Т.1. Исследуйте на дифференцируемость функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданные формулами

а) $|x|$; б) $x|x|$; в) $|\sin x|$; г) $|1+\cos x|$.

а) при $x>0$: $|x|=x \Rightarrow |x|'=1$
$x<0$: $|x|=-x \Rightarrow |x|'=-1$

при $x=0$: $|x|'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(\operatorname{sgn} h)$ – не сущ., т.к. $\lim\limits_{h\to +0}\operatorname{sgn} h=1$, $\lim\limits_{h\to -0}\operatorname{sgn} h=-1$

б) при $x>0$: $(x|x|)'=2x$
при $x<0$: $(x|x|)'=-2x$
при $x=0$: $(x|x|)'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0}|h|=0$

в) при $x\in(0,\pi)+2\pi k$: $|\sin x|=\sin x \Rightarrow |\sin x|'=\cos x$
при $x\in(\pi,2\pi)+2\pi k$: $|\sin x|=-\sin x \Rightarrow |\sin x|'=-\cos x$
при $x=0+2\pi k$: $|\sin x|=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|\sin h|}{h}$ – не сущ., т.к. $\lim\limits_{h\to +0}\frac{|\sin h|}{h}=\lim\limits_{h\to +0}\frac{\sin h}{h}=1$, $\lim\limits_{h\to -0}\frac{|\sin h|}{h}=\lim\limits_{h\to -0}-\frac{\sin h}{h}=-1$

аналогично при $x=\pi+2\pi k$ - произв не сущ.

г) $|1+\cos x|$, т.к. $\cos x\geq -1$, то $1+\cos x\geq 0 \Rightarrow |1+\cos x|=1+\cos x$

$|1+\cos x|'=-\sin x$

Т.3. Найдите производную обратной к функции $f(x)=x+\sin x$ в точках

а) $y=0$; б) $y=1+\pi/2$; в) $y=\pi$.

$x'_y=\frac{1}{y'_x}$, тогда а) $y=0$ при $x=0$: $x'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{2}$

б) $y=1+\frac{\pi}{2}$ при $x=\frac{\pi}{2}$: $x'(1+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{2}}=1$

в) $y=\pi$ при $x=\pi$: $x'(\pi)=\frac{1}{f(\pi)}=\frac{1}{1+\cos\pi}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ - т.е. $x'(\pi)$ - не сущ.

Т.4. Найдите y'_x для функции, заданной параметрически:

а) $y=a\operatorname{ch}t$, $x=b\operatorname{sh}t$, $a,b\neq 0$; б) $y=\cos t$, $x=\operatorname{ch}t$ (для всех $t\in\mathbb{R}$).

а) $y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(a\operatorname{ch}t)'}{(b\operatorname{sh}t)'}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}t}=\frac{a}{b}\operatorname{th}t$

б) $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin t}{\operatorname{sh}t}=-\frac{\sin t}{\operatorname{sh}t}$

Т.5. Найдите y''_{xx} для функции, заданной параметрически:

а) $y=\frac{t^2}{1+t^3}$, $x=\frac{t^3}{1+t^3}$; б) $y=a\cos t$, $x=b\sin t$, $a,b>0$.

$y''_{xx}=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'\cdot\frac{1}{x'_t}$, $y'_t=\left(\frac{t^2}{1+t^3}\right)'=-\frac{t(t^3-2)}{(1+t^3)^2}$, $x'_t=\left(\frac{t^3}{1+t^3}\right)'=\frac{3t^2}{(1+t^3)^2}$

$\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{t(t^3-2)}{3t^2}=-\frac{t^3-2}{3t}$

$\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'=-\frac{2(t^3+1)}{3t^2}$

$y''_{xx}=-\frac{2(t^3+1)}{3t^2}\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3t^2}=-\frac{2(t^3+1)^3}{9t^4}$

Т.6. Найдите $y^{(n)}$ в зависимости от n для функции, заданной формулой:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x$; б) $\dfrac{x}{x^2-4x-12}$; в) $(x-1)2^{x-1}$;

г) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$; д) $\ln(1+x)^{x^2}$; е) $(x^2+x)\cos^2 x$.

