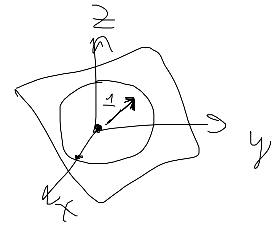
Т2. а) $p\Gamma(p)=\Gamma(p+1) \Rightarrow p\Gamma(p)\to 1,\ p\to 0 \Rightarrow \Gamma(p)\sim \frac{1}{p},\ p\to 0$

Т3. а) $\int_0^{\pi} dy\int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} dx\, \frac{\sin x}{x}\int_0^x dy = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$

в) $\int\limits_{0\le x_1..x_n\le a} (x_1+\dots+x_n)^2\, dx_1\dots dx_n = a^{n-1}\int_0^a x^2\,dx\cdot n + 2na^{n-2}\int\limits_{0\le x,y\le a} xy\,dx\,dy = 2na^{n-2}\left(\int_0^a x\,dx\right)^2 + a^{n-1}n\int_0^a x^2dx$

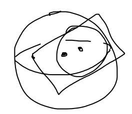
$= 2na^{n-2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + na^{n-1}\frac{a^3}{3} = \frac{na^{n+2}}{2} + \frac{na^{n+2}}{3} = \frac{5na^{n+2}}{6}$

Т.7. б) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2\,ds = I \Rightarrow 3I = \int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2+y^2+z^2\,ds = \int\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=0}} a^2\,ds = a^2\int_S ds = \underline{2\pi a^2}$



Т.4. б) б) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x+y+z)\,dxdydz; = \iiint\limits_{h} f(t)\,dt\,dy\,dz = \int_0^a dt\, f(t)\,\pi(a^2-t^2)$

$\begin{Bmatrix} t=x+y+z \\ y=y \\ z=z \end{Bmatrix}$



Т.1. а) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^{\beta}}dx$, сход при $\alpha,\beta>0$ и $\alpha,\beta<0$

$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^{\beta}}dx = \begin{Bmatrix} t=x^{\beta} \\ dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt \end{Bmatrix} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-1}{\beta}} e^{-t}\,\frac{1}{\beta}\,t^{\frac{1}{\beta}-1}dt = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

в) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^{\beta}}dx = \begin{Bmatrix} x^{\beta}=t \\ dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\ln t}{1+t}dt = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt$

$\left\{\gamma = \frac{\alpha+1}{\beta}\right\}$

$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt = \begin{Bmatrix} \ln t = p \\ dt=e^{p}dp \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}\,p}{1+e^{p}}dp$

Р-рим $\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} = B(\gamma,1-\gamma) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}}{1+t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}}{1+e^{p}}dp$

$-\frac{\pi^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\,e^{\gamma p}}{1+e^{p}}dp \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^{\beta}}dx = -\frac{\pi^2\beta^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)}$

Т6. а) $y=a\,ch\frac{x}{a},\ 0\le x\le b \Rightarrow l = \int_0^b\sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}\,dx = \int_0^b ch\frac{x}{a}\,dx = a\,sh\frac{x}{a}\Big|_0^b = a\,sh\frac{b}{a}$

б) На доп семинаре

Д-во ф-лы дополнения.

$\boxed{\text{I.}}$ Д-жем, что $\pi\,ctg\,x\pi = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

$f(x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ $\qquad g(x)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

---

1) Д-жем, что $g(x)$ опред для всех нецелых значений: $\dots 1 \dots \frac{1}{\ } \to$ сходится.

$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ ... $g(x)$ ... $n=1$

1) Д-жем, что $g(x)$ опред для всех нецелых значений:
$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$
— сход равномерно $\forall x \notin \mathbb{Z}$ т.к. $\frac{1}{x^2-n^2} \sim \frac{1}{n^2} \to$ сходится.

