Управляющее.

Пример 7. Покажем, что при $x>0$ $\approx x^{\alpha}-1 \leq \alpha(x-1)$

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1 \leqslant 0, \quad \text{когда } 0<\alpha<1, \tag{3}$$
$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1 \geqslant 0, \quad \text{когда } \alpha<0 \text{ или } 1<\alpha. \tag{4}$$

Д-во! $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1$

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$ и $f'(x)=0$ при $x=1$

при $0<\alpha<1$: f': $+$ 1 $-$ ($\nearrow$ $\searrow$) x

т. $x=1$ – ~~лок.~~ стр. максимум причем $f(1)=0$ т.е. $f(x)\leq 0$

при $\alpha<0$ и $1<\alpha$: f': $-$ 1 $+$ ($\searrow$ $\nearrow$) x

$x=1$ – стр. мин. тогда $f(x)\geq 0$

$f(1)=0$

Неравенство Юнга: $a,b>0$ $p\neq 0,1$, $q\neq 0,1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ то

$$a^{1/p}b^{1/q}\leq \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, \quad p>1$$
$$a^{1/p}b^{1/q}\geq \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, \quad p<1$$

Д-во! $x=\frac{a}{b}$, $\alpha=\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$

Неравенство Гёльдера! $x_i, y_i \geq 0$ $i\in\overline{n}$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\sum x_iy_i \leq \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum y_i^q\right)^{1/q} \quad p>1$$
$$\sum x_iy_i \geq \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum y_i^q\right)^{1/q} \quad p<1$$

Д-во пусть $X=\sum x_i^p$, $Y=\sum y_i^q$, $a=\frac{x_i^p}{X}$, $b=\frac{y_i^q}{Y}$

тогда $\frac{x_iy_i}{X^{1/p}Y^{1/q}}\leq \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X}+\frac{1}{q}\cdot\frac{y_i^q}{Y}$

Суммируем по $i\in(\overline{1,n})$

$$\frac{\sum x_iy_i}{X^{1/p}Y^{1/q}}\leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \sum x_iy_i \leq X^{1/p}Y^{1/q}$$

Неравенство Минковского! $x_i, y_i \geq 0$ $i\in\overline{n}$

$$\left(\sum (x_i+y_i)^p\right)^{1/p}\leq \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum y_i^p\right)^{1/p} \quad p>1$$
$$\left(\sum (x_i+y_i)^p\right)^{1/p}\geq \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum y_i^p\right)^{1/p} \quad p<1$$

Д-во. $\sum (x_i+y_i)^p=\sum x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum y_i(x_i+y_i)^{p-1}$

введя $q=\frac{p}{p-1}$ т.к. $\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}=1$

из н. Гёльдера!

$$\sum (x_i+y_i)^p\leq\left(\left(\sum x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum y_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum (x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$$

$$\left(\sum (x_i+y_i)\right)^{1/p}\leq \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum y_i^p\right)^{1/p} \quad \text{ЧТД.}$$

Неравенство Йенсена: $\sum \alpha_i=1$ и $\alpha_i\geq 0$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ вып. функц. то

$$P: f\left(\sum \alpha_ix_i\right)\leq \sum \alpha_i f(x_i)$$

1) при $n=2$ – усл. вып.

2) Пошаг пусть P при $n-1$! $\beta=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i$ $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\right)=f\left(\alpha_1x_1+\beta\sum_{i=2}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta}x_i\right)\leq \alpha_1 f(x_1)+\beta f\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{\alpha_ix_i}{\beta}\right) \leq$ ($\alpha_1+\beta=1$) из предп. инд.

т.к. $\alpha_1+\beta=1$.

n

$\leq \sum_{i=1} \alpha_i f(x_i)$ чтд.

Неравенство Гёльдера №2:

Д-во: $f(x) = x^p$, $p > 1$ – выпукла. то $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$ пусть $q = \frac{p}{p-1}$
$\underset{x \geq 0}{}$

$\alpha_i = b_i^q \left(\sum b_i^q\right)^{-1}$

$x_i = a_i b^{-\frac{1}{p-1}} \sum b_i^q$

$\left(\sum a_i b_i\right) \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}$