а) $f'(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$

$f^{(n)}(x)=(-\sin 4x)^{(n-1)}=-4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$

$f'(x)=-\sin 4x$

в) $((x-1)2^{x-1})^{(n)}=\left\{\begin{matrix}t=x-1\\ t'(x)=1\end{matrix}\right\}=(t2^t)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k t^{(k)}(2^t)^{(n-k)}=t(2^t)^{(n)}+nt'\cdot(2^t)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot t''\cdot(2^t)^{(n-2)}+0\ldots =$

$= t(2^t)^{(n)}+n(2^t)^{(n-1)}=t(\ln 2)^n 2^t+n(\ln 2)^{n-1}2^t$

г) $\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n-k)}=x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n)}+n\cdot 2x\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n-2)}=$

$=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)^{(n)}=2^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{1}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}=\cancel{2^n}\frac{(2n-1)!!}{\cancel{2^n}}(-1)^n\frac{1}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}=(2n-1)!!\frac{(-1)^n}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\right\}=$

$= \ldots$

д) $\left(\ln(1+x)^{x^2}\right)'=\left(x^2\ln(1+x)\right)'=x^2\ln(1+x)^{(n)}+2nx\ln(1+x)^{(n-1)}+n(n-1)\ln(1+x)^{(n-2)}=\left\{\ln(1+x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right\}=$

$= x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+2nx\frac{2(-1)^n(n-2)!}{x^n}+n(n-1)x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^n}$

Т.17. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^x$;

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}=\left\{\begin{matrix}t=\ln x\\ t\to+\infty \mid \ln x\to+\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{t}}=0$

Т.18. Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ и объясните, почему его не удаётся найти с помощью правила Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sin x}{x-\sin x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\left\{\begin{matrix}x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi k\to+\infty:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos\pi/2}{1-\cos\pi/2}=1\\ x_n=\pi+2\pi k\to+\infty:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos\pi}{1-\cos\pi}=0\end{matrix}\right.$ — т.е. предела нет, $\Rightarrow$ правило Лоп. не работает.

Т.20. Представьте функцию формулой Тейлора с произвольной точностью в данной точке x_0

а) $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $x_0=0$; б) $(1-x)\ln(1+5x+6x^2)$, $x_0=0$; в) $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$, $x_0=0$;

г) $x\cos^2 x$, $x_0=0$; д) $(x^2-1)e^{2x}$, $x_0=-1$; е) $x(x-2)2^{x^2-2x-1}$, $x_0=1$.

$2(k-1)=$

$2k!$

$(2k-2)!$

а) $x_0=0$: $\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\left\{\begin{matrix}\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(2n)\Rightarrow\\ \Rightarrow\cos 2x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\cdot 2^{2k}+o(2n)\\ \cos 2x=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}2^{2k}}{(2k)!}+o(2n)\end{matrix}\right\}=2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 4^{k-1}x^{2(k-1)}}{(2k)!}+o(x^{2n})=$

$=2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k+2)!}+o(x^{2n})$

$$\cos 2x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k} 2^{2k}}{(2k)!} + o(2n) \quad (=) \; 2 \sum_{k=0} \ldots (2k+2)!$$

б) $(1-x)\ln(1+5x+6x^2) = (1-x)\ln(2x+1) + (1-x)\ln(3x+1) = \ln(2x+1) + \ln(3x+1) - x\ln(2x+1) - x\ln(3x+1) \; (=)$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} x^k + o(x^n) \\ \ln(2x+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{k!} x^k + o(x^n) \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} x^k (2^k + 3^k) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} (2^k+3^k) x^{k+1} + o(x^n)$$

в) $$\frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ B=2 \end{array} \right\} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+1}} \right) x^k + o(x^n)$$

г) $$x\cos^2 x = \frac{x}{2}(1+\cos 2x) = \frac{x}{2}\left(2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k)!}\right) + o(x^{2k+1}) = x + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-4)^k x^{2k+1}}{2(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

д) $$(x^2-1)e^{2x} = [(x^2+2x+1) - (2x-2)]e^{2x} = (x+1)^2 e^{2x} - 2(x+1)e^{2x} = \left\{ e^{2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e^{-2}}{k!}(x+1)^k + o((x+1)^n) \right\} = \sum_{k=0} \frac{2^k}{k! e^2}(x+1)^{k+2} - 2\sum \frac{2^k}{k! e^2}(x+1)^{k+1} + o((x+1)^n)$$

$x_0 = -1$

Т.21. Представьте функцию $x^3|x| + \cos x$ формулой Маклорена с остаточным членом $o(x^n)$ при максимально возможном n.

