

18.1. Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

$$7) \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

19.6. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить

$$4) \|A_{239}|c_{67}\|; \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$20) \|A_{511}|c_{74}\|; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \\ 0 & 28 & 56 & 28 & 112 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & 28 & -14 & 112/2 \\ 0 & 28 & 56 & 28 & 112 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

$$b = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A_{444}^T|c_{167}\|; \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 35 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -25/8 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 25/8 \\ 0 & 0 & 1 & 35/8 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow b = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 25/8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_1 \begin{pmatrix} -25/8 \\ 3/4 \\ 35/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18.13. Зная одну фундаментальную матрицу Φ , найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

$$\Phi' = \Phi A, \text{ где скалярная } A - n \times n, \text{ т.е. } \det A \neq 0$$

18.17. Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

$$4) \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

19.14. Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

матрица свободных членов.

$Ax = b$ при $A_{n \times m}$ и вектор nm , тогда по т. Ранга \exists n лнз строк, тогда в базисе p -ой n с-на строк явл. произвольной. т.е. $\exists x$ т.ч. $Ax = b$.

19.21. Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

ответствующие однородные системы.

$$\begin{matrix} b_1 & a_1 & \dots & a_n \\ b_2 & a_1' & \dots & a_n' \end{matrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{тогда } b_2 = b_1 + \sum \lambda_i' a_i \\ \text{тогда } \sum \mu_i a_i + b_1 = b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i' \end{array} \right\} \text{тогда решение 2-ой системы } b_1 + \sum \lambda_i a_i + \sum \lambda_i' a_i'$$

$$\sum (\mu_i - \lambda_i) a_i = \sum \lambda_i' a_i', \text{ где } \mu_i = \lambda_i \text{ если } i \neq j$$

$$\text{и } \mu_i = \lambda_i \text{ если } i = j \text{ найдем}$$

$$a_j = \sum \lambda_i' a_i'$$

аналогично для $\{a_i \rightarrow a_i'$ найдем, что все они ит 6-юте через эту группу.

20.22. Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) $A_{238}\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 3) $A_{249}\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 4) $A_{391}\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$3) \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{размерность } 1$$

20.23. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

1) c_{66}, c_{83} ; 2) c_{31}, c_{30} ; 3) c_{30}, c_{29} ;

4) c_{166}, c_{196} ; 5) c_{197} ; 6) $c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201}$;

$$4) \quad a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.1*. Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Докажите, что всегда можно, причем един-

ственным образом, расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.

$$\begin{array}{ccccccc} du & & & & & & dm \\ \downarrow & & & & & & | \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & dm \\ \uparrow & & & & & & \\ Am & & & & & & Am \end{array}$$

ду чисел в клетках, имеющих с ней об-
 составим (-му ур. соотв. из $k = (m-1)(n-1)$ переменных.

$$Ax = B, \quad A = \overset{\circ}{A} \overset{\circ}{k} \times \overset{\circ}{k}.$$

$Ax = B, A = A_{k \times k}$.
 Д-ним, что может случ. только ед. решение, т.е. $Ax \neq 0, \forall x \neq 0$.
 от противного $\exists x_1 \neq 0$ т.ч. $Ax_1 = 0$ это сист. сис-м с $a_{11} = a_{22} = \dots = 0$.
 (выберем $y \in x_1$ т.ч. $y = \max(x_1)$, тогда все элементы ряда с y_{\max} тоже равны y_{\max} и так далее до строки. то т.е. на строке макс. элем, то $y_{\max} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Получим, что $\alpha - A - \text{ЛПЗ} \Rightarrow \text{группа } A \rightarrow \text{ЛПЗ} \Rightarrow \forall B \exists x \neg \text{ч. } Ax = B$ (17)

напомним, что $\alpha: A \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \text{график } A \Rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \forall B \exists x \text{ т.ч. } Ax = B$ (17D)

Подпространства и факторпространства.

21.2. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n .

1) Имеем $\exists f(x)$, что $f(-x) = f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ т.е. $\mathbb{C}(x)^+ \cap \mathbb{C}(x)^- = \{0\}$

2) $\forall f \in \mathbb{C}(x) : f^+ = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, f^- = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

и тогда $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$

21.3. 2) Дана матрица A из n строк. Доказать, что n -мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпространства решений системы линейных уравнений $A^T x = 0$.

