14.2. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x,y,z)=0$ под действием силы $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки). Какой должна быть функция $f(x,y,z)=0$ для того, чтобы каждая точка поверхности могла быть положением равновесия?

В положении равновесия

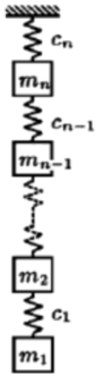
$$F\delta r = -kx\delta x - ky\delta y - kz\delta z =$$

$$= -\frac{k}{2}\delta(x^2+y^2+z^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(x^2+y^2+z^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=\text{const}.$$

т.е. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-C=0.$

14.5. Найти деформации пружин в положении равновесия системы масс, изображенной на рисунке.



Введём обоб к-ты $q_k = X_k - X_{k+1}$, X_k - к-та от т-ки прем.

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k q_k^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} m_k g \sum_{j=1}^{n-k+1} q_{n-j+1}$$

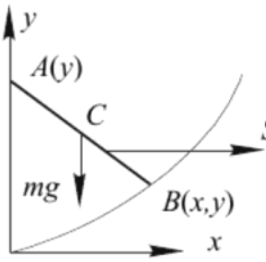
перегруп-с-мые

все массы до l.

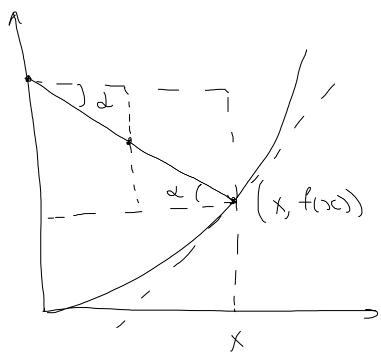
$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_l} = c_l q_l - \sum_{k=1}^{n} m_k g \sum_{j=1}^{n-k+1}\frac{\partial q_{n-j+1}}{\partial q_l} = c_l q_l - \sum_{k=1}^{l} m_k g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_l = \frac{g}{c_l}\sum_{k=1}^{l} m_k$$

14.13. Однородный стержень $AB=l$ может двигаться в вертикальной плоскости Oxy так, что конец A скользит по оси Oy, а конец B – по кривой $y=f(x)$, проходящей через начало координат. Плоскость Oxy вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия?



К задаче 14.13



$\cos\alpha = \frac{x}{l} \Rightarrow x = l\cos\alpha \;// \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = -l\sin\alpha\, d\alpha$

$$\Pi = mg\left(f(x)+\frac{l}{2}\sin\alpha\right) - \frac{J\omega^2}{2}, \quad J = \int_0^x \rho x^2\, dl = \int_0^x \frac{m}{l}x^2\frac{1}{\cos\alpha}dx = \frac{mx^3}{3l\cos\alpha} = \frac{mx^2}{3}.$$

$$\Pi = mg\left(f(x)+\frac{l\sin\alpha}{2}\right) - \frac{mx^2\omega^2}{6}$$

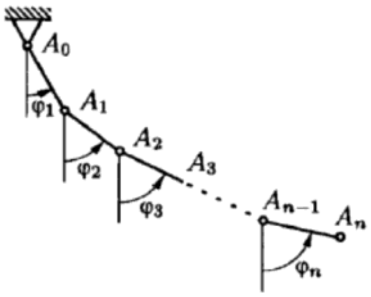
$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = mg\left(f'(x)+\frac{l\cos\alpha}{2}\left(-\frac{1}{l\sin\alpha}\right)\right) - \frac{m\omega^2 x}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\omega^2 x}{3g} \Rightarrow f(x) = \frac{\omega^2x^2}{6g} + \int_0^x \frac{dx}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\omega^2x^2}{6g} + \int_0^x -\frac{l\cos\alpha}{2}d\alpha$$

$$f(x) = \frac{\omega^2x^2}{6g} - \frac{l}{2}\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{l}\right)\right)$$

14.39. Материальные точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ массы m каждая последовательно соединены одна с другой невесомыми стержнями одинаковой длины l. Вся система, расположенная в вер-

14.39. Материальные точки $A_0 . A_1, A_2, ..., A_n$ массы m каждая последовательно соединены одна с другой невесомыми стержнями одинаковой длины l. Вся система, расположенная в вертикальной плоскости, вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через неподвижную точку A_0, занимающую наивысшее положение. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



1) $\varphi_1, \dots \varphi_k$ – об. координаты.

2) $$\Pi = -mgl\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cos\varphi_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{m\omega^2 l^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\sin\varphi_j\right)^2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_l} = mgl(n-l)\sin\varphi_l - m\omega^2 l^2 \sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_l \sum_{j=1}^{k}\sin\varphi_j = 0$$

$$g(n-l)\,tg\,\varphi_l = \omega^2 l \sum_{k=1}^{n}(n-k)\sin\varphi_k$$