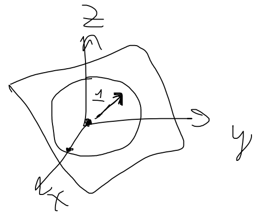
$T2.$ а) $p\Gamma(p)=\Gamma(p+1) \Rightarrow p\Gamma(p)\to 1,\ p\to 0 \Rightarrow \Gamma(p)\sim \frac{1}{p},\ p\to 0$

$T3.$ а) $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi} dx \frac{\sin x}{x}\int_0^{x} dy = \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2$

в) $\int\limits_{0\le x_1 \dots x_n \le a} (x_1+\dots+x_n)^2 dx_1\dots dx_n = a^{n-1}\int_0^a x^2dx\cdot n + 2na^{n-2}\int\limits_{0\le x,y\le a} xy\,dx\,dy = 2na^{n-2}\left(\int_0^a x\,dx\right)^2 + a^{n-1}n\int_0^a x^2dx =$

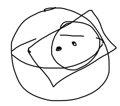
$= 2na^{n-2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + na^{n-1}\frac{a^3}{3} = \frac{na^{n+2}}{2} + \frac{na^{n+2}}{3} = \frac{5na^{n+2}}{6}$



$T.7.$ б) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2 ds = I \Rightarrow 3I = \int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2+y^2+z^2 ds = \int\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=0}} a^2ds = a^2\int_S ds = \underline{\underline{2\pi a^2}}$

$T.4.$ б) б) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x+y+z)\,dxdydz; = \iiint\limits_{h} f(t)\,dt\,dy\,dz = \int_0^a dt\, f(t)\pi(a^2-t^2)$

$\begin{Bmatrix} t=x+y+z \\ y=y \\ z=z \end{Bmatrix}$



$T.1.$ а) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^\beta}dx$, сход при $\alpha,\beta>0$ и $\alpha,\beta<0$

$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^\beta}dx = \begin{Bmatrix} t=x^\beta \\ dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}dt \end{Bmatrix} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-1}{\beta}}e^{-t}\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

в) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha \ln x}{1+x^\beta}dx = \begin{Bmatrix} x^\beta=t \\ dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\ln t}{1+t}dt = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt$

$\left\{\gamma = \frac{\alpha+1}{\beta}\right\}$

$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt = \begin{Bmatrix} \ln t = p \\ dt = e^p dp \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}p}{1+e^p}dp$

Р-рим $\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} = B(\gamma,1-\gamma) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}}{1+t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}}{1+e^p}dp$

$-\frac{\pi^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{pe^{\gamma p}}{1+e^p}dp \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha \ln x}{1+x^\beta}dx = -\frac{\pi^2\beta^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)}$

$T6.$ а) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ 0\le x\le b \Rightarrow l = \int_0^b\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b = a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$

б) На доп семинаре

Д-во ф-лы дополнения.

I. Д-жем, что $\pi\,\mathrm{ctg}\,x\pi = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

$f(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

---

1) Д-жем, что $g(x)$ опред для всех нецелых значений: $g(x) = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$ — сход равномерно $\forall x\notin\mathbb{Z}$ т.к. $\frac{1}{x^2-n^2}\sim\frac{1}{n^2}\to$ сходится.

$f(x)$ — периодическое с периодом 1. ... $\boxed{g_N(x)=g_N(x+1)}$

$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$ — сход равномерно $\forall x \in K$ т.к. x^2-n^2 n^2

2) Д-жем, что $g(x)$ и $f(x)$ — периодические с периодом 1.

$g_N = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \to g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n+2} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} \Rightarrow$ при $N \to \infty$ $\boxed{g_N(x) = g_N(x+1)}$

3) $f(x) = -f(-x)$; $g(x) = -g(-x)$ — очев

4) для $f(x)$: $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ $\left(\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x = \frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin \pi x} = \frac{\pi\left(\cos^2\frac{\pi x}{2} - \sin^2\frac{\pi x}{2}\right)}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} = \pi\,\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2} + \pi\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$

для $g(x)$: $g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}$ $\Rightarrow$ переходя к пределу

$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$

5) Тогда $h(x) \equiv f(x) - g(x)$ — нечёт непр ф-ция и $2h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Пусть $x_0 - h(x_0) = \max h(x_0) = m \Rightarrow 2m = h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$

Пусть $h\left(\frac{x_0}{2}\right) < m$: $2m < m + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > m$ — против $\Rightarrow m = h\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Тогда $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow h(0) = \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$, но $h(0) = 0$ т.к. $\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x \to \frac{1}{x}$ при $x \to 0$