1) $\dim \langle a_i \rangle = r = \text{rk } A$, тогда остается показать, что $\langle a_i \rangle \cap \langle \Phi \rangle = \{0\}$ т.ч. $\dim \langle a_i \rangle \cup \langle \Phi \rangle = r + n - r = n = \dim \mathbb{C}^n$ если $\dim \langle \Phi \rangle = n - r$

2) \sim

21.6. Найти проекцию данного вектора x из n -мерного арифметического пространства на линейное подпространство P параллельно линейному подпространству Q , где P — линейная оболочка системы векторов a_1, \dots, a_k , а Q — линейная оболочка системы векторов b_1, \dots, b_l :

5) $n = 4, x = c_{201}, a_1 = c_{166}, a_2 = c_{199}, b_1 = c_{197}, b_2 = c_{198}$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$

Тогда $\Pi_Q x = -a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

21.7. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n -мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_l :

5) $n = 3$, $a_1 = c_{66}$, $a_2 = c_{116}$, $a_3 = c_{145}$, $b_1 = c_{122}$, $b_2 = c_{146}$, $b_3 = c_{147}$;

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (3 \ 1 \ 0)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7) $n = 4$, $a_1 = c_{196}$, $a_2 = c_{200}$, $a_3 = c_{217}$, $b_1 = c_{211}$, $b_2 = c_{218}$, $b_3 = c_{219}$;

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{А базисный вектор: } - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

21.11. Доказать, что сумма \mathcal{L} двух линейных подпространств \mathcal{P} и \mathcal{Q} тогда и только тогда будет прямой суммой,

когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}$, $z \in \mathcal{Q}$.

\Rightarrow Пусть $x \in \mathcal{L}$. Тогда по-прежнему $x = y + z$ тогда $\exists y_1 \in \mathcal{P} \ z_1 \in \mathcal{Q}$ т.ч. $y = y_1 + z_1 = \Rightarrow$
 $\mathcal{Q} \ni z_1 = y - y_1 \in \mathcal{P}$
 $\therefore \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \{0\}$

виде $x = y + z$, где $y \in P, z \in Q$.

\Rightarrow Пусть $x \notin L$. Тогда $x \notin P$ тогда $\exists y_1 \in P, z_1 \in Q$ т.ч. $y = y_1 + z_1 \Rightarrow$
 \underline{y} $Q \ni z_1 = y - y_1 \in P$
 т.е. $P \cap Q \neq \{0\}$

\Leftarrow Пусть L — пер. сумма. тогда $t \in P \cap Q, t \neq 0, \langle p_1, \dots, p_n \rangle = P - \text{базис}$
 $\langle q_1, \dots, q_n \rangle = Q$

$$t = \sum \lambda_i p_i = \sum \mu_i q_i \Rightarrow \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = 0$$

Решим задачу $x \in L: x = \sum \delta_i p_i + \sum \epsilon_i q_i$ по тогда

$$x = \sum \delta_i p_i + \sum \epsilon_i q_i + \sum \lambda_i p_i - \sum \mu_i q_i = \sum (\delta_i + \lambda_i) p_i + \sum (\epsilon_i - \mu_i) q_i = \sum_{P} \pi_p p_i + \sum_Q \pi_q q_i$$

x раскл. не единственно.

21.12. Пусть P и Q — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1) если сумма размерностей P и Q больше размерности всего пространства, то пересечение $P \cap Q$ содержит ненулевой вектор;

2) если размерность суммы P и Q на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

$$1) \dim L \geq \dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) > \dim L - \dim(P \cap Q) \\ \dim L - \dim L > -\dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) > 0 \Rightarrow P \cap Q \neq \{0\}$$

$$2) P \cap Q \subseteq P \subseteq P+Q \Rightarrow \text{либо } P = P \cap Q \text{ либо } P = P+Q \\ \text{Если } P = P \cap Q \text{ то } P = P \cap Q \subseteq Q \Rightarrow P \subseteq Q \\ \text{Если } P = P+Q \text{ то } Q \subseteq P+Q \subseteq P \Rightarrow Q \subseteq P.$$

35.13. Пусть U, V, W — подпространства векторного пространства.