2) Д-жем, что $g(x)$ и $f(x)$ — периодичные с периодом 1.
$$g_N = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \to g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n+1} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} \Rightarrow \text{при } N \to \infty \ \boxed{g_N(x) = g_N(x+1)}$$

3) $f(x) = -f(-x)$; $g(x) = -g(-x)$ — очев

4) для $f(x)$: $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ $\left(\pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin \pi x} = \frac{\pi\left(\cos^2 \frac{\pi x}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}\right)}{2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} + \pi \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}\right)$

для $g(x)$: $g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}$ $\to$ переходя к пределу
$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$$

5) Тогда $h(x) \equiv f(x) - g(x)$ — нечёт непр ф-ция и $2h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Пусть x_0 — $h(x_0) = \max h(x_0) = m \Rightarrow 2m = h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$

Пусть $h\left(\frac{x_0}{2}\right) < m$: $2m < m + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > m$ — противор $\Rightarrow m = h\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Тогда $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow h(0) = \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$, но $h(0) = 0$ т.к. $\pi \operatorname{ctg} \pi x \to \frac{1}{x}$ при $x \to 0$

Тогда $\boxed{m=0} \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

II.
$$\int_0^x \left(\pi \operatorname{ctg} \pi t - \frac{1}{t}\right) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$$
$$\parallel$$
$$\ln\left|\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right|$$

Тогда $\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

III.
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1 - x^{1/n}\right)^{\alpha-1} dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} B(n,\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$$

IV.
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} =$$
$$= \frac{1}{\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Т.10. $x e^{f+g} + fg = 1$, $y e^{f-g} - \frac{f}{1+g} = 2x$ в $x=1$ $y=2$ $f(1,2)=0$, $g(1,2)=0$

$$\begin{cases} e^{f+g}dx + xe^{f+g}(df+dg) + fdg + gdf = 0 \\ e^{f-g}dy - \frac{(1+g)df - fdg}{(1+g)^2} = 2dx \end{cases} \xrightarrow{(1,2)} \begin{cases} dx + df + dg = 0 \\ dy - df = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dg = dx - dy \\ df = dy - 2dx \end{cases}$$

Т.12. $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $|J| > 0$

т.к. $|J| > 0$ по вып. т. об обр ф-ции $\forall x \in U$.

... $f(x) = \bigcup f_x(U_x)$, где

Т.12. $f: U \to \mathbb{R}$, ...

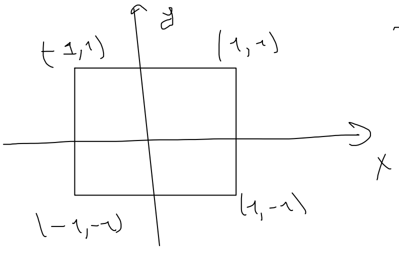
т.к. $|J|>0$ по бин. т. об обр ф-ции $\forall x \in U$.

Пусть $W \subseteq U$ – откр, тогда $Q = f(W) = \bigcup\limits_{x \in W} f(x) = \bigcup\limits_{x\in W} f_x(U_x)$, где

$f_x = f|U_x$, где $\exists\, f^{-1}: W_x \to U_x$ причём т.к. f непр, то W_x – открыто т.к. U_x – откр

$Q = \bigcup\limits_{x \in W} \underset{\uparrow \text{ откр}}{W_x} \Rightarrow Q$ – откр //

Т.14.



Тогда $\begin{cases} y' = tg\left(y\frac{\pi}{2}\right) \\ x' = tg\left(x\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = arctg(y')\frac{2}{\pi} \\ x = arctg(x')\frac{2}{\pi} \end{cases}$ – обратн.

