T.1. Докажите, что если множество X действительных чисел состоит только из изолированных точек, то оно не более чем счётно.

По опр. изол. точек $\forall x \in X\ \exists \varepsilon(x)\ U_{\varepsilon}(x) \cap X = \{x\}$

Лемма: $\forall x, y \in X\ E = U_{\frac{1}{2}\varepsilon(x)}(x) \cap U_{\frac{1}{2}\varepsilon(y)}(y) = \varnothing$

Пусть $\exists z \in E$, тогда $\{$ б.о.о. $\varepsilon(x) \geq \varepsilon(y) \}$

$|x-y| \leq |x-z| + |y-z| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(y) \leq \varepsilon(x) \Rightarrow z \in U_{\varepsilon}(x) \cap X \Rightarrow$

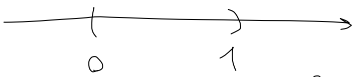
$\Rightarrow z = x$

Р-рим x и $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_x}(x)$, тогда $\exists q \in \mathbb{Q}$, т.ч. $q \in U_{\frac{1}{2}\varepsilon_x}(x)$

причём $\nexists y$ $U_{\frac{1}{2}\varepsilon_y}$, т.ч. $q \in U_{\frac{1}{2}\varepsilon_y}$ тогда существует нумерация

$\mathbb{Q} \to X$, тогда X - счётно.

T.3. Докажите, что из всякого покрытия интервала $(0, 1)$ интервалами можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.



Р-рим $Q = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}]$

Д-жем, что $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}] = (0, 1)$

Д-во: 1) $\forall k\ \frac{1}{2k} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2k} > 0 \\ 1 - \frac{1}{2k} < 1 \end{cases} \Rightarrow \forall k\ [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}] \subseteq (0, 1)$

2) Д-жем, что $(0,1) \subseteq [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}] \Leftrightarrow (0,1) \cap \left[(-\infty, \frac{1}{2k}) \cup (1 - \frac{1}{2k}, +\infty)\right] = \varnothing$

$\underbrace{(0,1) \cap (-\infty, \frac{1}{2k})}_{U_1} \cup \underbrace{(0,1) \cap (1 - \frac{1}{2k}, +\infty)}_{U_2} = \varnothing$

Р-рим U_1: пусть $z \in U_1$, тогда $0 < z < \frac{1}{2k}$, но для $\forall z\ \exists k$ т.ч. $\frac{1}{2k} < z \Rightarrow z \notin U_1$

$U_1 = \varnothing$ аналог. $U_2 = \varnothing$ $\Rightarrow U_1 \cup U_2 = \varnothing \Rightarrow (0,1) \subseteq [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}]$

3) $\Rightarrow (0,1) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}]$

Тогда каждый из $[\frac{1}{2k}, 1 - \frac{1}{2k}]$ покр. конеч. числом интервалов, а кол-во отрезков счётно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(0,1)$ можно покрыть сч. числом интервалов.

T.6. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ равномощен интервалу $(0, 1)$.

Построим биекцию $f: (0,1) \to [0,1]$

$f(\frac{1}{2}) = 0$; $f(\frac{1}{n+2}) = f(\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$

при $x \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\}$ $f(x) = x$

T.7. Докажите, что для любого множества X множество всех подмножеств X, 2^X, не равномощно X.

Пусть $X \sim 2^X$, тогда $\exists f: X \to 2^X$ — биекция

Р-рим $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$

Тогда $\exists y$ т.ч. $f(y) = Y$, тогда пусть $y \in Y$, но тогда $y \notin Y$ т.к. $y \in f(y)$ — парадокс. $X \nsim 2^X$

пусть $y \notin Y$, но тогда $y \in Y$ т.к. $y \notin f(y)$

T.9. Докажите по определению (по Коши) непрерывность функции

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \ln x$.

T.9. Докажите по определению (по Коши) непрерывность функции

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \ln x$.

