1. T1. 1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k}$ $\rightarrow$ $\delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij}$ $\Big\}$ $\boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$

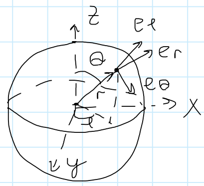
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

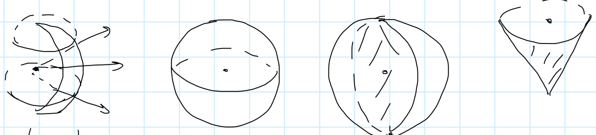
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

T2.



$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$

$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



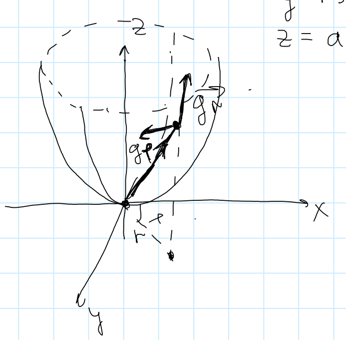
прямая/окр/окр сфера плоскость конус

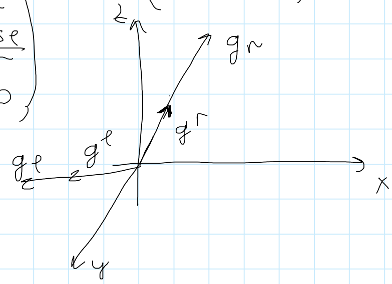
T3. $z = a(x^2+y^2) \Rightarrow$ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = ar^2$ $\Rightarrow$

$$M_{r\varphi} = \begin{array}{cc} g_r & g_\varphi \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$





T4*. т.к. ковар произв явл тензором, то её свёртка не изм при смене С.К.

Найдём $a^i_{;i}$ в ДСК, вектор $a = (x, y, z)$, а $\Gamma_{ijk} = 0$ //, тогда

$a^i_{;i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow \boxed{a^i_{;i} = 3}$

2.

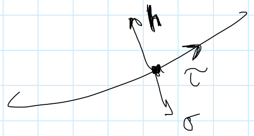
1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \text{const}$.

$\vec w \parallel \vec r$ если $0 = w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot\varphi = const \overset{exp}{\Rightarrow}$

$\overset{exp}{\Rightarrow} r^2\dot\varphi = const$

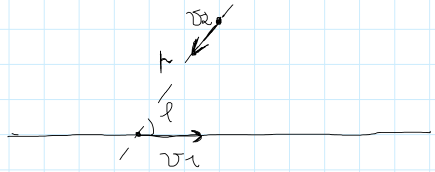
1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

$\vec w = \ddot\sigma\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$, т.к. $\begin{cases}\vec w \perp \vec v\\ \vec v \parallel \vec\tau\end{cases} \Rightarrow \ddot\sigma = 0$, $\frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$

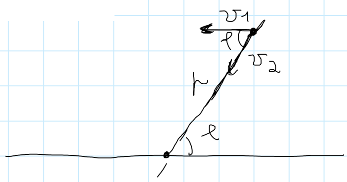


$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec n\right| = |a(\vec v\times\vec r)| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a|\,|\vec v\times\vec r| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a|\,|\vec v\times\vec r|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



$\xrightarrow{\text{в С.О.уб.}}$

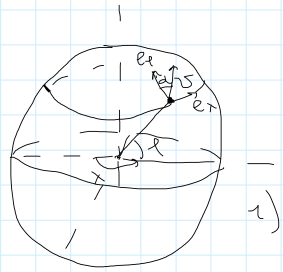


$\begin{cases}\dot r = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi)\\ r\dot\varphi = v_\varphi = v_1\sin\varphi\end{cases} \quad -\frac{v_2 + v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{tg\,\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{tg\,\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = r_0\, e^{-\left(\frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{tg\,\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$

Т.5.*



$\begin{cases}v_r = \dot r = 0\\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda = v\sin\alpha\\ v_\varphi = r\dot\varphi = v\cos\alpha\end{cases}$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{tg\,\alpha} = \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) e^{ctg\,\alpha\,(\lambda - \lambda_0)}$ //

