Многочлены I.

25.1(а) **25.1.** Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на многочлен $g(x)$:
а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1;$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
2x^4-6x^3+2x^2 & 2x^2+3x+11 \\ \cline{1-1}
\quad 3x^3+2x^2-5x & \\
\quad 3x^3-9x^2+3x & \\ \cline{1-1}
\qquad 11x^2-8x+6 & \\
\qquad 11x^2-33x+11 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 25x-5 \text{ - остаток} &
\end{array}
$$

26.1(а) а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad x_0 = 1;$

$f(1) = 1-2+4-6+8 = 5$ - остаток от деления на $x-1$

	1	-2	4	-6	+8
1	1	-1	3	-3	+5

$f(x) = (x-x_0)(x^3-x^2+3x-3)+5$

26.4. При каком значении a многочлен $x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет -1 корнем не ниже второй кратности?

$(-1)^5 - a(-1)^2 - a(-1) + 1 = 0 \Rightarrow -1 - a + a + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$5(-1)^4 - 2a(-1) - a = 0 \Rightarrow 5 + 2a - a = 0 \Rightarrow a = -5$

26.3. Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:
а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2;$

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

$f(x) = (x-2)^3(x^2+x+1)$

26.8. Доказать, что многочлен

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

Пусть x_0 - кратный корень, т.е $f(x_0)=0$, тогда $f'(x_0)=0$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= 1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \ldots \frac{x_0^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x_0^n}{n!} = 0 \\ f'(x_0) &= 1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{aligned}\right\} \frac{x_0^n}{n!} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

, но $x_0=0$ - не явл корнем $f(x)$, $f(0)=1$ - противоречие

31.1. Построить многочлен степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий:

г) двойной корень 3 и простые корни -2 и -4. $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 3+3-2-4 = 0 = -b$

$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -2\cdot 9 + 24 - 4\cdot 9 + 24 = -6 = -d \Rightarrow d = 6$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -19 = c$

$x_1x_2x_3x_4 = 72 = e$

$f(x) = x^4 - 19x^2 + 6x + 72$

Т.1. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 7x + 2 = 0$. Вычислить $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.

$x_1x_2x_3 = -2$

$x_1+x_2+x_3 = 0$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -7$

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (\underset{0}{x_1+x_2+x_3})^2 - 2(\underset{-7}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}) = 14$

2) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \dfrac{-7}{-2} = +\dfrac{7}{2}$

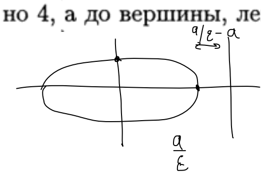
II. Кривые 2 порядка.

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-7$, м n2 n3 $x_1x_2x_3$ −2

II. Кривые 2 порядка.

7.25. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

5) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси Oy, равно 8;



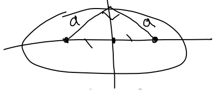
$$\left.\begin{aligned}&\frac{a}{\varepsilon}-a=4\\&\frac{a}{\varepsilon}=8\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}a&=4\\ \varepsilon&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ b^2=a^2(1-\varepsilon^2)=12$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

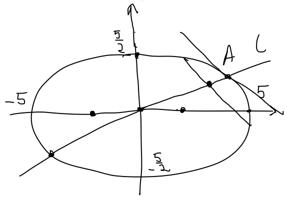
7.26(4) ε − ?

4) отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом;

$$b=a/\sqrt{2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



7.29. Через точку $A(7/2, 7/4)$ провести хорду эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$, делящуюся в этой точке пополам.



l: $y=\frac{7/4}{7/2}x=\frac{1}{2}x\Rightarrow x=2y$

$l\cap$ эллипс: $4y^2+4y^2=25\Rightarrow y=\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Найдём ур. касательную в A:

$y=\sqrt{\frac{25-x^2}{4}}$

$y'=-\frac{x}{2\sqrt{25-x^2}}=-\frac{1}{2}$, тогда иск. хорда им ур $y=-\frac{1}{2}x+b$

$\frac{7}{4}=-\frac{7}{4}+b\Rightarrow b=\frac{7}{2}$

Ответ: $y=-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}(1-x)$

7.38(9)

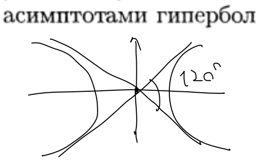
9) точка $(-1, 3)$ принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые $y = \pm 2x$.

