

# Матан вторая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

24 марта 2024 г.

## Содержание

1	T1	1
2	T2	2
3	T3	4
4	T4	4
5	T6	4
6	T7. Признак Дини	4
7	T8	5
8	T9	5
9	T10	5
10	T11	6
11	T13	7
12	T14	7
13	T17	7
14	Интегрируемость функции Римана	7
15	20.13	8

## 1 T1

б)

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow 0$$

При  $x > 1$  выберем последовательность  $x_n = 2n$ :

$$f_n(x_n) = 2 \ln 2 = \varepsilon$$

При  $0 < x < 1$  исследуем функцию на монотонность:

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \left( \ln \frac{x}{n} + 1 \right)$$

Тогда функция  $|f_n(x)|$  возрастает при  $x < \frac{n}{e}$ , то есть при  $n > 3$  функция монотонна на  $(0, 1)$ . Тогда она принимает максимальное значение в точке  $x = 1$ :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

г)

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \rightarrow x$$

При  $x > 1$  выберем  $x_n = 2n$ :

$$n \operatorname{arctg} 2 \geq \operatorname{arctg} 2 = \varepsilon$$

При  $0 < x < 1$ :

$$|f_n(x) - x| = \left| n \left[ \frac{x}{n} + \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)} \left( \frac{x}{n} \right)^2 \right] - x \right| \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

д)

$$f_n = x^n - x^{n+1} = x^n(1 - x) \rightarrow 0$$

Рассмотрим  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}(1 - x) - x^n(1 - x) = x^n(1 - x)(x - 1) \leq 0$$

То есть  $f_n$  - монотонна по  $n$ , тогда по признаку Дини сходимость равномерная.

е)

$$f_n = x^n - x^{2n} = x^n(1 - x^n) \rightarrow 0$$

Функция достигает максимума в точке  $x^n = \frac{1}{2} \implies f_{max} = \frac{1}{4} \implies \sup f_n(x) = \frac{1}{4} \not\rightarrow 0$

## 2 Т2

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n} \sin \frac{x}{n}$$

При  $x \in (0, 1)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{x}}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. При  $x \in (1, +\infty)$  рассмотрим сумму из отрицания критерия Коши при  $n(N) = N, p(N) = N, x = 2N$ :

$$\sum_{k=N}^{2N} \frac{\sqrt{2N}}{k} \sin \frac{2N}{k} \geq N\sqrt{2N} \sin 1 \frac{1}{2N} = \sqrt{2N} \frac{\sin 1}{2} \geq \frac{\sin 1}{\sqrt{2}}$$

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$$

При  $x \in (0, 1)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx}{n^2 + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно. Рассмотрим последовательность  $x = n$ , тогда с  $n > 1$  выполняется:

$$u_n(x_n) = \frac{n^2}{n^2 + n^2} \operatorname{arctg} \frac{n}{n} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \varepsilon$$

То есть невыполняется необходимое условие сходимости ряда, а значит ряд не сходится равномерно, при  $x \in (1, +\infty)$ .

г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} \sin \frac{n}{x}$$

При  $x > 1$  рассмотрим последовательность  $x_n = n$ , тогда:

$$u_n(x_n) = \frac{n^3}{2n^4} \sin 1 = \frac{1}{2} \sin 1 = \varepsilon$$

Не выполняется необходимое условие равномерной сходимости. При  $0 < x < 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} \sin \frac{n}{x} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

По признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln nx}{n^2}$$

При  $x > 1$  выберем  $x_n = 2n^2$ :

$$u_n(x_n) = 2 \ln 2n^3 = 2 \ln 2 + 6 \ln n > 2 \ln 2 = \varepsilon$$

Не выполняется необходимое условие сходимости. Для определения равномерной сходимости исследуем функцию  $u_n(x) = \left| \frac{x \ln nx}{n^2} \right|$  на максимум на интервале  $(0, 1)$ :

$$u'_n(x) = \frac{1}{n^2} (\ln nx + 1)$$

Тогда в точке  $x = \frac{1}{ne}$  находится экстремум, а значит максимальное значение функции:

$$\sup u_n = \max \left\{ u_n\left(\frac{1}{ne}\right), u_n(1) \right\} = \max \left\{ \frac{1}{n^3 e}, \frac{\ln n}{n^2} \right\}$$

Так как оба ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 e}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$  сходятся, то исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса.

