Матан третья домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

28 апреля 2024 г.

Содержание

1 T.25

Такое множество является объединением двух множеств $X = X_1 \cup X_2$:

$$X_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

В свою очередь X_1:

$$X_1 = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}}^{\infty} \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Так как $\{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ по существу является прямой, то оно измеримо с мерой 0. Тогда X_1 в силу счётной аддитивности тоже измеримо с мерой 0. Аналогично измеримо и X_2. Тогда X измеримо так как является объединением измеримых.

2 T.29

Рассмотрим множество конечной меры, тогда его можно приблизить элементарным $K = \sum_{k=1}^{n} P_k$, где P_k - промежутки, так, что $\mu(X \triangle K) < \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\mu(X \setminus X + t) \leq \mu(X \triangle K) + \mu(X + t \triangle K + t) + \mu(K \triangle K + t)$$

Из этого следует, что достаточно доказать для элементарного K. Возьмём t меньше, чем $\min dist(P_i, P_j)$. Тогда верно:

$$\mu(K \triangle K + t) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k \triangle P_k + t) \leq \sum_{k=1}^{n} 2t = 2nt$$

Тогда взяв $t < \frac{\varepsilon}{2n}$ получу нужное неравенство.

3 8.3

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((i, +\infty])$$

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((-i, +\infty])$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = A \setminus \left(f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}(\{+\infty\})\right)$$

4 8.4

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((b - \frac{1}{i}, +\infty])\right)$$

5 T.36

Нужно доказать измеримость множества:

$$X = \{x \in X \mid f'(x) < c\} = \left\{x \in X \mid \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < c\right\} = \left\{x \in X \mid \exists n\, f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) < \frac{c}{n}\right\}$$

Представим ввиде объёдинения:

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) < \frac{c}{n}\right\}$$

Теперь, так как $f(x)$ - измерима, то и $f(x + \frac{1}{n})$ - измерима. Также так как сумма измеримых измерима, то $f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ - измерима. Тогда получим, что множество X - измеримо как счётное объединение измеримых.

6 4.18

Так как функция монотонна, то у неё могут быть разрывы только первого рода, тогда пусть функция разрывна в точке x, из монотонности следует, что $f(+x) < f(t), t \in [a, x)$. И также $f(t) \leq f(x-), t \in (x, b]$. Тогда $f([a, b]) \cap (f(x-), f(+x)) \subset \{f(x)\}$ - противоречие с всюду плотнотью.

7 4.19

Рассмотрим множесвто A - множество Кантора, вспомним, что множество Кантора является множеством всех чисел, троичная запись которых не содержит единицу, тогда для $\forall x \in A$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}, a_n \in \{0, 1\}$$

Тогда рассмотрим функцию, определённую как

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, x \in A \\ \sup \{c(y) \mid y \in A \wedge y \leq x\}, x \notin A \end{cases}$$

сужение такой функции на множество множество Кантора очевидно монотонно, тогда так как $c(0) = 0$ и $c(1) = 1$ то построенная функция обязана быть монотонной на всём $[0, 1]$ по построению.

8 8.13

Так как функция $h(t)$ - непрерывна, то её прообраз открытого есть открытое. Пусть $f^{-1}(X) = A$, тогда так как A - открытое, то оно представляется в виде счётного объединения открытых декартовых произведений по рациональным точкам:

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n | q \in A} \prod_{i=1}^{n} (q_i - \alpha_q, q_i + \alpha_q),$$

где α_q - некоторые коэффициенты. Докажем это утверждение, рассмотрим $q \in \mathbb{Q}^n \mid q \in A$. Тогда вместе с q в A содердится некоторая окрестность, очевидно, что такой окрестностью может быть

$$U_q(r_0) = U_q(dist(q, \mathbb{R}^n \setminus A))$$

Так как известно, что в любой открытый шар можно поместить открытое декартово произведение интервалов, с расстоянием $\frac{r_0}{\sqrt{n}}$:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(q_i - \frac{r_0}{\sqrt{n}}, q_i + \frac{r_0}{\sqrt{n}}\right).$$