непр дифф   непр дифф

нашли диффеоморф $I(0,1) \to \mathbb{R}^2$

т.к. в Т13 уже нашли д.м $\mathbb{R}^2 \to B(0,1) \Rightarrow I(0,1) \to B(0,1)$ – диффеоморф/

Т.17. $\begin{cases} x = e^u\cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u\cos v & -e^u\sin v \\ e^u \sin v & e^u\cos v \end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v\end{pmatrix}$

$J^{-1} = e^{-u}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \to \begin{cases} u_x = e^{-u}\cos v \\ v_x = e^{-u}\sin v \\ u_y = e^{-u}(-\sin v) \\ v_y = e^{-u}\cos v \end{cases} \to$ $u_{xx} = -e^{-u}u_x\cos v - e^{-u}v_x \sin v$

$u_{yy} = e^{-u}u_x \sin v - e^{-u} v_x \cos v$

$v_{xx} = -e^{-u}u_x\sin v + e^{-u}v_x\cos v$

$v_{yy} = -e^{-u}u_x\cos v - e^{-u}v_x \sin v$

$f_x = f_u u_x + f_v v_x$

$f_{xx} = (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)u_x + (f_{vu}u_x + f_{vv}v_x)v_x + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}$

$f_{yy} = (f_{uu}u_y + f_{uv}v_y)u_y + (f_{vu}u_y + f_{vv}v_y)v_y + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}$

$f_{xx} + f_{yy} = f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2f_{uv}(v_x u_x + v_y u_y) + f_{vv}(v_y^2 + v_x^2) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) + f_u(u_{xx} + u_{yy})$

$\Delta f = f_{uu}e^{-2u} + f_{vv}e^{-2u} + 2f_{uv}\cdot 0 + f_v e^{-u}(u_x(\sin v + \cos v) - v_x(\sin v + \cos v)) +$
$+ f_u e^{-u}(v_x(\sin v + \cos v) - u_x(\sin v + \cos v)) =$

$= e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + (f_v - f_u)e^{-u}(\sin v + \cos v)e^{-u}(\cos v - \sin v) =$

$= e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + e^{-2u}(f_v - f_u)\cos 2v$ //

Лапласиан в сфер коорд

$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \to J = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$H_1^2 = 1$

$H_2^2 = \frac{1}{r^2}$

$H_3^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

... $= f(x_1, x_2, x_3)$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Будем считать в таком виде $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$
$(r, \theta, \varphi) = (y_1, y_2, y_3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

Мы знаем, что сфер. коорд ортогональные т.е. $\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = H_{kl}^2$, $H_{kl} = \begin{cases} H_k^2, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}}_{H_{kj}^2} + \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_j} H_j + \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

1) $$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 x^2} = \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 y} = \frac{\partial(\sin\theta\sin\varphi)}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 z} = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial z} = +\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$\sum \frac{\partial^2 r}{\partial^2 x_i} = \frac{2}{r}$$

2) $$\theta_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cancel{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi} - \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}{r^2}} - \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta}$$

$$\theta_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi - \frac{\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta}$$

$$\theta_{zz} = \frac{\partial\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}$$

$$\sum \theta_{x_i x_i} = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} \ ?$$

3) $$\varphi_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta \cdot \cos\varphi + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\varphi_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1} + \frac{\cos\varphi}{r}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta\,\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\varphi_{zz} = 0$$

$$\sum \varphi_{x_i x_i} = 0 \ ?$$

Тогда $$\Delta f = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}}$$

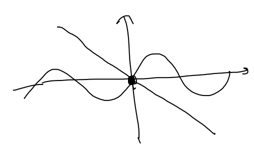
V. Экстремумы функций неяв. переменных.

Т.21. б) $F(f, x, y) = f + \sin f - x^2 + y^2 = 0$

1) $df + \cos f\, df - 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos f \neq 0 \\ -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos f \neq -1 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Если $x = y = 0 \Rightarrow f + \sin f = 0$
$-f = \sin f$
единств. реш. $f = 0$ //



2) $$F_{xy} = \frac{1}{1+\cos 0}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — неопределена $\Rightarrow$ нет ни макс ни мин.

