Работа над ошибками.

Шахматов Андрей, Б02-304

22 октября 2024 г.

16.8(6)

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$$

Сделаем замену $t = \frac{1-x}{1+x}$, $\mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+t}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{2t}{1+t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{4}B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{32}$$

T3

$$\begin{cases} x = \sinh\theta\cos\varphi \\ y = \sinh\theta\sin\varphi \\ z = \cosh\theta \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} dx = \cosh\theta\cos\varphi d\theta - \sinh\theta\sin\varphi d\varphi \\ dy = \cosh\theta\sin\varphi d\theta + \sinh\theta\cos\varphi d\varphi \\ dz = \sinh\theta d\theta \end{cases}$$

Тогда прямой образ формы $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$:

$$\begin{aligned} \phi^*\omega = \sinh\theta\cos\varphi \cdot (\cosh\theta\sin\varphi d\theta + \sinh\theta\cos\varphi d\varphi) \wedge (\sinh\theta d\theta) + \\ \sinh\theta\sin\varphi \cdot (\sinh\theta d\theta) \wedge (\cosh\theta\cos\varphi d\theta - \sinh\theta\sin\varphi d\varphi) + \\ \cosh\theta \cdot (\cosh\theta\cos\varphi d\theta - \sinh\theta\sin\varphi d\varphi) \wedge (\cosh\theta\sin\varphi d\theta + \sinh\theta\cos\varphi d\varphi) = \\ \sinh^3\theta\cos^2\varphi d\varphi \wedge d\theta - \sinh^3\theta\sin^2\varphi d\theta \wedge d\varphi + \\ \cosh^2\theta\sinh\theta\cos^2\varphi d\theta \wedge d\varphi - \cosh^2\theta\sinh\theta\sin^2\varphi d\varphi \wedge d\theta = \\ \sinh^3\theta d\varphi \wedge d\theta - \cosh^2\theta\sinh\theta d\varphi \wedge d\theta = \\ -\sinh\theta d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

4.52(5)

$$2(x+y)z_{yy}+z_x=0$$
$$u=x,\, v=\sqrt{x+y}$$

Найдём матрицу Якоби:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2v} & \frac{1}{2v} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$z_x=z_u u_x+z_v v_x=z_u+\frac{z_v}{2v}$$
$$z_y=z_u u_y+z_v v_y=\frac{z_v}{2v}$$

Для второй производной:

$$z_{yy}=z_{yu}u_y+z_{yv}v_y=\frac{\frac{z_{vv}}{2v}-\frac{z_v}{2v^2}}{2v}=\frac{z_{vv}}{4v^2}-\frac{z_v}{4v^3}$$

Тогда перепишем исходное уравнение:

$$2v^2\left(\frac{z_{vv}}{4v^2}-\frac{z_v}{4v^3}\right)+z_u+\frac{z_v}{2v}=\frac{z_{vv}}{2}+z_u=0$$

3.92(2)

Выразим w_v в исходных координатах:

$$w_v=(xy)_v-z_v$$

Матрица перехода

$$\begin{pmatrix} -1 & z & y \\ z & -1 & x \\ y & x & -1 \end{pmatrix}$$

Обратная к ней:

$$C\begin{pmatrix} 1-x^2 & xy+z & xz+y \\ xy+z & 1-y^2 & x+yz \\ xz+y & x+yz & 1-z^2 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$z_v=z_x x_v+z_y y_v=C(z_x(xy+z)+z_y(1-y^2))$$
$$(xy)_v=xy_v+yx_v=C(x(1-y^2)+y(xy+z))=C(x+yz)$$

Тогда

$$w_v=C(x+yz)-C(z_x(xy+z)+z_y(1-y^2))=C(x+yz-z_x(xy+z)+z_y(1-y^2))=0$$

Тогда интегрируя $w_v=0$ получим:

$$w=f(u)$$

Или в исходных координатах

$$xy-z=f(yz-x)$$

*Где f - произвольная функция.