$y=2x=\frac{b}{a}x\Rightarrow b=2a$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}-\frac{9}{4a^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}=-\frac{4}{5}$ − нет такого a.

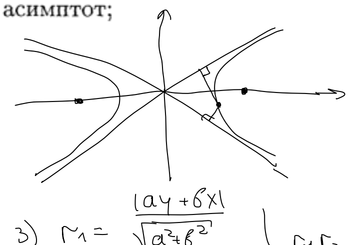
7.40. Вычислить эксцентриситет гиперболы, если:
1) ее полуоси равны (равносторонняя гипербола);
② угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 120°;
3) асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm 3x$.

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}\Rightarrow e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+3}=2$$



7.49. Доказать, что для данной гиперболы следующие величины постоянны, и выразить их через полуоси a, b гиперболы:

1) произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот;



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

1) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

2) $y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow ay\pm bx=0$

3) $r_1=\frac{|ay+bx|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $r_2=\frac{|ay-bx|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\Big\}$ $r_1r_2=\frac{|a^2y^2-b^2x^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=const$

7.54. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:
1) точка $(5, -5)$ принадлежит параболе;
② расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

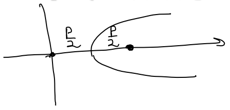
ческое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) точка $(5, -5)$ принадлежит параболе;

② расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

$y^2 = 2px$

$y^2 = 24x$



$p = 12$

7.64. Две параболы, оси которых взаимно перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

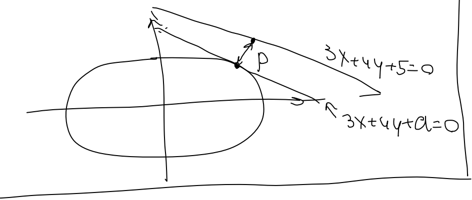
$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + b \\ x = cy^2 + d \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} cy = acx^2 + bc \\ ax = acy^2 + da \end{array}\right\} cy + ax = ac(x^2+y^2) + bc + ad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{y}{a} - \frac{x}{c} + \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 2\cdot\frac{x}{2c} + \frac{1}{4c^2}\right) + \left(y^2 - 2\cdot\frac{y}{2a} + \frac{1}{4a^2}\right) = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{4a^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c} > 0$$

$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = Const > 0$ - ур. окр, тогда все т. пересеч. уд. этому ур.

8.9. Какие точки на данной кривой второго порядка удалены на наименьшее расстояние от данной прямой? Найти это расстояние.

1) $\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1$, $3x + 4y + 5 = 0$;



$$\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}\left(\frac{a-3x}{4}\right)^2 = 1$$

$$\frac{27}{28}x^2 + \frac{9(a-3x)^2}{28\cdot 4} = 1$$

$$108x^2 + 9a^2 + 81x^2 - 54xa = 112$$

$189x^2 - 54xa + 9a^2 - 112 = 0$ 1 т. пересеч. будет при $D = 0$

$(54a)^2 - 4\cdot 189(9a^2 - 112) \geq 0$

$a = \pm\frac{14}{3}$, $p \to min$ при $a = +\frac{14}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} l_1 : 3x + 4y + 5 = 0 \to \left(0, -\frac{5}{4}\right) \in l_1 \\ l_2 : 3x + 4y + \frac{14}{3} = 0 \end{array}\right\} p = \frac{\left|3\cdot 0 - \frac{5}{4}\cdot 4 + \frac{14}{3}\right|}{5} = \frac{1}{15}$$

Точка: $x = \frac{-54a}{2\cdot 189} = \frac{-54\cdot\frac{14}{3}}{2\cdot 189} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ - т. наим расст.

8.11. Составить уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, если он:

1) содержит точку $A(-3, 2)$ и касается прямой $4x - 6y - 25 = 0$;

2) касается прямых $x + y - 5 = 0$ и $x + 4y - 10 = 0$.

