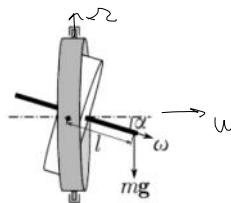


Т6. (2019) К оси лабораторного гироскопа, закреплённого на кардановом подвесе в центре масс, подвешен груз массой $m = 306$ г на расстоянии $l = 120$ мм от центра. За один оборот регулярной прецессии исходно горизонтальная ось гироскопа опустилась на $\Delta\alpha = 10^\circ$. Определите величину момента силы трения в вертикальной оси крепления подвеса.



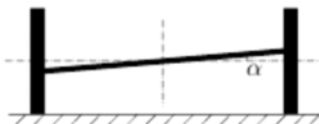
Ответ: $0,01 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

$$1) M_{\text{тр}} = L\omega$$

$$2) mgl \sin \alpha = L\Omega \sin \alpha$$

$$M_{\text{тр}} = \frac{\omega}{\Omega} \cdot mgl = \frac{\Delta \alpha}{2\pi} mgl \approx 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Т7. (2014) Ось железнодорожной колёсной пары, представляющая собой однородный тонкий стержень массы $m = 200$ кг и длины $\ell = 1,5$ м, приварена к колёсам под углом $\alpha = 1^\circ$ к горизонту, как показано на рис. (колёса расположены вертикально и симметрично, центр масс стержня совпадает с серединой горизонтального отрезка, соединяющего центры колёс). Найти максимальную силу давления одного из колёс на землю при поступательном движении конструкции без проскальзывания по горизонтальной поверхности, когда угловая скорость равна $\omega = 50$ рад/с. Суммарная масса конструкции равна $m_0 = 1000$ кг.



Ответ: $N_{\text{max}} \approx \frac{1}{12} m \omega^2 \ell \alpha + \frac{1}{2} m_0 g = 6 \cdot 10^3 \text{ Н}$

$$1) F \frac{\ell}{2} \cos \alpha = L \Omega_1 \quad 2) L = \frac{m \ell^2}{12} \Omega_2 \quad 3) \omega = \Omega_2 \cos \alpha$$

$$F = \frac{\frac{m \ell}{12} \cdot \frac{\sin \alpha \omega}{2} \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} \cdot 2 \approx \frac{m \ell \omega^2 \alpha}{12}$$

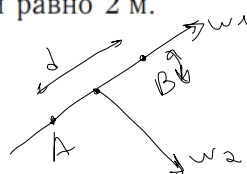
$$\frac{L}{2} \varphi = R \gamma \quad \frac{\Omega_1}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$F = \frac{m \ell \omega^2 \alpha}{12}$$

11.10. Определить максимальное гироскопическое давление быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с вокруг оси, перпен-

169

дикулярной оси ротора. Ротор турбины массой 3500 кг и радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками равно 2 м.



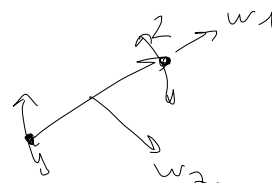
$$1) L = m R^2 \omega_1$$

$$2) F_A \cdot d = L \omega_2 = m R^2 \omega_1 \omega_2$$

$$F_A = \frac{m R^2 \omega_1 \omega_2}{d}$$

$$3) \varphi = \varphi_A \sin \omega t \Rightarrow \omega_2 = \dot{\varphi} = \omega \varphi_A \sin \omega t$$

$$4) F_{A \text{ max}} = \frac{m R^2 \omega_1 \omega \varphi_A \sin \omega t}{d} = \frac{m R^2 \omega_1 \omega \varphi_A}{d}$$



11.20. Шар радиусом R и связанная с ним тонкая пренебрежимой массы жесткая спица AB , являющаяся продолжением его диаметра, раскручены вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр шара и спицу, до угловой скорости ω (рис. 308). В спицу на расстоянии $2R$ от центра шара абсолютно упруго ударяется точечная масса, имеющая до удара скорость v_0 . Скорость v_0 перпендикулярна спице и лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через центр шара (в плоскости рисунка). После удара точечная масса остановилась, а максимальный угол отклонения спицы от горизонтальной плоскости составил φ . Определить φ , если отношение $R\omega/v_0 = 50$. Силы трения отсутствуют. Движение происходит в свободном пространстве.

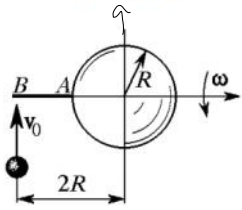
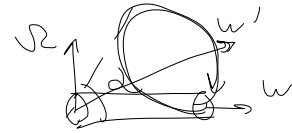


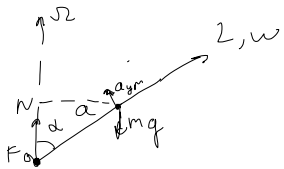
Рис. 308

$$\begin{aligned} 1) m v_0 &= M v_{cm} \\ 2) \frac{m v_0^2}{2} &= \frac{M v_{cm}^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} \\ 3) m v_0 \cdot 2R &= I \omega \\ 4) I &= \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{M}{m} = 11 \Rightarrow \omega = \frac{5 v_0}{11 R}$$



$$\begin{aligned} \theta_{max} &= 2\alpha = 2 \arctg \left(\frac{5 v_0}{11 R \omega} \right) \\ &= 2 \arctg \left(\frac{1}{11} \right) \end{aligned}$$

11.1. Симметричный волчок массой m , ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (рис. 302), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры. Расстояние от точки опоры волчка до его центра масс равно a , момент инерции волчка относительно его оси равен $I_{||}$.



