Матан первая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

29 февраля 2024 г.

Содержание

1 T1

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Тогда область определения $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, (x \le 0 \, \wedge y \le 0) \vee (x \ge 0 \, \wedge y \ge 0)\}$

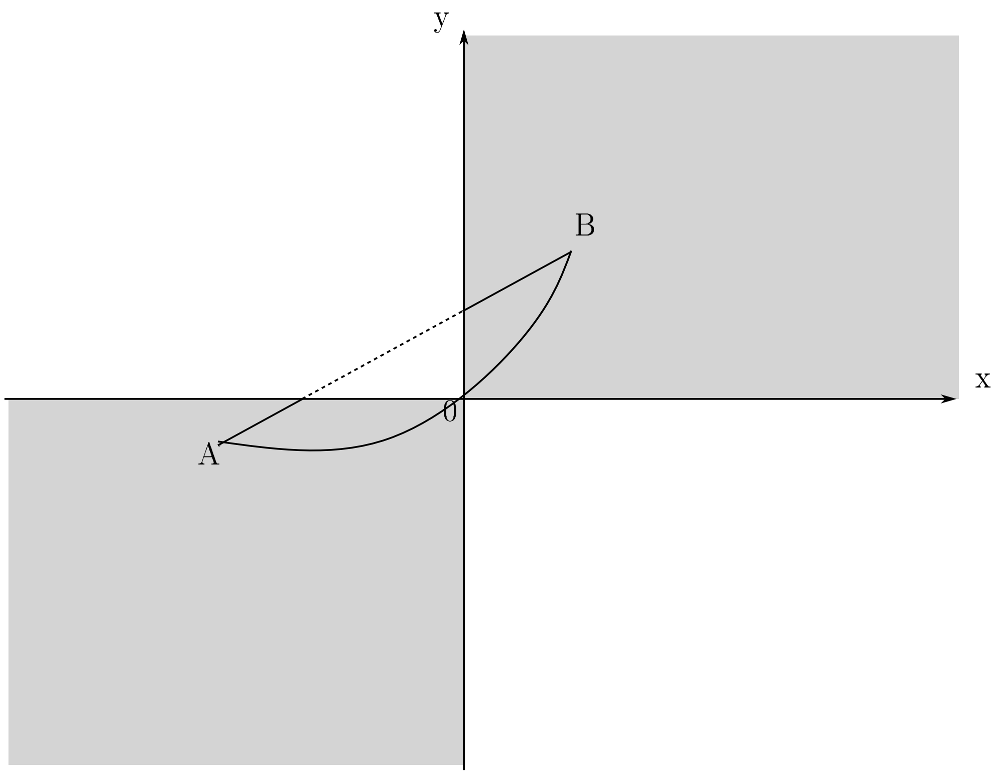

Рис. 1: Область определения функции

Область опредлеения будет замкнутым множеством, так как совпадает со своим замыканием. Из рисунка 1 видно, что множество не является выпуклым, однако является линейно свзяным, ведь любые 2 точки можно соединить кривой проходящей через точку (0, 0).

$$f(x, y) = \frac{1}{x^4 + y^4 - 1}$$

Область определения данной функции $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, x^4 + y^4 \ne 1\}$