$(x^3|x|)' = 3x^2|x| + \frac{|x|}{x}x^3 = 4x^2|x|$

$(x^3|x|)'' = 12x|x|$

$(x^3|x|)''' = 24|x|$

в $x=0$: все произв. 1, 2, 3 порядка $\underline{\underline{=0}}$

4 произв. в 0 <u>неопр.</u>

$x^3|x| + \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Т.22. Представьте функцию $(1+x)^{\sin x}$ формулой Маклорена с остаточным членом $o(x^5)$.

$$(1+x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(1+x)} =$$

$\sin x \ln(1+x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) =$

$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{2\cdot 3!} + o(x^5) =$

$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}} + o(x^5)$

$e^{\sin x \ln(1+x)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} + o(x^5) \; (=)$

$(=) \; 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$

Т.24. Найдите пределы с помощью формулы Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg}(x/2)} - \sqrt{1+\sin x} - x^2/4}{\arccos x - \operatorname{arcctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} \sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{1/x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2} - x}{x \sin \frac{x^2}{6}}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3)}\right)^{1/x^3}$.

б) $$f(x) = \sqrt{1+\operatorname{sh}2x} - \cos x - x = \left(1 + \frac{1}{2}\left(2x + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(2x + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 + o(x^3)\right) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - x + o(x^5) =$$
$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + o(x^3) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}\sin x = \left(1 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3 + o(x^4)\right) =$$

$g(x) = tg x - arctg \sin x = \left(1 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) + o(x\ )\right)$

$= \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2x^3}{3}}{\frac{2x^3}{3}} = 1$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{tg^2 x}\left(\ln\left(arctg\frac{2x}{2-x^2} - x\right) - \ln x \sin\frac{x^2}{6}\right)}$

$= \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^4}{6^3} + o(x^4)\right) \Rightarrow \ln x \sin\frac{x^2}{6} = \ln\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6^3} + o(x^4)$

1) $x \sin\frac{x^2}{6} = \frac{x^3}{6} - x \cdot \frac{x^6}{6^4} + o(x^7) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^7}{6^4} + o(x^7)$

2) $\frac{2x}{2-x^2} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{2}} = x\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4} + o(x^5)$

$arctg\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4}\right) - \frac{\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4}\right)^3}{3} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4}\right)^5}{5} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{5} = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20} + o(x^5)$

$\ln\left(arctg\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) - x\right) = \ln\frac{x^3}{6} + \ln\left(1 + \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\right) = \ln\frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{10} + o(x^2)$

$f(x) = \ln(\dots) - \ln(\dots) = \frac{3x^2}{10} + o(x^2)$ $\Big\}$ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{10}$ Ответ: $\boxed{e^{3/10}}$

$g(x) = x^2$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3)}\right)^{1/x^3}$.

1) $\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3) = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{\frac{1}{8}x^4}\right) - \left(x^3 - \cancel{\ }\right) + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3)$

2) $e^x - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - x + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

3) $\ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - x^3\right)^2}{2} + o(x^3) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + o(x^3)$

$\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

4) $\ln(e^x - x) - \ln(\sqrt{1+x^3} - \ln(1+x^3)) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + o(x^3) = \frac{7x^3}{6} + o(x^3)$

$e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\dots) - \ln(\dots)}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{7}{6}} = \boxed{e^{7/6}}$

Т.9. Докажите, что если функция дифференцируема и неограниченна на конечном интервале, то её производная тоже неограниченна.

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ пусть M неогр.: $\forall M > 0\ \exists \gamma \in (a,b)\ |f(\gamma)| > M$

Пусть f' – огр.: $\exists M > 0\ \forall \xi\ |f'(\xi)| < M$

Из т. о среднем Лагранжа: $|f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| = |f'(\xi)(\gamma_1 - \gamma_2)| < M|a-b|$

$|f(\gamma_1)| - |f(\gamma_2)| < M|a-b|$

$|f(\gamma)| < M|a-b| + |f(\frac{a+b}{2})|$, т.е. f – огр. – противоречие.

Т.11. Предположим, что функция f дифференцируема n раз, $f^{(n)}(x) \geq 0$ на всей прямой, а многочлен P степени n таков, что уравнение $f(x) = P(x)$ имеет $n+1$ решение. Докажите, что старший коэффициент P неотрицателен.

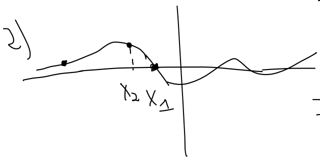
По задаче Т7. $g(x)=f(x)-P(x)$ дифф n раз и обр. в 0 $n+1$ раз.

тогда $\exists\xi$: $g^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-a_n=0$, a_n–ст. коэф

$0\leq f^{(n)}(\xi)=a_n \Rightarrow \underline{\underline{a_n\geq 0}}$

Т.12. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a\neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

1) f' имеет $n-1$ корней из Т7.

