Мат. анал. Из.
26 октября 2023 г. 12:17

T.16. Пусть непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого α вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение $f(x+\alpha) = f(x)$ имеет решение.

Д-во: $F_\alpha(x) = f(x+\alpha) - f(x)$ непр на $[0, 1-\alpha]$

$\exists x_0 \in [0, 1-\alpha]$ $F_\alpha(x_0) = 0$? От противного: Бз. о. о. $F_\alpha(x) > 0$ $x \in [0, 1-\alpha]$

Р-рим след. значение F_α: $F_\alpha(1-\frac{1}{n}) = f(1) - f(1-\frac{1}{n}) > 0$

$F_\alpha(1-\frac{2}{n}) = f(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{2}{n}) > 0$

$\vdots$

$F_\alpha(0) = f(\frac{1}{n}) - f(0) > 0$

$f(1) - \cancel{f(1-\frac{1}{n})} + \cancel{f(1-\frac{1}{n})} - \ldots + f(\frac{1}{n}) - f(0) > 0$

$f(1) - f(0) > 0$

$0 > 0$ – противоречие.

T.17*. Пусть $\alpha \in (0,1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример непрерывной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$, и такой, что уравнение $f(x+\alpha) = f(x)$ не имеет решений.

$\exists g \in C[0,1]$ $g(0) \neq g(1)$ $g(x+\alpha) = g(x)$ имеет решение для $\forall x \in [0, 1-\alpha]$

$\{ g = \sin wx$ $T = \frac{2\pi}{w} = \alpha \Rightarrow w = \frac{2\pi}{\alpha}$, $g(0) = 0$ $g(1) = \sin(2\pi\alpha)$; $\frac{2\pi}{\alpha} \neq m \Rightarrow \alpha \neq \frac{2}{m} \}$

$f(x) = g(x) - kx$, т. что $f(0) = f(1)$, т. е. $\sin(2\pi\alpha) = k$

$f(x) = \sin(2\pi\alpha) - \sin(2\pi k)$

$g(x+\alpha) - (x+\alpha)(g(1) - g(0)) = g(x) + (g(1) - g(0))x$

$\alpha(g(1) - g(0)) = 0$

$g(1) = g(0)$ – что неверно

Сравнение функций. (o и O)

1) $f = o(g)$ $x \to x_0$ $\exists \mathring{U}(x_0)$ $f(x) = \alpha(x) g(x)$, где α – б.м. $x \to x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

2) $f = O(g)$ $x \to x_0$ $\exists \mathring{U}(x_0)$ $f(x) = \beta(x) g(x)$, где β – огр в $\mathring{U}(x_0)$, экв $\exists C > 0$ $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

3) $f \underset{x \to x_0}{=} O(g) \wedge g \underset{x \to x_0}{=} O(f) \Rightarrow f \asymp g$ $x \to x_0$ экв $\exists C_1 > 0 \, \exists C_2 > 0$ $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$

4) $f \sim g$ $x \to x_0$ $\exists \mathring{U}(x_0)$ $f(x) = \gamma(x) g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$ экв $f = g + o(g)$ $x \to x_0$

Примеры 1) $x^2 = o(x)$ $x \to 0$ т.к. $x^2 = x \cdot x = \alpha(x) \cdot x$, при $x \to 0$ $\alpha(x) = x$ – б.м.

$x^2 = o(x)$ $x \to \infty$, но $x = o(x^2)$ $x \to \infty$, т.к. $x = \frac{1}{x} x^2$, $\frac{1}{x}$ – б.м $x \to \infty$

2) $\underset{x \to 0}{o(x) + o(x^2)} = \alpha x + \beta x \cdot x = \alpha x + \gamma x = (\alpha + \gamma) x = \theta x = o(x)$

$o(x) o(x^2) = o(x^3)$

$x\to 0$

3) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Дифференцируемая ф-ция. (Зл., гл. V, §1, п.2)

Пусть $X\subset\mathbb{R}$, x_0 - пр. точка X, $x_0\in X$, $f: X\to\mathbb{R}$. f дифф в т x_0, если $\forall h\in\mathbb{R}$ $x_0+h\in X$

$\Delta f(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) = A(x_0)h + \alpha(x_0,h)$, где $\alpha(x_0,h) = o(h)$ $h\to 0$

$$A(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x)$$

$A(x_0)h$ - гл. линейная часть приращения $= df(x_0)(h)$.

