Теорвер 6.

Шахматов Андрей, Б02-304

15 октября 2024 г.

Содержание

1 T1

а) Дискретое равномерное распределение на $\{1, 2, \dots N\}$.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

Тогда

$$D\xi = \frac{1}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N+1}{2} = \frac{N^2-1}{3}$$

б) Биномиальное распределение (n, p), Биномиальное распределение можно представить как сумму n распределений Бернулли. Распределение Бернулли имеет матожидание p и дисперсию $p(1-p)$. Тогда из-за линейности матожидания:

$$E\xi = np$$

И дисперсия соответственно в силу того, что броски независимы

$$d\xi = np(1-p)$$

в) Нормальное распределение (a, σ^2). Найдём параметры стандартного нормального распределения, а затем домножим и сдвинем. У стандартного нормального распределения матожидание равно 0, а дисперсия σ^2. В таком случае

$$E\xi = a$$

$$D\xi = \sigma^2$$

г) Рассмотрим отрезок $(-1, 1)$ а затем домножим и сдвинем его до произвольного. На отрезке $(-1, 1)$ матожидание очевидно равно 0, тогда как дисперсия равна $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}$. Тогда у произвольного отрезка (a, b) матожидание равно $\frac{b-a}{2}$, а дисперсия $D\xi = \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}$ д) В случае распределения Коши интеграл матожидания не сходится в смысле интеграла Лебега, а значит ни матожидания, ни дисперсии не существует. е)

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^(k-1)}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Почти аналогично вынося сначала k, а затем $k-1$ из-под факториала имеем

$$E\xi^2 = \lambda(\lambda + 1)$$

Тогда

$$D\xi = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

ж) Больно это считать((

2 T6

$\xi \sim N(0, \sigma^2)$. Все стандартные интегралы взяты из таблицы с википедии.

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, k - \text{нечётное} \\ \sigma^k (k-1)!!, k - \text{чётное} \end{cases}$$

$$E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k-1}{2}\right)!, k - \text{нечётное} \\ \sigma^k (k-1)!!, k - \text{чётное} \end{cases}$$

При $\sigma = 1$:

$$E\xi^k = \begin{cases} 0, k - \text{нечётное} \\ (k-1)!!, k - \text{чётное} \end{cases}$$

$$E|\xi|^k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k-1}{2}\right)!, k - \text{нечётное} \\ (k-1)!!, k - \text{чётное} \end{cases}$$

3 T7

Найдём меры Римана-Стильтьеса $F(x)$:

$$dF(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ \frac{1}{5}, & x = -2; \\ \frac{1}{20}, & x = 1; \\ \frac{x}{2}, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

В таком случае матожидание

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \frac{1}{5} \cdot (-2) + \frac{1}{20} \cdot 1 + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{49}{60}$$

Аналогично найдём матожидание от квадрата случайной величины

$$E\xi^2 = \frac{1}{5} \cdot 4 + \frac{1}{20} + \int_1^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{121}{60}$$

Тогда дисперсия равна

$$D\xi = E\xi^2 - E\xi = \frac{6}{5}.$$

4 T9

Найдём функцию распределения вероятности

$$F_{\max(\xi,\eta)}(t) = P(\max(\xi,\eta) < t) = P(\eta < t, \xi < t) = P(\eta < t) \cdot P(\xi < t) = F_\xi(t) \cdot F_\eta(t).$$

Тогда найдём матожидание

$$E_{\max(\xi,\eta)} = \int_\Omega \max(\xi,\eta)(\omega) P(d\omega) = \int_0^\infty P(\max(\xi,\eta) > t) dt = \int_0^\infty 1 - F_{\max(\xi,\eta)}(t) dt = \int_0^\infty 1 - F_\eta(t) F_\xi(t) dt$$

$$E_{\max(\xi,\eta)} = \int_0^\infty 1 - (1 - e^{-t})(1 - e^{-2t}) dt = \frac{7}{6}$$

5 T10

$Z = e^{\frac{XY}{2}}$.

$$E_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\frac{xy}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x-\frac{y}{2})^2}{2}} e^{-\frac{3}{8}y^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{8}y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6 T12

$$E_{\xi\eta} = \frac{4}{\pi}\int_{x^2+y^2<1, x>0, y>0} xydxdy = \frac{4}{\pi}\int_{r<1,\,0<\varphi<\frac{\pi}{2}} r^3\cos\varphi\sin\varphi drd\varphi = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$E_{\xi} = E_{\eta} = \frac{4}{\pi}\int_{x^2+y^2<1, x>0, y>0} ydxdy = \frac{4}{\pi}\int_{r<1,\,0<\varphi<\frac{\pi}{2}} r^2\sin\varphi drd\varphi = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Тогда ковариация

$$cov(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2}$$