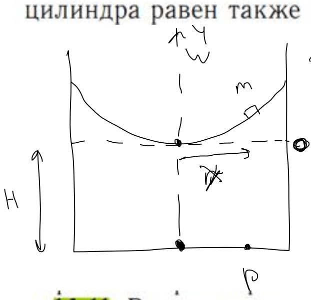
14.17. Найти распределение P давления на дне сосуда вдоль радиуса в условиях предыдущей задачи. Определить величину давления у стенок сосуда вблизи его дна, если сосуд вращается со скоростью 4 об/с. Высота столба воды на оси цилиндра равна 10 см. Радиус цилиндра равен также 10 см.



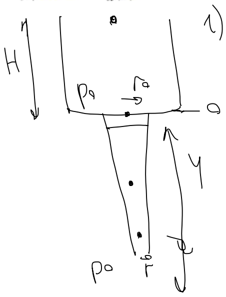
1) $-\frac{m\omega^2 x^2}{2} + mgy = const = 0$

$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2$

2) $p(x) = \rho g y + \rho g H = \rho g\left(H + \frac{\omega^2}{2g}x^2\right)$

14.11. В сосуд налита вода до высоты H. В дне сосуда проделано круглое отверстие радиусом r_0 (рис. 366). Найти радиус струи воды

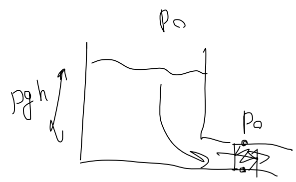
$r(y)$, вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния y от дна сосуда.



1) $p_0 + \rho g H + 0 = p_0 - \rho g y + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g(H+y)}$

2) $r_0^2 v_0 = r^2 v$, $v_0 = \sqrt{2gH}$ $\Big\}$ $r = r_0\sqrt{\frac{v_0}{v}} = r_0\sqrt[4]{\frac{H}{H+y}}$

14.27. Однородный по высоте сосуд с площадью сечения $S = 100$ см^2 залит водой до уровня $H = 10$ см. Вблизи дна вода от-



водится трубочкой диаметром $2r = 2$ мм и длиной $l = 1$ м (рис. 370). Трубочка открывается в атмосферу. По какому закону $h(t)$ вода вытекает из сосуда? Оценить также время, за которое вода вытечет из сосуда. Предполагается известной вязкость воды $\eta = 10^{-2}$ П.

$\cancel{p_0} + \rho g h + 0 = \cancel{p_0} + \frac{\rho v^2}{2} + 0$

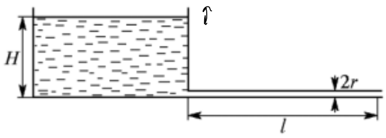
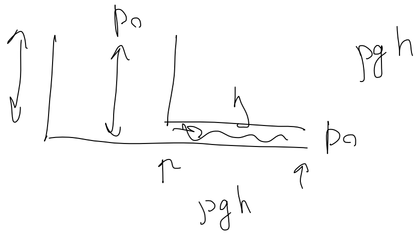


Рис. 370



$-S\frac{dh}{dt} = Q = \frac{\Delta p \pi r^2}{8\eta l} = \frac{\rho g h \pi r^2}{8\eta l}$

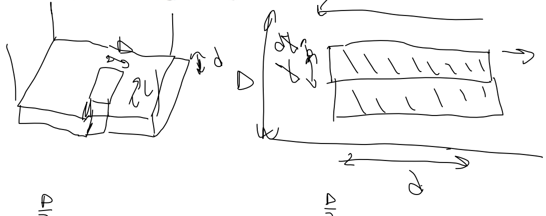
$+\frac{dh}{h} = -\frac{\rho g \pi r^2}{8\eta l S}dt$

$\ln\frac{h}{H} = -\frac{\rho g \pi r^2 t}{8\eta l S}$

14.24. В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель шириной $\Delta = 10^{-4}$ см и длиной $l = 5$ см. Толщина дна сосуда $d = 0{,}5$ мм. Найти максимальную скорость гелия в щели v_{max} и полный расход жидкости M, если высота столба гелия над дном сосуда $h = 20$ см. Плотность и вязкость гелия равны $\rho = 0{,}15$ г/см^3, $\eta = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ г/(см · с). (Расходом называется масса жидкости, протекающая через щель в течение одной секунды.)