а) Можно ли утверждать, что $U \cap (V+W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

б) Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.

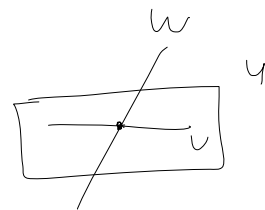
а) Конт. пример три прямые



$$U \cap (V+W) = \{A\}$$

$$(U \cap V) + (U \cap W) = \emptyset$$

$$б) U \cap V = V \quad U \cap V + U \cap W = V + U \cap W = \langle V \cup (U \cap W) \rangle = \\ = \langle (V \cup U) \cap (V \cup W) \rangle = \langle U \cap (V \cup W) \rangle = U \cap \langle V \cup W \rangle = U \cap (V+W)$$



T.2. В условиях задачи 21.7(7) докажите, что пересечение W данных линейных оболочек содержится в подпространстве U , заданном уравнением $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, и дополните базис в W до базиса в U .

Т.3. Пусть $V = M_n(\mathbb{R})$ – пространство квадратных матриц порядка n с элементами из \mathbb{R} , а U, W, W_1 – его подпространства, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Докажите, что W и W_1 – различные прямые дополнения к U в V . Разложите матрицу A_{233} (см. Б) двумя способами, исходя из равенств $V = U \oplus W, V = U \oplus W_1$.

$$1) A \in U \quad A^+ = \frac{A+A^T}{2} \in W, \quad A^- = \frac{A-A^T}{2} \in U \quad \text{и} \quad A = A^+ + A^-$$

$$2) A \in M_n. \quad A = A^{\rightarrow} + A^{\searrow} = \overset{\text{верхнетреуг.}}{A^{\rightarrow}} + \overset{\text{кососим.}}{A^{\searrow}} + A^{\rightarrow T} - A^{\searrow T}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{\rightarrow T} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\rightarrow} + A^{\rightarrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} - A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Линейные отображения

23.6. Пусть x – произвольный вектор, a, n – фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ , заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

$$5) \varphi(x) = x - 2(x, n) \frac{n}{|n|^2}; \quad 6) \varphi(x) = 2(a, x) \frac{a}{|a|^2} - x.$$

$$\varphi(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 - 2(x_1 + x_2, n) \frac{n}{|n|^2} = \left(x_1 - 2(x_1, n) \frac{n}{|n|^2} \right) - \left(x_2 - 2(x_2, n) \frac{n}{|n|^2} \right) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

– как линейн.

– ортогональное от-ежение на прямую, проходящую от-н. n .

23.9. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства E_3 на подпространство L , если L есть:

- 1) прямая $x = z = 0$;
- 2) прямая $x = y = z$;
- 3) плоскость $x + y + z = 0$;
- 4) плоскость, натянутая на векторы $a(-1, 1, -1)$ и $b(1, -3, 2)$.

$$1 - \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} =$$

$$2) \varphi(e_1) = a \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \varphi(e_2) = a \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \varphi(e_3) = a \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$3) \varphi(e_1) = t_1 \sqrt{\frac{2}{3}} - t_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \varphi(e_2) = t_1 \sqrt{\frac{2}{3}} + t_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \varphi(e_3) = t_1 \sqrt{\frac{2}{3}} + t_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

23.14. В трехмерном геометрическом векторном пространстве E_3 задан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 . Вычислить матрицу поворота пространства:

- 1) на угол α вокруг вектора e_3 ;

$$2) \varphi(e_1) = e_1 \quad \varphi(e_2) = e_3 \quad \varphi(e_3) = -e_2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \varphi(e_1) = e_2 \quad \varphi(e_2) = e_3 \quad \varphi(e_3) = e_1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) на угол $\pi/2$ вокруг вектора e_1 ;
- 3) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

23.15. Пусть линейное пространство \mathcal{L} является прямой суммой ненулевых подпространств \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' .