опр. $\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, x_0)\ \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

а) $X = \mathbb{R}$; $||x| - |x_0|| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$

б) $|x - x_0| < \delta$ $\quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} < \frac{\delta}{|x_0|(|x_0| - \delta)} < \varepsilon$

$-|x| + |x_0| < \delta$

$|x_0| - \delta < |x|$

$\frac{1}{|x_0| - \delta} > \frac{1}{|x|}$

$\delta < (|x_0|^2 - |x_0|\delta)\varepsilon$

$\delta < \frac{|x_0|^2 \varepsilon}{1 + |x_0|\varepsilon}$, тогда $\delta(x_0, \varepsilon) = \frac{|x_0|^2 \varepsilon}{1 + |x_0|\varepsilon}$

в) $|\ln x - \ln x_0| \leq \left|\frac{x}{x_0} - 1\right| = \left|\frac{x - x_0}{x_0}\right| < \varepsilon$ при $\delta = |x_0|\varepsilon$

T.10. В каких точках непрерывны функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}? \end{cases}$

Здесь p/q — несократимая дробь с положительным знаменателем, представляющая данное рациональное число.

б) $f(x) = \mathcal{D}(x)\sin x$, р-рим $x_0 = \pi k$

По Коши; $|\mathcal{D}(x)\sin x - \mathcal{D}(x_0)\sin x_0| = \{\sin x_0 = 0\} = |\sin x - \sin x_0|\mathcal{D}(x) \leq |x - x_0|\mathcal{D}(x) \leq |x - x_0| < \varepsilon$

при $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

пусть $x_0 \in \mathbb{Q}$ и $x_0 \neq \pi k$.

$x_n^{\mathrm{I}} = x_0 + \frac{1}{n}$, тогда $\underbrace{\mathcal{D}(x_n^{\mathrm{I}})}_{1}\sin(x_n^{\mathrm{I}}) = \sin(x_n^{\mathrm{I}}) = \sin x_0$ — при $x_0 \neq \pi k$ $\underline{\sin x_0 \neq 0}$

$x_n^{\mathrm{II}} = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$, тогда $\mathcal{D}(x_n^{\mathrm{II}})\sin(x_n^{\mathrm{II}}) = 0$ — нет предела $\Rightarrow$ нет непрерывности.

пусть $x_0 \notin \mathbb{Q}$ и $x_0 \neq \pi k$

$x_n^{\mathrm{I}} = \frac{E(x_0 \cdot 10^n)}{10^n}$ $\quad \underbrace{\mathcal{D}(x_n^{\mathrm{I}})}_{1}\sin(x_n^{\mathrm{I}}) = \sin x_0$ — при $x_0 \neq \pi k$ $\sin x_0 \neq 0$

$x_n^{\mathrm{II}} = x_0 + \frac{1}{n}$ $\quad \mathcal{D}(x_n^{\mathrm{II}})\sin(x_n^{\mathrm{II}}) = 0$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1) Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}$, тогда рисуем Гейне $\exists x_n \to x_0$ $f(x_n) \not\to f(x_0)$

пусть $x_n \to x_0$, $x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \Rightarrow f(x_n) = 0 \to 0$, но $f(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0$

2) Пусть $x_0 \notin \mathbb{Q}$. По Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ \forall x\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Если $x \notin \mathbb{Q}$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow 0 - 0 = \underline{0 < \varepsilon}$ для $\forall \delta$

Если $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\quad |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{q}\right| < \varepsilon$

$A(n) = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}\}$, тогда $\rho_n(x_0, A(n))$ — расст. от x_0 до $A(n)$

Тогда $\delta(\varepsilon, x_0) = \min(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{E(\frac{1}{\varepsilon})+1})$, тогда в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ нет $x \in \mathbb{Q}$ с $q < E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} < \varepsilon$

T.11. Приведите пример непрерывной на интервале функции, которая

а) не является ограниченной;

б) ограничена, но не достигает точной верхней и нижней грани своих значений.

а) $\mathrm{tg}(x)$ на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

б) $f(x) = x$ на $(-1, 1)$

T.12. Докажите, что $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ограничена, если она непрерывна и имеет конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall x\ \ x > \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\ |f(x) - A| < \varepsilon$

Т.12. Докажите, что $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ограничена, если она непрерывна и имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall x\ \ x > \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$

р-рим $f: [a, \delta(\varepsilon)] \cup (\delta(\varepsilon), +\infty) \to \mathbb{R}$

1) f на $[a, \delta(\varepsilon)]$ огр по т. о непр-ф-ции на огр.

2) f на $(\delta(\varepsilon), +\infty)$: $|f(x)-A|<\varepsilon$

$|f(x)|-|A|<\varepsilon$

$|f(x)|<\varepsilon+|A|$ — огр.

Т.13. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая рекуррентно как $x_n = f(x_{n-1})$, стремится к $+\infty$.