Тогда $\boxed{m=0} \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

II. $\int_0^x \left(\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi t - \frac{1}{t}\right)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$

$\|$

$\ln\left|\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right|$

Тогда $\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

III. $\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx =$

$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1 \left(1 - x^{1/n}\right)^{\alpha-1}dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} B(n,\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$

IV. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{n^{\alpha} n^{1-\alpha}}_{1} \frac{(n-1)!(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} =$

$= \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ //

T.10. $xe^{f+g} + fg = 1$, $ye^{f-g} - \frac{f}{1+g} = 2x$ в $x=1$ $y=2$ $f(1,2)=0$ $g(1,2)=0$

$$\begin{cases} e^{f+g}dx + xe^{f+g}(df+dg) + fdg + gdf = 0 \\ e^{f-g}dy - \frac{(1+g)df - fdg}{(1+g)^2} = 2dx \end{cases} \xrightarrow{(1,2)} \begin{cases} dx + df + dg = 0 \\ dy - df = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dg = dx - dy \\ df = dy - 2dx \end{cases}$$

T.12. $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ $|J| > 0$

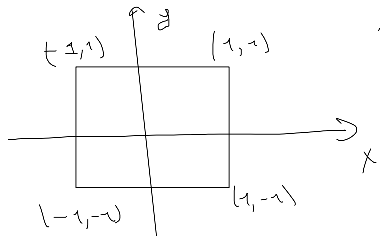
т.к. $|J| > 0$ по Loc. т. об обр ф-ции $\forall x \in \mathcal{U}$.

Пусть $W \subseteq \mathcal{U}$ — откр, тогда $Q = f(W) = \bigcup_{x\in W} f(x) = \bigcup_{x\in W} f_x(\mathcal{U}_x)$, где

$f_x = f|\mathcal{U}_x$, где $\exists f^{-1}: W_x \to \mathcal{U}_x$ причем т.к. f непр, то W_x — открыто т.к. $\mathcal{U}_x$ — откр

$Q = \bigcup_{x\in W} W_x \Rightarrow Q$ — откр //

$$Q = \bigcup_{x \in W} W_x \Rightarrow Q - \text{откр} \,//$$
$\uparrow$ откр

Т.14. 

тогда $\begin{cases} y' = tg\left(y\frac{\pi}{2}\right) \\ x' = tg\left(x\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = arctg(y')\frac{2}{\pi} \\ x = arctg(x')\frac{2}{\pi} \end{cases}$ – обратн.

непр диффер — непр диффер

нашли диффеоморф $I(0,1) \to \mathbb{R}^2$

т.к. в Т13 уже нашли д.м $\mathbb{R}^2 \to B(0,1) \Rightarrow I(0,1) \to B(0,1)$ – диффеоморф/

Т.17. $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix} = e^u \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$

$J^{-1} = e^{-u}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \to \begin{cases} u_x = e^{-u}\cos v \\ v_x = e^{-u}\sin v \\ u_y = e^{-u}(-\sin v) \\ v_y = e^{-u}\cos v \end{cases} \to$

$u_{xx} = -e^{-u} u_x \cos v - e^{-u} v_x \sin v$

$u_{yy} = e^{-u} u_x \sin v - e^{-u} v_x \cos v$

$v_{xx} = -e^{-u} u_x \sin v + e^{-u} v_x \cos v$

$v_{yy} = -e^{-u} u_x \cos v - e^{-u} v_x \sin v$

$f_x = f_u u_x + f_v v_x$

$f_{xx} = (f_{uu} u_x + f_{uv} v_x) u_x + (f_{vu} u_x + f_{vv} v_x) v_x + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}$

$f_{yy} = (f_{uu} u_y + f_{uv} v_y) u_y + (f_{vu} u_y + f_{vv} v_y) v_y + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}$

$f_{xx} + f_{yy} = f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2 f_{uv}(v_x u_x + v_y u_y) + f_{vv}(v_y^2 + v_x^2) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) + f_u(u_{xx} + u_{yy})$

$\Delta f = f_{uu} e^{-2u} + f_{vv} e^{-2u} + 2 f_{uv} \cdot 0 + f_v e^{-u}(u_x(\sin v + \cos v) - v_x(\sin v + \cos v)) +$
$+ f_u e^{-u}(v_x(\sin v + \cos v) - u_x(\sin v + \cos v)) \ominus$

$\ominus e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + (f_v - f_u) e^{-u}(\sin v + \cos v) e^{-u}(\cos v - \sin v) \ominus$

$\ominus e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + e^{-2u}(f_v - f_u)\cos 2v \,//$