2)

T6*. $v_i \dot v^i - v^i \dot v_i = v_i \dot v^i - g^{ik} v_k \frac{d}{dt}\left(g_{ij} v^j\right) =$

$= v_i \dot v^i - g^{ik} v_k \dot v^j g_{ij} - g^{ik} v_k v^j \dot g_{ij} = \left\{ 0 = (g^{ik} g_{ij})^{\cdot} = \dot g^{ik} g_{ij} + g^{ik} \dot g_{ij} \right\} =$

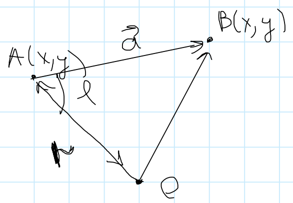
$= v_i \dot v^i - v_k \dot v^j \delta^k_j + \dot g^{ik} g_{ij} v^j v_k = \underline{v_i \dot v^i} - \underline{v_k \dot v^k} + \dot g^{ik} v_i v_k =$

$= (\dot g^i, g^k) v_i v_k = (\dot g^i, g^k v_k) v_i + (\dot g^i v_i, g^k) v_k = (v, v_i \dot g^i) + (v, v_k \dot g^k) =$

$= (v, 2\cdot v_i \dot g^i) = 2(v, v_i \dot g^i)$

3.

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.



$\vec A = \vec\omega \times \vec{OA} \to A = \omega \cdot OA$

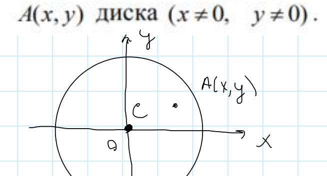
$\vec B = \vec\omega \times (\vec{OA} + \vec a) = \vec\omega \times \vec{OA} + \vec\omega \times \vec a \to B = \omega \cdot |OA + a|$

$\lambda = \frac{|OA+a|}{OA} \Rightarrow \lambda^2 OA^2 = OA^2 + a^2 - 2a\cdot OA\cos\varphi$

$(1-\lambda^2) r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 = 0$

$r = \frac{+a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi - a^2(1-\lambda^2)}}{1-\lambda^2} = a \cdot \frac{\pm\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi}{1-\lambda^2}$ – видимо окружность Аполлония.

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x,y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.



1) $\omega = \frac{v_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{w_c}{R}$

2) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c + \frac{v_c y}{R} \\ -v_c x/R \\ 0 \end{pmatrix} = v_c \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{R} \\ -x/R\, v_c \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$

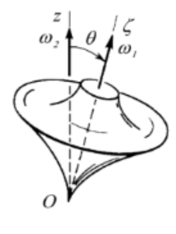
$= \begin{pmatrix} w_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{w_c}{R} y \\ -\frac{w_c}{R} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{v_c y}{R} \\ -\frac{v_c x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= w_c \begin{pmatrix} 1 + y \\ -\frac{w_c x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_c^2}{R^2} x \\ -\frac{v_c^2}{R^2} y \\ 0 \end{pmatrix}$

4.4. Юла вращается вокруг своей

К задаче 4.4

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, образуя с ней постоянный угол



1) $\vec\Omega = \vec\omega_1 + \vec\omega_2$

$|\Omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta}$

2) Ось поворот со ск. ω_2 при этом

$|\Omega| = \text{const} \Rightarrow$

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.

К задаче 4.4

2) Ось поворот со ск. ω_2 при этом

$|\Omega| = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\omega_\Omega} = [\omega_2, \Omega] = [\omega_2, \omega_1] + \underbrace{[\omega_2, \omega_2]}_{0} =$

$= [\omega_2, \omega_1]$ //

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$a = [\varepsilon, r] + [\omega, [\omega, r]]$ 1) $a_\varepsilon = [\varepsilon, r] = \dfrac{(a, v)}{v^2} v = \dfrac{(a, v)}{v^2}[\omega, r]$

