1.1. Для функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рассмотрим следующие условия:
а) f непрерывна в точке (x_0, y_0);
б) в точке (x_0, y_0) существуют конечные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Следует ли из условия а) условие б)? Следует ли из условия б) условие а)?

а) Р-рим ф-цию $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

Она непр. в т. $(0,0)$ но частные произв не сущ.

б) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$ предела в $(0,0)$ нет предела $\Rightarrow f(x,y)$ - разрывна. но $\partial_x f = 0$ $\partial_y f = 0$.

1.2. Исследуйте на существование частных производных и дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:
а) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; б) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; в) $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$.

а) $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = 1 = \partial_y f(0,0)$

Р-рим предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\Delta f - \partial_x f \cdot x - \partial_y f \cdot y}{\rho}$

$\dfrac{1}{\rho}|\Delta f - \partial_x f \cdot x - \partial_y f \cdot y| = \dfrac{1}{\rho}\left|\sqrt{x^2+y^2} - x - y\right| = |1 - \cos\varphi - \sin\varphi|$ - зависит от направления,

а значит $\neq o(1) \Rightarrow$ ф-ция не предст. лин. ф-цией $\Rightarrow$ не дифф.

б) $\partial_x f(0,0) = 1$ $\partial_y f(0,0) = 1$

$\dfrac{1}{\rho}\left|\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y\right| = \left|\sqrt[3]{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} - \cos\varphi - \sin\varphi\right|$ - зависит от направления.

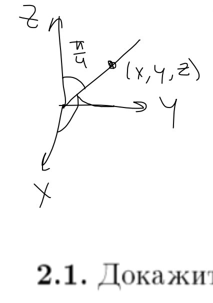
в) $\partial_x f(0,0) = 0$ $\partial_y f(0,0) = 0$

$\dfrac{1}{\rho}\left|\sqrt{x^3+y^3}\right| = \dfrac{1}{\rho} \cdot \rho^{3/2} \left|\sqrt{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}\right| < 2\rho^{1/2} \to 0$ - ф-ция дифф.

1.3. Найдите производную функции

$$f(x,y,z) = \operatorname{sh}(x^2+y) + e^z$$

в точке $(0,0,0)$ по направлению луча, образующего с координатными осями Ox, Oy, Oz углы соответственно $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}$.



$z = t \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{t\sqrt{2}}{2}$

$x = t \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{t}{2}$

$y = t \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{t}{2}$

$f(t) = \operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}}$

$f'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}} - 1}{t}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(\frac{4t^3}{4} + \frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}}}{1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

2.1. Докажите, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$.

1) $df(x,y) = d(x^2+y^2)\left\{\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right\} \Rightarrow \partial_x f = 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$\partial_y f = 2y\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0$

$\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y} = 0$

2) Проверим дифф-емость в т. $(0,0)$: $\frac{1}{\rho}\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2} = \rho\sin\frac{1}{\rho^2} < \rho \to 0$

ф-ция дифф в $(0,0)$.

3) $\lim\limits_{\rho\to 0}\partial_x f(x,y) = \lim\limits_{\rho\to 0} 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho\cos\varphi\left(\sin\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\cos\frac{1}{\rho^2}\right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho\sin\frac{1}{\rho^2}}_{0} - \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{2}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2} = -2\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2}$ – не существует.

2.2. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:
а) $f(x,y) = \sin\sqrt[5]{x^5-y^5}$; б) $f(x,y) = \cos\sqrt[5]{x^5-y^5}$.

а) $\partial_x f = 1$
$\partial_y f = -1$

$\frac{1}{\rho}\left|\sin\sqrt[5]{x^5-y^5} - x + y\right| = \left|\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(1) - \cos\varphi - \sin\varphi\right|$ – зависит от напр.

б) $\partial_x f = 0$
$\partial_y f = 0$

$\frac{1}{\rho}\left|\cos\sqrt[5]{x^5-y^5} - 1\right| = \frac{1}{\rho}\left|-\frac{\rho^2}{2}\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(\rho^2)\right| = \frac{\rho}{2}\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(\rho) \to 0$

2.4. Приведите пример функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющей в точке $(0,0)$ конечные производные по всем направлениям, но не являющейся в этой точке непрерывной (а следовательно, и дифференцируемой).

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \\ 0 \end{cases}$ Р-рим $f'_t = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\alpha^2 t\beta t^2}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^2}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4t^2+\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta}$

р-рим кривую $y=x^2$ и подходя по ней $\underline{f(x,y) = \frac{1}{2}}$ – предел не 0.

2.5. Пусть у функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в окрестности точки (x_0, y_0) существует производная $\frac{\partial f}{\partial x}$, непрерывная в точке (x_0,y_0). Пусть также в точке (x_0,y_0) существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}$. Докажите, что функция f дифференцируема в точке (x_0,y_0).

?