$df(x_0): h\to A(x_0)h$ - дифференциал.

$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$ $\quad x(x_0)=x_0$ - тождественное отображение.

$f(x_0)=f=id$ - $f(x_0)=id\,x_0=x_0$

$\Delta f(x_0,h)$

$x'(x_0)=1 \quad dx(x_0)(h) = \boxed{h = dx(h)}$

$df(x_0)(h) = f'(x_0)\,dx(h)$

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx}$$

Фикс $h=h_1$ $\quad g(x_0) = df(x_0)(h_1)$

$\Delta g(x_0,h_2) = g(x_0+h_2) - g(x_0) = [f'(x_0+h_2) - f'(x_0)]h_1 = f''(x_0)h_1h_2 + \text{б.м.} = d^2f(x_0)(h_1,h_2) + \text{б.м.}$

$d^2f(x_0)(h_1,h_2) = f''(x_0)h_1h_2 = f''(x_0)\,dx(h_1)\,dx(h_2) = f''(x_0)(dx\otimes dx)(h_1,h_2)$

$$\left\{\begin{array}{l} l_1, l_2 \quad (l_1\otimes l_2)(h_1,h_2) = l_1(h_1)\cdot l_2(h_2) \\ \otimes : (l_1,l_2)\to l_1\otimes l_2 \end{array}\right.$$

$d^2f(x_0) = f''(x_0)(dx\otimes dx)$

$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^{\otimes n}$

$\{h\}\to\{\xi\}\to T_{f(x_0)}f(X)$ - касательные к области знач

$T_{x_0}X$ - касательные к области знач

$\boxed{df(x_0): T_{x_0}X\to T_{f(x_0)}f(X)}$ **Д.З. осознать всё**

$f(x_0)h = df(x_0)(h)$

Замечание об обознач. Лейбница.

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)(h)}{dx(h)} = \frac{df(x_0)}{dx}(h)$$

Задачи.

Задачи.

1) $f(x)=x^5 \quad h_1=\overset{7}{g} \quad h_2=\overset{2}{\mu} \quad x_0=1$

$d^2f(x_0)(h_1,h_2)$ — ?

I. $f''(x)=(5x^4)'=20x^3$

$f''(x_0)=20$

II. $d^2f(1)(7,2)=20g\mu=280$

2) $de^{x_0}(h_1)=e\cdot 2$

$de^{x_0}(h_2)=e\cdot 7$

$de^{x_0}=e\,dx$

$(u(x))^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$

$(u^v)'=\underbrace{e^{v\ln u}}_{u^v}\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)=(u^v\ln u)v'+(u^{v-1}v)u'$

1) $x^x=x^x\ln x+x^{x-1}x=x^x(1+\ln x)$

2) $\underset{u}{x}^{(x^x)=v}=(x^{x^x}\ln x)x^x(1+\ln x)+x^{x^x-1}x^x\cdot 1=x^x x^{x^x}\left(\ln \cancel{x}+\ln^2 x+\frac{1}{x}\right)$

Т.24. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ и их обратных функций.

$(\operatorname{ch}x)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$

$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$

$(\operatorname{th}x)=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$

$x=\operatorname{ar}\operatorname{ch}_+y=\ln(y+\sqrt{y^2-1}) \quad y\geqslant 1$

$x=\operatorname{arch}_-y=\ln(y-\sqrt{y^2-1}) \quad y\geqslant 1$

$x=\operatorname{arsh}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1}) \quad y\in\mathbb{R}$

$x_{1,2}=\operatorname{arch}_\pm y\ '=\frac{1}{y\pm\sqrt{y^2-1}}\left(1\pm\frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

$(f^{-1})'(y)=\left(\frac{1}{f'(x)}\right)_{y=f(x)}$

$\operatorname{ch}^{-1}y=\frac{1}{\operatorname{sh}x}=\pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$