12.7. Свободная материальная точка движется под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$. Определяя положение точки

а) цилиндрическими $(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z)$,

б) сферическими $(x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta)$,

в) параболическими $\left(x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \dfrac{\xi - \eta}{2}\right)$

координатами, найти соответствующие обобщённые силы.

$$\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z =$$
$$= F_x(\delta r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,\delta\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,\delta\varphi) +$$
$$+ F_y(\delta r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\,\delta\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,\delta\varphi) +$$
$$+ F_z(\delta r\cos\theta - r\sin\theta\,\delta\theta)$$

Далее выделим к-ты при каждой вариации:

$$Q_r = F_x\sin\theta\cos\varphi + F_y\sin\theta\sin\varphi + F_z\cos\theta$$
$$Q_\theta = F_x r\cos\theta\cos\varphi + F_y r\cos\theta\sin\varphi - F_z\sin\theta$$
$$Q_\varphi = -F_x r\sin\theta\sin\varphi + F_y r\sin\theta\cos\varphi$$

26.15. Исключая неопределенные множители в уравнениях Лагранжа первого рода, составить уравнения динамики материальной точки массы m, движущейся по инерции по кривой, заданной плоскостью $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ $\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\right)$ и поверхностью второго порядка:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; б) $x^2 + y^2 = 1$.

$$f = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (1)$$

а) $g = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

б) $g = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (2)

а) $m\ddot{x} = \lambda_1\alpha + 2\lambda_2 x$

$m\ddot{y} = \lambda_1\beta + 2\lambda_2 y$

$m\ddot{z} = \lambda_1\gamma + 2\lambda_2 z$

Из (1): $\alpha\ddot{x} + \beta\ddot{y} + \gamma\ddot{z} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\lambda_1 + \lambda_2\overset{0}{\cancel{(2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z)}} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ //

Из (2): $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$

$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 + z\ddot{z} + \dot{z}^2 = 0$

Тогда $m\underbrace{(\ddot{x}x + \ddot{y}y + \ddot{z}z)}_{= -\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2} = 2\lambda_2\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{= a^2} \Rightarrow \lambda_2 = -\dfrac{m}{2a^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ //

б) $m\ddot{x} = \lambda_1\alpha + 2\lambda_2 x$

$m\ddot{y} = \lambda_1\beta + 2\lambda_2 y$

$m\ddot{z} = \lambda_1\gamma$

1. Аналог а): $\lambda_1 + 2\lambda_2\underbrace{(\alpha x + \beta y)}_{= -\lambda_1\cdot\gamma z} = 0$, $\quad 2\lambda_2(\alpha x + \beta y) = -2\lambda_2\cdot\gamma z$

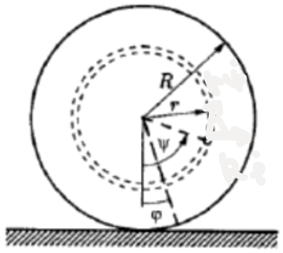
2. $x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow -m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = x\lambda_1\underbrace{(\alpha + \beta)}_{= -\lambda_1\cdot\gamma z} + 2\lambda_2$

Решая ур-ния получаем:

$$\lambda_1 = -\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{1 - \gamma^2 z^2}\gamma z$$

$$\lambda_2 = -\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2(1 - \gamma^2 z^2)} \quad //$$

12.48. Однородный диск массы M и радиуса R может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой. В диске имеется гладкий круговой желоб радиуса r, центр которого совпадает с центром диска. По желобу может скользить материальная точка массы m. Составить уравнения Лагранжа системы и найти их первые интегралы.



К задаче 12.48

$$\left.\begin{aligned} &\Pi = mgr(1 - \cos\psi) \\ &T = \frac{M(R\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m(r^2\dot{\psi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 - 2rR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi)}{2}\end{aligned}\right\} L = T - \Pi$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3MR^2}{2} + mR^2\right)\dot{\varphi}^2 + mr^2\dot{\psi}^2 - mrR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\right) + mgr\cos\psi$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \left(\dfrac{3M}{2} + m\right)R^2\dot{\varphi} - mRr\dot{\psi}\cos\psi = \text{const}$

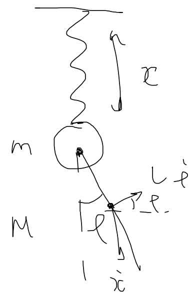
$\ldots rR\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi$

1) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \left(\frac{3M}{2} + m\right)R^2\dot\varphi - mRr\dot\psi\cos\psi = const$

2) $\frac{\partial L}{\partial \psi} = \cancel{+\frac{mrR\dot\varphi\dot\psi\sin\psi}{2}} - mgr\sin\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{mr^2\dot\psi - mrR\dot\varphi\cos\psi}{2}\right) = \frac{mr^2\ddot\psi - mrR\ddot\varphi\cos\psi \cancel{+ mrR\dot\varphi\dot\psi\sin\psi}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2mgr\sin\psi = mr^2\ddot\psi - mrR\ddot\varphi\cos\psi \Rightarrow r\ddot\psi - R\ddot\varphi\cos\psi + 2g\sin\psi = 0$ //

12.39. Груз массы m, подвешенный на пружине жёсткости c, может двигаться без трения по вертикальным направляющим. К центру масс груза шарнирно прикреплён своим концом однородный стержень массы M и длины $2l$, который может двигаться в неизменной вертикальной плоскости. Составить уравнения Лагранжа.



$\Pi = \frac{cx^2}{2} - mgx - Mg(x + l\cos\varphi)$

$T = \frac{m\dot x^2}{2} + \frac{M\left(l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + (\dot x - l\dot\varphi\sin\varphi)^2\right)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Ml^2}{3}\dot\varphi^2\right)$

$L = T - \Pi$

1) $\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx + (m+M)gx = \frac{d}{dt}\left(m\dot x + M(\dot x - l\dot\varphi\sin\varphi)\right) = m\ddot x + M\ddot x - Ml\ddot\varphi\sin\varphi - Ml\dot\varphi^2\cos\varphi$ //

2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -Mg\sin\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{Ml^2}{3}\dot\varphi + Ml^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi - Ml(\dot x - l\dot\varphi\sin\varphi)\right) = \frac{Ml^2}{3}\ddot\varphi + Ml^2\cos^2\varphi\,\ddot\varphi - Ml^2\sin 2\varphi\,\dot\varphi^2 -$

$- Ml\ddot x + Ml^2\ddot\varphi\sin\varphi + Ml^2\dot\varphi^2\cos\varphi$ //

12.83. Механическая система с кинетической энергией $T = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(q)\dot q_k \dot q_l$ и обобщёнными силами Q_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ совершает финитное движение. Найти среднее значение кинетической энергии.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$

$G = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} q_k \to \frac{dG}{dt} = \sum q_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\dot q_k =$

$= \sum\left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)q_k + \underbrace{\sum a_{kl}\dot q_k \dot q_l}_{2T}$

$\langle 2T\rangle + \left\langle \sum\left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)q_k\right\rangle = \frac{1}{\tau}\underbrace{\left(G(\tau) - G(0)\right)}_{\text{ограничена}} \to 0$

$\boxed{\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum\left(Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)q_k\right\rangle}$