1) Доказать, что преобразование φ проектирования \mathcal{L} на \mathcal{L}' параллельно \mathcal{L}'' линейно. Найти ядро и множество значений φ . Записать матрицу преобразования φ в базисе, составленном из базисов подпространств \mathcal{L}' и \mathcal{L}'' .

1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$ $\varphi = \text{пр}_{\mathcal{L}'}^{\mathcal{L}}$, т.е. $\varphi(a \in \mathcal{L}) = b \in \mathcal{L}'$ т.ч. $a = b + c$, $c \in \mathcal{L}''$
 т.р. \mathcal{L} -модуля, то $a_1 = b_1 + c_1$
 $a_2 = b_2 + c_2$ } т.е. $\varphi(a_1 + a_2) = b_1 + b_2 = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$

2) Ядро: $\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow b \in \mathcal{L}'' \Rightarrow \ker \varphi = \mathcal{L}''$
 образ: $\forall q \in \text{Im } \varphi$ $q \in \mathcal{L}'$, т.к. $\forall b \in \mathcal{L}'$ $\varphi(b) = b \in \mathcal{L}'$ т.е. $\text{Im } \varphi = \mathcal{L}'$

3) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_1) = e_1 \\ \vdots \\ \varphi(e_k) = e_k \\ \varphi(e_{k+1}) = 0 \\ \vdots \\ \varphi(e_{k+m}) = 0 \end{array} \right\} A = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

23.19. Доказать, что:

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

$\text{Im } \varphi = V \Rightarrow \text{rk } A = \dim \text{Im } \varphi = \dim V = n$ (число строк) $\Rightarrow \underline{\text{rk } A = n}$

23.24. Пусть $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ — линейное отображение, и $\dim \mathcal{L} = \dim \tilde{\mathcal{L}}$. Доказать утверждения:

1) Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y$ ($x \in \mathcal{L}$) было разрешимо при любом $y \in \tilde{\mathcal{L}}$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) = 0$ имело только нулевое решение.

2) Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \tilde{\mathcal{L}}$, то оно имеет для каждого y единственное решение.

3) Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо не при всех $y \in \tilde{\mathcal{L}}$, но при некотором y разрешимо. Тогда его решение не единственно.

1) $\Leftrightarrow \varphi(x) = y$ разреш $\Leftrightarrow A \cdot x = y$ разреш т.е. A — невырожд $\Rightarrow \dim \mathcal{L} = \text{rk } A = \dim \text{Im } \varphi \Rightarrow \dim \ker \varphi = 0$
 т.е. $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
 $\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \ker \varphi = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{L} \Rightarrow \underline{\text{Im } \varphi = \tilde{\mathcal{L}}}$

2) $\varphi(x) = y$ разреш, $\text{Im } \varphi = \tilde{\mathcal{L}} \Rightarrow \ker \varphi = 0 \Rightarrow$ от. uniquely

3) $\varphi(x) = y$, тогда $\ker \varphi \neq 0$, р-ции $a \in \ker \varphi: \varphi(a) = 0$ тогда $\varphi(x) + \varphi(a) = y + 0$
 $\varphi(x+a) = y$ — 2 решение.

23.29. Линейное отображение n -мерного линейного пространства в m -мерное задано матрицей A в базисах e и f . Числа m и n определяются размерами матрицы. Найти ядро и множество значений отображения. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, если:

420. $\left\| \begin{array}{ccc} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \ker \varphi = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)$
 по ст-чам
 $\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \text{Im } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

23.30. Линейное отображение n -мерного арифметического пространства в m -мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A . Числа m и n определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора a , если:

1) $A = A_{513}$, $a = (-1, 0, 1)^T$;

513. $\left\| \begin{array}{cccc} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{array} \right\| x = a \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & -4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$
 $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ частное решение $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 базис $\begin{pmatrix} -14 & 2 \\ -6 & -7 \\ 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

23.40. Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m .

1) Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование $D: \mathcal{P}^{(m)} \rightarrow \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования D :

- а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^m$;
 б) в базисе $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^m$;
 в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}$.

