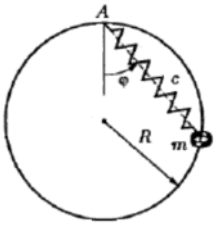
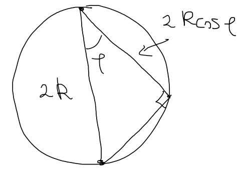
15.3. По гладкой проволочной окружности радиуса R, неподвижно закрепленной в вертикальной плоскости, может скользить колечко массы m, соединенное с наивысшей точкой A окружности пружиной жесткости c; длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.3



$$П = -mg\cos\varphi + \frac{c(2R\cos\varphi - l_0)^2}{2}$$

$$\frac{\partial П}{\partial\varphi} = mg\sin\varphi - \frac{2R\sin\varphi\, c}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(2R\cos\varphi - l_0) = mg\sin\varphi - 2Rc\sin\varphi(2R\cos\varphi - l_0) =$$
$$= \sin\varphi\left(mg + 2Rcl_0 - 4R^2c\sin 2\varphi\right)$$

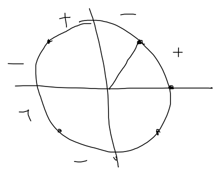
в п. равн $\frac{\partial П}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\varphi = 0 & (1) \\ \sin 2\varphi = \frac{mg + 2Rcl_0}{4R^2c} & (2) \end{array}\right. \sim \varphi$

$$\frac{\partial^2 П}{\partial\varphi^2} = \cos\varphi\left(mg + 2Rcl_0 - 4R^2c\sin 2\varphi\right) + \sin\varphi\left(-8R^2c\cos 2\varphi\right)$$

При (1): $\frac{\partial^2 П}{\partial\varphi^2} = mg + 2Rcl_0 > 0$ – всегда устойчивое.

(2): $\sin\varphi(-8R^2c\cdot\cos 2\varphi) = -8R^2c\cdot\sin\varphi\cos 2\varphi$, $\varphi = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{mg + 2Rcl_0}{4R^2c}\right)$

Знак от $\cos 2\varphi$:



т.е. если $\varphi < \frac{\pi}{4}$ – то уст.

$$\frac{mg + 2Rcl_0}{4R^2c} < 1 \Rightarrow \boxed{mg + 2Rcl_0 < 4R^2c} \quad //$$

15.15. Материальная точка может двигаться по гладкой поверхности, определяемой уравнением $z = \alpha x^2 + \beta y^2$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz. Найти условие, при котором начало системы координат $Oxyz$ является положением устойчивого относительного равновесия.

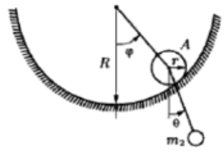
Энергия $П = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + mgz =$

$$= -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + mg(\alpha x^2 + \beta y^2) =$$

$$= m\left(\left(\alpha g - \frac{\omega^2}{2}\right)x^2 + \left(\beta g - \frac{\omega^2}{2}\right)y^2\right)$$

$$\frac{d^2П}{m} = \begin{pmatrix} \alpha g - \frac{\omega^2}{2} & 0 \\ 0 & \beta g - \frac{\omega^2}{2} \end{pmatrix}$$ ол п.определён $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha g > \frac{\omega^2}{2} \\ \beta g > \frac{\omega^2}{2} \end{cases}$ //

15.12. Однородный цилиндр массы m_1 и радиуса r может катиться без скольжения внутри неподвижного полого цилиндра



К задаче 1512

радиуса R. Оси цилиндров горизонтальны. К некоторой точке на оси подвижного цилиндра на невесомой упругой нити жесткости c подвешена точечная масса m_2, которая может двигаться в вертикальной плоскости, перпендикулярной осям цилиндров. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

$$\Pi = -m_1g(R-r)\cos\varphi - m_2g(R-r)\cos\varphi - m_2gx\cos\theta + \frac{c(x-l_0)^2}{2}$$