$(p_1 - p_2)l \cdot x = -\eta l d\frac{dv}{dx}$

ность и вязкость гелия равны $\rho = 0{,}15$ г/см³, $\eta = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ г/(см · с). (Расходом называется масса жидкости, протекающая через щель в течение одной секунды.)



$$(p_1-p_2)L\cdot x = -\eta L d \frac{dv}{dx}$$

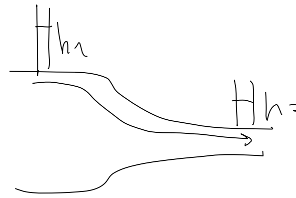
$$\frac{(p_1-p_2)}{\eta d} x\,dx = -dv$$

$$\frac{p_1-p_2}{\eta d}\int_x^{D/2} x\,dx = -\int_v^0 dv \Rightarrow v = \frac{p_1-p_2}{8\eta d}(D^2-x^2)$$

$$v_{max} = \frac{p_1-p_2}{8\eta d}D^2$$

$$Q = 2\int_0^{D/2} v\cdot dx\cdot L = 2L\frac{p_1-p_2}{48\eta d}\int_0^{D/2}(D^2-x^2)dx = \frac{p_1-p_2}{4\eta d}L\cdot\left(\frac{D^3}{2}-\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^3}{3}\right) = \frac{11(p_1-p_2)}{96}LD^3$$

14.42. Расходомер Вентури для измерения расхода жидкости представляет собой горизонтально расположенную коническую трубу с диаметром широкого участка $d_1 = 10$ см. При расходе воды через расходомер $Q = 10$ л/с высота подъема воды в трубке манометра, присоединенной к широкой части расходомера, $h_1 = 120$ см. Определить диаметр d_2 узкого участка расходомера, если высота подъема воды в трубке манометра, подсоединенной к этому концу трубы, равна нулю. Силами вязкости пренебречь.



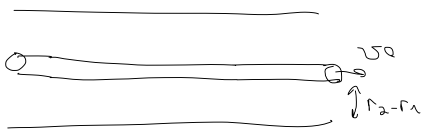
$$1)\ \frac{\rho v_1^2}{2} + \cancel{p_{атм}} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \cancel{p_{атм}} + \cancel{\rho g h_2}\ 0$$

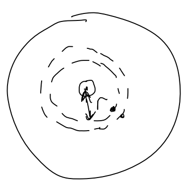
$$2)\ Q = \frac{\pi d_1^2}{4}v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}v_2 \to v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} \to v_2 = \sqrt{2gh_1 + \left(\frac{4Q}{\pi d_1^2}\right)^2}$$

$$d_2 = d_1\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = d_1\sqrt{\frac{4Q/\pi d_1^2}{\sqrt{2gh_1+\left(\frac{4Q}{\pi d_1^2}\right)^2}}}$$

14.21. Проволоку радиусом $r_1 = 1$ мм протягивают с постоянной скоростью $v_0 = 10$ см/с вдоль оси трубки радиусом $r_2 = 1$ см, которая заполнена жидкостью с вязкостью $\eta = 0{,}01$ П. Определить силу трения f, приходящуюся на единицу длины проволоки. Найти распределение скоростей жидкости вдоль радиуса трубы.

$$r\cdot\frac{dG}{dr} = -G$$





$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\eta\cdot 2\pi r\cdot L\cdot\left(\frac{dv}{dr}\right)_r \\ F_2 &= -\eta\cdot 2\pi(r+dr)\cdot L\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr}\end{aligned}\right\} F_1 = F_2 \Rightarrow r\left(\frac{dv}{dr}\right)_r = r\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr} + dr\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr}$$

$$r\cdot\frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{dv}{dr}$$

$$\int\frac{d\left(\frac{dv}{dr}\right)}{\frac{dv}{dr}} = -\int\frac{dr}{r}$$

$$\ln\left(\frac{dv}{dr}\right) = -\ln(r) + C$$

$$\frac{dv}{dr} = C_1\frac{1}{r} \Rightarrow \int dv = \int C_1\frac{dr}{r} \Rightarrow v = C_1\ln r + C_2$$

