Практика 8.

Шахматов Андрей, Б02-304

24 марта 2024 г.

Содержание

1 1.1

Для равномерного разбиения сумма Римана имеет вид:

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\left(3n+1\right) = \frac{3}{2}$$

Геометрическая прогрессия потом.

2 1.2

Рассмотрим $f(x) = 2D(x) - 1$, где $D(x)$ - функция Дирихле. Такая функция очевидно не интегрируема.
а) Однако $|f(x)| \equiv 1$ - интегрируема.
б) $|f^2(x)| \equiv 1$ - интегрируема.
в) $g(x) = 1$ - интегрируема, и $0 \leq D(x) \leq 1$.

3 1.3

Докажем через определение по Коши учитывая ограниченность функции f:

$$\left| \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq |w_f([x_0, x])(x - x_0)| \leq M|x - x_0|$$

Получили, что функция Липшицева, а значит непрерывна.

4 2.1

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

5 2.2

В одну сторону:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2^x}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1 + x\ln 2}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4}\ln 2 > \ln 2$$

В другую сторону:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2^x}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{3}{4}} 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\left(\sqrt[4]{8} - 1\right) < \frac{1}{\ln 2}$$

6 2.3

Из критерия интегрирования через взвешенные колебания рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, выделим промежуток $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, тогда $w_f([0, \delta)) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$, Рассмотрим функцию на отрезке $[\delta, 1]$, на нём функция непрерывна, а значит и интегрируема, тогда существует такое разбиение τ, что $\Omega(f_{[\delta,1]}, \tau) < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда полная взвешенная сумма колебаний, полченная объединением $\tau' = \tau \cup [0, \delta)$:

$$\Omega(f, \tau') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Что означает интегрируемость исходной функции функции.

7 2.4

а) Так как функция g - непрерывно дифференцируема, то g' ограничена, а значит $|g'| < M$. Тогда для любого колебания по теореме Лагранжа:

$$w_{g\circ f}(\Delta) = |g'(\xi)|w_f(\Delta) \leq Mw_f(\Delta)$$

Из чего следует:

$$\Omega(g \circ f, \tau) \leq M\Omega(f, \tau) \leq M\varepsilon$$

б) По теореме 4.123 из "An explanations"если f - интегрируема, то $|f|$ - тоже интегрируема. Остаётся доказать, если $h(x) = |f(x)|$ - интегрируема и $g(x) = x^p$, то $g \circ h$ - интегрируема. Так как $g(x)$ - непрерывно дифференцируема, то согласно пункту а) композиция интегрируема.

8 3.1

Докажем для функции Римана на отрезке $[0, 1]$, а так как функция Римана периодична, то и для произвольного отрезка она будет интегрируема. Для любого $\varepsilon > 0$ тогда функция Римана принимает значение большее $\frac{\varepsilon}{2}$ конечное число раз, покроем все точки x для которых $R(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ семейством окрестностей $U_{\frac{\varepsilon}{4}}, U_{\frac{\varepsilon}{8}}, \ldots$, тогда взвешенная сумма колебаний по таким окрестностям не превосходит:

$$\Omega(f_U, \tau_U) \leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{8} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$$

В остальных точках значение функции Римана не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, а значит взвешенная сумма колебаний не превосходит $1 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, тогда взвешенная сумма колебаний по всему разбиению не превосходит ε.

9 3.2

Мы уже доказывали, что такая функция интегрируема. Тогда остаётся доказать, что производная первообразной равна 0 в точке 0, т.е:

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = o(x)$$

А что дальше не понятно.

10 3.3

Предположим $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, тогда верхние суммы Дарбу должны стремиться к 0 с уменьшением мелкости разбиения. Выберем такое разбиение для которого $S(f, \tau_1) < 1$, должен существовать отрезок I_1 на котором супермум меньше 1, тогда выполнено, что $f(x \in I_1) < 1$. Далее найдём разбиение τ_2 такое, что $S(f, \tau_2) < \frac{|I_1|}{2}$, должен существовать отрезок $I_2 \subset I_1$, такой что $f(x \in I_2) < \frac{1}{2}$, иначе бы верхняя сумма Дарбу была бы больше $\frac{|I_1|}{2}$. Производя нахождение отрезков так далее получим, что $f(x \in I_n) < \frac{1}{n}$, и $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1$. Получили последовательность вложенных отрезков, известно, что они имеют ненулевое пересечение, тогда $\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \; f(x) = 0$, то есть функция не строго положительна.

11 3.4

Выберем промежуток $I \in [a, b]$ и добавим к нему точку t, разбивающую его на 2 промежутка I_1 и I_2. Тогда рассмотрим одно из слагаемых суммы Дарбу:

$$|I| \sup_I f(x) = |I_1| \sup_I f(x) + |I_2| \sup_I f(x) \geq |I_1| \sup_{I_1} f(x) + |I_1| \sup_{I_2} f(x)$$

То есть при разбиении на более мелкие части сумма Дарбу может только уменьшиться. Дальше не знаю пока.