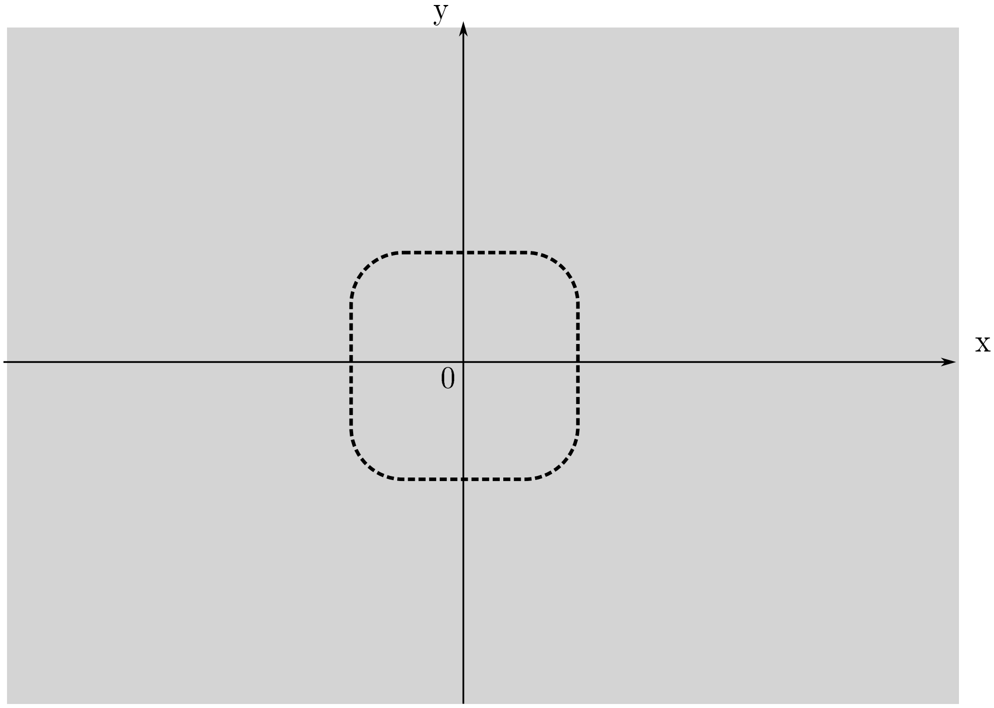

Рис. 2: Область определения функции

Областью определения является всё пространство кроме кривой $x^4 + y^4 = 1$. Так как такая кривая является замкнутой, то её дополнение открыто, а значит область определения открыта. Также область определения не является выпуклой, связной или линейно связной, так как разбивается кривой на два открытых непересекающихся множества.

$$f(x,y) = \ln\bigl(1 - 2x - x^2 - y^2\bigr)$$

Тогда область определения $D_f = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\, x^2 + y^2 < 1 - 2x\}$. Решим полученное неравенство $x^2 + 2x + 1 + y^2 < 2$, что эквивалентво $(x+1)^2 + y^2 < \sqrt{2}^2$, что соответствует открытому шару радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(-1, 0)$.

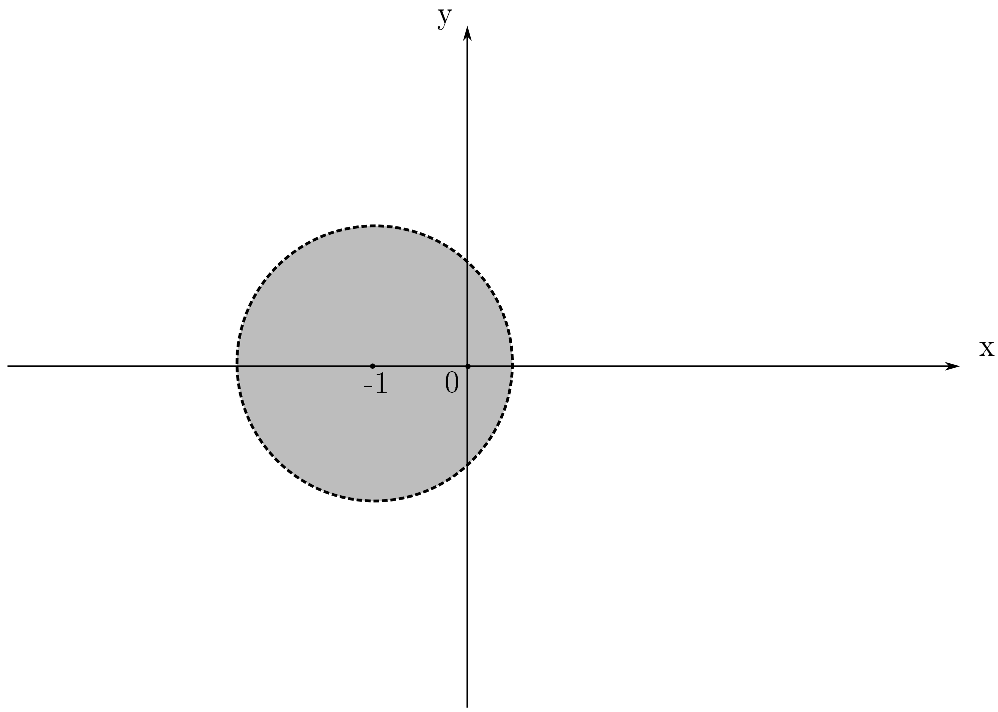

Рис. 3: Область определения функции

Так как область определения - открытый шар, то она открыта. Также область определения связна, линейно связна и выпукла.

