18.1. Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0,$
$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0;$

$\to \begin{pmatrix}5&-8&3&3\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\4&-6&2&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-2&1&2\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix}1&0&-1&-5\\0&2&-2&-7\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&5\\0&2&2&7\end{array}\right)$

$a_1\begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}10\\7\\0\\2\end{pmatrix}$

9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$
$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0;$

$\begin{pmatrix}2&4&6&1\\1&2&3&1\\3&6&9&-1\\1&2&3&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$a_1\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

19.6. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить

4) $\|A_{239}|\mathbf{c}_{67}\|;$ $\to \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\-1&0&-2&1\\-2&2&0&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\-1&1&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&-1\\0&1&2&0\end{array}\right)$

$b=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad a\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$

20) $\|A_{511}|\mathbf{c}_{74}\|;$ $\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\-5&4&63&29&71\\5&24&-7&-1&41\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\5&24&-7&-1&41\\0&28&56&28&112\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\0&14&28&-14&112/2\\0&28&56&28&112\end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-7&-3&-3\\0&1&2&1&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-11&-5&-11\\0&1&2&1&4\end{array}\right)$

$b=\begin{pmatrix}-11\\4\\0\\0\end{pmatrix} \quad a_1\begin{pmatrix}11\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}5\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\|A^T_{444}|\mathbf{c}_{167}\|;$ $\left(\begin{array}{cccc|c}5&2&3&1&9\\4&1&2&3&-1\\1&1&1&-2&1\\3&4&1&2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-2&1\\4&1&2&3&-1\\\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{1}&\cancel{-2}&\cancel{1}\\3&4&1&2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-10&-4\\0&1&-2&8&5\\0&0&-8&35&10\end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{25}{8}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{3}{4}&\frac{5}{2}\\0&0&-1&\frac{35}{8}&\frac{5}{4}\end{array}\right) \Rightarrow b\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\\0\end{pmatrix} \quad a_1\begin{pmatrix}-25/8\\3/4\\35/8\\1\end{pmatrix}$

18.13. Зная одну фундаментальную матрицу Φ, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

$\Phi' = \Phi A$, где столбцы A – ЛНЗ, т.е. $\det A \neq 0$

18.17. Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

4) $\Phi = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&1\\1&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&x_1\\1&2&x_2\\1&1&x_3\\1&3&x_4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&1&x_4-x_2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&x_1\\0&1&x_2-x_1\\0&0&x_3-x_1\\0&0&x_4-2x_2+x_1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x_3 - x_1 = 0\\x_4 - 2x_2 + x_1 = 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

19.14. Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

$Ax = b$ пусть $A_{n\times m}$ и строки ЛНЗ, тогда по т. о рангах $\exists$ n ЛНЗ столбцов, тогда в базисе $\mathbb{R}^n$ и с-ма столбцов явл. порождающей. т.е. $\exists x$ т.ч. $Ax = b$.

19.21. Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

$b_1 \quad a_1 \dots a_n$
$b_2 \quad a_1' \dots a_n'$ } тогда $b_2 = b_1 + \sum \lambda_i a_i$ тогда решение 2-с-мы $b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

тогда $\forall \mu_i$ $\sum \mu_i a_i + \cancel{b_1} = \cancel{b_1} + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$

$\sum (\mu_i - \lambda_i) a_i = \sum \lambda_i' a_i'$, возьм. $\mu_i = \lambda_i$ если $i \neq j$ и $\mu_i \neq \lambda_i$ если $i = j$ получим

$a_j = \sum \lambda_i' a_i'$

аналогично для $\{a_i \to a_i'$ получаем, что обе с-мы лин в-ются через друг друга.

20.22. Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 2) $A_{238}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 3) $A_{249}\mathbf{x} = \mathbf{o}$; 4) $A_{391}\mathbf{x} = \mathbf{o}$;

3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ - размерность 1

20.23. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

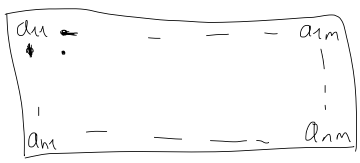
1) $\mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{c}_{83}$; 2) $\mathbf{c}_{31}$, $\mathbf{c}_{30}$; 3) $\mathbf{c}_{30}$, $\mathbf{c}_{29}$;
4) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{196}$; 5) $\mathbf{c}_{197}$; 6) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{198}$, $\mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{c}_{201}$;

4) $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Т.1*. Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Докажите, что всегда можно, причем единственным образом, расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.



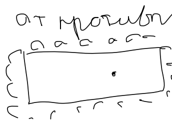
Составим с-му ур-ся из $k = (m-1)(n-1)$ переменных.

$Ax = B$, $A = A_{k\times k}$.

Д-жем, что может сущ. только ед. решение, т.е $Ax \neq 0$. $\forall x \neq 0$

Д-жем, что может сущ. только ед. решение, т.е $Ax \neq 0$. $\forall x \neq 0$ это соотв сис-ме с $a_{11} = a_{\dots} = 0$.

от противного $\exists x_1 \neq 0$ т.ч. $Ax_1 = 0$ тогда все клетки рядом с



выберем $y \in x_1$ т.ч. $y = \max(x_1)$, тогда и так далее до стенок. по т.-к. y_{max} тоже равны y_{max} и так далее до стенок. по т.-к. на стенках нач. нули, то $\underline{y_{max} = 0}$ $\Rightarrow x_1 = 0$.