2) 

I. Пусть $f(x_2<x_1)>0$

Р-рим $x_2\leq x_1$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \Rightarrow f'(\xi)<0$

II. т.к $f(x)\to 0$, $x\to -\infty$, то взяв $\varepsilon=\frac{f(x_2)}{2}$ в опр. предела.

$\exists\delta(\varepsilon)>0$ т.ч. $x<-\delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x)<\frac{f(x_2)}{2}$, возьмём $x_3<-\delta(\varepsilon)$
$x_3<x_2$

тогда $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2) \Rightarrow f'(\xi_2)>0$ причём $\xi_2<\xi_1$

Тогда т.к. f'–непр, то по т. о пр. знач. $f':[\xi_1,\xi_2]\to(-a,b)$ принимает $\underline{\underline{0}}$.

Т.26. Докажите, что если функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, равномерно непрерывна, то найдутся такие $L, C>0$, что для любых $x,y\in\mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|+C.$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2\in X\ |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$|f(z)-f(y)|=|f(y+\sigma)-f(y)+f(y+2\sigma)-f(y+\sigma)+\ldots f(y+n\sigma)-f(y+(n-1)\sigma)|\leq$

$\leq \underbrace{|f(y+\sigma)-f(y)|}_{\leq\varepsilon}+\ldots+\underbrace{|f(y+n\sigma)-f(y+(n-1)\sigma)|}_{\leq\varepsilon}\leq \varepsilon\cdot\left(\frac{|z-y|}{\sigma}+1\right)=\frac{\varepsilon}{\delta}|z-y|+\varepsilon$

Т.27. Докажите, что если $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ непрерывна и имеет конечный предел при $x\to+\infty$, то f равномерно непрерывна.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2\in X\ |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$?

Р-рим ε из опр. РН: тогда из опр. предела: $\exists\delta_1(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2\in X\ |x_1|>\delta_1(\varepsilon)\wedge|x_2|>\delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

т.е. при $x_1,x_2\geq\delta_1(\varepsilon)$ $\delta(\varepsilon)$ независим от ε $\delta=1$

При $x\leq\delta_1(\varepsilon)$ р-рим $f/_{[0,\varepsilon]}$ – РН как непр. на отр. $(\delta(\varepsilon))$ тогда $\delta'=\max(\delta_2,1)$

Т.28. Является ли равномерно непрерывной на своей области определения функция:
а) $f(x)=\sqrt{x}$; ~~б)~~ $f(x)=x\sin x$; в) $f(x)=x\sin\ln x$?

а) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x_1,x_2\in X\ |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Р-рим $f/_{[0,1]}$ – РН по Кантору

$f/_{[1,+\infty)}$: $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}\right|<|x_1-x_2|\leq\varepsilon$ при $\underline{\delta=\varepsilon}$

в) $f(x)=x\sin\ln x$

$f'(x)=\sin\ln x+\frac{x\cos\ln x}{x}=\sin\ln x+\underbrace{\cos\ln x}_{\leq\sqrt{2}}$ – ограничена $\Rightarrow f(x)$ – РН.

Т.30. Докажите, что сумма полунепрерывных снизу функций полунепрерывна снизу.

1) ... $\exists\delta$ ... $\forall x\in X$ $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>f(x_0)-\varepsilon/2$

T.30. Докажите, что сумма полунепрерывных снизу функций полунепрерывна снизу.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon/2$

$\exists \delta_2 > 0 \quad \delta_2 \Rightarrow g(x) > g(x_0) - \varepsilon/2$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min(\delta_1(\frac{\varepsilon}{2}), \delta_2(\frac{\varepsilon}{2})) \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > f(x_0) + g(x_0) - \varepsilon$

Доп. дз. $\frac{\sin x^3}{x} \to 0$ при $x \to +\infty \Rightarrow$ она имеет конеч предел $\Rightarrow$ РН

T.31. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ метрическим пространством, если расстояние определить как

а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$; б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$?

а) 1) $\sqrt{|x-y|} = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|}$

3) $\sqrt{a+b} \overset{?}{<} \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$a+b < a + b + 2\sqrt{ab}$

$0 < \sqrt{ab}$

T.33. Пусть на множестве M есть два расстояния $\sigma, \tau : M \times M \to \mathbb{R}^+$, превращающие его в метрическое пространство. Верно ли, что отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, заданное формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)^2 + \tau(x, y)^2},$$

тоже превращает M в метрическое пространство?