На всякий случай докажу, что ур кас к эл. в т. x_0, y_0: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x = \frac{a^2}{x_0} - \frac{yy_0a^2}{b^2x_0} \Rightarrow$

$x' = -\frac{y_0a^2}{b^2x_0}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ б.о.о. $x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \Rightarrow x' = -\frac{a}{b\sqrt{b^2-y^2}} = -\frac{ay_0}{b\sqrt{b^2-y_0^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{a^2y_0}{b^2\cdot\left(a\sqrt{1-\frac{y_0^2}{b^2}}\right)} = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$ равно ЧТД.

Тогда если $x + y - 5 = 0$ - кас и $x + 4y - 10 = 0$ - кас, то

$\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ и $\frac{x}{10} + \frac{2y}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_{01}}{a^2} = \frac{1}{5}$, $\frac{y_{01}}{b^2} = \frac{1}{5}$, $\frac{x_{02}}{a^2} = \frac{1}{10}$, $\frac{y_{02}}{b^2} = \frac{2}{5}$

$\frac{x_{01}^2}{a^2} + \frac{y_{01}^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{25} = 1$ и $\frac{a^2}{100} + \frac{4b^2}{25} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ a^2 + 16b^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow b^2 = \frac{75}{15} = 5 \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow \text{ур. эл: } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

8.25. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, проходящих через точку:

1) $(-2, 2)$; 2) $(1{,}6;\ 0)$; 3) $(4, \sqrt{2})$; 4) $(4, 1)$;

1) $(-2, 2)$;

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 2 + at \end{array}\right\} \frac{t^2 - 4t + 4}{4} - 4 - a^2t^2 - 4at = 1$$

$$t^2 - 4t + 4 - 16 - 4a^2t^2 - 16at = 4$$

1) $(-2, 2)$;

$$\left.\begin{aligned}x&=-2+t\\ y&=2+at\end{aligned}\right\}\ \frac{t^2-4t+4}{4}-4-a^2t^2-4at=1$$

$$t^2-4t+4-16-4a^2t^2-16at=4$$

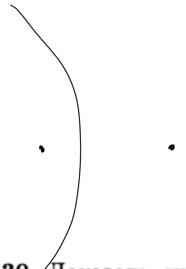
$$t^2(1-4a^2)-4(1+4a)t-16=0$$

$$D=0:\ 4(1+4a)^2-16(1-4a^2)=0$$

$$1+16a^2+8a=4-16a^2$$

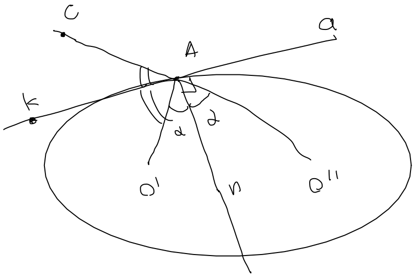
$$16a^2+8a-3=0$$

$$\begin{aligned}a&=-\frac{3}{4}\\ a&=\frac{1}{4}\end{aligned}\ \boxed{\Rightarrow}\ \left[\begin{aligned}y&=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\\ y&=\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}\end{aligned}\right.$$



8.30. Доказать, что:

1) касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны;



пр. кас. к эллипсу a, тогда из оптического св-ва эллипса пер. $n \perp a$ делит $\angle O'AO''$ пополам, тогда $\angle CAK = 180-90-\alpha = 90-\alpha$ и $\angle KAO' = 90-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAO' = \angle CAK$, тогда по оптич. св-ву гиперболы

a - перпенд. к кас. гиперболы $\Rightarrow$ {т.к. $a \perp n$} n - кас. к гиперболе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a, n - касательные и $a \perp n$ ЧТД.