2 T2

$$M = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Данное множество является образом непрерывной кривой, потому оно линейно свзяно (любые две точки можно соединить данной кривой), потому M - связно. Данное множество не является открытым, поскольку содержит некоторые свои граничные точки. При этом замыкание множества содержит точку $(0, 0)$, однако сама кривая её не содержит, так как $R = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t > 0$, что означает незамкнутость M.

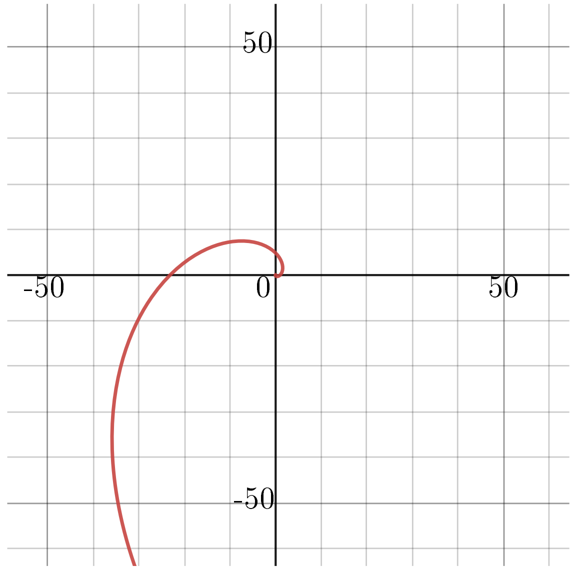

Рис. 4: График кривой

3 T3

$$M = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$$

Рассмотрим функцию $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, такая функция является непрерывной. Рассмотрим прообраз множества $g^{-1}(Q)$, $Q = (0, +\infty)$, при этом прообраз равен исследуемому множеству M. По топологическому определению непрерывности прообраз открытого Q открыт, а значит M - открыто. Также множество M не является линейно связяным, так как все кривые, соединяющие точки с координатами x_4 разных знаков должны проходить через точку с координатой $x_4 = 0$, которая не содержится в множестве M. Тогда так как M - открыто и не линейно связно, то оно не связно.

4 T5

Нужно доказать, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} B_0\left(\frac{1}{n}\right) = \{0\}$. С одной стороны $\forall k \in \mathbb{N}\, 0 \in B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \{0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} B_0\left(\frac{1}{n}\right)$. С другой стороны рассмотрим множество $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для любого $a \in A$ существует k такое что $\frac{1}{k} < |a|$, а значит $a \notin B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \notin A \Rightarrow B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \in \{0\}$. Тогда через двойное включение получаем требуемый факт.

5 T6

Рассмотрим множество значений последовательности Гейне $a_n \to 0$. Данное множество не будет замкнутым, так как его замыкае будет содержать 0, но ни один из членов последовательности не равен 0. А также каждая точка данного множества является членом последовательности a_n и потому изолирована.

6 2.39

Рассмотрим две последовательности Гейне $x_n \to x_0$ и $y_k \to y_0$. Требуется доказать, что при условии

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_k) = B(y_k)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} B(y_k) = A$$

. В силу существования первых двух пределов для достаточно больших n, k выполняется:

$$|f(x_n, y_n) - A| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - B(y_k)| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| < \epsilon$$

Последнее неравенство выполняется в силу фундаментальности последовательности $f(x_n, y_k)_n$. Рассмотрим $|B(y_k) - A| < |B(y_k) - f(x_n, y_k)| + |f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k) - A| < 3\epsilon$. Что означает

$$\lim_{k\to\infty} B(y_k) = A$$

7 T10

Пусть существует $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и g - непрерывна и инъективна. Рассмотрим сужение $g_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_y(x) = g(x, y)$. Тогда g_y также непрерывна, а значит он переводит связные множества в связные, из чего следует $g_y(\mathbb{R}) = Q(y)$, где $Q(y)$ - отрезок, интервал или полуинтервал. Тогда так как g - инъективна выполняется: $\mathbb{R} = \bigsqcup_{y\in\mathbb{R}} Q(y)$. Докажем промежуточную лемму: инъёктивная и непрерывная функция монотонна. Предположим противное: $\exists x_1 < x_2 < x_3 \mid f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \vee f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$, строгие знаки получены с учётом инъёктивности. Без ограничения общности рассмотрим первый вариант $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$. Пусть $f(x_3) > f(x_1)$, тогда по теореме о промежуточных значениях существует $x \in (x_1, x_2) \mid f(x) = f(x_3)$, тогда так как $x < x_3 \Rightarrow x \neq x_3$, но $f(x) = f(x_3)$ - противоречие с инъективностью. Тогда оказывается, что каждая из g_y - монотонна. Так как функция g_y монотонна то по теореме об обратной функции обратная f^{-1} - непрерывна, а значит f переводит открытые в открытые. А значит все множества $Q(y)$ - интервалы. Тогда так как из покрытия открытого множества интервалами можно выбрать счётное подпокрытие $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} Q(y_n)$. Но тогда мы получили дизъюнктное разбиение действительной прямой непустыми интервалами - противоречие со связностью.