Получим, что A - ЛНЗ $\Rightarrow$ строки A - ЛНЗ $\Rightarrow \forall B$ $\exists x$ т.ч. $Ax = B$ ЧТД на степень нач. нули, то $y\,max = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Получим, что ст. A – ЛНЗ => строки A – ЛНЗ => $\forall B\ \exists X$ т.ч. $AX = B$ ЧТД

Подпространства и факторпространства.

21.2. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

1) Если $\exists f(x)$, что $f(-x) = f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ т.е. $\mathbb{K}(x)^+ \cap \mathbb{K}(x)^- = \{0\}$

2) $\forall f(x) \in \mathbb{K}(x)$: $f^+(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Тогда $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$

21.3. 2) Дана матрица A из n строк. Доказать, что n-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпространства решений системы линейных уравнений $A^T\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

1) $\dim\langle a_n\rangle = r = \mathrm{rk}\,A$
$\dim\langle\Phi\rangle = n - r$, тогда осталось д-ть, что $\langle a_n\rangle \cap \langle\Phi\rangle = \{0\}$ т.ч.
$\dim\langle a_n\rangle \cup \langle\Phi\rangle = r + n - r - \dim\cap = n - \dim\underset{0}{\cap} = n$ если

2) ?

21.6. Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x}$ из n-мерного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathcal{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, а $\mathcal{Q}$ — линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 4$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{201}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{199}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{197}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{198}$.

$x = \begin{pmatrix}1\\-7\\5\\-2\end{pmatrix}$ $a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix}3\\-5\\7\\2\end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\1&-5&1&1&-7\\1&7&2&1&5\\1&2&2&3&-2\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\0&-8&0&0&-8\\0&4&1&0&4\\0&-1&1&2&-3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&4&1&0&4\\0&1&-1&-2&3\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&-2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&-2&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Тогда $\mathrm{пр}_P X = -a_1 + a_2 = \begin{pmatrix}2\\-6\\6\\1\end{pmatrix}$

21.7. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

5) $n = 3$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{116}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{145}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{122}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{146}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{147}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad a_2\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\quad a_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\quad b_1\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\quad b_2\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\quad b_3\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-3\\0&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&4&1\\5&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\\0&-22&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&1\\0&11&3\end{pmatrix}$$

7) $n = 4$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{200}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{217}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{211}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{218}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{219}$;

$$a_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}\quad a_2\begin{pmatrix}-1\\8\\-6\\5\end{pmatrix}\quad a_3\begin{pmatrix}0\\10\\-5\\8\end{pmatrix}$$

$$b_1\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix}\quad b_2\begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix}\quad b_3\begin{pmatrix}4\\2\\5\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\-1&8&-6&5\\0&10&-5&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\\0&10&-5&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&10&-5&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\\\cancel{4}&\cancel{2}&\cancel{5}&\cancel{8}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\2&10&4&-2\\1&-5&-1&6\\3&8&5&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&10&2&-8\\0&-5&-2&3\\0&8&2&-6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&3\\0&5&1&-4\\0&0&1&1\\0&4&1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}&\cancel{-1}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\Phi=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

А базисный вектор: $-\begin{pmatrix}1\\4\\-1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\6\\3\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\-6\\7\\-2\end{pmatrix}}}$

21.11. Доказать, что сумма $\mathcal{L}$ двух линейных подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда будет прямой суммой,

когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

$\Rightarrow$ Пусть $\forall x \in L$ тогда р-рим $x = y + P$ тогда $\exists\, y_1 \in P\ z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$ $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$

$\underline{*ч}$

$P \cap Q \neq \{0\}$

виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

($\Rightarrow$) Пусть $\forall \cancel{x} \in L$ тогда р-рим $x = y \in P$ тогда $\exists y_1 \in P$ $z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$
$\underline{\cancel{x}\, y}$ $\quad Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$
т.е. $P \cap Q \neq \{0\}$

($\Leftarrow$) Пусть L — не пр. сумма. тогда $t \in P \cap Q$, $t \neq 0$, $\langle p_1 \dots p_n \rangle = P$, $\langle q_1 \dots q_n \rangle = Q$ — базисы.

$t = \sum \lambda_i p_i = \sum \mu_i q_i \Rightarrow \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = 0$

р-рим произв $x \in L$: $x = \sum \gamma_i p_i + \sum \rho_i q_i$ но тогда

$x = \sum \gamma_i p_i + \sum \rho_i q_i + \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = \underbrace{\sum(\gamma_i - \lambda_i) p_i}_{\in P} + \underbrace{\sum(\rho_i - \mu_i)}_{\in Q} -$

x расп. не единственно.

21.12. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1) если сумма размерностей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ больше размерности всего пространства, то пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ содержит ненулевой вектор;

2) если размерность суммы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

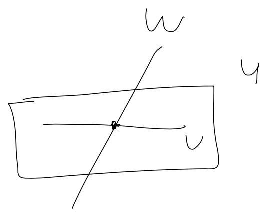
1) $\dim L \geqslant \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) > \dim L - \dim(P \cap Q)$
$\dim L - \dim L > -\dim(P\cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) > 0 \Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$

2) $P \cap Q \subseteq P \subseteq P + Q \Rightarrow$ либо $P = P \cap Q$ либо $P = P + Q$
Если $P = P \cap Q$ то $P = P \cap Q \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq Q$
Если $P = P + Q$ то $Q \subseteq P + Q \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P$.