8.28. Составить уравнения общих касательных к двум кривым второго порядка:

6) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ и $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$; $\quad y=kx+b$

$\Uparrow^{\circ}$

$x^2+2y^2=6 \qquad 16x^2-25y^2=400$

$x^2+2k^2x^2+2b^2+4kbx-6=0$

$D=0:\ (2kb)^2-(2k^2+1)(2b^2-6)=0$

$4\cancel{k^2}b^2=\cancel{4k^2b^2}-12k^2+2b^2-6$

$12k^2-2b^2+6=0$

$6k^2-b^2+3=0$

$16x^2-25k^2x^2-25b^2-50kbx-400=0$

$D=0:\ (25kb)^2=(16-25k^2)(-25b^2-400)$

$(25kb)^2=(25k^2-16)(25b^2+400)$

$(25\cancel{kb})^2=(\cancel{25kb})^2+\frac{4\cancel{00}}{25}\cdot 25k^2-\cancel{16}\cdot\cancel{25}b^2-\frac{1\cancel{6}\cdot 4\cancel{0}0}{16}$

$b^2-25k^2+16=0$

$6k^2-25k^2+16+3=0$

$+19k^2=+19$

$k^2=1 \Rightarrow b^2=9 \Rightarrow \left[\begin{aligned}y&=x+3\\ y&=x-3\\ y&=-x+3\\ y&=-x-3\end{aligned}\right.$ - ур касательных.

Умножение матриц.

15.24. Проверить, справедливы ли матричные тождества:
1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;
2) $(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$;
3) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

3) $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2+B^2$ для пр A, B.

15.22. Вычислить $f(A)$, если:
1) $f(t)=t^2-2t+1,\ A=\begin{Vmatrix}1&1\\1&1\end{Vmatrix}$;
2) $f(t)=t^2-2t+1,\ A=\begin{Vmatrix}1&1\\0&1\end{Vmatrix}$;

2) $t^2-2t+1=(t-1)^2=(A-E)^2=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

15.126. Доказать справедливость тождества:
1) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B$; 2) $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$.

1) $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots\\a_{21}&a_{22}&\dots\\ \vdots&\vdots&\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11}&a_{12}+b_{12}&\dots\\b_{21}+a_{21}&a_{22}+b_{22}&\dots\end{pmatrix}$

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots \\ a_{21} a_{22} \dots \\ \vdots \ \vdots \end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $A+B = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots \\ b_{21}+a_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

2) $AB = (a_{ij})(b_{ij}) \Rightarrow trAB = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{kp}b_{pk}$

$BA = (b_{ij})(a_{ij}) \Rightarrow trBA = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} b_{kp}a_{pk}$, переобозначив $\left.\begin{matrix} k=p \\ p=k \end{matrix}\right\}$ $\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{pk}a_{kp} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kp}b_{pk}$

ЧТД.

15.130. Доказать, что не существует матриц A и B таких, что $AB - BA = E$.

Пусть $\exists$ такие A, B, тогда $tr(AB) = tr(BA) \Rightarrow tr(AB) - tr(BA) = 0 \Rightarrow trE = 0$, но $trE \neq 0$ – противоречие.

15.72. Матрица A перестановочна с любой матрицей порядка n. Доказать, что A — скалярная матрица.

1) Если $A = \lambda E$, то $AB = \lambda EB = \lambda B = B\lambda E = BA$

2) Пусть $A \neq \lambda E$, тогда р-рим $B = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{j}{0} & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $AB = (a_{ij})B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overset{j}{a_{1i}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$

$BA = B(a_{ij}) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & - & - & - & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Тогда если $AB = BA$, то $a_{ji} = a_{ij}$ для $\forall i, j$, а также $\forall\, i \neq j$ $a_{ij} = 0$, такая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots \\ & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$ – скалярная матрица.

Т.4. Вычислите а) A^3, б)* $(E_4 + A)^{11}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

а) $AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$

$AAAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) т.к. A^4 – нул. матрица, то A^{n+4} – нул. матрица.

$(E_4 + A)^{11} = E_4^{11} + 11E_4^{10}A + 55E_4^{9}A^2 + 165E_4^{8}A^3 =$

$= E_4 + 11A + 55A^2 + 165A^3 =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 165 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 55 & 165 \\ 0 & 1 & 11 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

VII. Обратная матрица

15.45. Вычислить:

1) $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

15.48. Проверить, справедливо ли тождество:
1) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;

1) $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$ ⊕

3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ ⊕

15.56. Пусть $A^m = O$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{m-1}$.

Если $(E-A)^{-1} = E + A + \dots + A^{m-1}$ то $(E-A)(E + A + \dots + A^{m-1}) \overset{?}{=} E$

$(E-A)(E + A + \dots + A^{m-1}) = E + \cancel{A} + \dots + \cancel{A^{m-1}} - \cancel{A} - A^2 - \dots - \cancel{A^{m-1}} - A^m = E - \underbrace{A^m}_{0} = E$ ЧТД.