8 T11

Построим кривую Пеано. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и квадрат $[0, 1]^2$. Будем итеративно строить разбиения: на первом шаге разобьём отрезок на 4 равных отрезка, а квадрат на 4 равных квадрата, на втором разобьём квадрат на 16 квадратов и отрезок на 16 отрезков. Согласно Рис. 5 сопоставим отрезкам соответствующие квадраты.

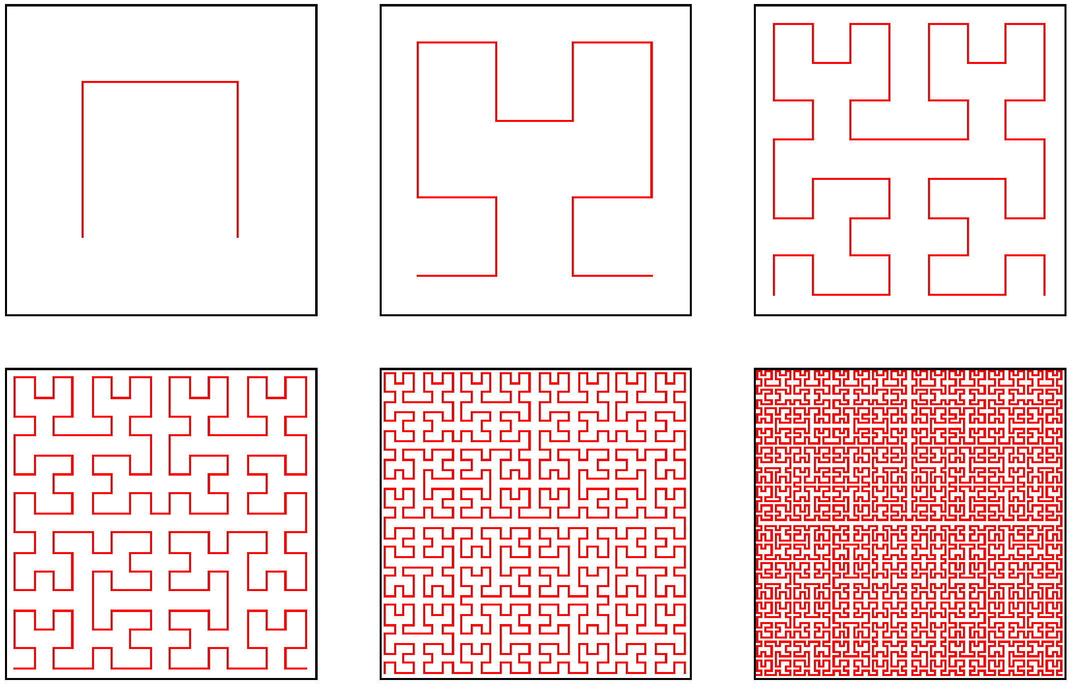

Рис. 5: Обходы для квадратов 1 - 6 уровня.

Выберем точку из отрезка. Если точка не принадлежит 2 отрезкам никакого уровня, для каждого уровня разбиения отрезка получим соответствие отрезка, к которому принадлежит точка и квадрата. Тогда получаем что каждой точке соответствует последовательность вложенных стягивающихся квадратов. Их общая точка и будет образом точки отрезка. В случае если на каком-то шаге точка из отрезка принадлежит 2 подотрезкам, они обязательно будут связаны к квадратами с общей стороной (из построения обхода), тогда будем рассматривать прямоугольники, образованные данными квадратами, они также стягиваются и точка их пересечения - образ точки отрезка. Повторяя аналогичные рассуждения в обратном порядке получим, что исследуемое отображение сюрьективно. Докажем непрерывность отображения. Для точки выберем квадрат, полностью лежащий в заданной эпсилон окрестности. рассмотрим отрезок, соответствующий данному квадрату. Все точки из этого отрезка будут лежать в этом квадрате, так как близким отрезкам соответствуют близкие квадраты (обход такой).

