1.1. Исследуйте по определению на равномерную сходимость на множествах $E_1 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ и $E_2 = (0,1)$ функциональную последовательность:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

П-ть поточечно сходится к 0 на E_1, E_2.

1) E_1: $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| < \varepsilon$

$x^n < \varepsilon + \varepsilon x^n \to x^n(1-\varepsilon) < \varepsilon$

инт. только $\varepsilon \to 0$ т.е. $\varepsilon < 1$

$x^n < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$n \ln x < \ln\left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$, $\ln x < 0$

$n > \dfrac{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} > \dfrac{-\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\ln x}$. $\therefore N = N\left(\dfrac{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}\right)$

2) Возьм $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a \in (0,1)$

тогда $\left|\dfrac{a}{1+a}\right| \geq \underline{a} = \varepsilon$

1.2. Исследуйте по определению на равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}. =$$

1) $x^2 \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N - 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N - 1}{-1} = 1 - \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^N \to 1$ при $N \to \infty$

2) $\left|1 - \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n - 1\right| = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n$ на E_2 $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n < \dfrac{1}{2^n} \rightrightarrows 0$

на E_1: $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{1}{e} \neq 0$

1.3. Может ли последовательность разрывных на отрезке функций равномерно сходиться к непрерывной функции?

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, $x \in [0,1]$

2.1. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right) \to 0$$

и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. 1) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$: $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1+1}\right) = \sin\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow E_1$ – ряд не сход.

2) $\left|\sin\left(\dfrac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right)\right| < \dfrac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1} = \dfrac{1}{n^2 x + \frac{1}{n^2 x}} = \left\{\begin{matrix} n^2 x + \frac{1}{n^2 x} > n^2 \\ x > 1 \end{matrix}\right\} < \dfrac{1}{n^2} \rightrightarrows 0$

ряд тоже сходится р.н.

$\sum \sin\left(\dfrac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right) < \sum \dfrac{1}{n^2}$

2.2. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональные последовательности:

а) $f_n(x) = n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$; $\to x$ б) $f_n(x) = n \operatorname{sh} \dfrac{1}{nx}$. $\to \dfrac{1}{x}$

$x < 1$

$E_2=(1,+\infty)$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x)=n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right); \to x$ б) $f_n(x)=n\,\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{nx}. \to \dfrac{1}{x}$

$x<1$

а) $\left|n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\right|=\left|n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)\right)-x\right|=\left|\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{x^2}{2n}\right)\right|<\left|\frac{100}{n}\right|\to 0$

$x-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)>x-n\left(x-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}\right)=\frac{x^2}{2n}-\frac{x^3}{3n^2}=\left\{x_n=\sqrt{n}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{n^{3/2}}{3n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{n}}\to\frac{1}{2}$

б) $\left|n\,\mathrm{sh}\frac{1}{nx}-\frac{1}{x}\right|=\left\{\begin{array}{l}x>1\\ \frac{1}{nx}\to 0\end{array}\right\}=\left|n\frac{1}{nx}+n\,o\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)n-\frac{1}{x}\right|=o\left(\frac{1}{nx^2}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$ по E_2

$n\,\mathrm{sh}\frac{1}{nx}-\frac{1}{x}>n\left(\frac{1}{nx}+\frac{1}{6n^3x^3}\right)-\frac{1}{x}=\frac{1}{6n^2x^3}$, перейти $x_n=\frac{1}{n^{2/3}}\to\frac{1}{6}>\varepsilon$

2.3. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x)=n\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right). \to -\frac{x^3}{6}$$

$x<1$

E_1: $\left|n\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)+\frac{x^3}{6}\right|=\left|n\left(-\frac{x^3}{6n}+o\left(\frac{x^4}{n^{4/3}}\right)\right)+\frac{x^3}{6}\right|=o\left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{n}}\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\to 0$

E_2: $x_n=\sqrt[3]{n}$: $\left|n\left(\underbrace{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}}_{1-\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{n}{6}\right|=n\left|\frac{7}{6}-\frac{\pi}{2}\right|\to+\infty$

2.4. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x)=n\left(x^{1/n}-x^{1/2n}\right). \to \frac{1}{2}\ln n$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x^{1/n}-x^{1/2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x^{1/n}-1\right)-\lim\limits_{n\to\infty}n\left((\sqrt{x})^{1/n}-1\right)=\ln x-\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$

2) $x_n=n^n\to\left|n(n-\sqrt{n})-\frac{n}{2}\ln n\right|=\underbrace{n}_{+\infty}\left|\underbrace{n-\sqrt{n}-\frac{\ln n}{2}}_{+\infty}\right|$

3) $|f_n(x)-f(x)|=\left|nx^{1/n}-n-\ln x-\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{n}}n-n-\ln\sqrt{x}\right)\right|\leq\left|n(x^{1/n}-1)-\ln x\right|+\left|n\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{n}}-1\right)-\ln\sqrt{x}\right|$

Рассм. $\left|n(x^{1/n}-1)-\ln x\right|=\left|n\left(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1\right)-\ln x\right|=\left\{\begin{array}{l}\ln x\\ x\in(\frac{1}{2},1)\text{ огр}\end{array}\right\}=\left|n\left(\frac{1}{n}\ln x+o\left(\frac{\ln^2 x}{n^2}\right)\right)-\ln x\right|=o\left(\frac{\ln^2 x}{n^2}\right)\to 0$