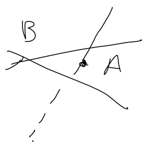
35.13. Пусть U, V, W — подпространства векторного пространства.

а) Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

б) Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.



а) Нет. пример три прямые



$U \cap (V + W) = \{A\}$
$(U \cap V) + (U \cap W) = \varnothing$

б) $U \cap V = V$ $\quad U\cap V + U \cap W = V + U \cap W = \langle V \cup (U \cap W) \rangle = \quad U \cap \langle V \cup W \rangle = U \cap (V + W)$
$= \langle (V \cup U) \cap (V \cup W) \rangle = \langle U \cap (V \cup W) \rangle =$

Т.2. В условиях задачи 21.7(7) докажите, что пересечение W данных линейных оболочек содержится в подпространстве U, заданном уравнением $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, и дополните базис в W до базиса в U.

Т.3. Пусть $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – пространство квадратных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$, а U, W, W_1 – его подпространства, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Докажите, что W и W_1 – различные прямые дополнения к U в V. Разложите матрицу A_{233} (см. **Б**) двумя способами, исходя из равенств $V = U \oplus W$, $V = U \oplus W_1$.

1) $A \in U$ $\quad A^+ = \dfrac{A + A^T}{2} \in W$, $\quad A^- = \dfrac{A - A^T}{2} \in U$ и $A = A^+ + A^-$

2) $A \in M_n$. $A = A^{\nearrow} + A^{\searrow} = \underset{\text{верхтреуг}}{A^{\nearrow} + A^{\searrow T}} + \underset{\text{кососим}}{A^{\searrow} - A^{\searrow T}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\nearrow} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\nearrow} + A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} - A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Линейные отображения

23.6. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ — фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ, заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; $\quad$ 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

$\varphi(x_1 + x_2) = x_1 - x_2 - 2(x_1 + x_2, n)\dfrac{n}{|n|^2} = \left(x_1 - 2(x_1, n)\dfrac{n}{|n|^2}\right) - \left(x_2 - 2(x_2, n)\dfrac{n}{|n|^2}\right)$

— геом смысл:

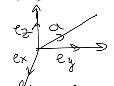
— отражение отн.-тельно перпенд. пр-ва к. n.

23.9. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства $\mathcal{E}_3$ на подпространство $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}$ есть:

1) прямая $x = z = 0$;
2) прямая $x = y = z$;
3) плоскость $x + y + z = 0$;
4) плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$ и $\mathbf{b}(1, -3, 2)$.

$1 - \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

2)



$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\varphi(e_y) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\varphi(e_z) = a\frac{1}{\sqrt{3}}$

3)

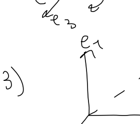
$\varphi(e_z) = t_1\sqrt{\frac{2}{3}} + 0$
$\varphi(e_x) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} - t_2\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$
$\varphi(e_y) = -t_1\sqrt{\frac{1}{3}} + t_2\sqrt{\frac{1}{3}}$

23.14. В трехмерном геометрическом векторном пространстве $\mathcal{E}_3$ задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства:

1) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

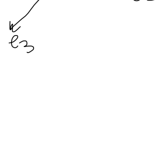
2) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;
3) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

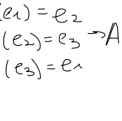
2)



$\varphi(e_1) = e_1$
$\varphi(e_2) = e_3$ $\to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = -e_2$

3)





$\varphi(e_1) = e_2$
$\varphi(e_2) = e_3$ $\to A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi(e_3) = e_1$

23.15. Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$.

1) Доказать, что преобразование φ проектирования $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$ линейно. Найти ядро и множество значений φ. Записать матрицу преобразования φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$.

1) $L = L' \oplus L''$ $\quad \varphi = \Pi p_{L'}^{\parallel L''}$, т.е. $\varphi(a \in L) = b \in L'$ т.ч. $a = b + c$, $c \in L''$

т.к. L - пр.сумма, то пусть $\left.\begin{matrix} a_1 = b_1 + c_1 \\ a_2 = b_2 + c_2 \end{matrix}\right\}$ т.к. р-ние ед то $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ - $\underline{\underline{ед}}$

$\varphi(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 = \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$

2) Ядро: $\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = c \in L'' \Rightarrow \ker\varphi = L''$

образ: $\forall q \in \mathrm{Im}\varphi$ $q \in L'$, также $\forall b \in L'$ $\varphi(b) = b \in L'$ т.е. $\mathrm{Im}\varphi = L'$

3) $\{e_1 \dots e_k\} \to L'$, $\{e_{k+1} \dots e_{k-m+1}\} \to L''$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \varphi(e_1) = e_1 \\ \vdots \\ \varphi(e_k) = e_k \\ \vdots \\ \varphi(e_{k-m+1}) = 0 \end{matrix}\right\}$ $A = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

23.19. Доказать, что:

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

$\mathrm{Im}\varphi = V \Rightarrow rkA = \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V = n$ (число строк) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{rkA = n}}$

23.24. Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — линейное отображение, и $\dim\mathcal{L} = \dim\widetilde{\mathcal{L}}$. Доказать утверждения:

1) Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y$ $(x \in \mathcal{L})$ было разрешимо при любом $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) = o$ имело только нулевое решение.

2) Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, то оно имеет для каждого y единственное решение.

3) Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо не при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, но при некотором y разрешимо. Тогда его решение не единственно.

1) ($\Rightarrow$) $\varphi(x) = y$ разр $\Leftrightarrow$ $A_\varphi x = y$ - разр т.е. A – невырожд $\Rightarrow \dim L = rkA = \dim\mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \dim\ker\varphi = 0$ т.е. $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

($\Leftarrow$) $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim L \Rightarrow \underline{\mathrm{Im}\varphi = \widetilde{L}}$

2) $\varphi(x) = y$ - разр, то $\mathrm{Im}\varphi = \widetilde{L} \Rightarrow \ker\varphi = 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{от. инъект}}$

3) $\varphi(x) = y$, тогда $\ker\varphi \neq 0$, р-рим $a \in \ker\varphi$: $\varphi(a) = 0$ тогда $\varphi(x) + \varphi(a) = y + 0$, $\varphi(a + x) = y$ - 2 решение.

23.29. Линейное отображение n-мерного линейного пространства в m-мерное задано матрицей A в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Числа m и n определяются размерами матрицы. Найти ядро и множество значений отображения. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, если:

420. $\left\|\begin{matrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{matrix}\right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \ker\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

по ст-цам $\wr$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \mathrm{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

23.30. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A. Числа m и n определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора $\mathbf{a}$, если:

1) $A = A_{513}$, $\quad \mathbf{a} = (-1,\ 0,\ 1)^T$;

513. $\left\|\begin{matrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{matrix}\right\| x = a \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & -4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ частное решение $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

базис $\begin{pmatrix} -14 & 2 \\ -6 & -7 \\ 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

23.40. Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m.

1) Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование $D : \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования D:

а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^m$;

б) в базисе $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^m$;

в) в базисе $1, \dfrac{t}{1!}, \dots, \dfrac{t^m}{m!}$.

$P(x) = const.$

а) в стандартном базисе $1, t, \ldots, t^m$;

б) в базисе $1, t-t_0, \ldots, (t-t_0)^m$;

в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}$.

в) $\ker D$ – все мн-ны вида $P(x) = \text{const}$.

$D(1) = 0$, $D\left(\frac{t}{1!}\right) = 1$, … $D\left(\frac{t^m}{m!}\right) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{m-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

23.62. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:

3) $A = A_{38}$, $S = A_{39}$;

$A\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $S\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \to S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23.70. Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если:

1) поменять местами векторы e_i и e_j;

S – эл. м-ца изм. строки местами, тогда S^{-1} – эл. м-ца изм. столбцы местами; $S^{-1}AS$ – меняем у A столбец j и i и 2 строки с j и i

T.7. Запишите (в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$) матрицу линейного преобразования $\varphi_{\mathbf{v}}$, заданного равенством $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{v}$ имеет координатный столбец $(v_1, v_2, v_3)^T$. Докажите, что $\mathbf{v} \mapsto \varphi_{\mathbf{v}}$ определяет линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметричных матриц в $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$\varphi(e_x) = [\bar{v}, (1,0,0)] = v_3 e_y - v_2 e_z$

$\varphi(e_y) = v_1 e_z - v_3 e_x$

$\varphi(e_z) = v_2 e_x - v_1 e_y$

$A\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(v) = Av$ $\quad \varphi^T(v) = -v^T A$ – кососим

12.40. Записать формулы, задающие аффинное преобразование плоскости, переводящее точки A, B, C соответственно в A^*, B^*, C^*:

1) $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $A^*(-3,5)$, $B^*(4,-3)$, $C^*(0,0)$;

AC: $3 = 0 + a_{12}$, $-5 = 0 + a_{22}$ $\Rightarrow$ $a_{12} = 3$, $a_{22} = -5$

BC: $-4 = a_{11}$, $3 = a_{21}$ $\Rightarrow$ $a_{11} = -4$, $a_{21} = 3$

$b_1 = -1$, $b_2 = 13$

12.28. Доказать, что:

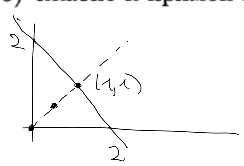
1) если A и B — две различные неподвижные точки аффинного преобразования, то и все точки прямой AB неподвижны;

$\bar{x}_1 = A\bar{x}_1 + \bar{b}$, $\bar{x}_2 = A\bar{x}_2 + \bar{b}$ $\quad \bar{x} = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)t + \bar{x}_1$

$A\bar{x} + \bar{b} = tA\bar{x}_2 - tA\bar{x}_1 + \underbrace{A\bar{x}_1 + \bar{b}}_{\bar{x}_1} = t\underbrace{(A\bar{x}_2 - A\bar{x}_1)}_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} + \bar{x}_1 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)t + \bar{x}_1$

12.53. Написать формулы, задающие преобразования плоскости:

8) сжатие к прямой $x + y - 2 = 0$ с коэффициентом $1/3$;



$(0,0) \to (1,1)\cdot\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3} = b_1 = b_2$

$(0,2) \to (0,2)$: $0 = a_{11}\cdot 0 + 2\cdot a_{12} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{3}$

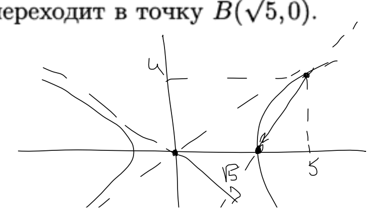
$2 = a_{21}\cdot 0 + 2\cdot a_{22} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{22} = \frac{2}{3}$

$(2,0) \to (2,0)$: $2 = a_{11}\cdot 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{2}{3}$

$0 = a_{21}\cdot 2 + \frac{2}{3}$ $\quad a_{21} = -\frac{1}{3}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

12.51. Записать формулы аффинного преобразования, переводящего гиперболу $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в себя так, что точка $A(5,4)$ переходит в точку $B(\sqrt{5}, 0)$.

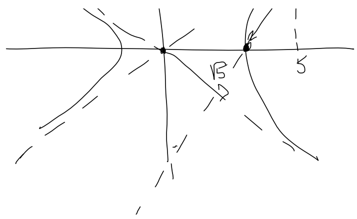


$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$

асимптоты перейд. в асс $\Rightarrow (0,0) \to (0,0)$ $\quad \underline{b = 0}$

Найдем в-ра асимптот: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$, т.е. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$ и $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1\right)$

I. $\sqrt{5} = 5a_{11} + 4a_{12}$



Найдём в-ра ассимптот: $y = \frac{1}{\sqrt5} x$, т.е. $(\frac{\sqrt{5}}{5}, 1)$ и $(5, 1)$

I. $\sqrt5 = 5a_{11} + 4a_{12}$

$0 = 5a_{21} + 4a_{21}$

VI. Собственные векторы и значения.

24.13. Доказать, что линейное преобразование нечетномерного (например, трехмерного) вещественного линейного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

24.18. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ — ненулевые подпространства. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного преобразования φ; доказать, что φ имеет базис из собственных векторов, и указать диагональный вид его матрицы, если φ есть:

2) отражение в подпространстве $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$.

$v \in V$ $\quad v = \underset{\in L'}{u} + \underset{\in L''}{w} \Rightarrow \varphi(v) = v - 2w$

Р-рим базис $\{e_1 \dots e_k\} \in L'$ тогда дополним его до $\{e_1 \dots e_k \dots e_n\}$ в L

Тогда $\varphi(e_1) = e_1$ и $\varphi(e_k) = e_k$, но $\varphi(e_{k+1}) = -e_{k+1} \dots \varphi(e_n) = -e_n \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}$$

24.20. Найти собственные значения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования, определенного в задаче:

2) 23.9

24.22. 1) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ, заданного матрицей

$$A = (a_1, \dots, a_n)^T (b_1, \dots, b_n) \neq O.$$

2) Найти необходимое и достаточное условие диагонализируемости преобразования φ.

3) Выяснить, диагонализируемы ли преобразования, заданные матрицами: а) A_{213}; б) A_{222}.

1) Заметим, что $\varphi: V \to \langle a \rangle$, т.е. все с-нные в-ры имеют вид γa.

Тогда $ab^T(\gamma a) = \lambda \gamma a$, т.е. $ab^T a = \lambda a \Rightarrow b^T a = \lambda$ - ед-нное с-нное значение равное $b^T a$.

2) Оператор диаг если геом крат $= n$: $rk(ab^T - b^T a \cdot E) = n$

24.30. Линейное преобразование вещественного n-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить

собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования:

7) A_{12}; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 2$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – проектор на вектор (1,1), увел. в 2 раза.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19) A_{221}; $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$

1) $\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0$

$\lambda = 2,\ \lambda = \underline{3}$ – кратн. корень.

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$

30) A_{283}; **283.** $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{Vmatrix}$

1) $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\underline{1}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

24.42. Найти собственные значения и собственные векторы (собственные функции) дифференцирования D как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств вещественных функций (n — фиксированное натуральное число):

1) пространство всех многочленов степени не выше n;

Только константы с $\lambda = 0$.

24.53. В пространстве $\mathcal{R}_{n\times n}$ квадратных матриц порядка n рассматривается операция транспонирования $\tau : A \to A^T$. Проверить, что τ — линейное преобразование и $\tau^2 = \iota$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования τ. Разложить пространство $\mathcal{R}_{n\times n}$ в прямую сумму собственных подпространств преобразования τ.

1) линейность очевидна $\tau(aA) = A^T a^T = A^T a = aA^T = a\tau(A)$

$\tau(A+B) = A^T + B^T = \tau(A) + \tau(B)$

2) $(A^T)^T = A \Rightarrow \tau^2 = i$

3) $A^T = \lambda A \Rightarrow A = \lambda A^T \Rightarrow A^T = \lambda^2 A^T$ т.е. $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ – это соотв. сим и кососим матрицам

4) $\forall B \in R_{n\times n}$ $B = \dfrac{B+B^T}{2} + \dfrac{B-B^T}{2}$

24.55. Пусть A — матрица второго порядка. Формула $\varphi(X) = AX$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка (задача 23.47). Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ. В случае, когда эта система является базисом, записать в нем матрицу преобразования φ:

1) $A = A_{46}$; 2) $A = A_{52}$;

$AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) $\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если $\det(A - \lambda E) \neq 0$, то

$X = 0 \cdot (A - \lambda E)^{-1} = 0 \Rightarrow X = 0$ – не собств.