15.57. Матрица A коммутирует с B. Доказать, что тогда A^{-1} коммутирует с B^{-1} (предполагается, что матрицы обратимы). $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ($(AB)^{-1}$ сущ. т.к.)

15.57. Матрица A коммутирует с B. Доказать, что тогда A^{-1} коммутирует с B^{-1} (предполагается, что матрицы обратимы). $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow \underline{B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}}$ $\left\{ \begin{matrix} \text{матрицы } (AB)^{-1} \text{ сущ, т.к.} \\ \exists A^{-1}, B^{-1} \end{matrix} \right\}$

15.59. Пусть $S^{-1}AS = B$ и $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(B) = S^{-1}f(A)S$.

Д-жем, что $(S^{-1}AS)^m = (S^{-1})^m A^n S^m$

1) База инд: $S^{-1}AS = S^{-1}AS$, $m = \underline{1}$

2) Шаг инд: $(S^{-1}AS)^{m-1} = S^{-1}A^{m-1}S$, тогда

$$(S^{-1}AS)^m = (S^{-1}AS)^{m-1}(S^{-1}AS) = S^{-1}A^{m-1}\cancel{(SS^{-1})}AS = S^{-1}A^mS$$

Тогда очевидно для многочлена $S^{-1}f(A)S = \sum_{k=0}^{\infty} S^{-1}\alpha A^k S = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(S^{-1}AS)^k = f(B)$ $\underline{\text{ЧТД}}$.

15.64. Пусть матрицы A, C невырожденные. Решить матричное уравнение:

4) $AXC = B \Rightarrow XC = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$

15.65. Найти матрицу X из уравнения:

1) $\left\| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\| X = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $X \left\| \begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{matrix} \right\|$;

15.54(3).

3) $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|^{-1}$;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} (-1) \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & 1 & -1 \\ 0 & - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг. Матрицы V.

16.18(17)

408. $\left\| \begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ \cancel{8} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{4} \end{matrix} \right\| (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{-15} & \cancel{-10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{1} \\ 0 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - ранг - 2.

кинпр.

16.19(3)

365. $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & \alpha & \cancel{\alpha} \\ 1 & \alpha^2 & \cancel{\alpha^2} \end{matrix} \right\| \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-1 \end{pmatrix} :(\alpha-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ - ранг - 2 при $\alpha \neq \underline{1}$
ранг - 1 при $\alpha = \underline{1}$

16.22. Матрица A имеет порядок n и содержит нулевую подматрицу порядка $n-1$. Оценить ранг A.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ - & - & - & - & - \\ b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{каждый из первых} \\ n-1 \text{ строк - ЛЗ} \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a_{n-1} \\ b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, её порядок $\underline{\underline{\leq 2}}$

16.26. 1) Пусть **a** — строка, **b** — столбец. Вычислить ранг матрицы **ba**

2) (р). Пусть $\mathrm{rg}\, A = 1$. Доказать, что матрица A равна произведению некоторого столбца на некоторую строку.

2) т.к. $\mathrm{rg}\, A = 1$, то если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то любая строка $k \in \overline{m}$ лин. выр. через $(a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})$ и пусть $(a_{11} \dots a_{1n})$ — не все нули.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_2 a_{2n} \\ - & - & - & - \\ \lambda_m a_{m1} & \dots & \dots & \lambda_m a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} (a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}) \quad \text{ЧТД.}$$

20.14 (9)

9) $\mathbf{c}_{166}$, $\mathbf{c}_{203}$, $\mathbf{c}_{204}$, $\mathbf{c}_{197}$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 2&2&2&2 \\ 3&3&3&3 \\ 1&1&2&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$$ — размер. лин. об — 2 базис (1100) и (0011).

20.18. Доказать, что матрицы A_5, A_{10}, A_{13}, A_6 образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2, и найти координатный столбец матрицы A_{26} в этом базисе.