а) $1, t, \dots, t^m$ $\varphi(x) = \text{const.}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}$

- а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^{m-1}$;
 б) в базисе $1, t-t_0, \dots, (t-t_0)^{m-1}$;
 в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$.

в) $\ker D = \{ \text{константы} \}$ $P(x) = \text{const}$.
 $D(1) = 0, D(\frac{t}{1!}) = 1, \dots, D(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}) = \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & I_{m-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

23.62. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A , а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S . Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:

3) $A = A_{38}, S = A_{39}$;
 $A \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23.70. Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе e_1, \dots, e_n , если:

- 1) поменять местами векторы e_i и e_j ;
 S - матрица, которая меняет местами i и j и оставляет остальные векторы на месте.
 $S^{-1}AS$ - матрица, которая меняет местами i и j и оставляет остальные векторы на месте.

T.7. Запишите (в стандартном базисе \mathbb{R}^3) матрицу линейного преобразования φ_v , заданного равенством $\varphi_v(x) = [v, x]$, где v имеет координатный столбец $(v_1, v_2, v_3)^T$. Докажите, что $v \mapsto \varphi_v$ определяет линейный изоморфизм пространства \mathbb{R}^3 с подпространством косимметричных матриц в $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

$\varphi(e_x) = [v, (1, 0, 0)] = v_3 e_y - v_2 e_z$
 $\varphi(e_y) = -v_1 e_z - v_3 e_x$
 $\varphi(e_z) = v_2 e_x - v_1 e_y$
 $\varphi(v) = Av, \varphi^T(v) = -v^T A$ - косимметрично

12.40. Записать формулы, задающие аффинное преобразование плоскости, переводящее точки A, B, C соответственно в A^*, B^*, C^* :

1) $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1), A^*(-3, 5), B^*(4, -3), C^*(0, 0)$;

$AC: \begin{cases} 3 = 0 + a_{12} \\ -5 = 0 + a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = 3 \\ a_{22} = -5 \end{cases}$
 $BC: \begin{cases} -4 = a_{11} \\ 3 = a_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -4 \\ a_{21} = 3 \end{cases}$
 $\begin{cases} b_1 = -10 \\ b_2 = 13 \end{cases}$

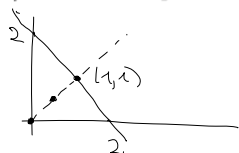
12.28. Доказать, что:

1) если A и B — две различные неподвижные точки аффинного преобразования, то и все точки прямой AB неподвижны;

$\begin{cases} \bar{x}_1 = A\bar{x}_1 + \bar{b} \\ \bar{x}_2 = A\bar{x}_2 + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)t + \bar{x}_1$
 $A\bar{x} + \bar{b} = tA\bar{x}_2 - tA\bar{x}_1 + A\bar{x}_1 + \bar{b} = t(A\bar{x}_2 - A\bar{x}_1) + A\bar{x}_1 + \bar{b} = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)t + \bar{x}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \bar{x}$

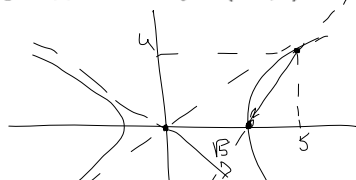
12.53. Написать формулы, задающие преобразования плоскости:

8) сжатие к прямой $x + y - 2 = 0$ с коэффициентом $1/3$;

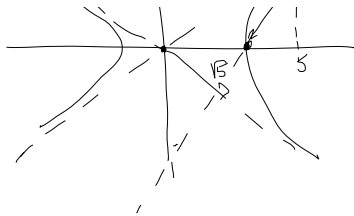


$(0, 0) \rightarrow (1, 1) \cdot \frac{2}{3} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow \frac{2}{3} = b_1 = b_2$
 $(0, 2) \rightarrow (0, 2): 0 = a_{11} \cdot 0 + 2 \cdot a_{12} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{3}$
 $2 = a_{21} \cdot 0 + 2 \cdot a_{22} + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{22} = \frac{2}{3}$
 $(2, 0) \rightarrow (2, 0): 2 = a_{11} \cdot 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{2}{3}$
 $0 = a_{21} \cdot 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow a_{21} = -\frac{1}{3}$
 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

12.51. Записать формулы аффинного преобразования, переводящего гиперболу $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в себя так, что точка $A(5, 4)$ переходит в точку $B(\sqrt{5}, 0)$.



