

Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

1 ноября 2024 г.

Содержание

1	T1	1
2	T2	2
3	T3	3
4	T4	3
5	8.201	3
6	T6	4
7	T7	4
8	T8	4
9	T11	5
10	T12	5
11	T18	6
12	T.20	6
13	11.68	7
14	11.67	7

1 T1

Множество X задаётся следующим неравенством:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq az(x^2 + y^2)$$

Тогда

$$\mu X = \int_X 1 dx dy dz$$

Введём сферическую замену координат, его якобиан $|J| = r^2 \sin \theta$, и неравенство преобразуется как

$$r^4 \leq azr^2 \sin^2 \theta \implies r^2 \leq \sin^2 \theta$$

Тогда объём равен:

$$\mu X = \int_{r^2 \leq \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{|\sin \theta|} r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

2 Т2

б)

$$\int_{|\frac{y}{b}| \leq \frac{x}{a}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2c^2}} dx dy$$

Домножим существующие координаты на $x = ax, y = by$

$$ab \int_{-x \leq y \leq x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{ax}{c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{by}{c} \right)^2 \right\} dx dy = ab \int_0^\infty dx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{ax}{c} \right)^2 \right\} \int_{-x}^x dy \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{by}{c} \right)^2 \right\}$$

(((((потом сделаю))))))

в)

$$\int_{a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2} x^2 + y^2 - z^2 dx dy dz$$

Перейдём в сферическую систему координат:

$$\int_{a^2 \leq r^2 \leq b^2} r^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_a^b r^4 dr \int_0^\pi (\sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi \frac{2}{3} \left(\frac{b^5 - a^5}{5} \right)$$

Тогда ответ:

$$I = \frac{4\pi}{15} (b^5 - a^5)$$

д)

$$I = \int_{x^2 + y^2 \leq az \leq b^2} z^2 dx dy dz$$

Перейдём в цилиндрическую систему координат:

$$I = \int_{r^2 \leq az \leq b^2} z^2 r dr d\phi dz = 2\pi \int_0^{b^2} z^2 dz \int_0^{\sqrt{az}} r dr = a\pi \int_0^{b^2} z^3 dz = \frac{\pi}{4} ab^8$$

е)

$$\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} x^2 + y^2 + z^2 dx dy dz = \frac{1}{abc} \int_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} (ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 dx dy dz$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$I = \frac{1}{abc} \int_{r^2 \leq 1} r^2 dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a \sin \theta \cos \phi)^2 + (b \sin \theta \sin \phi)^2 + (c \cos \theta)^2 d\theta d\phi$$

$$I = \frac{2}{3abc} \left(a^2 \frac{\pi^2}{2} + b^2 \frac{\pi^2}{2} + c^2 \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2(a^2 + b^2 + c^2)}{3abc}$$

3 Т3

б) Плотность тела примем равной 1. Введём цилиндрическую систему координат, $x = ar \cos \phi$, $y = ar \sin \phi$, $h = zc$.

$$M = a^2 c \int_{r \leq h \leq 1} r dr d\phi dh = 2\pi a^2 c \int_0^1 dh \int_0^h dr = \pi a^2 c$$

Тогда так как тело является телом вращения, то $x_0 = y_0 = 0$. Найдём z_0

$$z_0 = 2\pi a^2 c \int_{r \leq h \leq 1} chr dr d\phi dh = 2\pi a^2 c^2 \int_0^1 h dh \cdot h = a^2 c^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{2Mc}{3}$$

4 Т4

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$$

Интеграл существует при любых значениях параметра a т.к. он мажорируется сходящимся. Введём полярные координаты.

$$I = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-ar^2} \sin(r^2) r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin t dt = \frac{\pi}{a^2 + 1}$$

Последний интеграл мы находили в прошлом году беря его два раза по частям.