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

т.е. $a\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

23.98. Пусть φ — линейное преобразование n-мерного линейного пространства и $\varphi^2 = \iota$. Доказать, что:
2) $\dim \operatorname{Ker}(\varphi + \iota) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \iota) = n$.

р-рим $\varphi(a) = \lambda a \Rightarrow \varphi^2(a) = \varphi(\lambda a) \Rightarrow a = \lambda \varphi(a)$

Тогда $\varphi(a) = \lambda^2 \varphi(a) \Rightarrow \lambda = \pm 1$ – 2 с-нные значения. $\Rightarrow \dim\ker(\varphi - i)$ – р-ность собств. подпр-ва с $\lambda = 1 \to W$

$\dim\ker(\varphi + i)$ – ——"—— с $\lambda = -1 \to U$

1) Докажем, что $W \cap U = 0$: $u \in W$, $\in U$, то $\varphi(u) = u = -u \Rightarrow \underline{u = 0}$

2) $\forall v \in V$: $v = \frac{v - \varphi(v)}{2} + \frac{v + \varphi(v)}{2}$, при этом $u = v - \varphi(v) \to \varphi(u) = \varphi(v) - v = -\varphi(u) \Rightarrow$
$\Rightarrow u \in U$

т.е. $V = W \oplus U \Rightarrow \dim V = \dim W + \dim U$ $\qquad w = v + \varphi(v) \to w \in W$.

$n = \dim\ker(\varphi - i) + \dim(\ker(\varphi + i))$

40.11. Доказать, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим многочленом некоторой матрицы порядка n. Если $\chi(\lambda)$ над алг.-з-тым полем $\mathbb{F}$ то

$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$ тогда $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

40.12. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одинаковых порядков, то матрицы AB и BA имеют совпадающие характеристические многочлены. $A \in M[\mathbb{R}]$

1) Если $\det A \neq 0$, то р-рим базис $\{e\}$ в кот $A_e = AB$, тогда взяв $C = A$:

$A_e' = A^{-1}ABA = BA \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$

2) Если $\det A = 0$ χ_A имеет кон.-кол-во корней s' т.е. $\chi_A(s') = 0$ тогда
$\forall s \neq s'$ $\chi_A(s') \neq 0 \Rightarrow \chi_{(A-sE)B}(x) = \chi_{B(A-sE)}(\lambda)$ ч $n.1$. тогда в беск. кол-ве
точек мн-ны равны $\Rightarrow \forall s$ мн-ны равны $\Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$ $(s = 0)$

T.10. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем a) $\mathbb{F}_3$, b) $\mathbb{F}_5$, заданного матрицей

$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 2\lambda = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 1)$

a) в $\mathbb{F}_3$ корни: $\lambda = 2$ – ед.-с-нное знач

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$

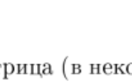
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0\ 1\ 1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

б) в $\mathbb{F}_5$ корни $\lambda = 4$, $\lambda = 3$

$\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

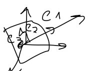
$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

T.11. Пусть A — матрица (в некотором базисе) поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α. Выразите α через элементы матрицы A.

Выберем базис  $e_1 \parallel L$, $e_1, e_2 \perp L$ $e_1 \perp e_2$

$\frac{trA - 1}{2}$

матрицы A.

Выберем базис  $e_1 \parallel L$, $e_1, e_2 \perp L$ $e_1 \perp e_2$

Тогда $A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to trA' = \cos\alpha + \cos\alpha + 1 = trA \Rightarrow \cos\alpha = \underline{\underline{\frac{trA - 1}{2}}}$

Т.12. Верно ли, что если две матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены, то они являются матрицами одного оператора в разных базисах? Тот же вопрос, если дополнительно известно, что обе матрицы диагонализируемы?

1) Нет. матрица: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

2) Если матрица диаг, $\chi_A(\lambda)$ имеет n корней и $A \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ } путем перемешив. б-ле б-ров.

Тогда каждую матрицу с $t(\lambda)$ можно преобр к $\begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Инвариантные подпр-ва.

24.70. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства. Доказать, что любое подпространство, содержащее $\mathrm{Im}\varphi$, инвариантно.

$\forall v \in U \quad \varphi(v) \in \mathrm{Im}\,\varphi \subseteq U$

24.68. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ — подпространство в $\mathcal{L}$, инвариантное относительно φ, и $p(t)$ — многочлен. Доказать, что данное подпространство в $\mathcal{L}$ инвариантно относительно φ:

4) $\mathrm{Ker}\,p(\varphi)$; $\forall v \in \ker p(\varphi) \to p(\varphi(v)) = 0$; $\underset{u}{\varphi(v)} \in M$, потому и $\underline{p(u) \in M}$.

