Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

12 марта 2024 г.

Содержание

1 T1

б)

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \to 0, n \to 0$$

При $x > 1$ выберем последовательность $x_n = 2n$:

$$f_n(x_n) = 2 \ln 2 = \varepsilon$$

При $0 < x < 1$ исследуем функцию на монотонность:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{x}{n} + 1 \right)$$

Тогда функция $|f_n(x)|$ возрастает при $x < \frac{n}{e}$, то есть при $n > 3$ функция монотонна на $(0, 1)$. Тогда она принимает максимальное значение в точке $x = 1$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

г)

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \to x$$

При $x > 1$ выберем $x_n = 2n$:

$$n \operatorname{arctg} 2 \geq \operatorname{arctg} 2 = \varepsilon$$

При $0 < x < 1$:

$$|f_n(x) - x| = \left| n \left[\frac{x}{n} + \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)} \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right] - x \right| \leq \frac{1}{2n} \to 0, n \to \infty.$$

д)

$$f_n = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \to 0$$

Рассмотрим $f_{n+1}(x) - f_n(x)$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1-x) - x^n(1-x) = x^n(1-x)(x-1) \leq 0$$

То есть f_n - монотонна по n, тогда по признаку Дини сходимость равномерная.
е)

$$f_n = x^n - x^{2n} = x^n(1-x^n) \to 0$$

Функция достигает максимума в точке $x^n = \frac{1}{2} \implies f_{max} = \frac{1}{4} \implies \sup f_n(x) = \frac{1}{4} \not\to 0$

2 T2

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n} \sin \frac{x}{n}$$

При $x \in (0, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{x}}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. При $x \in (1, +\infty)$ рассмотрим сумму из отрицания критерия Коши при $n(N) = N, p(N) = N, x = 2N$:

$$\sum_{k=N}^{2N} \frac{\sqrt{2N}}{k} \sin \frac{2N}{k} \geq N\sqrt{2N} \sin 1 \frac{1}{2N} = \sqrt{2N} \frac{\sin 1}{2} \geq \frac{\sin 1}{\sqrt{2}}$$

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$$

При $x \in (0, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. Рассмотрим последовательность $x = n$, тогда с $n > 1$ выполняется:

$$u_n(x_n) = \frac{n^2}{n^2 + n^2} \operatorname{arctg} \frac{n}{n} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \varepsilon$$

То есть невыполняется необходимое условие сходимости ряда, а значит ряд не сходится равномерно, при $x \in (1, +\infty)$.
г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4+x^4} \sin\frac{n}{x}$$

При $x > 1$ рассмотрим последовательность $x_n = n$, тогда:

$$u_n(x_n) = \frac{n^3}{2n^4}\sin 1 = \frac{1}{2}\sin 1 = \varepsilon$$

Не выполняется необходиомое условие равномерной сходимости. При $0 < x < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n^2x^2}{n^4+x^4} \sin\frac{n}{x}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4+x^4} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

По признаку Вейерштрасса сходится равномерно.
е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\ln nx}{n^2}$$

При $x > 1$ выбрем $x_n = 2n^2$:

$$u_n(x_n) = 2\ln 2n^3 = 2\ln 2 + 6\ln n > 2\ln 2 = \varepsilon$$

Не выполняется необходимое условие сходимости. Для определения равномерной сходимости исследуем функцию $u_n(x) = \left|\frac{x\ln nx}{n^2}\right|$ на максимум на интервале $(0, 1)$:

$$u_n'(x) = \frac{1}{n^2}(\ln nx + 1)$$

Тогда в точке $x = \frac{1}{ne}$ находится экстремум, а значит максимальное значение функции:

$$\sup u_n = \max\left\{u_n(\frac{1}{ne}), u_n(1)\right\} = \max\left\{\frac{1}{n^3e}, \frac{\ln n}{n^2}\right\}$$

Так как оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3e}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ сходятся, то исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса.

3 T3

Так как функции u_n - монотонны на $[a, b]$, то:

$$|u_n| \le \sup|u_n| = \max\{|u_n(a)|, |u_n(b)|\} \le |u_n(a)| + |u_n(b)|$$

Но так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a)|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(b)|$ сходятся абсолютно, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(a)| + |u_n(b)|$ сходится абсолютно, а значит по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$.

4 T4

Докажем по признаку Абеля, для этого нужно доказать, что $b_n = \frac{1}{n^x}$ монотонна и ограничена. Ограниченность очевидна $b_n \leq 1$, покажем монотонность:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^x}}{\frac{1}{n^x}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \leq 1$$

последовательность убывает при любом фиксированном x.

5 T6

Запишем $w_f(t_n) = \sup\{|f(x) - f(x+\delta)| \mid \delta \leq t_n\} \geq |f(x) - f(x - t_n)|$. Тогда по теореме Кантора функция равномерно-непрерывна, тогда $w_f(t_n) \to 0, t_n \to 0$.

6 T7. Признак Дини

Рассмотри множество $Q_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$, каждое из таких множеств является открытым, так как $|f_n(x) - f(x)|$ - непрерывна, и множество задаётся строгим неравенством. Так как $f_n \to f$ следует, что $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Из того, что функции монотонны по n следует вложеннность Q_n $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_n$. Тогда так как $[a, b]$ - компакт следует, что из $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ можно выбрать конечное подпокрытие $Q_k \cup \cdots \cup Q_N = Q_N$. Получили, что найдётся N, такое что $\forall n > N$ $\forall x \in [a, b]$ $x \in Q_N \subset Q_n$.

7 T8

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

Воспользуемся формулой Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}$$

А значит радиус сходиомсти $R = 4$.

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1-i)^n}$$

Воспользуемся формулой Коши - Адамара (часть коэффициентов равна 0, однако верхний частичный предел от этого не изменится):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(1-i)^n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

Так как $\left|\frac{1}{(1-i)^n}\right| = \left|\frac{1}{1-i}\right|^n$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1-i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тогда $R = \sqrt{2}$