То есть $\alpha_q = \frac{r_0}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что такое объединение содержится в множестве A. Теперь покажем обратное, пусть $a \in A$. Пусть $D = dist(a, \mathbb{R}^n \setminus A)$, веберем окрестность с радиусом $d = \frac{D}{1+\sqrt{n}}$ и выберем произвольное рациональное число q из неё:

$$dist(q, \mathbb{R}^n \setminus A) \geq D - d = d\sqrt{n} \implies d \leq \frac{dist(q, \mathbb{R}^n \setminus A)}{\sqrt{n}}.$$

Тогда очевидно $a \in \prod_{i=1}^{n} \left(q_i - \frac{r_0}{\sqrt{n}}, q_i + \frac{r_0}{\sqrt{n}}\right)$. Вернёмся к задаче, обозначим $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n))$ тогда

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{q \in A} \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} \left(q_i - \frac{r_0}{\sqrt{n}}, q_i + \frac{r_0}{\sqrt{n}}\right),$$

что измеримо как счётное объединение измеримых.

9 7.24

Так как оба множества измеримы, найдём такие множества, для которых выполняется $\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\mu_J^*(B \triangle B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$(A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subset (B \triangle B_\varepsilon) \cup (A \triangle A_\varepsilon)$$

Из чего следует

$$\mu_J^*((A \cap B) \triangle (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) \leq \mu_J^*((B \triangle B_\varepsilon) \cup (A \triangle A_\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

аналогичные неравенства получаются с симметрической разностью.

10 7.26

В одну сторону неравенство очевидно по субаддитивности. Докажем неравенство во вторую сторону. Найдём такие приближающие множества B_ε и C_ε, что их расстояние до множеств B, C меньше ε. Тогда

$$A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = (B \cup C) \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subset (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon),$$

Учитывая, что $C \cap B = \emptyset$ следует, что

$$\mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Запишем формулу включений-исключений:

$$\mu(C_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) - \mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon.$$

Тогда получим

$$\mu(A) \geq \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \geq \mu(B) + \mu(C) - 6\varepsilon.$$

Неравенство выполняется для любого ε, а значит оно выболняется и при $\varepsilon = 0$. Что и требовалось доказать.

11 8.33

Подходит функция Кантора из задачи 4.19, она монотонна неубывает, непостоянна, дифференцируема на $[0,1] \setminus K$, где K - множесвто Кантора, то есть всюду кроме множества меры 0. Причем производная равна нулю, так как $c(x \in [0,1] \setminus K) = const$.

12 8.34

Тоже функция кантора $c(x)$, так как $\mu(c(K)) = 1 - \mu(c([0,1] \setminus K)) = 1 - 0 = 0$.

13 8.35

Функция $f(x) = x + c(x)$. На множестве кантора $\mu(f(K)) = 1$.

14 9.29

ляяя ну надо бы сделать

15 10.3

Пусть есть два набора множеств A_k и B_k представляющие ступенчатую функцию. Тогда рассмотрим $C_k = A_k \cap B_k$, очевидно исходная функция также будет иметь ступенчатый вид на C_k. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \mu A_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} p_{k,t} \mu(A_k \cap B_t) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{k,t} \mu(A_k \cap B_t) = \sum_{t=1}^{n} p_t \mu B_t$$

Показали, что определения эквивалентны для любого набора множеств.

16 10.4

Рассмотрим такое C_k на котором обе функции ступенчатые. Тогда

$$\int_X (af(x) + bg(x)) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} af(x_k \in C_k) + bg(x_k \in C_k) \mu C_k =$$

$$a \sum_{k=1}^{n} f(x_k \in C_k) \mu C_k + b \sum_{k=1}^{n} f(x_k \in C_k) \mu C_k = a \int_X f(x) \, \mathrm{d}x + b \int_X g(x) \, \mathrm{d}x$$

17 10.9

$$\int_A f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k \in A_k) \mu A_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k \in B \cap A_k) \mu(A_k \cap B) + f(x_k \in C \cap A_k) \mu(A_k \cap C) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k \in B_k) \mu(B_k) + \sum_{k=1}^{n} f(x_k \in C_k) \mu(C_k) = \int_B f(x) \, \mathrm{d}x + \int_C f(x) \, \mathrm{d}x$$

18 10.10

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{p} f_n(x_k) \mu X_k = \sum_{k=1}^{p} \lim_{n \to \infty} f_n(x_k) \mu X_k \geq \sum_{k=1}^{p} f(x_k) \mu X_k = \int_X f(x) \, \mathrm{d}x$$

Ладно, эту нужно переделать...