$A_5 = (1\,2\,1\,3)$

$A_{10} = (-1\,5\,1\,4)$

$A_{13} = (1\,1\,0\,5)$

$A_6 = (-1\,3\,1\,7)$

$A_{26} = (5\,14\,6\,13)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&3&5 \\ -1&5&1&4&14 \\ 1&1&0&5&6 \\ -1&3&1&7&13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&5&6 \\ 0&6&1&9&20 \\ 0&4&2&12&19 \\ 0&1&1&-2&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&5&6 \\ 0&1&1&-2&-1 \\ 0&0&-3&20&23 \\ 0&0&-5&21&28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&5&6 \\ 0&1&1&-2&-1 \\ 0&0&-3&20&23 \\ 0&0&0&-37&-37 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_4 = 1,\ x_3 = -1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 3}$$

$A_{26} = 3A_5 + 2A_{10} - A_{13} + A_6$

VIII. Определители порядка n

14.15. Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

1) База инд: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11} \cdot a_{22}$

2) Шаг. инд: $A_{n-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1} a_{kk}$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & - & - & - \\ 0 & a_{22} & - & - \\ 0 & 0 & a_{33} & - \\ 0 & 0 & - & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & - & - \\ 0 & a_{33} & - \\ - & - & - \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \prod_{k=2}^{n-1} a_{kk} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

ЧТД.

14.21 (12).

442. $$\left\|\begin{matrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 3 & 27 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -8 & 1 & 1 \\ 2 & -15 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & -1 \\ 5 & -8 & 1 \\ 2 & -15 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 8 & 19 & 0 \\ 5 & -8 & 1 \\ -3 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 19 \\ +3 & +7 \end{vmatrix} = 56 - 57 = -1$$

14.23. Вычислить определитель порядка n: (6, 10, 12, 16)

1) $|A_{600}|$; 2) $|A_{601}|$; 3) $|A_{610}|$; 4) $|A_{611}|$; 5) $|A_{618}|$;
6) $|A_{605}|$; 7) $|A_{614}|$; 8) $|A_{615}|$; 9) $|A_{622}|$; 10) $|A_{633}|$;
11) $|A_{625}|$; 12) $|A_{626}|$; 13) $|A_{624}|$; 14) $|A_{628}|$;
15) $|A_{641}|$; 16) $|A_{636}|$; 17) $|A_{639}|$; 18) $|A_{621}|$ $(n = 2k)$.

6)

605. $$\left\|\begin{matrix} \mathbf{O} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \end{matrix}\right\| = \left(\begin{matrix}\text{делаем перестановку} \\ \text{1 и n столбца,} \\ \text{потом 2 и n-1 ст.}\end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \, (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

$$\mathbf{605.}\ \left\|\begin{matrix} \mathbf{O} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & \mathbf{O}\end{matrix}\right\| = \left\{\begin{matrix}\text{делаем перестановку} \\ \text{1 и n столбца,} \\ \text{потом 2 и n-1 ст.}\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{[2]} = \prod_{k=1} \lambda_k\,(-1)$$

10)

$$\mathbf{633.}\ \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ - & - & - & - & - \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 0 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ - & - & - & - \\ -1 & -2 & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(-1)(-1)^n n \begin{vmatrix} 2 & \dots \\ 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & \dots \end{vmatrix} \ominus$$

$$\ominus\, n(2\cdot 3\cdot 4 \dots n-1) = (n-1)!\,n = \boxed{n!}$$

12)

$$\mathbf{626.}\ \left\|\begin{matrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & \dots & 5 \\ 2 & -2 & 0 \dots & 0 \\ 2 & 0 & -2 \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 2 & 0 & \dots & 0 \; -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+5(n-1) & 5 & 5 \dots & 5 \\ 0 & -2 & & 0 \\ \vdots & & -2 & \\ \vdots & 0 & & -2 \\ 0 & & & -2 \end{vmatrix} = (3-5+5n)(-2)^{n-1} = \underline{(5n-2)(-2)^{n-1}}$$

16)

$$\mathbf{636.}\ A_n \left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = 2A_{n-1} - A_{n-2}$$

$A_n + A_{n-2} = 2A_{n-1}$

$A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$ – шаг постоянный ⇒

⇒ A_n – ~~геом~~ ар прогрессия

$A_n = a + bn$

$A_1 = 2 \to a + b = 2$

$A_2 = 3 \quad a + 2b = 3$

$\left.\begin{matrix} b = 1 \\ a = 1 \end{matrix}\right\}$ $\underline{A_n = n+1}$