24.74. Доказать, что:

1) характеристический многочлен линейного преобразования делится на характеристический многочлен его ограничения на инвариантном подпространстве;

2) если все корни характеристического многочлена линейного преобразования φ линейного пространства $\mathcal{L}$ принадлежат полю, над которым определено $\mathcal{L}$, то всякое подпространство в $\mathcal{L}$, инвариантное относительно φ, содержит собственный вектор этого преобразования;

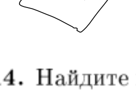
1) $\{e_1, \dots e_k\}$ - базис в U
$\{e_1, \dots e_k, \dots e_n\}$ - б-зис в V $\to A_\varphi = \begin{pmatrix} A_{\varphi|_U} & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = |A_\varphi - \lambda E| \ominus$

$\ominus |A_\varphi - \lambda E|\,|B - \lambda E| = \chi_{\varphi|_U} \cdot |B - \lambda E|$

<u>ЧТД</u>.

24.77. Найти подпространства трехмерного геометрического векторного пространства, инвариантные относительно поворота на угол α $(\alpha \neq 0, 2\pi)$ вокруг прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq 0)$.

1) Инвариантная это будет плоскость $\overset{\Pi}{\text{перпенд}}$ a и пр-во $\overset{L}{\langle a \rangle}$.

2)  U - φ инв $\Rightarrow \forall v \in U \quad \varphi(v) \in U \to \underbrace{\varphi(v) - v}_{c} \in \Pi$

$\varphi(c) \in \Pi \Rightarrow \Pi = \langle \varphi(c), c \rangle \Rightarrow \Pi \subset U$
$\Pi = U$ } $\Pi = \mathbb{R}^3$.

Т.14. Найдите все инвариантные подпространства оператора, матрица которого в некотором базисе равна жордановой клетке.

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \to$ есть только 1 собств. знач λ

?

$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda E$

$J_n(\lambda)^n = (J_n(0) + \lambda E)^n = J_n(0)^n + n\lambda J_n(0)^{n-1} + \dots + \lambda^n E = \begin{pmatrix} \lambda^n & \dots & \lambda^{n-k} \\ & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & \lambda^n \end{pmatrix} \} k$

$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda E$
$J_n(\lambda)^n = (J_n(0)+\lambda E)^n = J_n(0)^n + n\lambda J_n(0)^{n-1} + \dots + \lambda^n E = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix} \} k$

ЖНФ.

24.126. Проверить, что линейное преобразование, заданное матрицей A, нильпотентно и найти для него жорданов базис и жорданову форму матрицы:

235. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 \Rightarrow \lambda_{1,3}=0$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор. в. 1

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ & * & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & * & \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ в-тор в-тота 2: $b\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to c\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{03} \to b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – в-та 3.

I. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ II. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – она нильпотентна.

базис: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

24.127. Привести к жордановой форме матрицу:

$\begin{Vmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -3 & 16 & 12 \\ 4 & -20 & -15 \end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ -3 & 16-\lambda & 12 \\ 4 & -20 & -15-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 \to \lambda_{1,3}=1$

1) $H_1\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -3 & 15 & 12 \\ 4 & -20 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ & 0 & \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ значит вид $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) т.к. $H_2 = V$, то возьмём $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin H_1$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = (A-\lambda E)a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Тогда ж-базис: $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

3) Мин многочлен $\to \mu = (\lambda-1)^2$

465. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^3 + \lambda^4 = \lambda^3(\lambda-2)$ $\quad \lambda_{1,3}=0$, $\lambda_{2,1}=2$

$\lambda=0$: $H_1\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$H_2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ & * & & \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \to$ б-с: $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ // $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\mu = (\lambda-2)\lambda^2$

487. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \to$ $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_{3,2}=-1$

$\lambda=-1$: H_1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

H_2: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{4} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \Phi\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&2\\ \cancel{6}&\cancel{8}&\cancel{4}&\cancel{4}\\ \cancel{-2}&\cancel{2}&\cancel{1}&\cancel{0}\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$$

То есть $J_n(-1) = \begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$: H_1: $\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\3&4&-1&0\\-1&-1&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&4&2&0\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&-2\\0&0&2&4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to в \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$

H_2: $\begin{pmatrix}4&4&-2&0\\-1&0&0&-2\\-6& & ж & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2&2&-1&0\\1&0&0&2\\ & * & & \end{pmatrix} \to \varphi \begin{pmatrix}2&9\\0&1\\4&2\\-1&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$J_n(1) = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad \mu = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$

Тогда $J_n = \begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

24.141. Доказать, что:

1) любые два перестановочных линейных преобразования φ и ψ комплексного пространства имеют общий собственный вектор;

$\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow \psi\varphi(v) = \lambda\psi(v) \Rightarrow \varphi(\psi(v)) = \lambda\psi(v)$

если $\psi(v)=0$, то v – с-нный вектор ψ и v – с-нный вектор φ.

если $\psi(v)\neq 0$: $\psi(v) \in V_\lambda \Rightarrow V_\lambda$ – ψ инв, р-рим $\psi|_{V_\lambda}$. $V_\lambda \to V_\lambda$, но т.к. $\psi|_{V_\lambda}$ над $\mathbb{C}$, то

$\psi|_{V_\lambda}$ имеет с-нный в-тор $\underline{u \in V_\lambda}$.