$$\begin{aligned} 1) m g a \sin \alpha &= I \omega \Omega \sin \alpha \Rightarrow m g a = I \omega \Omega \Rightarrow \Omega = \left(\frac{m g a}{I \omega} \right)^2 \\ 2) F &= m a_y = m \Omega^2 a \sin \alpha \\ F &= m a \sin \alpha \frac{m^2 g^2 a^2}{I^2 \omega^2} = \frac{m^3 a^3 g^2 \sin \alpha}{I^2 \omega^2} \\ 3) \tan \beta &= \frac{F}{N} = \left(\frac{m g a}{I \omega} \right)^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

углом α к вертикали направлена сила реакции F , с которой плоскость действует на волчок. Волчок имеет форму однородного диска радиусом r и вращается вокруг оси фигуры с угловой скоростью ω . Расстояние от точки опоры до центра инерции волчка равно l .

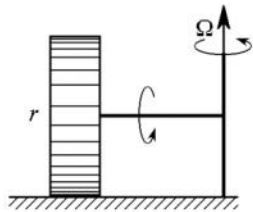
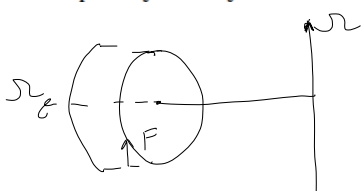


Рис. 304

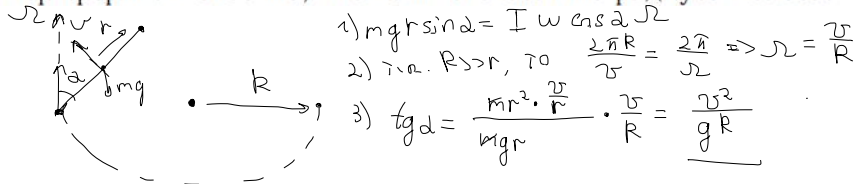
11.14. Гирскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун) весом P , способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 304). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток

на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна $r = 50$ см, а рабочая скорость 1 об/с.

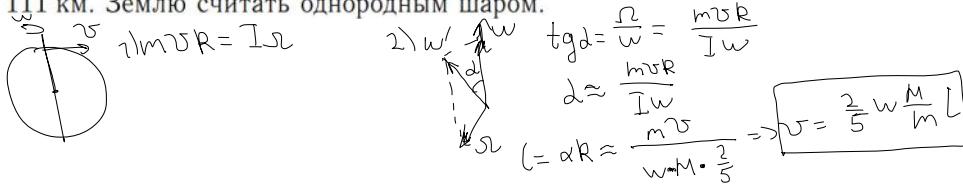


$$\begin{aligned} F_r &= L \Omega = I \Omega \cdot \Omega = I \Omega^2 \\ F &= \frac{I \Omega^2}{r}, \text{ тогда } N = P + \frac{I \Omega^2}{r} \end{aligned}$$

11.18. С автомобиля, движущегося со скоростью v , соскочило колесо и покатилося по земле. Наблюдение показало, что колесо описало по земле окружность радиусом R . Определить угол наклона оси колеса к горизонту. Всю массу колеса считать сосредоточенной на периферии. Известно, что R много больше радиуса колеса.

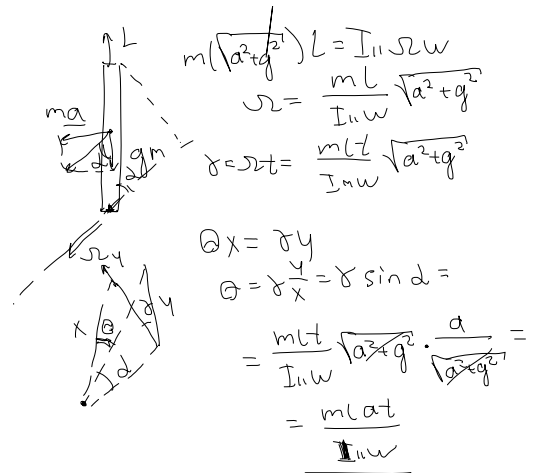


11.5* Оценить, с какой минимальной скоростью v надо выпустить на полюсе Земли снаряд массой $m = 1000$ т, чтобы повернуть земную ось относительно системы «неподвижных звезд» на угол $\alpha = 1^\circ$. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг. Длина градуса земного меридиана $l = 111$ км. Землю считать однородным шаром.

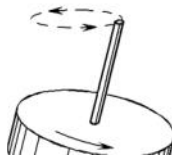


11.2. Гирскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа $m = 5 \cdot 10^3$ г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры $I_{||} = 8 \cdot 10^4$ г·см², расстояние между точкой подвеса и

168



центром масс маховичка $l = 0,25$ см. Гироскоп делает 20000 об/мин. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $a = 1$ м/с². Определить угол α , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.



11.24. Тонкий стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 10$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, совершая $n = 3000$ об/мин (рис. 311). Ось вращения составляет со стержнем угол $\alpha = 89,9^\circ$. Каковы силы, действующие на подшипники, в которых закреплена ось? Подшипники расположены симметрично относительно стержня на расстоянии $a = 20$ см друг от друга.

$$F a = \frac{m l^2}{12} \cdot \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \left\{ \omega = 2\pi n \right\} \quad L \omega = M$$

$$F = \frac{m l^2 \pi^2 n^2}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

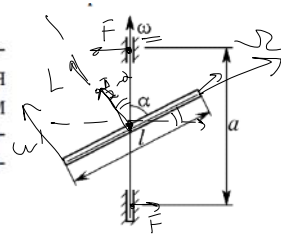


Рис. 311