

T.1. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} dx$; в) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^\alpha)}{x \ln^\alpha(1+x)} dx$.

а) $\operatorname{ch} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} \sim e^{\frac{1}{x}} & \text{экспоненциально} \\ \text{мало при } x \rightarrow 0 \end{cases} \approx \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}}$

$$\left| \ln \left[\frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} \right] \right|^d = \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{2} \right)^d = \frac{1}{x^d} \left(1 + x \ln \frac{1}{2} \right)^d = \frac{1}{x^d} \left(1 + d x \ln \frac{1}{2} + o(x) \right) = \frac{1}{x^d} + o\left(\frac{1}{x^{d+1}}\right)$$

$\ln(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\int_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} dx \Rightarrow \text{п.ч.} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x^d}}{\frac{1}{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{d-1}} dx \Rightarrow \text{сходится при } d-1 < 1 \Rightarrow d < 2 //$$

б) $d=0$: $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_0^1 o(x) dx$
расходится.

$d > 0$: $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^d)}{x \ln^d(1+x)} dx \approx \int_0^1 \frac{x+x^d}{x \cdot x^d} dx = \int_0^1 \frac{1+x^d}{x^d} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^d} + 1 \Rightarrow \text{сходится при } d < 1 //$

$d < 0$: $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+\frac{1}{x^d})}{x \ln^d(1+x)} dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x^{d+1}} dx \rightarrow \text{сход. при } |d+1| > -1 \Rightarrow d < 0 //$
 $|d| > 0$

T.2. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

а) $\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta x dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$.

б) Сделаем замену $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^\alpha x \sin^\beta x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^\beta x \cos^\alpha x dx$

То есть условия сходимости на a и b симметричны

1) $d, \beta > 0$ то интеграл Римана \Rightarrow сход.

2) $d < 0$: $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\beta x}{\sin^{|\alpha|} x} dx \approx \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\beta x}{x^{|\alpha|}} dx \Rightarrow \text{сход. при } |d| < 1 \Rightarrow d > -1.$

Тогда рассмотрим симм., то $\beta > -1$ тогда сходится//.

в) $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_0^1 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t^\alpha} (\ln 1/t)^\beta} = - \int_0^1 \frac{t^{d-2} dt}{(-\ln t)^\beta} \approx \int_0^1 t^{d-2} |\ln t|^{-\beta} dt \Rightarrow \text{сход. при } d-2 > -1 \wedge -\beta > -1 \Rightarrow d > 1 \wedge \beta < 1$

T.4. Найдите явное асимптотически эквивалентное выражение для интеграла

$$\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2} dt$$

при $x \rightarrow +\infty$ в зависимости от параметра α .

$$\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2} dt = - \int_x^{+\infty} t^{d-1} d(e^{-t^2/2}) = - t^{d-1} e^{-t^2/2} \Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} (d-1) t^{d-2} e^{-t^2/2} dt$$

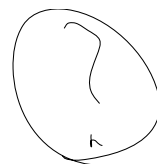
$$\ominus x^{d-1} e^{-x^2/2} + (d-1) \int_x^{+\infty} t^{d-2} e^{-t^2/2} dt \Big| \text{ при } \int_x^{+\infty} t^{d-2} e^{-t^2/2} dt = \left(y = \frac{x}{t} \right) = \int_0^1 \left(\frac{x}{y} \right)^{d-2} e^{-\frac{x^2}{2y^2}} \left(\frac{x}{y^2} \right) dy$$

$$\text{или } = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{1}{y^{d-2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)^2} \frac{x}{y^2} dy$$

$$\ominus \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} + (2\alpha-1) \int_0^{\infty} t^{\alpha-2} e^{-t} dt \quad | \quad \text{Решение}$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1} e^{-x/2}} \int_0^1 \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2} \frac{x}{y^2} dy$$

$$\ominus \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-\frac{x^2}{2y^2}} dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-\frac{x^2}{2}(\frac{1}{y^2}-1)} dy, \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ \int_0^1 \frac{1}{y^2} dy \rightarrow \text{нм} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} d > 1 \text{ осог} \\ d \leq 1 \text{ парог} \end{array}$$