$v = [\omega, r]$

$\left[r, \varepsilon - \dfrac{(a, v)}{v^2}\omega\right] = 0$ т.е $r \parallel$ в $\in \langle \varepsilon, \omega \rangle$

2) $r = \alpha\omega + \beta\varepsilon \Rightarrow v = \beta[\omega, \varepsilon]$

$a_\varepsilon = \alpha[\varepsilon, \omega]$

$a = \alpha[\varepsilon, \omega] + [\omega, \beta[\omega, \varepsilon]]$

Тогда $\dfrac{(a, v)}{v^2} v = -\dfrac{\alpha\beta[\omega, \varepsilon]^2}{\beta^2[\omega, \varepsilon]^2} \cdot \beta[\omega, e] + \left(\dfrac{\beta[\omega, \varepsilon]}{\beta^2[\omega, \varepsilon]^2}, \beta\underbrace{\overbrace{[\omega, [\omega, \varepsilon]]}^{\omega(\omega,\varepsilon) - \varepsilon\omega^2}}_{0}\right) =$

$= -\alpha[\omega, \varepsilon] = \alpha[\varepsilon, \omega] = a_\varepsilon$ ЧТД

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

A – ортогональная матрица, из линейной алгебры у неё есть $\lambda = 1$ – с.зн. и с.в-тор v.

Тогда поворачивая отн. v (ось) получим переход от $Oxyz \to OXYZ$.

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника ($\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$).

К задаче 3.35

1) $\overline{b} \parallel \overline{\omega}$

2) $[\omega, \tau] = \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\tau}{d\sigma} \cdot \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{1}{\rho}\overline{n}\,|v|$

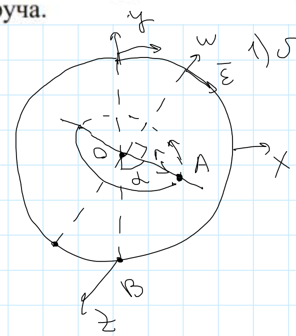
$|\omega| = \dfrac{|v|}{\rho} = \dfrac{v}{\rho}$

3) $\overline{\varepsilon} \parallel \overline{\omega} \parallel b$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{\dot{v}\rho - \dot{\rho}v}{\rho^2}$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.

y v $|v|$ $= \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix}$

соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



1) $\Omega = \frac{v}{R}$

2) $v_O = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \omega = \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$r_A = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_A = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix}$ //

3) $|\omega| = const \Rightarrow \varepsilon = [\Omega, \omega] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{R} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v\omega\sin\alpha}{R} \\ -\frac{v\omega\cos\alpha}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_A = 0 + \underbrace{\begin{pmatrix} v\omega\sin\alpha/R \\ -v\omega\cos\alpha/R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{0} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\sin\alpha \\ \omega^2 r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ //

4. **2.9.** В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{e}_z\omega_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e}_z\varepsilon_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Or цилиндрической системы координат $Or\varphi z$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?

$w_a = \varepsilon\times r + \omega\times(\omega\times r) + w_r + 2\omega\times v_r = \varepsilon_e[e_z\times r] + \omega_e^2[e_z\times[e_z\times r]] + e_r w_r + 2\omega_e v_r[e_z\times e_r] =$ $\quad \left(r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$= \varepsilon_e r e_\varphi + r\omega_e^2 e_r + e_r w_r + 2\omega_e v_r e_\varphi = 0 \Rightarrow$

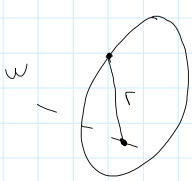
$\Rightarrow \quad w_r = -r\omega_e^2$

$v_r = -\frac{\varepsilon_e r}{2\omega_e v_r}$

2.38. Точка движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах $r = \dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$. Движение происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot\varphi = C$, где $C-$ постоянная величина. Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через фокус. Найти величины абсолютных скорости и ускорения точки в зависимости от r.