Т.22. а) $\begin{cases} f = x + y + z \\ F = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow L = f - \lambda F$

$L_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2\lambda} \Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow$

$L_y = 1 - \lambda \cdot 2y = 0 \qquad \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$L_z = 1 - \lambda \cdot 2z = 0$

$L_y = 1 - \lambda \cdot 2y = 0$ $\quad\Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = y = z = \pm \sqrt{3}$

$L_z = 1 - \lambda \cdot 2z = 0$

$d^2L = -2\lambda \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \left\{\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = +\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ – положительно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ она является п. опр при сужении на $T_xS \Rightarrow$ в т. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ – минимум

тогда в т. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ – максимум из-за симметрии з-чи отн знака.

б) Другие знаки. Мы получили, что в $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, \frac{1}{2}) \rightarrow \max$.

$\lambda > 0$: Если $x < 0$ и $y < 0$, то $f(x,y,z) = xyz$ также дост. максимума т.к.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – максимум. $\rightarrow$ как локальный так и глобал

$\lambda < 0$: Ф-ция дост минимума, т.к. это единственные точки, подозр на минимум, а f должна дост минимума как непр на компакте.

д) $\begin{cases} f(\bar{x}) = Q(\bar{x}) \text{ – симм кв форма.} \\ |\bar{x}|^2 = 1 \end{cases}$ 1) Сделаем ортогональную замену коорд, где Q – диагональная м-ца с с.знач на диагонали. Т.к. $\exists$ к ортогональная, то условие $|\bar{x}|^2 = 1$ сохраняется и в н-с коорд.

2) Мы свели з-чу к з-че, где $Q = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ в т-случае

$Q(\bar{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ и $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$

Если $\exists \lambda_i = \lambda_j$ то в-ведём замену $x_i^2 + x_j^2 = y_k^2$ тогда

$f(\bar{x}) = \lambda_i y_i^2$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$

$L = (\lambda_i - \mu) y_i^2$, μ – мн-ли Л-жа.

$dL = 2(\lambda_i - \mu) y_i dy_i \Rightarrow$ к решение $\mu_k = \lambda_i$, $y_i = \pm 1$, $y_{j \neq i} = 0$

$d^2L = 2(\lambda_i - \mu) dy_i^2$ $\quad T_{y_0}S: y_i dy_i = 0$

пусть $\left.\begin{matrix} y_1 = 1 \\ \mu = \lambda_1 \end{matrix}\right\}$ $d^2L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n - \lambda_n \end{pmatrix}$ $\left.T_{y_0}S: dy = 0\right\}$ т.е. Сужение на $T_{y_0}S$: $A = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix}$ т.е. в случае, если $\lambda_1 = \min(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ – $A > 0$ – минимум; $\lambda_1 = \max(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ $A < 0$ – максимум

$\left.\begin{matrix} f_{max} = \max(\lambda_1 \dots \lambda_n) \\ f_{min} = \min(\lambda_1 \dots \lambda_n) \end{matrix}\right|$ больше макс и минимумов нет //

, где $\lambda_1 \dots \lambda_n$ – с значения Q.

Т.23. $\det A = \det(S^{-1} D(A) S) = \det D(A) = xyzt = 1$

$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(S^{-1} D(A) S) = \operatorname{tr}(S^{-1} S D(A)) = \operatorname{tr}(D(A)) = x + y + z + t$

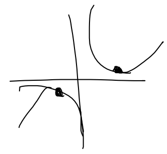
Тогда: $\begin{cases} f(x,y,z,t) = x + y + z + t \\ xyzt = 1 \end{cases}$

$yzt \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{yzt} \Rightarrow f = y + z + t + \frac{1}{yzt}$

$df = dy\left(1 - \frac{1}{zty^2}\right) + dz\left(1 - \frac{1}{z^2yt}\right) + dt\left(1 - \frac{1}{zyt^2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} zty^2 = 1 \\ zyt^2 = 1 \\ ytz^2 = 1 \end{cases}$