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \sigma(x,y) = 0 \\ \tau(x,y) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) $\rho(x,y) \leq \sqrt{(\sigma(x,z) + \sigma(y,z))^2 + (\tau(x,y) + \tau(y,z))^2} \overset{\text{Нер. Минк}}{\leq} \sqrt{\sigma(x,z)^2 + \tau(x,z)^2} + \sqrt{\sigma(y,z)^2 + \tau(y,z)^2}$

T.36. Найдите кривизну кривой при произвольном значении её параметра $t \in \mathbb{R}$:

а) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, с постоянными $a, b > 0$;

б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, с постоянной $a > 0$.

б) $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$

$\gamma'(t) = (a - \cos t, \sin t)$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 - 2a\cos t + 1}$

$\gamma''(t) = (+\sin t, \cos t)$

$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{|(a - \cos t)\cos t - \sin^2 t|}{(a^2 - 2a\cos t + 1)^{3/2}} = \frac{a - 1}{(a^2 - 2a\cos t + 1)^{3/2}}$

T.37. Найдите наибольшую кривизну кривой, являющейся графиком функции $y = \ln(1 + \operatorname{ch} x)$.

$y'_x = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} x} \operatorname{sh} x \to y''_{xx} = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} x}$

$x'_x = 1 \to x''_{xx} = 0$

$k = \frac{|0 - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} x}|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + (1 + \operatorname{ch} x)^2}}$

$\operatorname{sh}^2 x + (1 + \operatorname{ch} x)^2 \to \min = a$

$y'_x = \frac{\ }{1+\operatorname{ch}x}$ $\quad$ $1+\operatorname{ch}x$

$x'_x = \underline{1} \to x''_{xx} = 0$

$$k = \frac{\ }{\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}\right)^2}} = \frac{\ }{\sqrt{\operatorname{sh}^2x + (1+\operatorname{ch}x)^2}}$$

$k \to max$ при $\operatorname{sh}^2 x + (1+\operatorname{ch}x)^2 \to min = a$

$a = \operatorname{ch}2x + 2\operatorname{ch}x + 1$

$a'_x = 2\operatorname{sh}2x + 2\operatorname{sh}x = 0$

$\operatorname{sh}2x = \operatorname{sh}x$ $\qquad k(x|\operatorname{sh}x=0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x \neq \operatorname{sh}x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{sh}x = 0 \\ \cancel{2\operatorname{ch}x = 1}\end{array}\right.$ $\quad$ $=$

<u>Т.38</u>. Найдите кривизну и кручение кривой при произвольном значении параметра t и постоянными $a, b \neq 0$:

<u>а)</u> $x(t) = a\cos t,\ y(t) = a\sin t,\ z(t) = bt;$

б) $x(t) = a\operatorname{ch} t,\ y(t) = a\operatorname{sh} t,\ z(t) = bt.$

$\gamma(t) = (a\operatorname{ch}t, a\operatorname{sh}t, bt)$

$\gamma'(t) = (a\operatorname{sh}t, a\operatorname{ch}t, b)$

$\gamma''(t) = (a\operatorname{ch}t, a\operatorname{sh}t, 0)$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2\operatorname{ch}2t + b^2}$

$\gamma'''(t) = (a\operatorname{sh}t, a\operatorname{ch}t, 0)$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a\operatorname{sh}t & a\operatorname{ch}t & b \\ a\operatorname{ch}t & a\operatorname{sh}t & 0 \end{vmatrix} = (-ba\operatorname{sh}t, ab\operatorname{ch}t, \underbrace{a^2\operatorname{sh}^2t - a^2\operatorname{ch}^2t}_{a^2})$$

$$k = \frac{\sqrt{a^2b^2\operatorname{sh}^2t + a^2b^2\operatorname{ch}^2t + a^4}}{\left(\sqrt{a^2\operatorname{ch}2t + b^2}\right)^3} = a\frac{\sqrt{b^2\operatorname{ch}2t + a^2}}{\left(\sqrt{a^2\operatorname{ch}2t+b^2}\right)^3}$$

$$(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = \begin{vmatrix} a\operatorname{sh}t & a\operatorname{ch}t & b \\ a\operatorname{ch}t & a\operatorname{sh}t & 0 \\ a\operatorname{sh}t & a\operatorname{ch}t & 0 \end{vmatrix} = b\left(a^2\operatorname{ch}^2t - a^2\operatorname{sh}^2t\right) = a^2b$$

$$\varkappa = \frac{a^2b}{\left(a\sqrt{b^2\operatorname{ch}2t + a^2}\right)^2} = \frac{b}{b^2\operatorname{ch}2t + a^2}$$