$\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 = e^2\cos^2\varphi$

$e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1$



1) $\dot r = +\frac{ep\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot\varphi = \frac{Cep\sin\varphi}{r^2(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{Cep\sin\varphi}{p^2} = C\frac{e\sin\varphi}{p}$

2) $v = [\omega\times r] + v_r = \omega[e_z\times re_r] + v_r =$ $\quad \left| \; v = \begin{pmatrix} \omega r + \frac{Ce\sin\varphi}{p} \\ \frac{C}{r} \end{pmatrix} \right.$

$= +\omega r e_\varphi + \frac{Ce\sin\varphi}{p} e_r + \frac{C}{r} e_\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow |v|^2 = \left(+\omega r + \frac{C}{r}\right)^2 + \frac{C^2e^2\sin^2\varphi}{p^2} = \omega^2 r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2e^2\sin^2\varphi}{p^2} =$

$= \omega^2 r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2}{p^2}\left(e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2\right) = \omega^2 r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2e^2}{p^2} + \frac{2C^2}{pr} - \frac{C^2}{p^2} =$

$= \omega^2 r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2(e^2-1)}{p^2} + \frac{2C^2}{pr}$

3) $\ddot r = \frac{Ce}{p}\cos\varphi\,\dot\varphi = \frac{Ce}{p}\cos\varphi\,\frac{C}{r^2} = \frac{C^2e}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}$

$\ddot\varphi = \left(\frac{C}{r^2}\right)^{\cdot} = -\frac{2C}{r^3}\dot r = -\frac{2C}{r^3}\cdot C\,\frac{e\sin\varphi}{p} = -\frac{2C^2e}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^3}$

$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{C^2e}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{C^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r}-1\right) - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{C^2}{pr^2}$

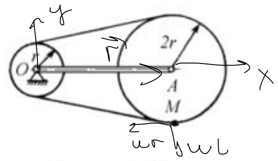
$w_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 2\,\frac{Ce\sin\varphi}{p}\cdot\frac{C}{r^2} - \frac{2C^2e\sin\varphi}{r^2p} = 0$

4) $w = [\omega,[\omega,r]] + w_r + 2[\omega, v_r] =$

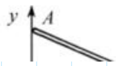
$= \begin{pmatrix}\omega^2 r\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{C^2}{pr^2}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{2\omega C}{r}\\ \frac{2\omega Ce\sin\varphi}{p}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^2 r - \frac{C^2}{pr^2} - \frac{2\omega C}{r}\\ \frac{2\omega Ce\sin\varphi}{p}\\0\end{pmatrix}$

$|w|^2 = \left(\omega^2 r - \frac{C^2}{pr^2} - \frac{2\omega C}{r}\right)^2 + \frac{2\omega^2C^2e^2}{p^2}\left(1-\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right)$

3.20. Кривошип OA длины l вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R = 2r$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа в рассматриваемый момент – ω и ε. Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.



К задаче 3.20



1) В СО, где КШ покоится:

$\omega_2 = \frac{\omega}{2} \Rightarrow v_M = \omega_2 \cdot 2r = \omega r$

2) $|v| = \sqrt{(\omega r)^2 + (\omega l)^2} = \omega\sqrt{r^2+l^2}$

$v = \begin{pmatrix}-\omega r\\-\omega l\\0\end{pmatrix}$

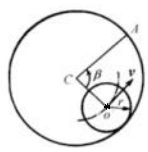
3) В СО кр-па $w_M' = \begin{pmatrix}-\varepsilon r\\ -\frac{\omega^2 r}{2}\\0\end{pmatrix}$

$w_M = [\varepsilon, r] + [\omega,[\omega,r]] + w_M' + 2[\omega, v] =$

$= \begin{pmatrix}0\\-\varepsilon l\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega^2 l\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\varepsilon r\\ -\frac{\omega^2 r}{2}\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\ \omega^2 r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\varepsilon r + \omega^2 l\\ -\varepsilon l - \frac{\omega^2 r}{2} + 2\omega^2 r\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow |w|^2 = (\varepsilon r - \omega^2 l)^2 + \left(\varepsilon l - \frac{3}{2}\omega^2 r\right)^2$