Лапласиан в сфер коорд

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \to J = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$H_1^2 = 1$
$H_2^2 = \frac{1}{r^2}$
$H_3^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$
$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Будем считать в терм виде $(x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$
$(r,\theta,\varphi) = (y_1,y_2,y_3)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}$

Мы знаем, что сфер.коорд ортогональные т.е. $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_i} = H_{kl}^2$, $H_{kl} = \begin{cases} H_k, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases}$

$\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \sum\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_j} H_j + \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}$

Мы знаем, что сфер.-коорд. ...

$$\Delta f=\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot \underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}_{H_{kj}^2} + \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_j} H_j + \sum_i \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

1) $\frac{\partial^2 r}{\partial^2 x^2} = \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 y} = \frac{\partial(\sin\theta\sin\varphi)}{\partial y} = \frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 z} = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial z} = +\frac{\sin^2\theta}{r}$

$\Bigg\}\ \sum\frac{\partial^2 r}{\partial^2 x_i} = \frac{2}{r}$

2) $\theta_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta\cancel{\sin\theta\cos^2\varphi} - \cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}{r^2}} - \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta}$

$\theta_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi - \frac{\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta}$

$\Bigg\}\ \sum\theta_{x_ix_i} = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}$?

$\theta_{zz} = \frac{\partial\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}$

3) $\varphi_{xx} = \frac{\partial\left(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta\cdot\cos\varphi + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$

$\varphi_{yy} = \frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1} + \frac{\cos\varphi}{r}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$

$\Bigg\}\ \sum\varphi_{x_ix_i} = 0$?

$\varphi_{zz} = 0$

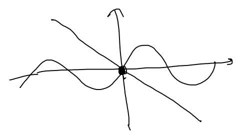
Тогда $\underline{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}}$

V. Экстремумы функций неск. переменных.

Т.21. б) $F(f,x,y) = f + \sin f - x^2 + y^2 = 0$

1) $df + \cos f\, df - 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1+\cos f \neq 0 \\ -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos f \neq -1 \\ x = y = 0 \end{cases}$ Если $x = y = 0 \Rightarrow f + \sin f = 0$, $-f = \sin f$, единств. реш. $f = 0$ //



2) $F_{xy} = \frac{1}{1+\cos 0}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — неопределена $\Rightarrow$ нет ни макс ни мин.

Т.22. а) $\begin{cases} f = x+y+z \\ F = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow L = f - \lambda F$

$L_x = 1 - \lambda\cdot 2x = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2\lambda} \Rightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\cdot 3 = 1 \Leftrightarrow$

$L_y = 1 - \lambda\cdot 2y = 0 \qquad \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$L_z = 1 - \lambda\cdot 2z = 0$

$d^2L = -2\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = +\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — положительно определена $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ она остается п. опр при сужении на $T_x S \to$ в т. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — минимум

тогда в т. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — максимум из-за симметрии ф-ии отн знака.

б) Другие знаки. Мы получили, что в $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}\right) \to \max$.

$\lambda>0$: Если $x<0$ и $y<0$, то $f(x,y,z) = xyz$ также дост. максимума т.к.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — максимум. $\to$ Знак локальный т.е. и глобал

$\lambda>0$: Если $x<0$ и $y<0$, то $f(x,y,z)=xyz$ также удовл...

$f\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{1}{3\sqrt3}=f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ − максимум. → как локальный так и глобал

$\lambda<0$: Ф-ция достит минимума, т.к. это единственные точки, подозр на минимум, а f должна достит минимума как непр на компакте.

g) $\begin{cases} f(\bar x)=Q(\bar x) \text{ − симм кв форма.} \\ |\bar x|^2=1 \end{cases}$ 1) Сделаем ортогональную замену коорд, где Q − диагональная м-ца с с.знач на диагонали. Т.к. $\exists$ к ортогональная, то условие $|\bar x|^2=1$ сохраняется и в н-с коорд.

2) Мы свели з-чу к з-че, где $Q=\mathrm{diag}(\lambda_1\ldots\lambda_n)$ в т-случае

$Q(\bar x)=\lambda_1x_1^2+\ldots+\lambda_nx_n^2$ и $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$

Если $\exists\ \lambda_i=\lambda_j$ то в-ведём замену $x_i^2+x_j^2=y_k^2$ тогда

$f(\bar x)=\lambda_iy_i^2$, где $\lambda_i\neq\lambda_j$

$L=(\lambda_i-\mu)y_i^2$, μ:- мн-ли Л-жа.