$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \bar{b}$
 асимптоты перевод. в ос. $\Rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow \bar{b} = 0$
 Находим б-ра асимптот: $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x, t \in (\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1) \cup (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 1)$
 I. $\sqrt{5} = 5a_{11} + 4a_{12}$



Найдем б-ра асимптот: $y = \pm \sqrt{5}x$, где $(-\sqrt{5}, 1)$ и $(\sqrt{5}, 1)$
 I. $\sqrt{5} = 5a_{11} + 4a_{12}$
 $0 = 5a_{21} + 4a_{22}$

VI. Собственные векторы и значения.

24.13. Доказать, что линейное преобразование нечетномерного (например, трехмерного) вещественного линейного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

24.18. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' — ненулевые подпространства. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного преобразования φ ; доказать, что φ имеет базис из собственных векторов, и указать диагональный вид его матрицы, если φ есть:

2) отражение в подпространстве \mathcal{L}' параллельно \mathcal{L}'' .

$$v \in V \quad v = u + w \quad \Rightarrow \quad \varphi(v) = v - 2w$$

$\mathcal{L}' \quad \mathcal{L}''$

Р-рши для $e_1, e_k \in \mathcal{L}'$ тогда для них $\varphi(e_1) = e_1, \dots, \varphi(e_k) = e_k$
 Тогда $\varphi(e_1) = e_1$ и $\varphi(e_k) = e_k$, но $\varphi(e_{k+1}) = -e_{k+1}, \dots, \varphi(e_n) = -e_n \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

24.20. Найти собственные значения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования, определенного в задаче:

2) 23.9

24.22. 1) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ , заданного матрицей

§ 24. Собственные векторы и собственные значения 219

$$A = (a_1, \dots, a_n)^T (b_1, \dots, b_n) \neq O.$$

2) Найти необходимое и достаточное условие диагонализируемости преобразования φ .

3) Выяснить, диагонализируемы ли преобразования, заданные матрицами: а) A_{213} ; б) A_{222} .

1) Заметим, что $\varphi: V \rightarrow \langle a \rangle$, где $\langle a \rangle$ — одномерное подпространство, порожденное вектором a .
 Тогда $ab^T(a) = \lambda a$, т.е. $ab^T a = \lambda a \Rightarrow b^T a = \lambda$ — скалярное значение равно $(b^T a)$.

2) Оператор диагонализируем или нет: n ; $\text{rk}(ab^T - b^T a \cdot E) = n$

24.30. Линейное преобразование вещественного n -мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить

собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования:

7) A_{12} ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 0$
 $\lambda = 2$
 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ - проектор на вектор $(1, 1)$,
 умножит в 2 раза.
 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19) A_{221} ; $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 1) $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1-1 \\ 2 & 5-\lambda-2 \\ 4 & 4-1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0$
 $\lambda = 2, \lambda = 3$ - край-корень.
 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1-1 \\ 2 & 3-2 \\ 4 & 4-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1-1 \\ 0 & 2-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 0 & 2-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 2 & 2-2 \\ 4 & 4-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

30) A_{283} ; 283. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ 1) $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5-1 \\ -1 & -3-\lambda \\ -2 & -3-2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$
 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5-1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -3-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

24.42. Найти собственные значения и собственные векторы (собственные функции) дифференцирования D как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств вещественных функций (n — фиксированное натуральное число):

1) пространство всех многочленов степени не выше n ;

Только константы с $\lambda = 0$.

24.53. В пространстве $\mathcal{R}_{n \times n}$ квадратных матриц порядка n рассматривается операция транспонирования $\tau: A \rightarrow A^T$. Проверить, что τ — линейное преобразование и $\tau^2 = \text{id}$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования τ . Разложить пространство $\mathcal{R}_{n \times n}$ в прямую сумму собственных подпространств преобразования τ .