24.26. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа линейного преобразования φ в n-мерном линейном пространстве. Чему равны характеристические числа (с учетом кратностей) преобразования:

1) (р) φ^2; $\quad \forall k\ \exists v$ т.ч. $\varphi(v) = \lambda_k v \Rightarrow \varphi^2(v) = \lambda_k\varphi(v) = \lambda_k^2 v \Rightarrow \lambda_k^2$ – хар. число φ^2

Так как у преобр не может быть более n х. чисел и мы нашли n чисел:

$\lambda_1^2, \ldots \lambda_n^2$ то это все хар. числа φ^2.

41.8. Доказать, что матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа равны нулю.

1) Пусть $\exists v$ т.ч. $\varphi(v) = \lambda v$, тогда $\exists \underset{min}{n}$ т.ч. $0 = \varphi^n(v) = \lambda\varphi^{n-1}(v) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=0\\ \varphi^{n-1}(v)=0 \text{ – но } n\text{-мин.} \Rightarrow \varphi^{n-1}\neq 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow \lambda = 0$

2) Если все $\lambda=0$, то $\chi(\lambda) = \lambda^n$, по по т. ГК $\chi(A_\varphi) = A_\varphi^n = 0$, т.е. n – обнуляет A_φ.

41.18. Доказать, что любая матрица подобна своей транспонированной.

$J(A) = \begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n\end{pmatrix}$ р-рим $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix} \Rightarrow J_n(\lambda)^T = \begin{pmatrix}\lambda & & & 0\\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda\end{pmatrix}$

$J_n(\lambda)$ и $J_n(\lambda)^T$ <u>подобны</u> из-за замены базиса $\{e_1 \ldots e_n\} \to \{e_n \ldots e_1\}$, тогда

если $A = S^{-1}J(A)S$ то $A^T = S^{-1}J^T(A)S$ и $J(A) \sim J^T(A)$, т.е. $J^T(A) = P^{-1}J(A)P$

Тогда $A^T = S^{-1}P^{-1}J(A)PS = (S^{-1}P^{-1}S)A(S^{-1}PS)$ ЧТД

Т.17. Найдите ЖНФ, жорданов базис, минимальный многочлен оператора трехкратного дифференцирования в пространстве вещественных многочленов степени не выше 9.

1) Ед. с-нное знач $\varphi \to \boldsymbol{\lambda}_{1,9} = 0$

Сн. с-ва φ: $1, x, \frac{x^2}{2}$, т.е. будет 3 клетки.

2) $\ker(\varphi^2) = \langle 1, x, \frac{x^2}{2}, \underbrace{\frac{x^3}{3!}, \frac{x^4}{4!}, \frac{x^5}{5!}}_{доп-ния}\rangle$

3) $\ker(\varphi^3) = \langle 1 - - - - - \frac{x^8}{8!}\rangle$

4) $\ker(\varphi^4) = \langle 1 - - - - - \frac{x^9}{9!}\rangle$

Тогда 1 цикл. $\frac{x^9}{9!} \to \frac{x^6}{6!} \to \frac{x^3}{3!} \to 1$

2 цикл. $\frac{x^8}{8!} \to \frac{x^5}{5!} \to \frac{x^2}{2!}$

3 цикл. $\frac{x^7}{7!} \to \frac{x^4}{4!} \to x$

ж. базис.

$$J(A) = \begin{pmatrix}0&1&&&&&&&&\\&0&1&&&&&&&\\&&0&1&&&&&&\\&&&0&&&&&&\\&&&&0&1&&&&\\&&&&&0&1&&&\\&&&&&&0&&&\\&&&&&&&0&1&\\&&&&&&&&0&1\\&&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

T.18. Напишите возможные ЖНФ оператора φ, зная его характеристический $\chi_\varphi(t) = t^4(t-1)^3$ и минимальный $m_\varphi(t) = t^2(t-1)^2$ многочлены.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

T.19. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ такой, что $\varphi^k = \mathrm{Id}_V$ для некоторого натурального k. Докажите, что φ диагонализируем.

1) $\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v = \varphi^k(v) = \lambda^k v \Rightarrow (1-\lambda^k)v = 0 \Rightarrow \lambda^k = 1 \to \lambda_i = \sqrt[k]{1}_i$

Имеем n р-попарно собств. значений $\Rightarrow$ $J = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{1}_1 & & 0 \\ & \sqrt[k]{1}_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

$\to$ n жордановых клеток.

T.24. a) Найдите общую формулу для последовательности, заданной условием $x_{n+1} = 4(x_n - x_{n-1})$ при $n \geq 2$.

b) Найдите явную формулу для последовательности, заданной условиями: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_{n+1} = 4(x_n - x_{n-1})$ при $n \geq 2$.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ 4(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}$

x_{n-1} x_n

Р-рим $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \to$ 1) $|A - \lambda E| = (\lambda-2)^2 \to J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \infty \end{pmatrix} \to b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Тогда: $J^n(A) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \ominus$

$\ominus \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Найдём матрицу перехода: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $A^n = S J^n S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$

Тогда $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n(1-n) & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ //

б) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n2^{n+1} \\ 2^{n+2}(1+n) \end{pmatrix} \Rightarrow x_n = n \cdot 2^{n+1}$