**1.1.** Исследуйте по определению на равномерную сходимость на множествах $E_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $E_2 = (0,1)$ функциональную последовательность:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}.$$

П-ть поточечно сходится к 0 на $E_1, E_2$.

1) $E_1$: $\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| < \varepsilon$

$x^n < \varepsilon + \varepsilon x^n \Rightarrow x^n(1-\varepsilon) < \varepsilon$

инт. только $\varepsilon \to 0$ т.е. $\varepsilon < 1$

$x^n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$

$n \ln x < \ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$, $\ln x < 0$

$n > \frac{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} > \frac{-\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\ln x}$  $N = N\left(\frac{\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}\right)$

2) При $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a \in (0,1)$

тогда $\left|\frac{a}{1+a}\right| \geq \underline{a} = \varepsilon$

**1.2.** Исследуйте по определению на равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}. =$$

1) $x^2 \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N - 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N - 1}{-1} = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N \to 1$ при $N \to \infty$

2) $\left|1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n - 1\right| = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ на $E_2$ $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n < \frac{1}{2^n} \rightrightarrows 0$

на $E_1$: $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ; $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \neq 0$

**1.3.** Может ли последовательность разрывных на отрезке функций равномерно сходиться к непрерывной функции?

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, $x \in [0,1]$

**2.1.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right) \to 0$$

и функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1) $x_n = \frac{1}{n^2}$ : $f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{1+1}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ на $E_1$ - ряд не сход.

2) $\left|\sin\left(\frac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right)\right| < \frac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1} = \frac{1}{n^2 x + \frac{1}{n^2 x}} = \left\{\begin{matrix} n^2 x + \frac{1}{n^2 x} > n^2 \\ x > 1 \end{matrix}\right\} < \frac{1}{n^2} \to 0$

ряд тоже сходится р.к.

$\sum \sin\left(\frac{n^2 x}{n^4 x^2 + 1}\right) < \sum \frac{1}{n^2}$

**2.2.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональные последовательности:

а) $f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$; $\to x$  б) $f_n(x) = n \operatorname{sh} \frac{1}{nx}$. $\to \frac{1}{x}$

а) $\left|n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x\right| = \left|n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)\right) - x\right| = \left|\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{x^2}{2n}\right)\right| \overset{x<1}{<} \left|\frac{100}{n}\right| \to 0$

а) $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$; $\to x$   б) $f_n(x) = n\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{nx}$. $\to \frac{1}{x}$  ($x<1$)

а) $\left|n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\right| = \left|n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)\right)-x\right| = \left|\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{x^2}{2n}\right)\right| < \left|\frac{100}{n}\right| \to 0$

$x-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) > x-n\left(x-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}\right) = \frac{x^2}{2n}-\frac{x^3}{3n^2} = \left\{x_n=\sqrt{n}\right\} = \frac12-\frac{n^{3/2}}{3n^2} = \frac12-\frac{1}{3\sqrt{n}} \to \underline{\underline{\frac12}}$

б) $\left|n\,\mathrm{sh}\frac{1}{nx}-\frac1x\right| = \left\{\begin{matrix} x>1 \\ \frac{1}{nx}\to 0\end{matrix}\right\} = \left|n\frac{1}{nx}+n\,o\left(\frac{1}{n^2x^2}\right)n-\frac1x\right| = o\left(\frac{1}{nx^2}\right) = o\left(\frac1n\right) \to 0$ на $E_2$

$n\,\mathrm{sh}\frac{1}{nx}-\frac1x > n\left(\frac{1}{nx}+\frac{1}{6n^3x^3}\right)-\frac1x = \frac{1}{6n^2x^3}$, нерсто $x_n=\frac{1}{n^{2/3}}$ $\to \frac16 > \underline{\underline{\varepsilon}}$

**2.3.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right). \to -\frac{x^3}{6} \quad x<1$$

$E_1$: $\left|n\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)+\frac{x^3}{6}\right| = \left|n\left(-\frac{x^3}{6n}+o\left(\frac{x^4}{n^{4/3}}\right)\right)+\frac{x^3}{6}\right| = o\left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \to 0$

$E_2$: $x_n=\sqrt[3]{n}$ : $\left|n\left(\underbrace{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}-\arcsin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}}_{1-\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{n}{6}\right| = n\left|\frac76-\frac{\pi}{2}\right| \to +\infty$