### 3 Т3

Так как функции  $u_n$  - монотонны на  $[a, b]$ , то:

$$|u_n| \leq \sup |u_n| = \max \{|u_n(a)|, |u_n(b)|\} \leq |u_n(a)| + |u_n(b)|$$

Но так как ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(a)|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(b)|$  сходятся абсолютно, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(a)| + |u_n(b)|$  сходится абсолютно, а значит по признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  равномерно сходится на  $[a, b]$ .

### 4 Т4

Докажем по признаку Абеля, для этого нужно доказать, что  $b_n = \frac{1}{n^x}$  монотонна и ограничена. Ограниченность очевидна  $b_n \leq 1$ , покажем монотонность:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^x}}{\frac{1}{n^x}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x} \leq 1$$

последовательность убывает при любом фиксированном  $x$ .

### 5 Т6

Запишем  $w_f(t_n) = \sup\{|f(x) - f(x + \delta)| \mid \delta \leq t_n\} \geq |f(x) - f(x - t_n)|$ . Тогда по теореме Кантора функция равномерно-непрерывна, тогда  $w_f(t_n) \rightarrow 0, t_n \rightarrow 0$ .

### 6 Т7. Признак Дини

Рассмотрим множество  $Q_n = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$ , каждое из таких множеств является открытым, так как  $|f_n(x) - f(x)|$  - непрерывна, и множество задаётся строгим неравенством. Так как  $f_n \rightarrow f$  следует, что  $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ . Из того, что функции монотонны по  $n$  следует вложенность  $Q_n$   $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_n$ . Тогда так как  $[a, b]$  - компакт следует, что из  $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$  можно выбрать конечное подпокрытие  $Q_k \cup \dots \cup Q_N = Q_N$ . Получили, что найдётся  $N$ , такое что  $\forall n > N \forall x \in [a, b] x \in Q_N \subset Q_n$ .

## 7 T8

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

Воспользуемся формулой Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}$$

А значит радиус сходимости  $R = 4$ .

доп)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{pn}}{(1-i)^n}$$

По формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(1-i)^k} \right|^{\frac{1}{pk}} = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}$$

## 8 T9

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)x^n$$

По формуле Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n+1}} - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} \ln a}{\frac{1}{n} \ln a} + o(1) = 1$$

Радиус сходимости равен 1. При  $x = 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln a - \text{расходится}$$

При  $x = -1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1)$$

По признаку Лейбница сходится условно.

## 9 T10

а)

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{12 \cdot 3^n}$$

Тогда:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left( \frac{(-1)^n}{4} + \frac{1}{12 \cdot 3^n} \right)$$

Радиус сходимости равен минимуму из радиусов сходимости составных рядов, т.е.  $R = 1$ .

б)

$$\frac{1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} (n+1) \frac{x^{2n}}{2^n}$$

Радиус сходимости равен  $R = 1^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

в)

$$\ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}} = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(1-2x^2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} - 2^{n-1} \right)$$

Радиус сходимости  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

г)

$$\sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin 3x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n x^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

Ну тут дальше можно кусочно задать явную формулу для коэффициентов ряда. Радиус сходимости  $R = \infty$ .

д)

$$\operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Радиус сходимости  $R = 1$ .

