Теорвер 7.

Шахматов Андрей, Б02-304

20 октября 2024 г.

Содержание

1 Т3

Начнём с сходимости по распределению:

$$F_{\xi_n} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ (1 - p_n), 0 \le t < 1 \\ 1, t \ge 1 \end{cases}$$

Тогда в случае $1 - p_n \to 1$ $F_{\xi_n} \to F_{\xi=0}$, из чего следует необходимым и достаточным условием слабой сходиомсти является $p_n \to 0$. Тогда так как сходимость является сходиомстью к константе, то такие же условия накладываются и на сходимость по вероятности. Исследуем сходиомсть в L_2:

$$E\xi_n = p_n \to 0 \leftrightarrow p_n \to 0.$$

Остаётся сходимость почти наверное. ((((пока не знаю))))

2 Т4

Доделать.

3 Т7

а) Исследуем на слабую сходимость к $\xi \equiv 1$. Распределение $F_{\max \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n} = \prod_{k=1}^{n} F_k$. Каждое из этих распределений равно $F_k = t$ на $(0, 1)$, тогда их произведение:

$$\prod_{k=1}^{n} F_k = \prod_{k=1}^{n} t = t^n \to \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \ge 1 \end{cases}$$

Функция распределения $\xi = 1$ имеет такой же вид, потому по теореме Александрова имеет место слабая сходимость.

б) Согласно задаче Т2 слабая сходимость эквивалента сходмости по вероятности в случае сходимости к константе, поэтому сходимость по вероятности также имеет место.

в) Существует теорема о том, что если последовательность сходится по вероятности, то из неё можно выбрать подпоследовательность, которая будет сходится почти всюду, тогда так как все элементы нашей последовательности одинаковы, то почти всюду сходящаяся подпоследовательность будет совпадать с исходной последовательностью, из чего следует сходиомсть почти всюду.

г) Исследуем на сходимость в среднем, как известно:

$$F_{\max \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n} = t^n \implies \rho_{\max \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n} = nt^{n-1} I(0, 1)$$

Тогда достаточно доказать, что $E \max(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \to 1$:

$$E \max(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \int_0^1 nt^{n-1} \, \mathrm{d}t = 1$$