1) линейность оператора $\tau(aA) = A^T a^T = a^T A = a A^T = a \tau(A)$
 $\tau(A+B) = A^T + B^T = \tau(A) + \tau(B)$

2) $(A^T)^T = A \Rightarrow \tau^2 = \text{id}$

3) $A^T = \lambda A \Rightarrow A = \lambda A^T \Rightarrow A^T = \lambda^2 A^T$ т.е. $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ - по соотв. симм и кососимм матрицам

4) $\forall B \in \mathcal{R}_{n \times n} \quad B = \frac{B+B^T}{2} + \frac{B-B^T}{2}$

24.55. Пусть A — матрица второго порядка. Формула $\varphi(X) = AX$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка (задача 23.47). Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ . В случае, когда эта система является базисом, записать в нем матрицу преобразования φ :

1) $A = A_{46}$; 2) $A = A_{52}$;
 1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$
 1) $\det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4$ Если $\det(A - \lambda E) \neq 0$, то $X = 0(A - \lambda E)^{-1} \Rightarrow X = 0$ - не соотв.
 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$
 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i.e. $a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$2) \dim \text{Ker}(\varphi + \iota) + \dim \text{Ker}(\varphi - \iota) = n.$$

ppm $f(a) = \lambda a \Rightarrow f^2(a) = f(\lambda a) \Rightarrow a = \lambda f(a)$

Primen $f(d) = \lambda a \Rightarrow f^2(a) = f(\lambda a) \Rightarrow a = \lambda^2 f(a)$
 Tada $f(d) = \lambda^2 f(a) \Rightarrow \lambda = \pm 1$ - 2 C-ve možnosti. \Rightarrow dimker $(f-i)$ - prave vs. $\lambda = 1 \Rightarrow W$
 dimker $(f+i)$ - \perp $\lambda = -1 \Rightarrow U$

1) \mathcal{D} -mod, so $W \cap U = 0$: $U \not\subseteq W$, so $f(U) = U = -U \Rightarrow \underline{\underline{U=0}}$

2) $\forall v \in V: v = \frac{v - \varphi(v)}{2} + \frac{v + \varphi(v)}{2}$, при этом $u = v - \varphi(v) \rightarrow \varphi(u) = \varphi(v) - v = -\varphi(u) \Rightarrow u \in U$

f.e. $V = W \oplus U \Rightarrow \dim V = \dim W + \dim U$
 $n = \dim \ker(\varphi - i) + \dim(\ker(\varphi - i))$ $w = v + \varphi(v) \Rightarrow w \in W$

эффицентом $(-1)^n$ является характеристическим многочленом не-
которой матрицы порядка n . $\chi(\lambda)$ наг. а $n-3$ -ти наем F по

$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ maka $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

ристические многочлены.

1) Given $\det A \neq 0$, so p -perm square series. Given $Ae = A \cdot 5$, implying δ

$$A_e' = A^{-1}ABA = BA \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$$

$Ae^1 = A^{-1}ABA = BA \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$

2) Wenn $\det A = 0$ ist A nicht invertierbar. $\Rightarrow X(A-E)B(x) = X(B(A-E)(x))$ mit $n-1$ Tangenten & einer Nullstelle.

$\forall S \neq \emptyset \quad \chi_A(S) \neq 0 \Rightarrow \chi_{A \rightarrow E}(S) = 0$
 totale un-kor partice $\Rightarrow \forall S$ un-kor partice $\Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA} (S = \emptyset)$

Т.10. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем а) \mathbb{F}_3 , б) \mathbb{F}_5 , задан-

ного матрицей	h	h
	2	2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 2\lambda = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 1)$$

a) в \mathbb{F}_3 корни: $\lambda = 2$ — единственный


$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8) 6 F5 ρ $\lambda=4$ $\lambda=3$: $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\lambda=3: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow d \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Т.11. Пусть A — матрица (в некотором базисе) поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α . Выразите α через элементы

Роберем базис  $e_1 \parallel L, e_1, e_2 \perp L \quad e_1 \perp e_2$

$$\underline{\text{tr} A - 1}$$

матрицы A .

