# Практика 5.

Шахматов Андрей, Б02-304

11 марта 2024 г.

## Содержание



# 1 1.1

На множестве $E$ выполняется $\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$, а на множестве $G$ выполняется $\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$. Так как супремум на $E \cup G$ не превосходит максимума от супремумов на каждом из множеств, но тогда так как $\sup_E |f_n(x) - f(x)| \to 0$ и $\sup_G |f_n(x) - f(x)| \to 0$, то

$$\sup_{E\cup G} |f_n(x) - f(x)| = \max\{\sup_E |f_n(x) - f(x)|, \sup_G |f_n(x) - f(x)|\} \to 0$$

## 2 1.2

$$\sup |f_n g_n| \le M \sup |f_n| \to 0$$

## 3 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

по признаку Вейерштрасса сходится равномерно, а значит так как каждая из $S_n$ непрерывна, то $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ - непрерывна. Найдём производные $S_n$:

$$S_n' = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n}$$

Так как при $x = 0$, сумма $S_n'$ расходится, то теорему о почленном дифференцировании применять нельзя.

## 4 2.1

Выберем такое $N$ из определения равномерной сходимости $\forall x \in (0,1)\, \forall n, m > N\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Для каждой из $f_n$ и $f_m$ найдутся такие окрестности $U_n$ и $U_m$, то для любых $x_0$ из этих окрестностей $|f_n(x_0) - f_n(0)| < \varepsilon$ и $|f_m(x_0) - f_m(0)| < \varepsilon$, тогда для каждых $f_n$ и $f_m$ найдётся $x_0 \in U_n \cap U_m$ выполняются оба из этих неравенств. Тогда:

$$|f_m(0) - f_n(0)| \le |f_m(0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(0)| \le 3\varepsilon$$

Тогда так как функция сходится в 0, то она равномерно сходится на всём отрезке.

## 5 2.2

Рассмотрим $g_n = n^m e^{-nx}$ на отрезке $[a, b] \in (0, +\infty)$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \le \sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-an}$$

Ряд сходится по признаку Коши: $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{m}{n}} e^{-a} = e^{-a} < 1$. Тогда так как $g_n$ - является $m$ почленной производной исходного ряда, и каждая $g_n$ сходится равномерно на $[a, b]$, то по теореме о дифференцируемости, исходная функция $f$ бесконечно дифференцируема на $[a, b]$. Но так как $[a, b]$ можно брать произвольным, то $f$ дифференцируема на всём $(0, +\infty)$.

# 6 2.3

Контрпример $f_n = x + \frac{1}{n}$, $g_n = x + \frac{1}{n} + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$. Тогда очевидно, что $f_n$ сходится равномерно к $x$, а $g_n = f_n + \frac{1}{n} f_n = f_n(1 + o(1))$. Однако, взяв последовательность $x_n = n$:

$$|g_n(x_n) - x| = |1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}| \geq \frac{1}{4} = \varepsilon$$

при всех $n > 1 \implies g_n$ - не равномерно непрерывна.

# 7 2.4

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = n \\ 0, x \neq n \end{cases}$$

Такой функциональный ряд будет поточечно сходится к функции:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in \mathbb{N} \\ 0, x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Для $x \notin \mathbb{N}$ очевидно функция сходится равномерно. Тогда для заданного $\varepsilon$, выберем $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, тогда для любого $n > N$:

$$\sup |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Так происходит так как взяв $x < n$ $f_n(x) - f(x) = 0$, а взяв $x \geq n$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

При этом взяв последовательность $x_n = n$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

# 8 2.5

Рассмотрим по определению:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

$|f_n(x_n) - f_n(x)| < \varepsilon$ так как функции непрерывны(по Гейне), $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ из равномерной сходимости.

## 9 2.6

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln(n^2+x)}$$

Рассмотрим сумму из отрицания критерия Коши с $\forall N \, x(N) = \frac{1}{2N}, p(N) = N, n(N) = N$:

$$\left| \sum_{k=n}^{p+n} \frac{\sin \frac{k}{2N}}{\ln\left(k^2 + \frac{1}{2N}\right)} \right| = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\ln\left(N^2 + \frac{1}{2N}\right)} + \dots + \frac{\sin 1}{\ln\left(4N^2 + \frac{1}{2N}\right)} \geq \frac{N \sin \frac{1}{2}}{\ln\left(4N^2 + \frac{1}{2N}\right)} > \frac{N \sin \frac{1}{2}}{2 \ln 4N} \geq \frac{\sin \frac{1}{2}}{2 \ln 4} = \varepsilon$$

Ряд не сходится равномерно.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin x}{\ln(n^2+x)}$$

$$\sin x \sum_{k=1}^{n} \sin nx = \sin x \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \leq 2$$

Частичные суммы ограничены. Докажем, что $f_n = \frac{1}{\ln(n^2+x)}$ монотонна по $n$ и равномерно сходится к 0:

$$\frac{1}{\ln(n^2+x)} < \frac{1}{2 \ln n} \to 0.$$

$f_n$ - монотонна из-за монотонности логарифма. Тогда по признаку Дирихле получим что исходный ряд сходится равномерно.

## 10 2.7

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{2}{\delta}$$

Тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно.

б) Условие: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится:

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Сходится по признаку Вейерштрасса.

2) От противного, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится, то при $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(0 \cdot n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится.

## 11 3.1

$$\sup\{(f-g)+g\} \geq \sup(f-g)+\sup g \implies \sup(f-g) \leq \sup f - \sup g$$

Тогда:

$$|\sup f - \sup f_n| \leq \sup |f-f_n| \to 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sup f_n = \sup f$$

## 12 3.2

а) Неверно. Пусть $f_n = x + \frac{1}{n} \to x$, $g_n = \frac{1}{n} \to 0$, тогда $fg = x \cdot 0 = 0$, Но $f_n g_n = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$, взяв последовательность $x_n = n$ получим, что

$$|f_n g_n| = |1 + \frac{1}{n^2}| \geq 1 = \varepsilon$$

б) Верно. Доказательство: Так как $f, g$ - ограничены, то $|f|, |g| < M$ и так как они являются равномерными пределами $f_n, g_n$, то $|f_n| - |f| \leq |f_n - f| < \varepsilon$, тогда $|f_n| \leq \varepsilon + M$. Взяв $\varepsilon = M$ получим $|f_n|, |g_n| \leq 2M$ начиная с некоторого $N$.

$$|f_n g_n - fg| \leq f_n|g_n - g| + g|f_n - f| < 3\varepsilon M.$$

## 13 3.3

Предположим противное, тогда $\forall N \, \exists n_0 > 2N$:

$$|n_0 a_{n_0}| \geq \varepsilon \implies |a_{n_0}| \geq \frac{\varepsilon}{n_0}$$

Рассмотрим сумму из критерия Коши с $n(N) = N$, $m(N) = n_0, x(N) = \frac{1}{2N}$:

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin\frac{k}{2N}| \geq (n_0 - N) a_{n_0} \sin\frac{1}{2} \geq \varepsilon\left(1 - \frac{N}{n_0}\right)\sin\frac{1}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{1}{2}$$