Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

15 октября 2024 г.

Содержание

1 T1

Множество X задаётся следующим неравенством:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq az(x^2 + y^2)$$

Тогда

$$\mu X = \int_X 1\, dxdydz$$

Введём сферическую замену координат, его якобиан $|J| = r^2 \sin\theta$, и неравенство преобразуется как

$$r^4 \leq azr^2 \sin^2\theta \implies r^2 \leq \sin^2\theta$$

Тогда объём равен:

$$\mu X = \int_{r^2 \leq \sin^2\theta} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{|\sin\theta|} r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = \frac{2\pi}{3}\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

2 T2

б)

$$\int_{|\frac{y}{b}|\leq\frac{x}{a}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2c^2}}dxdy$$

Домножим существующие координаты на $x = ax, y = by$

$$ab\int_{-x\leq y\leq x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{c}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{by}{c}\right)^2\right\}dxdy = ab\int_0^\infty dx\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{c}\right)^2\right\}\int_{-x}^{x}dy\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{by}{c}\right)^2\right\}$$

((((потом сделаю))))

в)

$$\int_{a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq b^2} x^2+y^2-z^2dxdydz$$

Перейдём в сферическую систему координат:

$$\int_{a^2\leq r^2\leq b^2} r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\phi = 2\pi\int_a^b r^4dr\int_0^\pi(\sin^3\theta-\sin\theta\cos^2\theta)d\theta = 2\pi\frac{2}{3}\left(\frac{b^5-a^5}{5}\right)$$

Тогда ответ:

$$I = \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5)$$

д)

$$I = \int_{x^2+y^2\leq az\leq b^2} z^2dxdydz$$

Перейдём в циллиндрическую систему координат:

$$I = \int_{r^2\leq az\leq b^2} z^2rdrd\phi dz = 2\pi\int_0^{b^2}z^2dz\int_0^{\sqrt{az}}rdr = a\pi\int_0^{b^2}z^3dz = \frac{\pi}{4}ab^8$$

е)

$$\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} x^2+y^2+z^2dxdydz = \frac{1}{abc}\int_{x^2+y^2+z^2\leq 1}(ax)^2+(by)^2+(cz)^2dxdydz$$

Перейдём к сферическим координатам:

$$I = \frac{1}{abc}\int_{r^2\leq 1}r^2dr\int_0^{2\pi}\int_0^\pi(a\sin\theta\cos\phi)^2+(b\sin\theta\sin\phi)^2+(c\cos\theta)^2d\theta d\phi$$

$$I = \frac{2}{3abc}\left(a^2\frac{\pi^2}{2}+b^2\frac{\pi^2}{2}+c^2\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2(a^2+b^2+c^2)}{3abc}$$

3 T3

б) Плотность тела примем равной 1. Введём циллиндрическую систему координат, $x = ar\cos\phi$, $y = ar\sin\phi$, $h = zc$.

$$M = a^2c\int_{r\leq h\leq 1} rdrd\phi dh = 2\pi a^2c\int_0^1 dh\int_0^h dr = \pi a^2c$$

Тогда так как тело является телом вращения, то $x_0 = y_0 = 0$. Найдём z_0

$$z_0 = 2\pi a^2c\int_{r\leq h\leq 1} chrdrd\phi dh = 2\pi a^2c^2\int_0^1 hdh\cdot h = a^2c^2\frac{2\pi}{3} = \frac{2Mc}{3}$$

4 T4

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}\sin\big(x^2+y^2\big)dxdy$$

Интеграл существует при любых значениях параметра а т.к. он мажорируется сходящимся. Введём полряные координаты.

$$I = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-ar^2}\sin\big(r^2\big)rdr = \pi\int_0^{+\infty} e^{-at}\sin tdt = \frac{\pi}{a^2+1}$$

Последний интеграл мы находили в прошлом году беря его два раза по частям.

5 8.201

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ x\geq 1, y\geq 1\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Введём сферическую замену координат, рассмотрим пока что область $x\geq 1, y\geq 1$

$$f(x,y) = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\cos 2\phi,$$

Интеграл по ограниченной области A соответственно равен

$$F = \int_A \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\cos 2\phi r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi = \int_A \sin^3\theta\cos 2\phi\, drd\theta d\phi$$

Тогда в дальнейшем при $r\geq\sqrt{2}$ в интеграле возникнет $\int_0^{2\pi}\cos 2\phi d\phi = 0$. Тогда интеграл при $r\geq\sqrt{2}$ равен 0, а при $r\leq\sqrt{2}$ очевидно сходится так как ограничен на множестве конечной меры.

6 T6

в) Я не уверен, но стереографической проекцией из точки шара $(0,0,-1)$ получим, что полусфера диффеоморфна диску на плоскости (а для него мы доказывали в предыдущем пункте). Замена координат следующая:

$$\begin{cases}t_A^1 = \dfrac{x}{1+z}\\ t_A^2 = \dfrac{y}{1+z}\end{cases}$$

7 T7

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Не знаю((()))

8 T8

Введём 2 карты, соответствующие двум стереографическим проекциям сферы на две плоскости. $\phi_A : V_A \to U_A$, $V_A = \mathbb{R}^2$, $U_A = \mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, 1)$

$$\begin{cases} t_A^1 = \dfrac{x}{1-z} \\ t_A^2 = \dfrac{y}{1-z} \end{cases}$$

Обратное имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t_A^1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ y = \dfrac{2t_A^2}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \\ z = \dfrac{(t_A^1)^2 + (t_A^2)^2 - 1}{1 + (t_A^1)^2 + (t_A^2)^2} \end{cases}$$

Найдём ранг карты:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 & \frac{x}{(1-z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-z} & \frac{y}{(1-z)^2} \end{pmatrix}$$

На V_A ранг карты очевидно равен двум. Аналогично строится вторая карта $\phi_B : V_B \to U_B$, разве, что $1 - z \leftrightarrow 1 + z$. То есть:

$$\begin{cases} t_B^1 = \dfrac{x}{1+z} \\ t_B^2 = \dfrac{y}{1+z} \end{cases}$$

Все остальные формальные утверждения делаются аналогично, из чего следует, что сфера является вложенным многообразием. Посмотрим на гладкость функции свзяки:

$$\begin{cases} t_A^1 = \dfrac{1}{t_B^1} \\ t_A^2 = \dfrac{1}{t_B^2} \end{cases}$$

Такие функции очевидно бесконечно гладкие, а значит такой набор карт будет являтся атласом для сферы ранга 2.