Т.3. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $\int_0^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ $d=0$: $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}) dx \sim \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} dx$ - парог

$d > 0$: $\int_1^{+\infty} x^{4d/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \sim \int_1^{+\infty} x^{4d/3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{4d}{3}+\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} x^{\frac{d}{3}+\frac{1}{2}} dx$ - осог, нм $\frac{d}{3}+\frac{1}{2} < -1$
 $d < 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{4d/3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{4d/3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4d/3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ Т.е. нм-бонд парог нм $d > 0$

(1): $\int_0^1 \frac{1}{x^{4d/3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \sim \int_0^1 \frac{x^{\frac{4d}{3}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4d}{3}}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{d}{3}+\frac{1}{2}} dx$ - осог, нм $-\frac{d}{3}+\frac{1}{2} > -1$
 $|d| < \frac{9}{2} \Rightarrow d > -\frac{9}{2} //$

(2): $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4d/3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{4d/3}} dx$ - осог нм $-\frac{4d}{3}+1 < 0$
 $|d| > \frac{3}{4} \Rightarrow d < -\frac{3}{4}$

т.е. $d \in (-\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}) //$

b) $\int_0^{+\infty} x^2 \sin \frac{\cos x^3}{x+1} dx$; - $\int_0^{+\infty} \cos x^3 dx$ нм \Rightarrow

$x^3 = t \Rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$
 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}+1}}\right) dt = \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}+1}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{11}{3}+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 t}{t} + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}+1}}\right)$
 осог нм осог нм (осог нм $\cos^3 t \rightarrow \cos 3t$ осог нм)

Бог не осог осог, т.е. $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos t}{t^{\frac{11}{3}+1}}\right) dt \geq$

$\geq \int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{\cos t}{t^{\frac{11}{3}+1}}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{11}{3}+1}} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2 \cos t}{t^{\frac{11}{3}+1}}\right) dt$
 $\int_0^{+\infty} dt$ - парог

г) $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{x^d} dx$; $d=0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$ - парог осог.

$d < 0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(x^d \cos x) dx$ - парог.

$d > 0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^d}\right) dx$ нм $d > 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^d} dx$ осог осог \Rightarrow нм-нм осог осог осог осог.

$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^d}\right) dx = x \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^d}\right) \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{x^{2d}}} \cdot \frac{-\sin x \cdot x^d - \cos x \cdot d x^{d-1}}{x^{2d}} dx$
 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{d-1}} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^d} dx$ - т.е. осог нм $d-1 \geq 0$
 $d \geq 1 //$

Проверим $d=1$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \int_1^{+\infty} d\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 осог нм

T.e. при $d > 1$ - расхождение
 при $d > 1$ - расхождение.

e) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha} dx; \sim \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{(3t^{1/3} - \operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha} dt = \int_1^{+\infty} \cos t dt \left(1 + \frac{d \operatorname{arctg} t^{1/3}}{t^{1/3}} + O\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right) \right) \frac{1}{t^{1/3}} = 1$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{d/3}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t^{1/3}}{t^{d/3+1/3}} \cos t dt - \int_1^{+\infty} \cos t \cdot O\left(\frac{1}{t^{2/3+d}}\right) dt \rightarrow$

$d > 3$ - абсолютное расхождение.
 $d \in [2, 3]$ - расхождение.
 $d \in [0, 2]$ - расхождение.

$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{(3t^{1/3} - \operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha} dt \gg \int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^{d/3}} dt$ - пока при $d \in [0, 3]$ //

$d \leq 0$ Паркетская, для макс $\int_1^{+\infty} \cos t (3t^{1/3} - \operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha dt$ no R.R.:

$\cos t > 0 \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \cos t (3t^{1/3} - \operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \cos t \cdot 2 t^{\frac{d}{3}} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \cos t 2^{\frac{d}{3}} x_1^{\frac{d}{3}} = C > 0$