Р-рим $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) =$

$= \left\{\begin{matrix}\text{по опр.}\\ \text{част.}\\ \text{пр}\end{matrix}\right\} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)(x-x_0) + o(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{т.к. } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ – непр, то} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \text{при } y\to y_0\end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \underbrace{o(|x-x_0|+|y-y_0|)}_{o(\rho)}$

$\underline{\text{ЧТД}}$

3.2. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию

$$f(x,y) = \sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y}.$$

$\partial_x f = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

$\partial_y f = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt[2023]{\sin^{2024} y}}{y} = 0$

$\frac{1}{p}\left|\sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y} - x\right| = \left|\sqrt[2023]{\cos^{2023}\varphi + p\sin^{2023}\varphi + o(p)} - \cos\varphi\right| \leqslant$

$\leqslant \left|\sqrt[2023]{\cos^{2023}\varphi + 2p} - \cos\varphi\right| = g(\varphi) = \left|\sqrt[n]{\cos^n\varphi + 2p} - \cos\varphi\right| = \left|\sqrt[n]{t^n + 2p} - t\right| \leqslant$

$g'(t) = (t^n + 2p)^{\frac{1-n}{n}}\, t^{n-1} - 1 = 0 \Rightarrow (t^n+2p)^{\frac{1-n}{n}} = t^{1-n}$, при усл. $t < 0$

$t^n + 2p = -t^n \Rightarrow t^n = -p \Rightarrow t_{max} = -\sqrt[n]{p}$

и $g_{max} = \sqrt[n]{-p+2p} + \sqrt[n]{p} = 2\sqrt[n]{p}$

$\leqslant 2\sqrt[n]{p} \to 0 \Rightarrow$ ф-ция диффер.

3.1. Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0,0)$ при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{1/2} \cdot |y|^{\alpha}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

при $\alpha \leqslant 0$ не сущ. $\partial_x f \Rightarrow$ нет дифф.

$\alpha > 0$: $\partial_x f = \lim \frac{\ln(1+0)}{x} = 0$

$\partial_y f = 0$

$\frac{1}{p}\left|\ln(1+|x|^{\frac{1}{2}}|y|^{\alpha})\right| = \frac{1}{p}\left|\ln(1+p^{\frac{1}{2}+\alpha}|\cos\varphi||\sin\varphi|)\right| = \frac{1}{p}\left|p^{\frac{1}{2}+\alpha}|\cos\varphi||\sin\varphi| + o(p^{\frac{1}{2}+\alpha})\right| \leqslant$

$\leqslant p^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot A$, при $\alpha > \frac{1}{2}$ $p^{\alpha-\frac{1}{2}} \to 0$ и ф-ция дифф.

при $\alpha = \frac{1}{2}$: $p^{\alpha-\frac{1}{2}}|\cos\varphi\sin\varphi| + o(1) = |\cos\varphi\sin\varphi| + o(1)$ — предел зависит от напр

при $\alpha < \frac{1}{2}$: $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}-\alpha}}|\cos\varphi\sin\varphi| + o(p^{\alpha-\frac{1}{2}})$ — вообще расходится.

2.3. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:

а) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}\operatorname{tg}(2x), & x \neq 0, \\ y^4 + |y|^{3/2}, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5}{x^3}\ln\left(1 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right), & x \neq 0, \\ y^2, & x = 0. \end{cases}$

а) $\partial_x f = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{0^2}{x}\operatorname{tg}2x}{x} = 0$

$\partial_y f = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^4 + |y|^{3/2}}{y} = 0$

1) $x \neq 0$: $\frac{1}{p}\left|\frac{y^2 \operatorname{tg}2x}{x}\right| = \frac{p^2\cos^2\varphi}{p} \cdot \frac{\operatorname{tg}2x}{x}$

$x\to 0$, $y \to 0$: $\lim\limits_{p\to 0}\frac{1}{p}\left|p^2\cos\varphi \cdot \frac{\operatorname{tg}2x}{x}\right| = \underbrace{\lim\limits_{p\to 0} p\cos\varphi}_{0} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}}_{2} = 0$ т.е. ф-ция дифф.

2) $x = 0$, $y \to 0$: $\quad \frac{1}{y}\left|y^4 + |y|^{3/2}\right| \to 0$

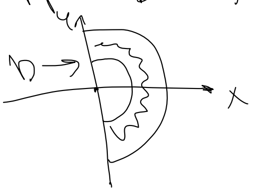
1) $x \neq 0$: $\quad \frac{1}{\rho}\left|\frac{y^5}{x^3}\ln\left(1 + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right| = \left|\frac{\rho\cos^5\varphi}{\sin^3\varphi}\ln(1+\cos\varphi\sin\varphi)\right| \leq$

б) $\partial_x f = 0$, $\partial_y f = 0$ $\to$

$\leq \begin{cases} \text{т.к. } x \neq 0 \ \sin^3\varphi \neq 0 \\ \text{также} \\ |\sin\varphi\cos\varphi| = \left|\frac{\sin 2\varphi}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(1+\sin\varphi\cos\varphi) \not\to -\infty \end{cases} \leq |\rho| \to 0 \Rightarrow$ Все диффер.

3.3. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^2$, причём $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ в G. Верно ли, что f не зависит от y при каждом фиксированном x?

Р-рим D: $1 \leq \rho(x,y) < 2 \wedge x > 0$



$$f(x,y) = \begin{cases} (1-x)^2, & 0 < x < 1 \wedge y < 0 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \\ -(1-x)^2, & 0 < x < 1 \ \ y > 0 \end{cases}$$