$dL=2(\lambda_i-\mu)y_idy_i \Rightarrow$ к решение $\mu_k=\lambda_i$, $y_i=\pm1$, $y_{j\neq i}=0$

$d^2L=2(\lambda_i-\mu)dy_i^2$ $\quad T_yS:\ y_idy_i=0$

Пусть $y_1=1$, $\mu=\lambda_1$ $\Big\}$ $d^2L=\begin{pmatrix}0&&&\\&\lambda_2-\lambda_1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n-\lambda_n\end{pmatrix}$ $T_yS:\ dy=0$ $\Big\}$ т.е. Сужение на T_yS: $A=\begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n-\lambda_n\end{pmatrix}$ т.е. в случае, если $\lambda_1=\min(\lambda_1\ldots\lambda_n)$ − $A>0$ − минимум

$\lambda_1=\max(\lambda_1\ldots\lambda_n)$ $A<0$ − максимум

$f_{max}=\max(\lambda_1\ldots\lambda_n)$
$f_{min}=\min(\lambda_1\ldots\lambda_n)$ | больше макс и минимумов нет//

, где $\lambda_1\ldots\lambda_n$ − с значения Q.

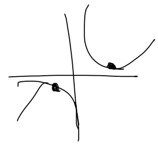
T.23. $\det A=\det(S^{-1}D(A)S)=\det D(A)=xyzt=1$

$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}(S^{-1}D(A)S)=\mathrm{tr}(S^{-1}S\,D(A))=\mathrm{tr}(D(A))=x+y+z+t$

Тогда: $\begin{cases} f(x,y,z,t)=x+y+z+t\\ xyzt=1\end{cases}$

$yzt\neq0\Rightarrow x=\frac{1}{yzt}\Rightarrow f=y+z+t+\frac{1}{yzt}$

$df=dy\underbrace{\left(1-\frac{1}{zty^2}\right)}_{f_y}+dz\underbrace{\left(1-\frac{1}{z^2yt}\right)}_{f_z}+dt\underbrace{\left(1-\frac{1}{zyt^2}\right)}_{f_t}=0\Rightarrow \begin{cases}zty^2=1\\zyt^2=1\\ytz^2=1\end{cases}$



$z=\frac{1}{ty^2}\Rightarrow t^2y\cdot\frac{1}{ty^2}=1\Rightarrow\frac{t}{y}=1\Rightarrow t=y=z=\pm1$

$d^2f=\begin{pmatrix}\frac{2}{zty^3}&\frac{1}{z^2y^2t}&\frac{1}{y^2t^2z}\\ \frac{1}{z^2y^2t}&\frac{2}{z^3ty}&\frac{1}{z^2t^2z}\\ \frac{1}{y^2t^2z}&\frac{1}{z^2t^2z}&\frac{2}{zt^3y}\end{pmatrix}$ $\quad d^2f(+1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}>0$ − мин

$d^2f(-1)=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}<0$ − макс

− строгие.

T.26. $f(x,y)=x\left((x^2-1)^2+\frac{3}{5}\right)+xy^2$

$x=0\Rightarrow 1+y^2=0$ − нет реш.

... $5x^2=0.8\Rightarrow x=\pm\sqrt{0.8}$

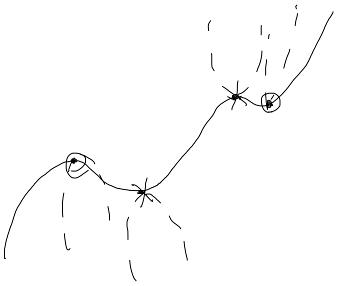
T.26. $f(x,y) = x\left((x^2-1)^2 + \frac{2}{5}\right) + xy^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{5} + y^2 = 0 \\ f_y = 2xy = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 1+y^2=0 \text{ - нет реш.} \\ y=0 \Rightarrow 5x^4-6x^2+\frac{2}{5}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=0{,}8 \to & x=\pm\sqrt{0{,}8} \\ x^2=0{,}4 & x=\pm\sqrt{0{,}4} \end{array}\right. \end{array}$$

$$d^2 f = \begin{pmatrix} 20x^3 - 12x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \{x=\sqrt{0{,}8}\} = \begin{pmatrix} \underbrace{20(0{,}8)^{3/2} - 12\cdot 0{,}8}_{>0} & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}8} \end{pmatrix} > 0 \to \text{минимум}$$

при $x = -\sqrt{0{,}8}$ – макс.