Очевидно, что положения р-сия это т-ки

$\varphi = 0,\ \theta = 0,\ x = l_0 + \frac{mg}{c}$

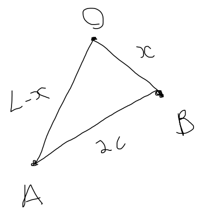
$\varphi = \pi,\ \theta = 0,\ x = l_0 + \frac{mg}{c}$

Разложим П до 2 п-ка малости (1) $\Delta\Pi \approx +m_1g(R-r)\frac{\varphi^2}{2} + m_2g(R-r)\frac{\varphi^2}{2} + m_2g\left(l_0+\frac{mg}{c}\right)\frac{\theta^2}{2} + \frac{cx^2}{2}$ — очевидно уст

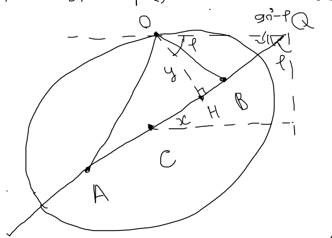
(2): $\Delta\Pi = -m_1g(R-r)\frac{\varphi^2}{2} - m_2g(R-r)\frac{\varphi^2}{2} + m_2g\left(l_0+\frac{mg}{c}\right)\frac{\theta^2}{2} + \frac{cx^2}{2}$ — неуст. т.к. матрица неопределена.

$$\begin{pmatrix} - & & \\ & + & 0 \\ 0 & & + \end{pmatrix}$$

15.28. К концам тяжёлого однородного стержня длины $2l$ и массы m прикреплена невесомая нерастяжимая нить длины $L > 2l$, пропущенная через неподвижный блок малого радиуса. Стержень может совершать движение в вертикальной плоскости, проходящей через блок. Найти значения угла между стержнем и вертикалью в положении равновесия и исследовать их устойчивость.



Так как $AO + OB = L = const$ и $AB = const$, то точка O лежит на эллипсе с $\begin{cases} 2a = L \\ 2c = 2l \end{cases}$



$HQ = y\,tg\varphi \Rightarrow CQ = x + y\,tg\varphi$

Тогда $\rho(C, OQ) = CQ\sin\varphi = (x + y\,tg\varphi)\cos\varphi$

Также $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

$\Big\}\ \rho(C, OQ) = (a\cos t + b\sin t\,tg\varphi)\cos\varphi$

$$\Pi = -mg(a\cos t\cos\varphi + b\sin t\sin\varphi) \Rightarrow \pi = \frac{\Pi}{mg} = -(\ ....)$$

$\frac{\partial\pi}{\partial t} = a\sin t\cos\varphi - b\cos t\sin\varphi = 0$

$\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} = a\cos t\sin\varphi - b\sin t\cos\varphi = 0$

$\Rightarrow a\sin 2t\sin 2\varphi = b\sin 2t\sin 2\varphi$, т.е. $a \neq b$ имеем

$\begin{cases} \varphi = 0,\ t = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ — п-ния р-сия

$$d^2\pi = \begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi + b\sin t\sin\varphi & -a\sin t\sin\varphi - b\cos t\cos\varphi \\ -a\sin t\sin\varphi - b\cos t\cos\varphi & a\cos t\cos\varphi + b\sin t\sin\varphi \end{pmatrix}$$

при $\begin{cases} \varphi = 0 \\ t = 0 \end{cases}$: $d^2\pi = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ — по критерию Сильвестра п.о. $\begin{Bmatrix} a^2 - b^2 > 0 \\ a > 0 \end{Bmatrix}$ — минимум π.

при $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$: $d^2\pi = \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & b \end{pmatrix}$ — по критерию Сильвестра неопределена — нет ни мин ни макс.//

При решении р-вались $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, симметричную ситуацию имеем при $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$