+1} + \dots = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{11} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{12} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} -c_{1\,n-r} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ — столбцы ЛНЗ

Опр ФСР — произвольный базис $Sol(A\bar{x}=\bar{0})$

$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \dots \bar{\varphi}_{n-r})$

Для решения: $\Phi = \begin{pmatrix} -C \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ $\left\{ A' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Т Матрица Φ — фунд матрица, если $\Phi = \Phi_{n\,n-r} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ A\Phi = 0 \\ 2)\ rk\Phi = n-r \end{cases}$

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть Φ-фунд $\Rightarrow rk\Phi = n-r$

$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \dots \bar{\varphi}_{n-r})$ $A\Phi = (A\bar{\varphi}_1, \dots A\bar{\varphi}_{n-r}) = (0, \dots 0) = 0$

$\Leftarrow$ $\Phi = (\bar{\varphi}_1, \dots \bar{\varphi}_{n-r})$ φ_i-решение и Φ-ЛНЗ $\to \Phi$- ФСР.

Обратная задача ФСР $\to$ с-ма

$A\bar{x} = \bar{0}$ $rkA = r$ Φ - фунд. матрица. $rk\Phi = n-r$

Предл. СЛОУ $\Phi^T\bar{y} = \bar{0}$ задаёт лин. об. ст. матрицы A^T

Д-во. $A\Phi = 0 \Rightarrow \Phi^T A^T = 0 \Rightarrow$ столбцы A^T явл. реш. СЛОУ $\Rightarrow A^T \subseteq Sol(\Phi^T\bar{y} = 0)$

$rkA^T = rkA = \underline{\underline{r}}$ $\cancel{rk}\,Sol(\Phi^T\bar{y}=0) = n-(n-r) = \underline{\underline{r}}$

Пример. $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \to \Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Следствие. $\forall$ подпр-во в K^n явл. пр-вом вида $Sol(A\bar{x}=0)$ некоторой СЛОУ.

Д-во $U \subset K^n$ тогда в U есть базис $\langle \bar{c}_1, \dots \bar{c}_k \rangle = U$ $\dim U = k$

$\Phi_{n \times k} = (\bar{c}_1, \dots \bar{c}_k)$ — решая с-му $\Phi^T\bar{y} = 0$ и её $\Psi \to A = \Psi^T$.

Операции над подпространствами. Сумма Пересечение. Прямая сумма

$U \subseteq V$ 1) $U \cap W$ — подпространство.

$W \subseteq V$ 2) $\langle U \cup W \rangle$ — подпространство.

3) $U + W = \{\bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W\} \subseteq V$ — подпространство.

Задача: $\langle U \cup W \rangle = U + W$

Задача: $U + W$ — наим. подпр-во содерж U и W

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

[illegible] $U+W$ — наим. подпр-во содерж. [illegible]

Задача:

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ & \cup & \\ & U+V & \\ \subset & & \cup \\ U & & V \\ \supset & & \cup \\ & U\cap V & \end{array}$$

Предл $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$

Д-во. $\dim U = k$, $\dim W = l$, $\dim(U\cap W) = p$

в $U+W$ построим базис: $\{e_1 \dots e_p\}$ — базис $U\cap W$

$\{e_1 \dots e_p \dots e_k\}$ — б. в U

$\{e_1 \dots e_p \dots e_{k-p} \dots e_{l-p}\}$ — б. в W, также базис в $U+W$?