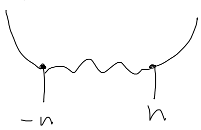
$$\{x=\sqrt{0{,}4}\} \approx \begin{pmatrix} -2{,}5 & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}4} \end{pmatrix} \text{ - неопределена}$$



T.25. $n=1$: 1) Если $P(x)$ - нечёт степени, то $\exists x_0$ т.ч. $P(x_0)=0$ и т.к. $|P(x)|\geq 0$ то $|P(x_0)|=0$ - мин дост.

2) Если $P(x)$ - чёт степени и не имеет корней, то б.о.о. $P(x)>0$

Тогда для д.б. n $P(x \mid |x|>n)$ - строго возрастает или убывает



Тогда $P|_{[-n,n]}$ - дост мин-ма на компакте, то

тогда P дост м-ма на $\mathbb{R}^n$.

$n=2$: $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^2 \geq 0$ $\inf f(x,y) = 0$ при $y_n \to 0$, $x = \frac{1}{y_n}$ не достигается.

T.24. 1) В случае если A - диагонализируемая, то задача экв пред-щей и $\min \operatorname{tr} A = 1+1+\frac{1}{1} = 3$ // при $x=y=1$

2) A - недиаг. T.23 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$ - не знаю я думаю любое $\operatorname{tr} A$ может быть любым.

т.к. a_0, a_1, a_2 - независ. //

T.19. б) $\sin(x+y+z) - \sin x - \sin y - \sin z = f(x,y,z)$

$f_x = f_y = f_z = 0 \Rightarrow \cos(x+y+z) = \cos x = \cos y = \cos z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2\pi k_1,\ y=2\pi k_2,\ z=2\pi k_3 & p_0 \\ x=2\pi k_1+\pi,\ y=2\pi k_2+\pi,\ z=2\pi k_3+\pi & p_1 \\ x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_1,\ y=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_2,\ z=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_3 & p_2 \end{array}\right.$$

$$d_2 f = \begin{pmatrix} -\sin(x+y+z)+\sin x & -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z) \\ -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z)+\sin y & -\sin(x+y+z) \\ -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z)+\sin z \end{pmatrix}$$

$d_2 f(p_0) = 0$ - полуопределена $\Big\}$ р-рим $f|_{y=-\frac{x}{2},\, z=-\frac{x}{2}} = \sin(0) - \sin x - \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = -\left(\sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) \to$ что >0 при $x>0$ и <0 при $x<0$ // - нет мин и макс.

$d_2 f(p_1) = 0$

$$d_2 f(p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \text{ - минимум //}$$

аналог для $-\frac{\pi}{2}$ - максимум //

T22. в) $f = xyz \to f = -xy(x+y)$

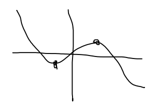
$\begin{cases} x+y+z=0 \end{cases} \to 2x^2+2y^2+2xy=1 \to (x+y)^2 - xy = \frac{1}{2}$ $\Bigg\}$ $\begin{cases} xy = p \\ x+y = q \end{cases}$

T22. в) $f = xyz \to f = -xy(x+y)$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \to 2x^2+2y^2+2xy=1 \to (x+y)^2 - xy = \frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2+2xy-xy=\frac{1}{2}$$

$x+y=q$



$$f = -(x+y)\left((x+y)^2-\frac{1}{2}\right) = -t\left(t^2-\frac{1}{2}\right) = -t^3+\frac{t}{2}$$

$$f'(t) = -3t^2+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{6^{3/2}}+\frac{1}{2\sqrt{6}} \text{ - max}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{6^{3/2}}-\frac{1}{2\sqrt{6}} \text{ - min}$$

VI. T.28.

а) $w(x,y) = x\,dy - y\,dx$

$$dw = (1+1)\,dx\wedge dy = 2\,dx\wedge dy$$

в) $w(x,y) = f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy) = f(x^2+y^2)\,d(x^2+y^2) = f(g)\,dg$

$$dw = df\wedge dg$$

T.29. б) $w = xy\,dz + yz\,dx + zx\,dy$

$$dw = (y\,dx+x\,dy)\wedge dz + (z\,dy+y\,dz)\wedge dx + (x\,dz+z\,dx)\wedge dy =$$

$$= \underbrace{y\,dx\wedge dz + y\,dz\wedge dx}_{0} + \underbrace{x\,dy\wedge dz + x\,dz\wedge dy}_{0} + \underbrace{z\,dy\wedge dx + z\,dx\wedge dy}_{0} = 0$$

T.30. б) $w(x,y,z) = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi \\ dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi \\ dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r & \theta & \varphi \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\psi^* w(r,\theta,\varphi) = \Big[r\sin\theta\cos\varphi\big(-r\sin^2\theta\sin\varphi$$