14.24. Вычислить определитель порядка n (полезно получить рекуррентную формулу):

7) $|A_{644}|$ («детерминант Вандермонда»);

$$\mathbf{644.}\ A_n = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{matrix}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & - & - & 1 \\ \lambda_1-\lambda_n & \lambda_2-\lambda_n & - & - & 0 \\ \lambda_1(\lambda_1-\lambda_n) & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_n) & & \dots & 0 \\ - & - & - & - & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1\ 1\ 1\ 1} \\ 0 & \lambda_n-\lambda_1 \quad - \\ \vdots & (\lambda_n-\lambda_1)\lambda_1 \\ 0 & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_n-\lambda_1 & - \\ \lambda_1(\lambda_n-\lambda_1) & - \\ \vdots & \end{vmatrix} \ominus$$

$$\ominus\, (\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\dots A_{n-1}$$

1) Пусть $A_n = \prod\limits_{1\le j<k\le n-1} \lambda_k - \lambda_j$, тогда $A_1 = \lambda_2 - \lambda_1$

2) Шаг-инд: $A_{n-1}(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)\dots(\quad) = A_n$ ЧТД

14.31. 1) Пусть все элементы матрицы второго порядка являются дифференцируемыми функциями от одной переменной t. Доказать, что для производной от определителя, рассматриваемого как функция от t, имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}' = (ad)' - (bc)' = a'd + d'a - b'c - c'b = (a'd - b'c) + (d'a - c'b) = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

14.36. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & -a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow A^T=-A \Rightarrow |A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |A|=(-1)^n|A|$, если n-~~чёт~~ нечёт, то $|A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$ ЧТД

IV. Линейные (векторные) пространства

20.3. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

3) множество векторов, сумма координат которых равна 0;
4) множество векторов, сумма координат которых равна 1.

3) да, является, т.к. если $a_1+a_2\dots a_n=0$ и $b_1+b_2\dots b_n=0$, то $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots=0$, т.е. $\bar b\in U$ и $\bar a\in U$ $\bar a+\bar b\in U$

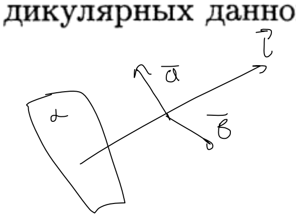
также $\lambda\bar a\in U$, если $\bar a\in U$

Базис: $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\-1\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\-1\end{pmatrix}}_{n-1}$ ⇒ размерность пр-ва $n-1$

4) не является, т.к. если $\bar a\in U$, $\bar b\in U$, то $\bar a+\bar b\notin U$ т.к. $sum(\bar a+\bar b)=2$

20.4. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов геометрического пространства, и если является, определить его размерность:

2) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;



если $\bar a\in U$ и $\bar b\in U$, то $(\bar a,\bar l)=0$ и $(\bar b,\bar l)=0$, тогда

$(\lambda_1\bar a,l)=0$ и $(\lambda_2\bar b,l)=0$

$(\lambda_1\bar a+\lambda_2\bar b,\bar l)=0 \Rightarrow \lambda_1\bar a+\lambda_2\bar b\in\overrightarrow{U} \Rightarrow \overrightarrow{U}$ - подпр-во

Тогда выберем 2 в-ра $\bar c_1,\bar c_2\in\alpha\perp\bar l$, тогда любой $\bar a\in\bar U$ расп. по $\bar c_1,\bar c_2$

20.6. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n, линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n, и если является, то найти его размерность:

1) множество матриц с нулевой первой строкой;
2) множество диагональных матриц;
3) множество верхних треугольных матриц;
4) множество симметрических матриц;
5) множество кососимметрических матриц;

2) $\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \dots & \\ & a_2 & & 0 \\ 0 & & a_3 & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0 & \dots & & 0\\ 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}+\dots$

