1.2. Используя понятие «сумма линейных подпространств», доказать неравенство $\mathrm{rk}\,(A+B) \leqslant \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B$, где A и B — матрицы порядка $m \times n$. При каких условиях имеет место равенство?

$A = (a_i)$ тогда $\mathrm{rk}\,A = \dim\langle a_i\rangle$

$B = (b_i)$ базисные ст-цы; $\mathrm{rk}\,B = \dim\langle b_i\rangle$

$A+B = \dim\langle a_i + b_i\rangle$

$\dim\langle a_i+b_i\rangle = \dim\langle a_i\rangle + \dim\langle b_i\rangle - \dim\langle a_i\rangle\cap\langle b_i\rangle =$

$\mathrm{rk}\,A+B \leqslant \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B$, где р-во дост. при

$\langle a_i\rangle \cap \langle b_i\rangle = \{0\}$

1.3. Доказать, что линейное пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой верхнетреугольных и кососимметричных матриц порядка n. Найти проекции матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ на каждое из этих подпространств параллельно другому подпространству.

$A \in M_n$. $A = A^{\nearrow} + A^{\searrow} = \underbrace{A^{\nearrow} + A^{\searrow T}}_{\text{верхтреуг}} + \underbrace{A^{\searrow} - A^{\searrow T}}_{\text{кососим}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\nearrow} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\nearrow} + A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{\searrow} - A^{\searrow T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. В пространстве P - многочленов с действвительными коэффициентами степени не выше 3 даны подпространства $U = \langle 1+t+t^2+t^3;\ -1-2t+t^3\rangle$ и $V = \langle -1-t+t^2-t^3;\ 2+2t+t^3\rangle$. Доказать, что $P = U \oplus V$. Найти проекцию вектора $4+2t+4t^2+4t^3$ на подпространство U параллельно подпространству V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \dim U = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \dim V = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim U+V = 4 \Rightarrow \dim U \cap V = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Разложение: $\underbrace{-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} + \underbrace{5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$