1.1. Найдите все частные производные $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ функции $f(x,y) = xy\cdot e^{x+y}$.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (xy)^{(k)} (e^{x+y})^{(m-k)} = xy\,e^{x+y} + my\,e^{x+y} = y(x+m)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = (y+n)(x+m)e^{x+y}$$

1.2. Найдите первый и второй дифференциалы функции $f(x,y) = x^y$ в точке $(1,2)$ и представьте функцию $f(x,y)$ в окрестности этой точки формулой Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Пеано, а также в форме Лагранжа.

$$df(x,y) = d\,e^{y\ln x} = x^y\left(dy\ln x + \frac{dx}{x}y\right) \qquad df(1,2) = 2dx$$

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = x^y\left(\ln x\,dy + \frac{y\,dx}{x}\right)\otimes\left(dy\ln x + \frac{dx}{x}y\right) + x^y\left(\frac{dx\otimes dy}{x} + dx\otimes\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) =$$

$$= \underbrace{x^y}_{1}\left(\underbrace{\ln^2 x}_{0}\,dy^2 + \underbrace{\frac{2y\ln x}{x}}_{0}\,dy\otimes dx + \frac{y^2}{x^2}dx^2 + \frac{dy\otimes dx}{x} + \frac{dx\otimes dy}{x^2} - \frac{y\,dx^2}{x^2}\right)$$

$$d^2 f(1,2) = 2dx^2 + 2\,dx\otimes dy$$

$$f(x,y) = 1 + 2h^1 + 2h^{12} + 2h^1h^2 + o(\|h\|^2), \quad h = (x,y) - (x_0,y_0)$$

1.3. Пусть $f(x,y) = g(x+h(y))$, где $g, h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дважды дифференцируемые функции. Докажите, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x+h(y))$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(x+h(y))\,h'(y)$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = g''(x+h(y))$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x\partial y} = g''(x+h(y))\cdot h'(y)$

$$g'(x+h(y))\cdot g''(x+h(y))\,h'(y) =$$

$$= g'(x+h(y))\,h'(y)\,g''(x+h(y))$$

2.2. Найдите первый и второй дифференциалы в точке $(0,1)$ функции $u(x,y)$, заданной неявно уравнением

$$u^2 - 2xy = \ln u + y,$$

и представьте функцию $u(x,y)$ формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности этой точки до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

$u^2 - 2xy = \ln u + y \longrightarrow u^2 = \ln u + 1$, $u = \underline{1}$ | есть ещё 2 решение, но его не найти.

$$2u\,du - 2x\,dy - 2y\,dx = \frac{du}{u} + dy$$

$$du\left(2u - \frac{1}{u}\right) = dy + 2x\,dy + 2y\,dx$$

$$du = \frac{1}{2u - \frac{1}{u}}\left(dy + 2x\,dy + 2y\,dx\right) \Rightarrow du(0,1) = dy + 2dx$$

$$d^2u = d\left(\frac{u}{2u^2-1}\right)\otimes(dy + 2x\,dy + 2y\,dx) + \frac{u}{2u^2-1}\cdot(2\,dx\otimes dy + 2\,dy\otimes dx)$$

$$d^2u = d\left(\frac{u}{2u^2-1}\right)\otimes(dy+2xdy+2ydx) + 2u^2-1$$

$$-\frac{2u^2+1}{(2u^2-1)^2}du$$

$$d^2u(0,1) = -3(dy+2dx)\otimes(dy+2dx) + 4dx\otimes dy =$$

$$= -3dy^2 - 12dx^2 - 12dx\otimes dy + 4dx\otimes dy = -3dy^2 - 12dx^2 - 8dx\otimes dy$$

$$u(x,y) = 1 + h^2 + 2h^1 - \frac{1}{2}\left(3h^{2^2} - 12h^{1^2} - 8h^2h^1\right) + o(\|h\|^2)$$

2.3. Исследуйте существование предела

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{sh} x \cdot \ln(y+\sqrt{1+y^2}) - \arcsin x \cdot \sin y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\operatorname{sh}x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\ln(y+\sqrt{1+y^2}) = \int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \begin{cases}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + o(y^4)\\ \ln(y+\sqrt{1+y^2}) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{3}{40}y^5 + o(y^5)\end{cases}$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(y^5)$$

$$\operatorname{sh}x\ln(y+\sqrt{1+y^2}) - \arcsin(x)\sin y = \frac{1}{15}xy^5 - \frac{1}{15}x^5y + o(\rho^6)$$

и предел есть т.к $(x^2+y^2)^{5/2} = \rho^5 \longrightarrow \frac{1}{15}\frac{(xy^5 - x^5y + o(\rho^6))}{\rho^5} \to 0$

3.2. Представьте функцию $f(x,y)$ формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $(0,0)$ до $o(\rho^n)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(1-x)(1-y)}.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)\\ \frac{1}{1-y} &= \sum_{k=0}^n y^k + o(y^n)\end{aligned}\right\} f(x,y) = \left(\sum_{k=0}^n x^{k+2} + o(x^{n+2})\right)\left(\sum_{k=0}^n y^k + o(y^n)\right) -$$

$$- \left(\sum_{k=0}^n y^{k+2} + o(y^{n+2})\right)\left(\sum_{k=0}^n x^k + o(x^k)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^n x^{k+2}\sum_{k=0}^n y^k + o(y^n x^{n+2}) - \sum_{k=0}^n y^{k+2}\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n y^{n+2}) =$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^n x^{k+2} = \sum_{k=0}^n x^k - 1 - x + x^{n+1} + x^{n+2}\right\} = -\sum y^k - x\sum y^k + x^{n+1}\sum y^k + x^{n+2}\sum y^k +$$

$$+ \sum x^k + y\sum x^k - y^{n+1}\sum x^k - y^{n+2}\sum x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^n\left(x^k - y^k + yx^k - xy^k + x^{n+1}y^k + x^{n+2}y^k - y^{n+1}x^k - y^{n+2}x^k\right) + o(x^n y^{n+2}) =$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^n x^k - y^k + yx^k - xy^k + o(\rho^{n+1})}$$

3.3. Пусть функция f задана формулой:

3.3. Пусть функция f задана формулой:

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}\right), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

Докажите, что:
а) функция f разрывна в точке $(0,0)$;
б) у функции f существуют частные производные любого порядка в каждой точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
в) смешанные производные функции f не зависят от порядка дифференцирования.

а) $\left.\begin{matrix} x = at \\ y = bt \end{matrix}\right\}$ $f(x,y) = \exp\left(-\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2}\right)$ — зависит от направления.

3.1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) вместе с частными производными f''_{xy}, f''_{yx}, причём эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0). Верно ли, что
а) частные производные f'_x, f'_y непрерывны в точке (x_0, y_0)?
б) частные производные f''_{xx}, f''_{yy} существуют в точке (x_0, y_0)?

$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_{xy}(x_0, \xi)(y - y_0)$