Практика 5.

Шахматов Андрей, Б02-304

10 марта 2024 г.

Содержание

1 1.1

На множестве E выполняется $\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=0$, а на множестве G выполняется $\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=0$. Так как супремум на $E\cup G$ не превосходит максимума от супремумов на каждом из множеств, но тогда так как $\sup_E|f_n(x)-f(x)|\to 0$ и $\sup_G|f_n(x)-f(x)|\to 0$, то

$$\sup_{E\cup G}|f_n(x)-f(x)|=\max\{\sup_E|f_n(x)-f(x)|,\sup_G|f_n(x)-f(x)|\}\to 0$$

2 1.2

$$\sup |f_n g_n| \le M \sup |f_n| \to 0$$

3 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

по признаку Вейерштрасса сходится равномерно, а значит так как каждая из S_n непрерывна, то $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ - непрерывна. Найдём производные S_n:

$$S_n' = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n}$$

Так как при $x = 0$, сумма S_n' расходится, то теорему о почленном дифференцировании применять нельзя.

4 2.1

Выберем такое N из определения равномерной сходимости $\forall x \in (0,1)\, \forall n, m > N\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Для каждой из f_n и f_m найдутся такие окрестности U_n и U_m, то для любых x_0 из этих окрестностей $|f_n(x_0) - f_n(0)| < \varepsilon$ и $|f_m(x_0) - f_m(0)| < \varepsilon$, тогда для каждых f_n и f_m найдётся $x_0 \in U_n \cap U_m$ выполняются оба из этих неравенств. Тогда:

$$|f_m(0) - f_n(0)| \le |f_m(0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(0)| \le 3\varepsilon$$

Тогда так как функция сходится в 0, то она равномерно сходится на всём отрезке.

5 2.2

Рассмотрим $g_n = n^m e^{-nx}$ на отрезке $[a, b] \in (0, +\infty)$, тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \le \sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-an}$$

Ряд сходится по признаку Коши: $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{m}{n}} e^{-a} = e^{-a} < 1$. Тогда так как g_n - является m почленной производной исходного ряда, и каждая g_n сходится равномерно на $[a, b]$, то по теореме о дифференцируемости, исходная функция f бесконечно дифференцируема на $[a, b]$. Но так как $[a, b]$ можно брать произвольным, то f дифференцируема на всём $(0, +\infty)$.

6 2.3

7 2.4

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = n \\ 0, x \neq n \end{cases}$$

Такой функциональный ряд будет поточечно сходится к функции:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in \mathbb{N} \\ 0, x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Для $x \notin \mathbb{N}$ очевидно функция сходится равномерно. Тогда для заданного ε, выберем $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, тогда для любого $n > N$:

$$\sup |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Так происходит так как взяв $x < n$ $f_n(x) - f(x) = 0$, а взяв $x \geq n$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$.

При этом взяв последовательность $x_n = n$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

8 2.5

Рассмотрим по определению:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

$|f_n(x_n) - f_n(x)| < \varepsilon$ так как функции непрерывны(по Гейне), $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ из равномерной сходимости.

9 2.6

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln(n^2 + x)}$$

Рассмотрим сумму из отрицания критерия Коши с $\forall N\, x(N) = \frac{1}{2N}, p(N) = N, n(N) = N$:

$$\left| \sum_{k=n}^{p+n} \frac{\sin \frac{k}{2N}}{\ln\left(k^2 + \frac{1}{2N}\right)} \right| = \frac{\sin \frac{1}{2}}{\ln\left(N^2 + \frac{1}{2N}\right)} + \cdots + \frac{\sin 1}{\ln\left(4N^2 + \frac{1}{2N}\right)} \geq \frac{N \sin \frac{1}{2}}{\ln\left(4N^2 + \frac{1}{2N}\right)} > \frac{N \sin \frac{1}{2}}{2 \ln 4N} \geq \frac{\sin \frac{1}{2}}{2 \ln 4} = \varepsilon$$

Ряд не сходится равномерно.
б)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin x}{\ln(n^2+x)}$$

$$\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin nx=\sin x\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}=2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\leq 2$$

Частичные суммы ограничены. Докажем, что $f_n=\frac{1}{\ln(n^2+x)}$ монотонна по n и равномерно сходится к 0:

$$\frac{1}{\ln(n^2+x)}<\frac{1}{2\ln n}\to 0.$$

f_n - монотонна из-за монотонности логарифма. Тогда по признаку Дирихле получим что исходный ряд сходится равномерно.

10 2.7

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\leq\frac{2}{\delta}$$

Тогда по признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ сходится равномерно.
б) Условие: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится:
1) Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\leq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Сходится по признаку Вейерштрасса.
2) От противного, если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ не сходится, то при $x=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(0\cdot n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

расходится.

11 3.1

$$\sup\{(f-g)+g\}\geq\sup(f-g)+\sup g\implies\sup(f-g)\leq\sup f-\sup g$$

Тогда:

$$|\sup f-\sup f_n|\leq\sup|f-f_n|\to 0\implies\lim_{n\to\infty}\sup f_n=\sup f$$

12 3.2

а) Неверно. Пусть $f_n = x + \frac{1}{n} \to x$, $g_n = \frac{1}{n} \to 0$, тогда $fg = x \cdot 0 = 0$, Но $f_n g_n = \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$, взяв последовательность $x_n = n$ получим, что

$$|f_n g_n| = |1 + \frac{1}{n^2}| \geq 1 = \varepsilon$$

б) Верно. Доказательство: Так как f, g - ограничены, то $|f|, |g| < M$ и так как они являются равномерными пределами f_n, g_n, то $|f_n| - |f| \leq |f_n - f| < \varepsilon$, тогда $|f_n| \leq \varepsilon + M$. Взяв $\varepsilon = M$ получим $|f_n|, |g_n| \leq 2M$ начиная с некоторого N.

$$|f_n g_n - fg| \leq f_n|g_n - g| + g|f_n - f| < 3\varepsilon M.$$

13 3.3

Предположим противное, тогда $\forall N \, \exists n_0 > 2N$:

$$|n_0 a_{n_0}| \geq \varepsilon \implies |a_{n_0}| \geq \frac{\varepsilon}{n_0}$$

Рассмотрим сумму из критерия Коши с $n(N) = N$, $m(N) = n_0, x(N) = \frac{1}{2N}$:

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin\frac{k}{2N}| \geq (n_0 - N) a_{n_0} \sin\frac{1}{2} \geq \varepsilon \left(1 - \frac{N}{n_0}\right) \sin\frac{1}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} \sin\frac{1}{2}$$