5 8.201

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введём сферическую замену координат, рассмотрим пока что область $x \geq 1, y \geq 1$

$$f(x, y) = \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos 2\phi,$$

Интеграл по ограниченной области A соответственно равен

$$F = \int_A \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos 2\phi r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_A \sin^3 \theta \cos 2\phi dr d\theta d\phi$$

Тогда в дальнейшем при $r \geq \sqrt{2}$ в интеграле возникнет $\int_0^{2\pi} \cos 2\phi d\phi = 0$. Тогда интеграл при $r \geq \sqrt{2}$ равен 0, а при $r \leq \sqrt{2}$ очевидно сходится так как ограничен на множестве конечной меры.

6 T6

в) Я не уверен, но стереографической проекцией из точки шара $(0, 0, -1)$ получим, что полусфера диффеоморфна диску на плоскости (а для него мы доказывали в предыдущем пункте). Замена координат следующая:

$$\begin{cases} t_A^1 = \frac{x}{1+z} \\ t_A^2 = \frac{y}{1+z} \end{cases}$$

7 T7

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Судя по всему единственным случаем, когда нули не являются многообразием это случай пересекающихся прямых, так как выбросив точку пересечения получим 4 компоненты связности, чего невозможно получить на прямой выбросом одной точки.

8 T8

Введём 2 карты, соответствующие двум стереографическим проекциям сферы на две плоскости. $\phi_A : V_A \rightarrow U_A$, $V_A = \mathbb{R}^2$, $U_A = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} t_A^1 = \frac{x}{1-z} \\ t_A^2 = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

Обратное имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{2t_A^1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ y = \frac{2t_A^2}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ z = \frac{(t_A^1)^2 + (t_A^2)^2 - 1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \end{cases}$$

Найдём ранг карты:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}$$

На V_A ранг карты очевидно равен двум. Аналогично строится вторая карта $\phi_B : V_B \rightarrow U_B$, разве, что $1 - z \leftrightarrow 1 + z$. То есть:

$$\begin{cases} t_B^1 = \frac{x}{1+z} \\ t_B^2 = \frac{y}{1+z} \end{cases}$$

Все остальные формальные утверждения делаются аналогично, из чего следует, что сфера является вложенным многообразием. Посмотрим на гладкость функции связи:

$$\begin{cases} t_A^1 = \frac{1}{t_B^1} \\ t_A^2 = \frac{1}{t_B^2} \end{cases}$$

Такие функции очевидно бесконечно гладкие, а значит такой набор карт будет являться атласом для сферы ранга 2.

9 T11

б) $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\int_{\gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy = \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} (2x - (2x - 1)) dx \wedge dy = \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} dx \wedge dy = \mu \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\} = \pi ab$$

10 T12

а) По формуле Остроградского-Гаусса

$$\iint_S x^2 y^2 z dy \wedge dz = \int_{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0} 2xzy^2 dx \wedge dy \wedge dz$$

В сферических координатах

$$2 \int_{-a \leq r \leq a, z \geq 0} r^6 \cos \theta \sin^4 \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi dr d\theta d\varphi = 4 \frac{a^7}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 0$$

(((((Странный ответ))))))

в) Перейдём к интегралу по цилиндру по формуле Остроградского

$$\int_{x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b, x \geq 0, y \geq 0} (x + y + z) dx \wedge dy \wedge dz = 2 \int_{x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b, x \geq 0, y \geq 0} x dx dy dz + \int_{x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq b, x \geq 0, y \geq 0} z dx dy dz$$

В цилиндрических координатах первый интеграл равен

$$\int_{0 < r \leq a, 0 < z < b, x \geq 0, y \geq 0} r^2 \cos \theta dr d\theta dz = b \frac{a^3}{3}$$

Второй интеграл равен $I_2 = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\pi a^2}{4}$ Тогда ответ:

$$I = \frac{a^3 b}{3} + \pi \frac{a^2 b^2}{8}$$

д)

$$\int_{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x, y, z \geq 0} (x + y + z) dx \wedge dy \wedge dz = 3 \int_{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x, y, z \geq 0} x dx dy dz = 3I$$

Перейдём в сферические координаты

$$I = \int_a^0 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^4}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{8}$$