19 10.12

Рассмотрим последовательность:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} k\chi_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}(x)$$

Тогда для любого n $f_n < f$ и

$$\int_{(0,1)} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sup_n \int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

20 10.15

потом„,..

21 10.16

22 10.17

23 10.24

24 10.30

25 12.12

Докажем, что множество $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$. Это становится очевидно, если рассмотреть $f(x,y) = f(x)$, тогда из измеримости $f(x)$ следует измеримость $f(x,y)$, а значит и измеримость E. Тогда по теореме Фубини:

$$\mu E = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \chi_E \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

Так как интеграл $\int_0^{+\infty} \chi_E \,\mathrm{d}y$ при фиксированном x это просто интеграл характеристической функции отрезка $\mu[0, f(x)] = f(x)$, то

$$\mu E = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x$$

26 T.6

a)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, x = 1, y = 0$$

Тогда площадь фигуры равна:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{6}$$

27 T.7

а) Длина выражается как

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln 3$$

28 T.8

б) Плохое условие

29 T.9

Вспомним, что положительно определённая квадратичная форма представляется в виде $Q = C^T C$:

$$Q(x) = x^T C^T C x = (Cx)^T (Cx) = |Cx|^2$$

Тогда так как $\det C^T = \det C$ получим, что $\det C = \sqrt{\det Q}$. По теореме о линейной замене переменной:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|Cx|^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\det C} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = (\det Q)^{-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}}$$

30 T.11

Представим двойной факториал через обычный и воспользуемся формулой Стирлинга:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot (2n)^{2n} e^{-2n}}{2^n \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}} = \sqrt{2}\cdot 2^n n^n e^{-n}$$

31 T.12

Разложим $x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$. Заменим сумму и интеграл местами:

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

Сделаем подстановку $-\ln x = \frac{t}{n+1}$:

$$\int_0^1 x^n(-\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (n+1)^{-n-1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}x = (n+1)^{-n-1} n!$$

Тогда

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$$

32 Т.16

Так как фукнция дифференцируема с ограниченной производной, то она Липшицева, тогда по теореме 5.159 формула Ньютона-Лейбница работает.

33 Т.17

Приблизим функцию $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}$:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

Тогда разность интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - h(x+t)| \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} |h(x+t) - h(x)| \, \mathrm{d}x$$

Рассмотрим отдельно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x+t) - h(x)| \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k (\chi_{A_k}(x+t) - \chi_{A_k}(x)) \right| \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| |\chi_{A_k}(x+t) - \chi_{A_k}(x)| \, \mathrm{d}x$$

Заменим знаки интеграла и суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{A_k}(x+t) - \chi_{A_k}(x)| \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mu \left((A_k + t) \triangle A_k \right)$$

$\mu \left((A + t) \triangle A \right) \to 0, t \to 0$ аналогично одной из предыдущих задач. Тогда всю сумму можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ взяв достаточно маленькое t. Тогда возвращаясь к изначальному равенству:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{-\infty}^{\infty} |h(x+t) - h(x)| \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

34 Т.19

Приблизим в среднем фукнцию ступенчатой $h(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) - h(x) \, \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

где

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

Тогда для любого $\mu X < \delta$:

$$\int_X f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_X f(x) - h(x) \, \mathrm{d}x + \int_X h(x) \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k \cap X}(x) \, \mathrm{d}x \leq$$

$$\varepsilon + \max a_k \sum_{k=1}^{n} \mu A_k \cap X \leq \varepsilon + \max a_k \delta$$

Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{\max a_k}$ получим неравенство для 2ε.

35 Т.22

Пусть $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ и по условию $\int_{[a,b]} f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$. Рассмотрим

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Значит $f = 0$ почти всюду, то есть $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Что и требовалось доказать.