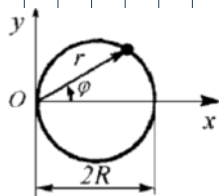


8.11. Материальная точка массы m движется в центральном поле под действием силы $F_r = -\frac{\alpha m}{r^5}$ ($\alpha = \text{const}$). При каком значении момента импульса K_0 траектория является окружностью $r = 2R \cos \varphi$? Показать, что такая траектория невозможна для других потенциальных центральных сил.



$$c = \frac{K_0}{m}$$

К задаче 8.11

$$1) \text{ Ф-на Бинет: } -\frac{1}{mc^2} F r^2 = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$$

$$1 + \sin^2 x =$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2R \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2R} \cdot \frac{2 - \cos^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} = -\frac{1}{2R \cos \varphi} + \frac{4R^2 \cdot 2}{(2R \cos \varphi)^3} = -\frac{1}{r} + \frac{8R^2}{r^3}$$

$$2) -\frac{1}{mc^2} F r^2 = \frac{8R^2}{r^3} \Rightarrow F r^5 = -8mc^2 R^2, \text{ так как не г-та } \Rightarrow F \sim \frac{1}{r^5}$$

$$2K_0 = 8mc^2 R^2 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{8R^2}} \Rightarrow K_0 = m \sqrt{\frac{2}{8R^2}} = \frac{m}{R} \sqrt{\frac{2}{8}}$$

8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды массы M ($M \gg m$). Величина скорости кометы на бесконечности равна v_∞ , а прицельное расстояние – d . Найти уравнение траектории кометы и угол θ , на который отклонится её траектория, когда она снова уйдет в бесконечность.



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad 1) p = \frac{\gamma M}{c^2}, \quad c = v_\infty d, \quad E = v_\infty^2$$

$$2) e^2 - 1 = 2c^2 E \frac{1}{\gamma^2 M^2} = 2 v_\infty^4 d^2 \frac{1}{\gamma^2 M^2}$$

$$e = \sqrt{1 + 2 v_\infty^4 d^2 / \gamma^2 M^2}$$

$$\frac{\theta}{2} = \arccos \frac{1}{e} \Rightarrow \theta = 2 \arccos \left(\frac{1}{e} \right)$$

начальная энергия минимальна.

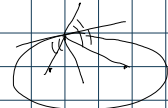
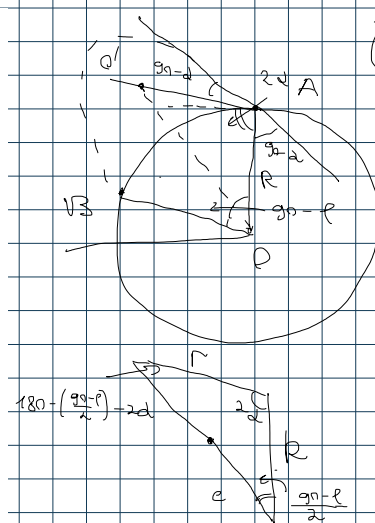
8.24. С Северного полюса под углом α к горизонту запускают снаряд. Какой должна быть величина начальной скорости v_0 , чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ (географическая широта отсчитывается от экватора, в северном полушарии $\varphi > 0$, а в южном – $\varphi < 0$)? Землю считать однородным шаром радиуса R .

К задачам 8.24 – 8.26

8.25. В условиях предыдущей задачи найти эксцентриситет $e(\alpha, \varphi)$ и фокальный параметр $p(\alpha, \varphi)$ траектории. При каких значениях α снаряд попадает на заданную широту φ_0 ?

$$1) a = r + R = R + R \frac{\sin(\frac{90-\varphi}{2})}{\sin(2d + \frac{90-\varphi}{2})} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sin 2d}{\sin(\frac{90-\varphi}{2}) + \sin(2d + \frac{90-\varphi}{2})}$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{\sin 2d}{\sin(2d + \frac{90-\varphi}{2})}$$



Угловые параметры

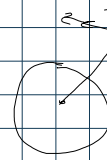
$$\frac{90-\varphi}{2} + 2d < 180$$

$$\frac{2d - \frac{\varphi}{2}}{2} < 135$$

$$2) p = a(1-e^2) = R \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{p_0-p}{2}\right)}{\sin\left(2d + \frac{p_0-p}{2}\right)} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}d\right)}{\left(\sin\left(\frac{p_0-p}{2}\right) + \sin\left(2d + \frac{p_0-p}{2}\right)\right)^2} \right)$$

8.52. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и фокальным параметром p_0 . В положении, когда спутник находится на высоте H от поверхности Земли и имеет скорость v , ему сообщается касательный импульс $\Delta q = \lambda m v$ ($\lambda = \text{const}$). Найти параметры новой орбиты спутника.

$$v = v_0 (1 + \lambda)$$



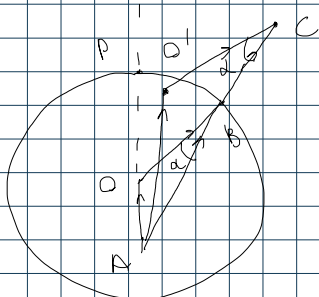
$$C = (1 + \lambda) C_0$$

$$\frac{1}{1p} = \frac{1}{1p_0} (1 + \lambda)$$

$$p = p_0 / (1 + \lambda)^2$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{GM}{p_0}}$$

Найдем радиус скорости



$$\begin{aligned} BC &= \lambda v & \text{Получим } O'C &= \frac{GM}{C} = \frac{GM}{C_0} \cdot \frac{1}{1 + \lambda} = \frac{OB}{1 + \lambda} \\ AB &= r & \text{Угол между } O'C \text{ и } v & \text{составляет } d \\ OB &= \frac{GM}{C_0} & & \\ OA &= e_0 \frac{GM}{C_0} \rightarrow e_0 \sqrt{GM p_0} & & \end{aligned}$$

$$O'A = \frac{e_0^2 GM p_0}{(1 + \lambda)^2} + (1 + \lambda)^2 v^2 - 2 v e_0 \sqrt{GM p_0} \cos d$$

$$e^2 (GM p)$$

$$e^2 p = \frac{e_0^2 p_0}{(1 + \lambda)^2} + \frac{v^2 (1 + \lambda)^2}{GM} - 2 v e_0 \sqrt{\frac{p_0}{GM}} \cos d$$

$$e^2 \frac{p_0}{(1 + \lambda)^2} = \frac{e_0^2 p_0}{(1 + \lambda)^2} + \frac{v^2 (1 + \lambda)^2}{GM} - 2 v e_0 \sqrt{\frac{p_0}{GM}} \cos d$$