1. Т1.

1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k} \to \delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij}$ $\Big\}$ $\boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$

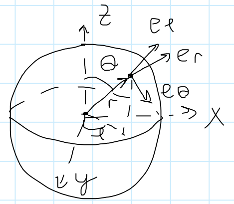
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

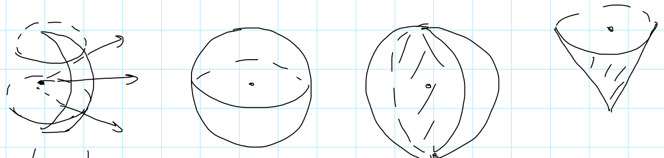
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

Т2.



$\vec R = x\vec i + y\vec j + z\vec k = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec i + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec j + r\cos\theta\,\vec k$

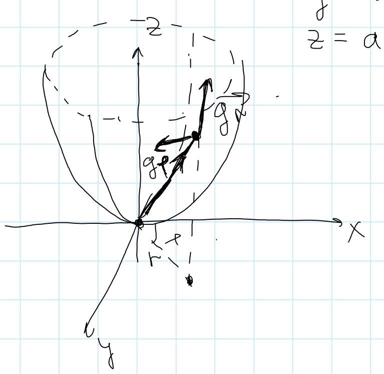
$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



кривая/окр/окр сфера плоскость конус

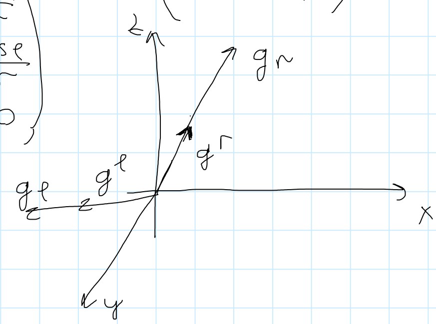
Т3.

$z = a(x^2+y^2) \Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= a r^2 \end{aligned} \Rightarrow M_{r\varphi} = \begin{array}{c} \quad g_r \qquad g_\varphi \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$



$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$



Т4*.

2.

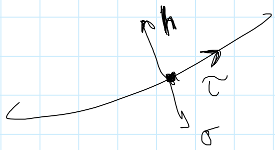
1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \text{const}$.

$\vec w \parallel \vec r$ если $0 = w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot\varphi = const \overset{exp}{\Rightarrow}$

$\overset{exp}{\Rightarrow} r^2\dot\varphi = const$

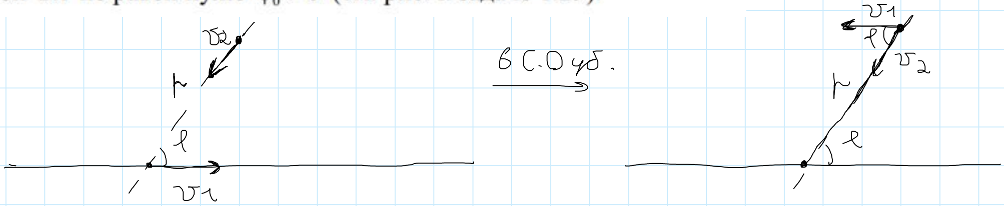
1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

$\vec w = \dot v\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$, т.к. $\begin{cases}\vec w \perp \vec v \\ \vec v \parallel \vec\tau\end{cases} \Rightarrow \dot v = 0$, $\frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$



$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec n\right| = |a(\vec v\times\vec r)| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a|\,|\vec v\times\vec r| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a|\,|\vec v\times\vec r|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).

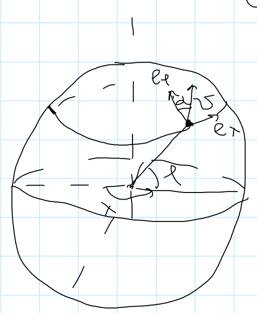


$\left.\begin{array}{l}\dot r = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi) \\ r\dot\varphi = v_\varphi = v_1\sin\varphi\end{array}\right\} -\frac{v_2 + v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{tg\,\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = r_0\, e^{-\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$

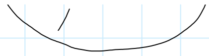
Т.5.*



$\begin{cases} v_r = \dot r = 0 \\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda = v\sin\alpha \\ v_\varphi = r\dot\varphi = v\cos\alpha \end{cases}$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{tg\,\alpha} = \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) e^{ctg\,\alpha(\lambda - \lambda_0)}$ //



$$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)= tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right) e^{ctg\alpha(\lambda-\lambda_0)}$$

2)