Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

11 марта 2024 г.

Содержание

1 T1

б)

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \to 0, n \to 0$$

При $x > 1$ выберем последовательность $x_n = 2n$:

$$f_n(x_n) = 2 \ln 2 = \varepsilon$$

При $0 < x < 1$ исследуем функцию на монотонность:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{x}{n} + 1 \right)$$

Тогда функция $|f_n(x)|$ возрастает при $x < \frac{n}{e}$, то есть при $n > 3$ функция монотонна на $(0, 1)$. Тогда она принимает максимальное значение в точке $x = 1$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

г)

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \to x$$

При $x > 1$ выберем $x_n = 2n$:

$$n \operatorname{arctg} 2 \geq \operatorname{arctg} 2 = \varepsilon$$

При $0 < x < 1$:

$$|f_n(x) - x| = |n(\frac{x}{n} + \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)}(\frac{x}{n})^2) - x| \leq \frac{1}{2n} \to 0, n \to \infty.$$

д)

$$f_n = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x) \to 0$$

Рассмотрим $f_{n+1}(x) - f_n(x)$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1-x) - x^n(1-x) = x^n(1-x)(x-1) \leq 0$$

То есть f_n - монотонна по n, тогда по признаку Дини сходимость равномерная.
е)

$$f_n = x^n - x^{2n} = x^n(1-x^n) \to 0$$

Функция достигает максимума в точке $x^n = \frac{1}{2} \implies f_{max} = \frac{1}{4} \implies \sup f_n(x) = \frac{1}{4} \not\to 0$

2 T2

Потом сделаю...

3 T3

4 T4

Докажем по признаку Абеля, для этого нужно доказать, что $b_n = \frac{1}{n^x}$ монотонна и ограничена. Ограниченность очевидна $b_n \leq 1$, покажем монотонность:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^x}}{\frac{1}{n^x}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \leq 1$$

последовательность убывает при любом фиксированном x.

5 T6

Запишем $w_f(t_n) = \sup\{|f(x) - f(x+\delta)| \mid \delta \leq t_n\} \geq |f(x) - f(x-t_n)|$. Тогда по теореме Кантора функция равномерно-непрерывна, тогда $w_f(t_n) \to 0, t_n \to 0$.

6 T7. Признак Дини

Рассмотри множество $Q_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$, каждое из таких множеств является открытым, так как $|f_n(x) - f(x)|$ - непрерывна, и множество задаётся строгим неравенством. Так как $f_n \to f$ следует, что $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Из того, что функции монотонны по n следует вложенность Q_n $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots \subset Q_n$. Тогда так как $[a,b]$ - компакт следует, что из $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ можно выбрать конечное подпокрытие $Q_k \cup \cdots \cup Q_N = Q_N$. Получили, что найдётся N, такое что $\forall n > N$ $\forall x \in [a,b]$ $x \in Q_N \subset Q_n$.