1) $x_n = f(x_{n-1}) > x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow$ посл- возрастает. $\Rightarrow x_n$ имеет предел.
аналогично $f(x_n)$ имеет предел

2) $f(x_n) > x_n$

$\lim f(x_n) \geq \lim x_n$, пусть $\lim x_n = A \in \mathbb{R}$, тогда $f(x_n) \to f(A)$ по Гейне

$f(A) \geq A$, но $f(x) > A$ — противоречие. $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$.

X Y

Т.15. Пусть функция $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна. Докажите, что найдется такая точка $x \in [a, b]$, для которой верно $x = f(x)$.

$f: [a,b] \to [a,b]$, $g: [a,b]\to[a,b]$, $g(x) = x$, тогда р-рим $h(x) = f(x) - g(x)$ — непрер.

т.к. $\min f(x) = a$, а $\min g(x) = a$, то $\min h(x) = a - a = 0$

тогда $h: [c,d] \to [0, e]$, т.к. непр-ф-ция перев. пр. в пр, то

$h(x)$ д-но принимать зн. 0 $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Т.18. Запишите с помощью кванторов утверждения и их отрицания:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

а) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X\ \ x < -\frac{1}{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$

б) $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in X\ \ |x| > \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

Т.19. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

а) $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{x((1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1)}{1+x-1} = (1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1$

Р-рим $\forall x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, тогда x_n - б.м. $\Rightarrow (1+x_n)^{2/3}+(1+x_n)^{1/3}+1 \to 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = 3$

в) $\frac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \sin x\left(\frac{1}{(\pi-x)(x+\pi)}\right) = \frac{\sin x}{2\pi}\left(\frac{1}{\pi-x}+\frac{1}{\pi+x}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} - \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin(\pi+x)}{\pi+x}$

$2\pi\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} + \lim\frac{\sin(\pi+x)}{\pi+x}$, при усл сущ. 1 и 2. предела.

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x} = \left\{\begin{matrix} t=\pi-x \\ t\to0\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{t\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi+x)}{\pi+x} = \left\{\begin{matrix} t=\pi+x \\ t\to2\pi\end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to2\pi}\frac{\sin t}{t} = 0$

$\Rightarrow$ $2\pi\lim\frac{\sin x}{\pi^2-x^2} = 1$

$\lim\frac{\sin x}{\pi^2-x^2} = \frac{1}{2\pi}$

Т.21. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

$f(x) = \begin{cases}\sin\frac{\pi}{2x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$

1) Очевидно $f(x)$ разрывна в 0.

$f(x) = \begin{cases} \dots \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$

1) Очевидно $f(x)$ разрывна в 0.

2) Д-ем, что $f(F)$ – отрезок $F=[a,b]$

1. Если $0 \notin F$, то очевидно, т.к. f непрерывна.

2. Если 0 – не граница $[a,b]$, т.е. $0\neq a$, $0\neq b$, $0\in[a,b]$

$[a,b]=[a,0)\cup\{0\}\cup(0,b]$

T.22. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастают и оказалось, что их сумма $f+g$ непрерывна. Докажите, что обе функции f и g тоже непрерывны.

Фикс пр $X \subseteq \mathbb{R}$, тогда $h=f+g$: $h(X)$ – промежуток

$h(X)=f(X)+g(X)$, т.е. $f(X)+g(X)$ – промежуток

т.к. f, g возр, то для люб. т. разрыва f она будет 1 рода и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \le f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (1)

$\lim\limits_{x\to x_0-0} g(x) \le g(x) \le \lim\limits_{x\to x_0+0} g(x)$ (2)

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)+g(x) \le f(x)+g(x) \le \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)+g(x)$, тогда т.к. $f+g$ – непр, то

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)+g(x) = f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)+g(x)$, тогда знаки в пер. выше 1 и 2 должны быть (=), т.е. g и f – непр.

T.23. Найдите производные функций а) $\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$; б) $\cos(3\arccos x)$; в) x^{x^x}.

а) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}} \Rightarrow f^3(x)(1+x^3)=1-x^3$

$3f'(x)f^2(x)(1+x^3)+f^3(x)\cdot 3x^2=1-3x^2$

$$f'(x)=\frac{1}{3\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}}(1+x^3)}\left(1-3x^2-3x^2\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)=$$

б) $f(x)=\cos(3\arccos x)$

$$f'(x)=-\sin(3\arccos x)\cdot -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3\sin(3\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

T.24. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

1) $(\operatorname{arsh} y)'=\dfrac{1}{(\operatorname{sh}x)'}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

2) $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$, $(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$

$$(\operatorname{arth}y)'=\frac{1}{(\operatorname{th}x)'}=\operatorname{ch}^2x=\left\{\begin{aligned}&1=\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x\\&\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=1-\operatorname{th}^2x\\&\operatorname{ch}^2x=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2x}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2x}=\frac{1}{1-y^2}$$

$$(\operatorname{arcth}y)'=\frac{1}{(\operatorname{cth}y)'}=-\operatorname{sh}^2x=\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}=\operatorname{cth}^2x-1\\&\operatorname{sh}^2x=\frac{1}{\operatorname{cth}^2x-1}\end{aligned}\right\}=-\frac{1}{\operatorname{cth}^2x-1}=\frac{1}{1-y^2}$$

Т.25.

а) $\displaystyle\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left\{\begin{aligned}&t=\sqrt{e^x-1}\\&dt=\frac{e^xdx}{2\sqrt{e^x-1}}\end{aligned}\right\}=\int\frac{2\sqrt{e^x-1}\,dt}{e^x\sqrt{e^x-1}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$$

г) $\displaystyle\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$

$\displaystyle\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$\displaystyle\int e^{ax}\dots=\frac{e^{ax}\sin bx}{\dots}-\int\frac{\sin bx}{b}ae^{ax}dx=$

J) $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln x - \int \frac{1}{2}\cdot x$

g,e) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \int \frac{\sin bx}{b} a e^{ax} dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

1) т.е. $\boxed{I_c + \frac{a}{b} I_s = \frac{e^{ax}\sin bx}{b}}$

2) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \int \frac{\cos bx}{b} a e^{ax} dx = \frac{a}{b} I_c - \frac{e^{ax}\cos bx}{b} + C$

$I_c + \frac{a^2}{b^2} I_c - \frac{a e^{ax}\cos bx}{b^2} = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + C$

$I_c = \frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}} \frac{e^{ax}}{b}\cdot\left(\frac{a}{b}\cos bx + \sin bx\right) = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + C$

$I_s = \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - I_c\right) + C$

ё) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10} = \int\left(1 + \frac{6x-10}{x^2-6x+10}\right)dx = x + 3\int \frac{2x-\frac{10}{3}}{(x-3)^2+1}dx = x + 3\int \frac{2x-6+\frac{8}{3}}{(x-3)^2+1}dx = x + 3\int \frac{d((x-3)^2+1)}{(x-3)^2+1} + 8\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1^2} \ominus$

$\ominus\ x + 3\ln((x-3)^3+1) + 8\,\mathrm{arctg}(x-3)$

и) $\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} \ominus \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ \begin{cases} A+B=0 \\ C+B-A=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ B-2A=-1 \end{array} \Rightarrow 3B=-1 \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1/3 \\ A=\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{array} \end{array} \right\} \ominus$

$\ominus\ \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

2.8.(1) $\frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{-Ax^2+A-2Bx}{(x^2+1)^2}$

$x^3+x^2-4x+1 = Dx^3+Ex^2+Dx+E-Ax^2+A-2Bx$

$\begin{cases} D=1 \\ E-A=1 \\ D-2B=-4 \\ E+A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=1 \\ B=-\frac{5}{2} \\ E=1 \\ A=0 \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-\frac{5}{2}}{x^2+1} + \int \frac{\cancel{x}+1}{x^2+1}dx = -\frac{5}{2x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$= -\frac{5}{2x^2+2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\,x + C$

к) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)(x^2-4)} = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \int \frac{A\,dx}{x} + \int \frac{B\,dx}{x-1} + \int \frac{C\,dx}{x+1} + \int \frac{D\,dx}{x-2} + \int \frac{P\,dx}{x+2} \ominus$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2} + \frac{P}{x+2} \\ \lim\limits_{x\to 0}(f(x)\,x) = \frac{1}{4} = A \\ \lim\limits_{x\to 1}(f(x)(x-1)) = -\frac{1}{6} = B \\ \lim\limits_{x\to 2}(f(x)(x-2)) = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{24} = D \\ \lim\limits_{x\to -1}(f(x)(x+1)) = \frac{1}{-1\cdot(-2)(-3)} = -\frac{1}{6} = C \\ \lim\limits_{x\to -2}(f(x)(x+2)) = \frac{1}{-2(-3)(-1)(-4)} = \frac{1}{24} = P \end{array} \right\} \ominus\ \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{24}\ln|x-2| + \frac{1}{24}\ln|x+2|$

л) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+4}dx = \left\{ \begin{array}{l} Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Dx^2+Cx+D \Rightarrow \\ \begin{array}{l} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=0,\ C=0 \\ B=\frac{1}{3} \\ D=-\frac{1}{3} \end{array} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2^2} \ominus$

$\ominus\ \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$

м) $\int \frac{1\,dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = \int \sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}\cdot\frac{dx}{(x-7)(x-5)} = \left\{ \begin{array}{l} t^6 = \frac{x-5}{x-7} \\ 6t^5 dt = -\frac{2}{(x-7)^2}dx \\ 3 \end{array} \right\} = \int t\cdot\frac{-(x-7)^2\cdot 3t^5 dt}{(x-7)(x-5)} \ominus$

м) $\int \frac{1\,dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = \int \sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}} \cdot \frac{1}{(x-7)(x-5)} \quad \begin{cases} 6t^5dt = -\frac{2}{(x-7)^2}dx \\ 3 \end{cases}$

$= \int -3t^6 \cdot \frac{x-7}{x-5}dt = -3\int \frac{\cancel{x-5}}{\cancel{x-7}} \cdot \frac{\cancel{x-7}}{\cancel{x-5}}dt = -3t = -3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}$

о) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{Bmatrix} m=3 \\ n=2 \\ a=1 \\ b=-1 \\ p=\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t^2=x^2-1 \\ 2tdt=2xdx \\ tdt=xdx \end{matrix} = \int x^3 t \cdot \frac{tdt}{x} = \int x^2t^2dt = \int (t^2+1)t^2dt = \int t^4dt + \int t^2dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} = \frac{(x^2-1)^{5/2}}{5} + \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}$

п) $\int \underbrace{\cos^4x\sin^2x}_{v}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{du} = -\cos^5x\sin^2x - \int -\cos x \cdot 2\sin x\cos^3x(\cos^2x - 2\sin^2x)dx =$

$= -\cos^5x\sin^2x + 2\int \cos^6x\sin x\,dx - 4\int \sin^3x\cos^4x\,dx$

$5\int \cos^4x\sin^3x = -\cos^5x\sin^2x + 2\int \cos^6x\sin x\,dx = -\cos^5x\sin^2x - 2\int \cos^6x\,d\cos x = -\cos^5x\sin^2x - \frac{2\cos^7x}{7}$

$\int \cos^4x\sin^3x = -\left(\frac{\cos^5x\sin^2x}{5} + \frac{2\cos^7x}{35}\right)$

р) $\int \frac{1}{\cos x+\sin x}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})} = \left\{ t = x - \frac{\pi}{4} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$

Доп. задача. $\forall U$ откр $\exists U_{\alpha}$... т.ч. $U = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$, U_{α}-интервал.

1) Введём отн. экв. $x \sim y \Leftrightarrow [x,y] \subseteq U$ (или $\supseteq$) тогда отн. экв. разобьёт U на классы экв явл. промежутками (C_{α}), т.е. инт, отр, и полуинт. $U = \bigsqcup_{\alpha \in A} C_{\alpha}$

2) Д-жем что $\forall \alpha \in A$ C_{α}-интервал. Противное - пусть C_{α}-отрезок или полуинт $C_{\alpha} = [a, b]$ т.е. б.о.о. $b \in C_{\alpha}$ тогда т.к. U откр, то $\exists U(b) \subseteq U$ $U_b = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ но тогда $[b, b+\frac{\varepsilon}{2}] \subseteq U = b \sim b+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow b+\frac{\varepsilon}{2} \in C_{\alpha}$ - противоречие.

Тогда $U = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$

3) т.к. $\forall x \in U$ $\exists U_{\alpha} \ni x$ тогда $\exists V \ni x$ $V \subseteq U_{\alpha}$ тогда $\exists p \in \mathbb{Q}$ т.ч. $p \in V$ - мы можем пронумеровать каждый интервал. $p \in \mathbb{Q} \Rightarrow |A| = |\mathbb{N}|$