$yzt \neq 0 \Rightarrow x = yzt$

$$df = dy\underbrace{\left(1 - \frac{1}{zty^2}\right)}_{f_y} + dz\underbrace{\left(1 - \frac{1}{z^2yt}\right)}_{f_z} + dt\underbrace{\left(1 - \frac{1}{zyt^2}\right)}_{f_t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} zyt^2 = 1 \\ ytz^2 = 1 \end{cases}$$



$$z = \frac{1}{ty^2} \Rightarrow t^2y \cdot \frac{1}{ty^2} = 1 \Rightarrow \frac{t}{y} = 1 \Rightarrow t = y = z = \pm 1$$

$$d^2f(+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \text{ - мин}$$

– строгие.

$$d^2f = \begin{pmatrix} \frac{2}{zty^3} & \frac{1}{z^2y^2t} & \frac{1}{y^2t^2z} \\ \frac{1}{z^2y^2t} & \frac{2}{z^3ty} & \frac{1}{z^2t^2z} \\ \frac{1}{y^2t^2z} & \frac{1}{z^2t^2z} & \frac{2}{zt^3y} \end{pmatrix}$$

$$d^2f(-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} < 0 \text{ - макс}$$

T.26. $f(x,y) = x\left((x^2-1)^2 + \frac{3}{5}\right) + xy^2$

$f_x = 5x^4 - 6x^2 + \frac{8}{5} + y^2 = 0$

$f_y = 2xy = 0$

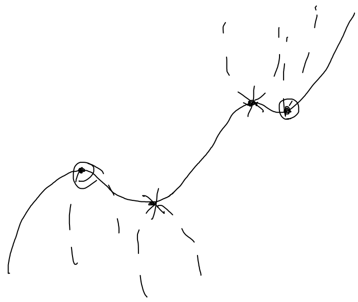
$x = 0 \Rightarrow 1 + y^2 = 0$ – нет реш.

$y = 0 \Rightarrow 5x^4 - 6x^2 + \frac{8}{5} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = 0{,}8 \to & x = \pm\sqrt{0{,}8} \\ x^2 = 0{,}4 & x = \pm\sqrt{0{,}4} \end{array}\right.$

$$d^2f = \begin{pmatrix} 20x^3 - 12x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \{x = \sqrt{0{,}8}\} = \begin{pmatrix} \overbrace{20(0{,}8)^{3/2} - 12\cdot 0{,}8}^{>0} & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}8} \end{pmatrix} > 0 \to \text{минимум}$$

при $x = -\sqrt{0{,}8}$ – макс.

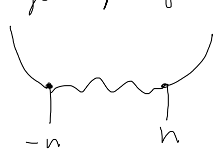
$$\{x = \sqrt{0{,}4}\} \approx \begin{pmatrix} -2{,}5 & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}4} \end{pmatrix} \text{ – неопределена}$$



T.25. $n=1$: 1) Если $P(x)$ – нечёт степени, то $\exists x_0$ т.ч. $P(x_0) = 0$ и т.к. $|P(x)| \geq 0$ то $|P(x_0)| = 0$ – мин дост.

2) Если $P(x)$ – чёт степени и не имеет корней, то б.о.о. $P(x) > 0$

Тогда для д.б. n $P(x \mid |x| > n)$ – строго возрастает или убывает



тогда $P|_{[-n,n]}$ – дост мин-ма на компакте, то

тогда P дост м-ма на $\mathbb{R}^n$.

$n=2$: $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^2 \geq 0$ $\inf f(x,y) = 0$ при $y_n \to 0$, $x = \frac{1}{y_n}$ не достигается.

T.24. 1) В случае если A – диагонализируемая, то задача

эк6 пред-ует и $\min \operatorname{tr} A = 1 + 1 + \frac{1}{1} = 3$ // при $x = y = 1$
$\underbrace{}_{\text{T.23}}$

2) A – недиаг. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$ – не знаю я думаю любое $\operatorname{tr} A$ может быть любым.

т.к. a_0, a_1, a_2 – независ.//