И исходный интеграл равен

$$3I = \frac{3\pi a^4}{8}$$

((Тут ещё вычесть интегралы через боковые поверхности)))

11 T18

Докажем лемму о том, что у замкнутой гладкой кривой существует точка, в которой касательная к кривой делит пространство на две части, одна из которых полностью содержит кривую. Так как кривая замкнута, то она ограничена, тогда рассмотрим расстояние от точки $(0, 0)$ до кривой, по теореме 1 семестра максимальное и минимальное расстояние достигается. Тогда рассмотрим окружность $B((0, 0), \rho_{\max})$. Такая окружность касается кривой и кривая полностью лежит внутри окружности, в таком случае вся кривая лежит в одном полупространстве от касательной к окружности в этой точке.

Далее перейдём к доказательству того, что вектор скорости делает только один поворот на замкнутой гладкой кривой без пересечений. Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, где $t \in [0, 1]$ — натуральный параметр. Тогда введём вектор

$$e(t, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{|\gamma(s) - \gamma(t)|}$$

Рассмотрим треугольник $D = \{(t, s) \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$. Так как кривая не имеет самопересечений, то на внутренности D вектор e всегда определён. Доопределим e на диагонали по непрерывности:

$$e(t, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} : \left| \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \right| \rightarrow \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \dot{\gamma}(t)$$

Аналогично показывается, что при $s \rightarrow 1, t \rightarrow 0$, $e \rightarrow -\gamma(0)$. Мы определили непрерывную функцию на треугольнике D , тогда так как $|e| = 1$, можем представить $e = (\cos \phi(t, s), \sin \phi(t, s))$. Вращение вектора скорости есть число оборотов e вдоль диагонали D :

$$\alpha = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = (\phi(1, 1) - \phi(0, 1)) + (\phi(0, 1) - \phi(0, 0))$$

Согласно лемме найдётся точка, что кривая лежит по одну сторону от касательной, если определить эту точку за $t = 0$, тогда $\phi(1, 1) - \phi(0, 1) = \pm\pi$ и аналогично $\phi(0, 1) - \phi(0, 0) = \pm\pi$ тогда

$$\alpha = \pm 2\pi$$

Что и требовалось доказать.

12 T.20

Пусть $d\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = d\omega$, Тогда

$$d((-1)^{\deg} \omega_1 \wedge \omega) = (-1)^{\deg} d\omega_1 \wedge \omega + \omega_1 \wedge d\omega = 0 + \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

Всё, форма точная.

13 11.68

Рассмотрим кривую заданную пересечением уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Тогда введём параметризацию:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ z = a \sin \varphi \\ y = -a \cos \varphi \end{cases}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$. У такой параметризации другая ориентация, поэтому при переходе к ней поставим перед интегралом знак минус.

$$\int_L z^3 dx + x^3 dy + y^3 dz = -a^4 \int_0^{2\pi} (-\sin^4 \varphi + \cos^3 \varphi \sin \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi = -a^4 \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{3\pi a^4}{2}$$

14 11.67

$$\int_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2 \int_S (y - z) dy \wedge dz + z dz \wedge dx + x dx \wedge dy$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = 2bx \end{cases} \implies \begin{cases} 2x(b - a) = z^2 \\ (x - b)^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

Возьмём карту $\varphi(t, p) = (\frac{p^2}{2(b-a)}, t, p)$, Из чего следует: $dx = \frac{p}{(b-a)} dp$. Интеграл:

$$2 \int_S (y - z) dy \wedge dz + z dz \wedge dx + x dx \wedge dy = 2 \int_{\left(\frac{p^2}{2(b-a)} - b\right)^2 + t^2 = b^2} (t - p) dt \wedge dp + 0 + \frac{p^2}{2(b-a)} \cdot \frac{p}{(b-a)} dp \wedge dt$$

Что равно:

$$2 \int_{\left(\frac{p^2}{2(b-a)} - b\right)^2 + t^2 = b^2} \left(t - p - \frac{p^3}{2(b-a)^2} \right) dt dp$$

(((((НУ дальше в полярне и что-то получится...))))