**2.4.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=\left(\frac12,1\right)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n\left(x^{1/n}-x^{1/2n}\right). \to \frac12\ln n$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x^{1/n}-x^{1/2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(x^{1/n}-1\right) - \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(\sqrt{x}\right)^{1/n}-1\right) = \ln x - \ln\sqrt{x} = \frac12\ln x$

2) $x_n = n^n \to \left|n\left(n-\sqrt{n}\right)-\frac{n}{2}\ln n\right| = \underset{\to+\infty}{n}\left|\underset{\to+\infty}{n-\sqrt{n}-\frac{\ln n}{2}}\right|$

3) $\left|f_n(x)-f(x)\right| = \left|n x^{1/n}-n-\ln x-\left(\sqrt{x}\right)^{\frac1n}n-n-\ln\sqrt{x}\right| \leq \left|n\left(x^{1/n}-1\right)-\ln x\right| + \left|n\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac1n}-1\right)-\ln\sqrt{x}\right|$

Р-рим. $\left|n\left(x^{1/n}-1\right)-\ln x\right| = \left|n\left(e^{\frac1n\ln x}-1\right)-\ln x\right| = \left\{\begin{matrix}\ln x \\ x\in\left(\frac12,1\right)\text{–огр}\end{matrix}\right\} = \left|n\left(\frac1n\ln x+o\left(\frac{\ln^2 x}{n^2}\right)\right)-\ln x\right| =$

$= o\left(\frac{\ln^2 x}{n^2}\right) \to 0$

**2.5.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = n^3x^2e^{-nx} \to 0$$

и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

1) $x_n=\frac1n \to n^3\frac{1}{n^2}e^{-1} = ne^{-1} \to +\infty$

2) $f_n'(x) = 2xn^3e^{-nx}-n^4x^2e^{-nx} = xn^3\underset{\to 0}{e^{-nx}}\left(2-nx\right)$, т.е.

$f_n'(x)$: $+$ до $\frac2n$, $-$ после; $f(x)$: $\nearrow$ $\frac2n$ $\searrow$ $x$

в т. $x=\frac2n$ $f_n(x)$ имеет максимум, тогда

при $x>\underline{1}$ $\sup|f_n(x)| = f_n(1)$ т.е. $\sup|f_n(x)| = n^3e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^2e^{-nx} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3e^{-n}$  Критерий Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac3n}e^{-1} = \frac1e < 1 \Rightarrow$

ряд сход $\Rightarrow$

ф-ция сход р-но.

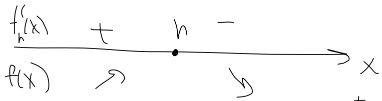
**2.7.** Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n+x}\right) \to 0$$

и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

$$1)\ f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sqrt{x}}{n+x}} \cdot \frac{n-x}{2\sqrt{x}(n+x)^2} = \frac{n-x}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(n+x)} \cdot \frac{1}{n+x+\sqrt{x}}$$

$$\sup f_n'(x) = f'_n(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n+n}\right) < \frac{1}{2n} \to 0$$




т.е. $f_n \rightrightarrows 0$ на всём $\mathbb{R}^+$

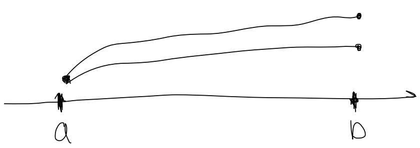
$$2) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{n+x}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{n+x}\right) = \frac{\frac{x}{(n+x)^2}}{}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{x}}{n+x} + \frac{x}{(n+x)^2}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\frac{x}{(n+x)^2}}{1+\frac{x}{(n+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x}{x+(n+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{p\sqrt{x}}{n+x}$$

$p = n$

**3.1.** Докажите *признак Дини*:
если последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций поточечно сходится на отрезке $[a,b]$ к непрерывной функции $f$, причем для любого $x \in [a,b]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна, то $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.




$U_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ — открытое, т.к. $|f_n(x)-f(x)|$ — непр и непр. пер $< \varepsilon$.

$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots U_n$ — покрытие

$\exists U_k$ т.ч. $[a,b] \subseteq U_k$ ЧТД.

**3.2.** Докажите *признак Хелли*:
если последовательность $\{f_n\}$ монотонных функций поточечно сходится на отрезке $[a,b]$ к непрерывной функции $f$, то $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.