Выберем базис

$e_1 \parallel L, e_1, e_2 \perp L, e_1 \perp e_2$

Тогда $A' = \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ -\sin d & \cos d \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr} A' = \cos d + \cos d + 1 = \text{tr} A \Rightarrow \cos d = \frac{\text{tr} A - 1}{2}$

T.12. Верно ли, что если две матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены, то они являются матрицами одного оператора в разных базисах? Тот же вопрос, если дополнительно известно, что обе матрицы диагонализуются?

1) Нет. матрица: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

2) Если матрица diag , $\chi_A(\lambda)$ имеет n корней и $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ \uparrow путем перемешив. δ -пове δ -пов.

Тогда конструируем матрицу с $\chi(\lambda)$ и найдем преобр $K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Унитарные преобр-ва.

24.70. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства. Доказать, что любое подпространство, содержащее $\text{Im} \varphi$, инвариантно.

$\forall v \in U, \varphi(v) \in \text{Im} \varphi \subseteq U$

24.68. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства \mathcal{L} , M — подпространство в \mathcal{L} , инвариантное относительно φ , и $p(t)$ — многочлен. Доказать, что данное подпространство в \mathcal{L} инвариантно относительно φ :

4) $\text{Ker } p(\varphi)$; $\forall v \in \text{Ker } p(\varphi) \rightarrow p(\varphi(v)) = 0$, тогда $u \in M$, тогда $p(u) \in M$.

24.74. Доказать, что:

1) характеристический многочлен линейного преобразования делится на характеристический многочлен его ограничения на инвариантном подпространстве;

2) если все корни характеристического многочлена линейного преобразования φ линейного пространства \mathcal{L} принадлежат полю, над которым определено \mathcal{L} , то всякое подпространство в \mathcal{L} , инвариантное относительно φ , содержит собственный вектор этого преобразования;

1) $\{e_1, \dots, e_k\}$ — базис U $\rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{kl} & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = |A - \lambda E| = |A_{kl} - \lambda E| \cdot |B - \lambda E|$
 $\{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$ — базис \mathcal{L} $\Rightarrow |A - \lambda E| = |A_{kl} - \lambda E| \cdot |B - \lambda E| = \chi_{A_{kl}} \cdot |B - \lambda E|$
УД.

24.77. Найти подпространства трехмерного геометрического векторного пространства, инвариантные относительно поворота на угол α ($\alpha \neq 0, 2\pi$) вокруг прямой $x = ta$ ($a \neq 0$).

1) Инвариантным будет только нулевое подпространство и $\text{пр-во } \langle a \rangle$.

2) $U = \text{пр-во}$ $\Rightarrow \forall v \in U, \varphi(v) \in U \rightarrow \varphi(v) - v \in \Pi$
 $\varphi(v) \in \Pi \Rightarrow \Pi = \langle \varphi(v), v \rangle \Rightarrow \Pi \subseteq U \} \Pi = \mathbb{R}^3$

T.14. Найдите все инвариантные подпространства оператора, матрица которого в некотором базисе равна жордановой клетке.

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \text{все такие } \pm \text{соб. вектор } \lambda$

$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda E$
 $J_n(\lambda)^n = (J_n(0) + \lambda E)^n = J_n(0)^n + n\lambda J_n(0)^{n-1} + \dots + \lambda^n E = \begin{pmatrix} \lambda^n & \dots & \lambda^{n-k} \\ & \ddots & \lambda^{n-1} \\ & & \lambda^n \end{pmatrix} \} k ?$

$$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda E$$

$$J_n(\lambda)^n = (J_n(0) + \lambda E)^n = J_n(0)^n + n\lambda J_n(0)^{n-1} + \dots + \lambda^n E = \begin{pmatrix} \lambda^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ХНФ.

24.126. Проверить, что линейное преобразование, заданное матрицей A , нильпотентно и найти для него жорданов базис и жорданову форму матрицы:

235. $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 \Rightarrow \lambda_{1,3} = 0$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор. в. 1

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ * & * & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow b \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b$ - вектор. в. 2

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow c \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow c$ - вектор. в. 3.

I. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ II. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - она нильпотентна.

б-жис: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$