Теперь пусть такое отображение называется $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$, тогда применяя к функции гомеоморфизм арктангенса слева и покоординатный тангенс слева получим непрерывное отображение из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

9 T12

(б)

$$\begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right\}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Найдём частные производные:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\}}{x} = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\}}{y} y = 0$$

Проверим дифференцируемость функции:

$$\frac{1}{\rho}|\exp\left\{-\frac{1}{{h^1}^2 + {h^2}^2}\right\}| = \frac{1}{\rho}|\exp\left\{-\frac{1}{\rho^2}\right\}| \to 0, \rho \to 0$$

(в)

$$f(x,y) = \ln\left(1 + \sqrt[3]{x^2 y}\right)$$

Частные производные равны нулю:

$$|\frac{1}{\rho}\ln\left(1 + \sqrt[3]{x^2 y}\right)| = |\frac{1}{\rho}\ln\left(1 + \rho\sqrt[3]{\cos^2\phi \sin\phi}\right)|$$

Предел такого выражения зависит от напрвдения, например при $\phi = 0$ предел равен 0, а при других углах 1. Тогад разность приращения и дифференциала не равна $o(\rho)$, что недифференцируемость функции.

10 T14

$$f(x,y,z) = (1+x)^\alpha (1+y)^\beta (1+z^\gamma)$$

$$\ln f(x,y,z) = \alpha\ln(1+x) + \beta\ln(1+y) + \ln(1+z^\gamma)$$

$$d\ln f(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{f(x,y,z)} = \frac{\alpha dx}{1+x} + \frac{\beta dy}{1+y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1+z^\gamma}$$

$$df(0,0,0) = \alpha dx + \beta dy$$

$$d^2 f(x,y,z) = d\left(f(x,y,z)\cdot d\ln f(x,y,z)\right) = df(x,y,z)\otimes d\ln f(x,y,z) + f(x,y,z)\cdot d^2\ln f(x,y,z)$$

Первое слагаемое:

$$df(0,0,0)\otimes d\ln f(0,0,0) = (\alpha dx + \beta dy)^2$$

Второе слагаемое:

$$d^2\ln f(x,y,z) = -\frac{\alpha dx^2}{(1+x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1+y)^2} + \frac{\gamma(\gamma-1)z^{\gamma-2} - \gamma z^{2\gamma-2}}{(1+z^\gamma)^2}$$

Тогда второй дифференциал в нуле равен:

$$d^2 f(0,0,0) = (\alpha dx + \beta dy)^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2 = (\alpha^2 - \alpha)dx^2 + (\alpha^2 - \alpha^2)dy^2 + 2\alpha\beta dx\otimes dy$$

11 T15

(a)

$$ef = e^{x-y+f}$$
$$edf = (dx - dy + df)ef \implies df = \frac{f}{1-f}(dx - dy)$$
$$d^2 f = df \otimes (dx - dy + df) + f d^2 f + df^2$$
$$d^2 f = \frac{1}{1-f}(2df^2 + df \otimes dx - df \otimes dy)$$

б)

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0, f(1,1) = 2$$
$$3f^2 df - 3yf dx - 3xf dy - 3xy df = 0 \implies df = \frac{dx + dy}{f^2 - xy}$$

Значение $df(1,1) = \frac{dx+dy}{3}$

$$d^2 f = d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) \otimes (dx + dy)$$
$$d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) = -\frac{2f df - y dx - x dy}{(f^2 - xy)^2} = -\frac{4df - dx - dy}{9}$$
$$d^2 f(1,1) = (dx + dy) \otimes -\frac{\frac{4}{3}dx + \frac{4}{3}dy - dx - dy}{9} = \frac{1}{27}(dx + dy)^2$$

Тогда частные производные одинаковы и равны: $\frac{1}{27}$.

12 T16

$$f(x, y, z) = \ln x + y + z = \ln g$$
$$d^n f(x, y, z) = \partial_{g^n} f \cdot dg^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x + y + z)^n} \cdot (dx + dy + dz)^n$$

То есть все частные производные равны между собой и равны: $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n}$.