## 10 Т11

б)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Рассмотрим сумму из пункта а:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Почленно продифференцировав получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \implies \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

## 11 T13

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

Разобьём отрезок равномерно, тогда выбрав представителя в виде  $f(k) = \sin \pi \frac{k}{n}$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \pi \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \sin \left( \frac{n+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{2n} \right)} = 2$$

## 12 T14

Так как  $\frac{1}{x}$  непрерывна, то она интегрируема на любом отрезке из области определения. Найдём интеграл  $\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx$ , выберем разбиение, где точки составляют геометрическую прогрессию:  $1, q^1, q^2 \dots q^n$ , где  $q = \sqrt[n]{2}$ , в качестве представителя выберем самые правые точки, т.е.  $f(t_k) = \frac{1}{q^k}$ . Тогда сумма Римана будет иметь вид:

$$S = \frac{1}{q}(q-1) + \frac{1}{q^2}(q^2-q) + \dots + \frac{1}{q^n}(q^n - q^{n-1}) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{n(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{2}} = \frac{n(2^{\frac{1}{n}}-1)}{2^{\frac{1}{n}}} \rightarrow \ln 2$$

Предел является одним из замечательных пределов для логарифма. Далее замечаем, что искомая сумма:

$$S' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n}$$

тоже является суммой Римана, но только для равномерного разбиения, тогда так как эти суммы сходятся к одному и тому же интегралу получим, что сумма  $S' = \ln 2$ .

## 13 T17

а)

$$1 + x^n \leq e^{-x^n} \implies \int_0^1 1 + x^n \, dx < \int_0^1 e^{-x^n} \, dx \implies 1 - \frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n} \, dx$$

## 14 Интегрируемость функции Римана

Для любого  $\varepsilon > 0$  тогда функция Римана принимает значение большее  $\frac{\varepsilon}{2}$  конечное число раз, покроем все точки  $x$  для которых  $R(x) > \frac{\varepsilon}{2}$  семейством окрестностей  $U_{\frac{\varepsilon}{4}}, U_{\frac{\varepsilon}{8}}, \dots$ , тогда взвешенная сумма колебаний по таким окрестностям не превосходит:

$$\Omega(f_U, \tau_U) \leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{8} + \dots < \frac{\varepsilon}{2}$$

В остальных точках значение функции Римана не превосходит  $\frac{\varepsilon}{2}$ , а значит взвешенная сумма колебаний не превосходит  $1 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ , тогда взвешенная сумма колебаний по всему разбиению не превосходит  $\varepsilon$ .

## 15 20.13

Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой Даламбера:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{n(\gamma + n)} = 1$$

Для исследования ряда на границе сходимости подробнее изучим коэффициенты ряда  $F_n$ :

$$\begin{aligned} F_n &= \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha + k)(\beta + k)}{(\gamma + k)(1 + k)} = \prod_{k=1}^n \frac{(1 + \frac{\alpha}{k})(1 + \frac{\beta}{k})}{(1 + \frac{\gamma}{k})(1 + \frac{1}{k})} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left( 1 + \frac{\alpha}{k} \right) + \ln \left( 1 + \frac{\beta}{k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\gamma}{k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\alpha + \beta - \gamma - 1}{k} + O \left( \frac{1}{k^2} \right) \right] \right\} = \exp \{ (\alpha + \beta - \gamma - 1) \ln k + A \} = e^A k^{\alpha + \beta - \gamma - 1}, \end{aligned}$$

в преобразованиях использована асимптотическая формула разложения гармонического ряда  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln k + C + o(k)$ . Мы получили асимптотическую формулу, где  $A$  - некоторая положительная константа, зависящая от  $\alpha, \beta, \gamma$ . Далее нетрудно провести анализ сходимости ряда, при  $x = 1$  ряд ведёт себя как эталонный и сходится при  $\alpha + \beta - \gamma - 1 < -1 \implies \alpha + \beta < \gamma$ . При  $\alpha + \beta \geq \gamma$  ряд расходится. При  $x = -1$  ряд сходится абсолютно при  $\alpha + \beta < \gamma$  и сходится условно при  $\alpha + \beta - \gamma - 1 < 0$  по признаку Даламбера. При  $\alpha + \beta - \gamma - 1 \geq 0$  ряд расходится.

## 16 ТЗ.НИР