1. T1. 1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k}$ $\longrightarrow$ $\delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j \\ &g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$$

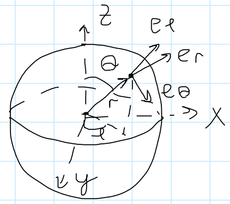
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

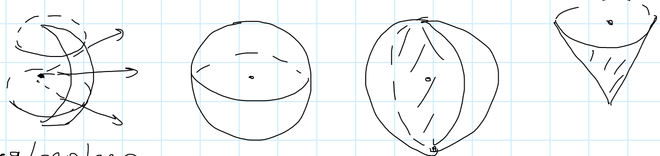
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

T2.



$\vec R = x\vec i + y\vec j + z\vec k = r\sin\theta\cos\varphi\, \vec i + r\sin\theta\sin\varphi\, \vec j + r\cos\theta\, \vec k$

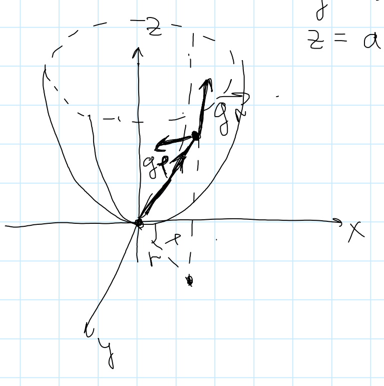
$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



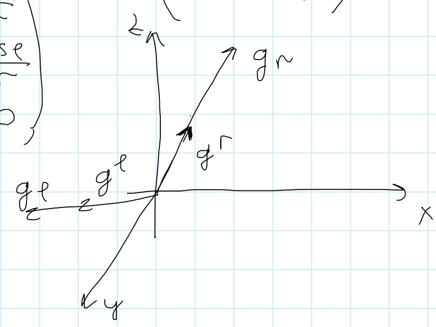
кривая/огр/окр сфера плоскость конус

T3. $z = a(x^2+y^2) \Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= ar^2 \end{aligned}$ $\Rightarrow M_{r\varphi} = \begin{array}{c} \begin{matrix} g_r & g_\varphi \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$



$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$



T4*. т.к. ковар произв явл тензором, то её свёртка не изм при смене С.К.

Найдём $a^i{}_{;i}$ в ДСК, вектор $a = (x, y, z)$, а $\Gamma^i_{jk} = 0$ //, тогда

$$a^i_{;i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow \boxed{a^i_{;i} = 3}$$

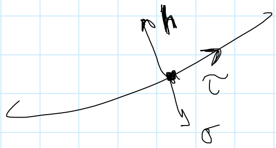
2. **1.18.** Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$.

$\vec{w} \parallel \vec{r}$ если $0 = w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot{\varphi} = \text{const} \xRightarrow{\exp}$

$\xRightarrow{\exp} r^2\dot{\varphi} = \text{const}$

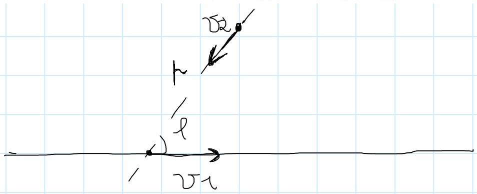
1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

$\vec{w} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a(\vec{v}\times\vec{r})$, т.к. $\begin{cases} \vec{w} \perp \vec{v} \\ \vec{v} \parallel \vec{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{v} = 0 \\ \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a(\vec{v}\times\vec{r}) \end{array}$

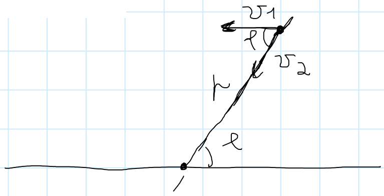


$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec{n}\right| = |a(\vec{v}\times\vec{r})| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a|\,|\vec{v}\times\vec{r}| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a|\,|\vec{v}\times\vec{r}|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



$\xrightarrow{\text{в С.О. уб.}}$

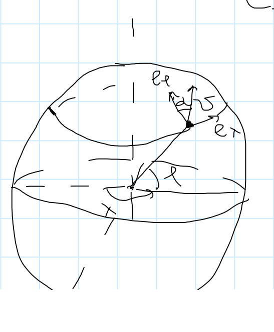


$$\left.\begin{array}{l} \dot{r} = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi) \\ r\dot{\varphi} = v_\varphi = v_1\sin\varphi \end{array}\right\} -\frac{v_2 + v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow$$

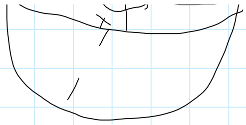
$$\Rightarrow r = r_0 e^{-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$$

Т.5.*



$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot{\lambda} = v\sin\alpha \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} = v\cos\alpha \end{cases}$$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{\operatorname{tg}\alpha} = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$



1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda - \lambda_0}{\operatorname{tg}\alpha} = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right) e^{\operatorname{ctg}\alpha(\lambda - \lambda_0)}$ //

2)