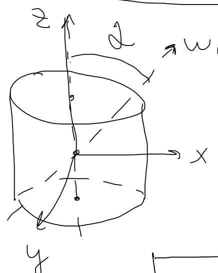
11.32. Показать, что для твёрдого тела с неподвижной точкой кинетическая энергия сохраняется в том и только в том случае, когда во всё время движения вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$ и вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ ортогональны.

Для тв. тела $\dot T = \langle M_0, \omega \rangle$

$T = \frac{1}{2}\langle \omega, K_0 \rangle \Rightarrow \dot T = \frac{1}{2}\langle \varepsilon, K_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle M_0, \omega \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\dot T = \langle \varepsilon, K_0 \rangle}$ ЧТД.

11.61. Однородному круговому цилиндру (высота h, радиус основания R), который может двигаться вокруг своего неподвижного центра масс, сообщается вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг оси, образующей угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить движение цилиндра.



т.к. $C\dot r = (B - A)pq = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = const$

При этом $A = B \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 + q^2 = const.$

$$\boxed{K_0 = \sqrt{(C\omega_0 \cos\alpha)^2 + (A\omega_0 \sin\alpha)^2}}$$

$K_x = Ap = K_0 \sin\theta \sin\varphi$

$K_y = Aq = K_0 \sin\theta \cos\varphi$

$K_z = Cr = K_0 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{Cr}{K_0} = const.$

$p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi \Rightarrow K_0 = A\dot\psi \Rightarrow \dot\psi = \frac{K_0}{A}$

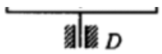
$q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi \qquad K_0 = A\dot\psi$

$r = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta \qquad \dot\varphi = r_0 - \dot\psi \cos\theta_0$

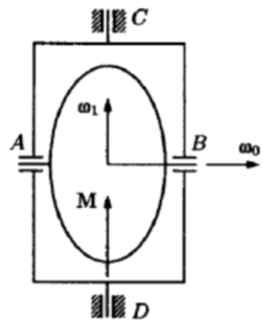
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \| \; r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)$

$$\boxed{\begin{cases} \theta = \arccos\left(C\frac{\omega_0 \cos\alpha}{K_0}\right) \\ \psi = \frac{K_0}{A}t + \psi_0 \\ \varphi = \omega_0 \cos\alpha\left(1 - \frac{C}{A}\right)t + \varphi_0 \end{cases}}$$

11.113. Велосипедное колесо радиуса r и массы m, равномерно распределённой по ободу, установлено в раме. Колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси AB. Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω_1



К задаче 11.113



К задаче 11.113

$\vec M_0 = [\omega_1 \times \omega_0] C$

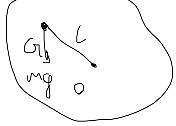
$C = mr^2$

$M_0 = \omega_1 \omega_0 m r^2$

$F = \frac{M_0}{L} = \frac{mr^2}{L}\omega_1\omega_0$

вокруг оси CD, перпендикулярной оси AB. Определить динамические реакции в подшипниках C и D рамы, если расстояние $CD = l$.

Т.10. $\begin{cases} A\dot p + (C-B)qr = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b) \\ B\dot q + (A-C)rp = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c) \\ C\dot r + (B-A)pq = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a) \end{cases}$ $\begin{cases} 4C\dot p - 3Cqr = 0 \\ 4C\dot q + 3Crp = mgl\gamma_3 \\ 4C\dot r = -mgl\gamma_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\dot p = 3qr \\ 4\dot q + 3pr = \alpha\gamma_3 \\ \dot r = -\alpha\gamma_2 \end{cases}$ $\alpha = \frac{mgL}{C}$



$OG = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot\gamma_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p$

Проверим, что $dL/dt = 0$, $L = Cr(p^2+q^2) - mglp\gamma_3$; учтём, что

$K_0 \cdot \gamma = 0 = const$ — инт-ал.

$4p\gamma_1 + 4q\gamma_2 + r\gamma_3 = 0$ //

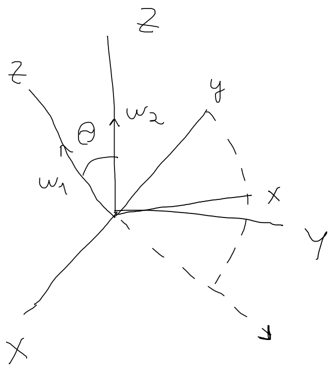
$\frac{dL}{dt} = C\dot r(p^2+q^2) + 2Cr(p\dot p + q\dot q) - mgl\dot p\gamma_3 - mglp(\gamma_1 q - \gamma_2 p) =$

$$= C\left(\dot r(p^2+q^2) + 2r(p\dot p + q\dot q) - 2\dot p\gamma_3 - 2p(\gamma_1 q - \gamma_2 p)\right)$$

$$\frac{1}{C}\frac{dL}{dt} = -2\gamma_2(p^2+q^2) + \frac{2\gamma_3 q r}{2} - \frac{3}{4}2qr\gamma_3 - 2pq\gamma_1 + 2p^2\gamma_2 =$$

$$= -2q^2\gamma_2 - \frac{1}{4}2\gamma_3 q r - 2pq\gamma_1 = -\frac{2q}{4}\left(4\gamma_2 q + 4\gamma_1 p + \gamma_3 r\right) = 0 \;//$$

11.75. Симметричное твёрдое тело $(A = B \neq C)$ с неподвижной точкой O совершает регулярную прецессию. Показать, что вектор момента импульса определяется выражением $\mathbf{K}_O = \left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]\boldsymbol{\omega}_1 + A\boldsymbol{\omega}_2$, где $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ – векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии соответственно, а θ – угол между ними. Используя это соотношение, получить выражение для момента импульса $\mathbf{K}_O$ в случае движения симметричного твёрдого тела по инерции.



$$p = \omega_2\sin\theta\sin\varphi$$
$$q = \omega_2\sin\theta\cos\varphi \;\to\; K_O = \hat{J}\omega = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_2\sin\theta\sin\varphi \\ A\omega_2\sin\theta\cos\varphi \\ C\omega_2\cos\theta + C\omega_1\end{pmatrix}$$
$$r = \omega_2\cos\theta + \omega_1$$

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1\end{pmatrix} \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_2\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_2\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_2\cos\theta\end{pmatrix} \to K_O = A\begin{pmatrix} \omega_2\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_2\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_2\cos\theta\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1\end{pmatrix} - A\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1\end{pmatrix} + C\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A\omega_2\sin\theta\sin\varphi \\ A\omega_2\sin\theta\cos\varphi \\ C\omega_2\cos\theta + C\omega_1\end{pmatrix} \text{ ЧТД} //$$