базис размерностью $n-1$

если $\bar a\in U,\bar b\in U$ $a=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \dots\\ 0 & a_2 & \\ \vdots & & a_3\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}b_1 & 0 & \dots\\ 0 & b_2 & \\ \vdots & & \ddots\end{pmatrix}$ $\Big\}\ \lambda_1 a+\lambda_2 b=\begin{pmatrix}\lambda_1a_1+\lambda_2b_1 & & 0\\ & \lambda_1a_2+\lambda_2b_2 & \\ 0 & \dots & \ddots\end{pmatrix}\in U$

3) $a=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ & a_{22} & \dots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots\end{pmatrix}$ тогда если $\bar a\in U$, $\bar b\in U$, то $\lambda_1\bar a+\lambda_2\bar b=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}+\lambda_2b_{11} & & \\ & \lambda_1a_{22}+\lambda_2b_{22} & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}\in U$ - лин. п-нво.

3) $a=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$, тогда если $\bar{a}\in U$, $\bar{b}\in U$, то $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{22}+\lambda_2 b_{22} & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\in U$ - лин. п-нство.

Базис: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & 0 & \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \end{pmatrix}$

Тогда ч-ло элементов в базисе: $k = n+n-1+\dots+1 = \underline{\underline{\frac{n+1}{2}n}}$

5) Аналогично ~~тр~~ п 3) да это лин под-во

Базис: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & & & \\ \vdots & & 0 & \end{pmatrix}$, ..., тогда кол-во эл. в базисе: $k=\frac{n+1}{2}n$

20.8. Доказать, что при любом натуральном n данное множество функций образует конечномерное линейное пространство; найти размерность и указать базис этого пространства:

1) множество многочленов степени не выше n (обозначается $\mathcal{P}^{(n)}$);

2) множество четных многочленов степени не выше n;

3) множество нечетных многочленов степени не выше n;

1) $p\in P^{(n)}$: $p=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$, тогда если $p_1\in P^{(n)}$, $p_2\in P^{(n)}$, то $p_1+p_2=(a_{01}+a_{02})+(a_{11}+a_{12})x+\dots\in P^{(n)}$
и $\lambda p_1\in P^{(n)}$

базис: $(1, x, x^2\dots x^n)$, размерность $\underline{n+1}$

3) $p\in U$: $p=a_1x+a_3x^3+\dots a_nx^n$, n-нечёт аналогично п. 1) U-лин п-во

базис: $(x, x^3, \dots x^n)$; размерность $\lceil\frac{n}{2}\rceil$

20.20. Доказать, что многочлены 1, $t-\alpha$, $(t-\alpha)^2$, ..., $(t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n, и найти координатный столбец произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

Найдем разложение $p=a_0+a_1t+\dots a_nt^n = b_0+b_1(t-\alpha)+\dots(t-\alpha)^n$

1) $p(\alpha)=b_0$

2) Р-рим $p'(t)=b_1+2b_2(t_1-\alpha)+3b_3(t_1-\alpha)^2+\dots n(t-\alpha)^n$

$p'(\alpha)=b_1$

$p''(t)=2b_2+3\cdot2(t_1-\alpha)+\dots$

$p''(\alpha)=2b_2\Rightarrow b_2=\frac{p''(\alpha)}{2}$

Тогда $p^{(n)}(\alpha)=n!b_n\Rightarrow b_n=\frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}$, каждая производная $p^{(n)}(\alpha)$ сущ $\Rightarrow$ сущ. разложение $p(t)$ по базису $(1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \dots)$

Причём разложение ед-венно.

Т ~~к~~ Тогда с-ма $(1, t-\alpha, \dots)$ является порождающей и так как её кол-во векторов n,

то она является $\underline{\text{базисом}}$. $\underline{\underline{\text{ЧТД}}}$

20.29. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

1) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

2) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

3) расположить векторы обоих базисов в обратном порядке.

1) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;
2) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;
3) расположить векторы обоих базисов в обратном порядке.

$b_1 = e_{11}a_1 + e_{21}a_2 + \dots$

$b_2 = e_{12}a_1 + e_{22}a_2 + \dots$

— — — —

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e & \dots \\ e_{21} & & \dots & \\ e_{31} & & & \dots \end{pmatrix}$$

1) если паменять a_i и a_j это паменяет строки i и j матрицы

2) если паменять b_i и b_j это паменяет сталбцы i и j матрицы.

3) транспонирует матрицу.