$$\left.\begin{aligned} v(r_1) = v_0:&\ v_0 = C_1\ln r_1 + C_2 \\ v(r_2) = 0:&\ 0 = C_1\ln r_2 + C_2\end{aligned}\right\}\quad C_1 = \frac{v_0}{\ln\frac{r_1}{r_2}} = -\frac{v_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$C_2 = v_0 - v_0\frac{\ln r_1}{\ln r_1 - \ln r_2} = -\frac{v_0\ln r_2}{\ln r_1 - \ln r_2} = v_0\frac{\ln r_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$v = \frac{v_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}(-\ln r + \ln r_2) = v_0\frac{\ln\frac{r_2}{r}}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \to \frac{dv}{dr} = \frac{v_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{\frac{r_2}{r}}\cdot\left(-\frac{r_2}{r^2}\right) = -\frac{v_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}\cdot r}$$

$$\frac{F}{L} = -\eta\left(-\frac{v_0}{r_1\ln\frac{r_2}{r_1}}\right)\cdot 2\pi r_1 = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

14.46. Вода течет по горизонтальной трубе радиусом $R = 1$ см и длиной L. При каком градиенте давления $\Delta P/l$ течение станет турбулентным, если для средней скорости движения воды по поперечному сечению трубы число Рейнольдса, при котором возникает турбулентное течение равно $\mathrm{Re} = 2000$. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

$$\left.\begin{aligned} Re &= \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} \\ \bar{v} &= \frac{\Delta P R^2}{8\eta l} \end{aligned}\right\} Re = \frac{\rho \Delta P R^3}{8\eta^2 l} \Rightarrow \frac{\Delta P}{l} = \frac{8\eta^2 Re}{\rho R^3}$$

14.29. В плоской камере, доверху заполненной водой, вращается горизонтальный диск радиусом $R = 20$ см. Какова мощность N,

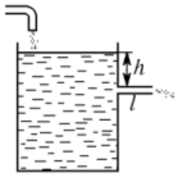


Рис. 371

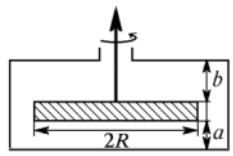
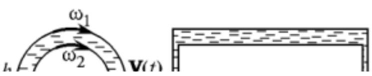


Рис. 372

необходимая для его вращения со скоростью $n = 300$ об/мин, если диск находится на расстояниях $a = 5$ мм и $b = 10$ мм от нижней и верхней стенок камеры (рис. 372)? Эффектами, связанными с радиальной конвекцией воды и явлениями на краю диска пренебречь. Движение жидкости считать ламинарным. Коэффициент вязкости воды $\eta = 10^{-1}$ кг/(м · с).



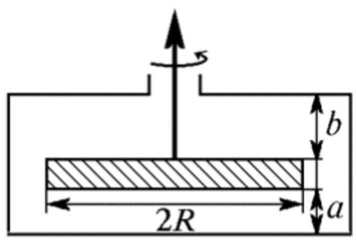
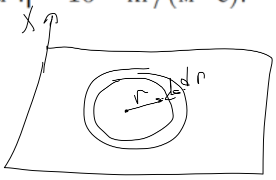


Рис. 372

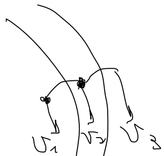
1)



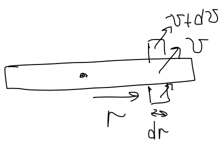
$$M_{\square} = r\cdot\left(-\eta\cdot 2\pi r\,dx\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_r\right) - (r+dr)\left(-\eta\cdot 2\pi(r+dr)dx\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r+dr}\right) =$$

$$= -\eta\cdot 2\pi\,dx\left(r^2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_r - (r+dr)^2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r+dr}\right) =$$

$$= 2\pi\eta\,dx\left(r^2 d\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) - 2r\,dr\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 2\pi\eta\, r\,dx\,dr\left(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$



2)



$$M_{\perp} = r\left(-\eta\cdot 2\pi r\,dr\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_x\right) - r\left(-\eta\cdot 2\pi r\,dr\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x+dx}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot 2\pi\eta\, r^2 dr\,dx$$

$$M_{\perp} + M_{\square} = 0:\ \eta\, 2\pi r\,dx\,dr\left(r\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = 2\frac{\partial v}{\partial r}$$