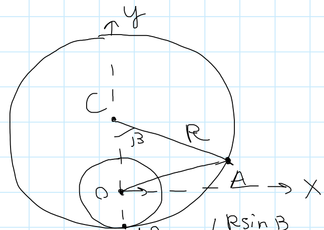
3.30. Цилиндр радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Угол между линией центров цилиндров CO и радиусом неподвижного цилиндра, проходящим через точку A, равен β. Скорость центра O движущегося цилиндра постоянна по величине и



К задаче 3.30

1) $\omega_0 = \frac{v}{R}$ $\quad v_0 = v$

$\omega = \frac{v}{r}$



$0 = \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R\sin\beta\\ R-r-R\cos\beta\\0\end{pmatrix} + v_A'$

$v_A' = \begin{pmatrix}-v - \frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta)\\ +\frac{v}{r}R\sin\beta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{vR}{r}(1-\cos\beta)\\ +\frac{vR}{r}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$|v_A'| = 2\frac{vR}{r}\sin\frac{\beta}{2}$ //

равна v. Найти величины скорости и ускорения точки A неподвижного цилиндра относительно системы координат, связанной с подвижным цилиндром.

$0 = \begin{pmatrix}0\\-\frac{v^2}{R-r}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R\sin\beta\\ R-r-R\cos\beta\\0\end{pmatrix}\right) + a_A' + 2\begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\frac{vR}{r}(1-\cos\beta)\\ \frac{vR}{r}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$

$-a_A' = \begin{pmatrix}0\\+\frac{v^2}{R-r}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta)\\ -\frac{v}{r}R\sin\beta\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\frac{v^2R}{r^2}\sin\beta\\ \frac{v^2R}{r^2}(1-\cos\beta)\\ \end{pmatrix}$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{v^2}{R-r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta) \\ -\frac{v}{R}R\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{v^2R}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2R}{R^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{R-r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v^2R}{r^2}\sin\beta \\ -\frac{v^2}{r^2}(R-r-R\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{Rv^2}{r^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2}{R-r} + \frac{v^2R}{r^2}\left(1-\cos\beta+\frac{r}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2R}{r(R-r)} + \frac{v^2R}{r^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

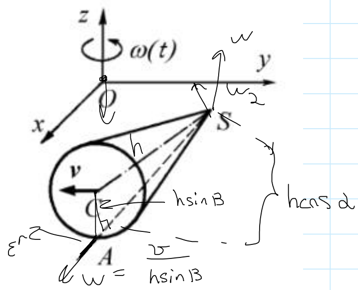
$$|a_A|^2 = \left(\frac{Rv^2}{r^2}\right)^2\left(\sin^2\beta + \left(\underbrace{\frac{r}{R-r}}_{=\gamma} + 1-\cos\beta\right)^2\right) = \left(\frac{Rv^2}{r^2}\right)^2\left(4\sin^2\frac{\beta}{2} + \gamma^2 + 4\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$|a_A| = \frac{Rv^2}{r^2}\sqrt{\gamma^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(\gamma+1)} = \frac{Rv^2}{r^2(R-r)}\sqrt{\left(\frac{r}{R-r}\right)^2(R-r)^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(R-r)^2\frac{R}{R-r}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Rv^2}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(R-r)R}$$

4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. По плоскости катится без скольжения конус так, что центр его основа-

ния движется относительно плоскости с постоянной по величине скоростью v в направлении, указанном на рисунке. Высота конуса h, угол при вершине 2β. Найти величины абсолютных угловой скорости и углового ускорения конуса.



К задаче 4.25

1) $|\omega| = \sqrt{\frac{v^2}{h^2\sin^2\beta} + w^2}$

2) $\varepsilon^e = \dot{\omega}$

$\varepsilon^r = [\omega_2 \times \omega]$

ω бр ст-по верт оси.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^r + \omega^e \times \omega^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{h\sin\beta}\cdot\frac{v}{h\cos\beta} + \frac{wv}{h\sin\beta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \left(\frac{v}{h\sin\beta}\right)^2\left(w - \frac{v}{h\cos\beta}\right)^2} \quad //$$