13 T17

а) Нужно доделать))).

$$f(x, y) = (1 + x)^y = e^{y \ln(1+x)}$$
$$df = (1 + x)^y (dy \ln(1 + x) + \frac{y dx}{1 + x})$$

Тогда $df(0, 0) = 0$.

$$d^2 f = df \otimes (dy \ln(1 + x) + \frac{y dx}{1 + x}) + f(x, y)(dy \otimes \frac{dx}{1 + x} + dx \otimes \frac{dy(1 + x) - y dx}{(1 + x)^2})$$

Тогда $d^2 f(0, 0) = 2dy \otimes dx$

$$f(h) = 1 + h^1 h^2 + o(||h||^2)$$

14 T18

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(N+1)^2}\to 1, N\to 0$$

15 T19

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\alpha n}n^{\beta}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\alpha n}n^{\beta}}=\lim_{n\to\infty}e^{\alpha}(n^{\frac{1}{n}})^{\beta}=e^{\alpha}$$

При $\alpha>0$ ряд расходится, при $\alpha<0$ ряд сходится. Рассмотрим случай $\alpha=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{n}n^{\beta}$$

Но так как экспонента растёт быстрее степени, то не выполняется необходимое условие сходимости, а занчит ряд расходится.

16 T20

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится абсолютно, то и исходный ряд сходится абсолютно.
в)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!3^n}$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Так как $q<1$ то исходный ряд сходится абсолютно.
г)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$q=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+6}\right)^{n^2}=\frac{1}{e}<1$$

Ряд сходится.
е)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$$

По признаку Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{(n!)^2}{(n+1)!^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n=0$$

Ряд сходится.
ж)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$$

По признаку Дирихле: $(-1)^n$ - ограничена. А для достаточно больших n последовательность $\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$ монотонна и стремится к 0. Что означает, что ряд сходится. Теперь рассмотрим модуль последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\cos 4x}{\sqrt{n}}$$

Один из подрядов расходится а второй сходится по тригонометрическому признаку, потому общий ряд тоже расходится.
з)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}+\frac{\sin^3 n}{6n}+O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$$

Подсумма с $O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$ сходится абсолютно, подсумма $\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ сходится по тригонометрическому признаку.

$$\frac{\sin^3 n}{6n}=\frac{1}{24n}\left(3\sin x-\sin 3x\right)$$

Оба ряда сходятся по тригонометрическому признаку. А значит исходный ряд сходится.

17 T21

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right)$$

Последовательность из $O(\frac{1}{n^2})$ сходится абсолютно. Тогда рассмотрим первые 2 члена суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}-1}\right]\right)$$

При $\alpha=1$ сумма равна 0 и ряд сходится. при остальных α сумма расходится.
б)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\ln^\alpha n}$$

По тригонометрическому признаку ряд сходится при любом α, так как $\frac{1}{n \ln^{\alpha} n} \to 0, n \to \infty$. Доделать)))

18 T21 доп

Проверить, что $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\phi$ расходится. Обозначим частичные суммы S_n, тогда:

$$S_n \cdot 2 \sin \frac{\phi}{2} = \cos\left(\phi - \frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\phi + \frac{\phi}{2}\right) + \dots = \cos\frac{\phi}{2} - \cos\left[\phi\left(n + \frac{n}{2}\right)\right]$$

Но тогда сумма расходится, так как предела частичных сумм не существует.

19 16.38

По неравенствам Гёльдера и Минковского получим, что последовательность частичных сумм ограничена и возрастает (так как последовательности положительные), а значит существует предел частичных сумм - ряд сходится. После перехода к пределу в неравенствах получим неравенство для сумм рядов.

20 Специальный критерий Коши

В силу монотонности:

$$a_2 \le a_2 \le a_1$$

$$2a_4 \le a_3 + a_4 \le 2a_2$$

$$2^n a^{2^{n+1}} \le a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}} \le 2^n a_{2^n}$$

Складывая 2 неравенства получим:

$$\frac{1}{2}(S_{n+1} - a_1) \le A_{2^n+1} - a_1 \le S_n$$

Тогда получим, что частичные суммы ряда ассимтотически эквивалентны $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^n a_{2^n}$.

21 15.33

Воспользуемся критерием Коши:

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| = |a_n + \dots a_{p_i} + \sum_{k=p_i}^{p_j} A_k + a_{p_{j+1}} + \dots + a_m| \le |\varepsilon| + |c \cdot \varepsilon| + |c \cdot \varepsilon| = (2c+1)\varepsilon$$