Дифференциальные уравнения 2.

Шахматов Андрей, Б02-304

19 ноября 2024 г.

Содержание

1 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

8.5

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

8.8

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 + 3i \\ \lambda = 1 - 3i \end{cases}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda x} \cos 3x + C_2 e^{\lambda x} \sin 3x$$

8.25

$$y'''' - 5y''' + 7y'' - 3y' = 0$$

Сделаем замену $z = y'$, тогда

$$z''' - 5z'' + 7z' - 3z = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7z - 3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 1 - \text{кратный корень} \end{cases}$$

Решением будет являться

$$z = C_1 e^{3x} + C_2 x e^x + C_3 e^x$$

Проинтегрируем это уравнение и получим выраденние для y:

$$y = C_1' e^{3x} + C_2' x e^x + C_3' e^x + C_4$$

8.36

$$y'''' + 3y'' + 2y = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 + 2 = 0 \implies \begin{cases} \lambda^2 = -2 \\ \lambda^2 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -\sqrt{2}i \\ \lambda = \sqrt{2}i \\ \lambda = -i \\ \lambda = i \end{cases}$$

Решение уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 \cos x\sqrt{2} + C_2 \sin x\sqrt{2} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

8.47

$$y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x$$

Сначала найдём общее решение

$$y'' + 4y = 0$$

С учётом решений характеристических уравнений $\lambda^2 = -4$ общее решение имеет вид

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

(((((Доделать)))))

8.69

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1 - \text{кратный корень}$$

Общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + xC_2)e^{-x}$$

Методом вариации постоянной

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'(1+x)e^{-x} = 0 \implies C_1' + (1+x)C_2' = 0 \\ -C_1'e^{-x} - C_2'xe^{-x} = xe^{-x} \implies -C_1' - C_2'x = x \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_2' = x \\ C_1' = -x - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = \dfrac{x^2}{2} + A \\ C_1 = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + B \end{cases}$$

И финальное решение имеет вид

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + A\right) xe^{-x} + \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + B\right) e^{-x}$$

((((Не понятно чёт не сошлось))))

8.159

$$y'' + y = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Сделаем замену $z = -y + 1$, тогда

$$-z'' - z + 1 = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \implies z'' + z = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

После замены $q \leftrightarrow x - \frac{\pi}{2}$ имеем уравнение

$$z'' + z = \frac{1}{\cos^2 q}$$

Такой пример был разобран перед параграфом, а значит решение:

$$-y + 1 = A\sin x + B\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| \cos x - 1$$

8.195

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^3$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$. Тогда

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{3t}$$

Общее решение имеет вид

$$y = (A + Bt)e^{2t}$$

Частное решение ищем в виде $y = ae^{3t}$:

$$9ae^{3t} - 12ae^{3t} + 4ae^{3t} = 4e^{3t} \implies a = 4$$

Тогда решение:

$$y = (A + Bt)e^{2t} + 4e^{3t} = \left(A + \frac{B}{\ln x}\right)x^2 + 4x^3$$

8.196

$$x^2y'' + xy' + y = 10x^2$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' + y = 10e^{2t}$$

Общее решение иммет вид:

$$y = A\cos x + B\sin x$$

В качестве частного решение подойдёт $y = 2e^{2t}$ Тогда решение:

$$y = A\cos\ln x + B\sin\ln x + 2x$$

T.1

$$y'' + ay = \sin x$$

Отдельно рассмотрим случай $a = 1$:

$$y'' + y = \sin x$$

В таком случае решением будет являтся

$$y = A\sin x + B\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$$

Такие решения всегда являются неограниченными и апериодическими. В другом случае частным решением является $y = \frac{1}{a-1}\sin x$, которое является ограниченным и периодическим. А таком случае рассмотрим $a < 0$, тогда общее решение будет:

$$y = Ae^{-\sqrt{a}x} + Be^{\sqrt{a}x} + \frac{1}{a-1}\sin x$$

В таком случае существует ограниченное решение при $B = 0$, и имеет единственное периодическое решение при $A = B = 0$. При $a = 0$ решение будет иметь вид:

$$y = A + Bt + \frac{1}{a-1}\sin x$$

Что также являются ограниченным и периодическим при $B = 0, A \in \mathbb{R}$. При $a > 0$ решение имеет вид:

$$y = A\sin\sqrt{a}x + B\cos\sqrt{a}x + \frac{1}{a-1}\sin x$$

Такое решение всегда является ограниченным и периодическим. Подведём итоги, существует хотя бы одно ограниченное решение при

$$a \neq 1$$

Тогда как существует единственное периодическое решение при

$$a \in (-\infty, 0)$$

614

Подойдёт уравнение:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Проверим:

$$\begin{cases} y = e^{2x}\cos x \\ y' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x \\ y'' = 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x \end{cases}$$

Легко убедится, что при подстановке в уравнение выполняется торждество.

617

Тогда общее решение уравнения должно иметь вид:

$$y = Axe^x + Be^x + Ce^{-x}$$

т.е характеристическое уравнение иммет вид:

$$0 = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Тогда исходное дифференциальные уравнение можно записать как

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

618

Аналогично предыдущей задаче общее решение имеет вид:

$$y = A + Bx + C\sin x$$

С характеристическим уравнением

$$0 = x^2(x-i)(x+i) = x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$$

В таком случае дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'''' + y'' = 0$$

2 Элементы вариационного исчисления

19.14

$$J(y)=\int_1^2\left[x(y')^2+\frac{y^2}{x}+4y\right]dx,\; y(1)=0,\; y(2)=2\ln 2$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{2y}{x}+4=\frac{d}{dx}\left(2xy'\right)=2y'+2xy'' \implies x^2y''+xy'-y=2x$$

Подставим $x=e^t, y'=e^{-t}y'_t, y''=e^{-2t}(y''_t-y'_t)$.

$$y''-y=2e^t$$

Его общим решением является:

$$y=Ae^t+Be^{-t}$$

Тогда как частное решение ищем в виде $y=ate^t$:

$$y'=ae^t+ate^t$$

$$y''=2ae^t+ate^t$$

Подставляя в исходное уравнение:

$$2ae^t+ate^t-ate^t=2ae^t=2e^t \implies a=1$$

Тогда уравнение имеет решение:

$$y=Ae^t+Be^{-t}+te^t$$

Переходя к перемнной x:

$$y=Ax+\frac{B}{x}+x\ln x$$

Подставляя граничные условия найдём экстремальную функцию:

$$y=x\ln x$$

Исследуем на максимум-минимум:

$$J(y+h)-J(y)=\int_1^2 x(y'+h')^2+\frac{(y+h)^2}{x}+4(y+h)-x(y')^2-\frac{y^2}{x}-4ydx$$

Первые степени по h сокращаются в силу уравнения Лагранжа:

$$\Delta J(y,h)=\int_1^2 x(h')^2+\frac{h^2}{x}dx\geq 0$$

Значит существует минимум на $y=x\ln x$.

19.39

$$J(y) = \int_{-2}^{-1} [x^3(y')^2 + 3xy^2]dx,\ y(-2) = \frac{15}{2},\ y(-1) = 0$$

Уравнение Лагранжа:

$$6xy = \frac{d}{dx}(2x^3y') = 6x^2y' + 2x^3y'' \implies x^3y'' + 3x^2y' - 3xy = 0 \implies x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Решениями хар. уравнения являются $\lambda = 1$, $\lambda = -3$:

$$y = Ae^t + Be^{-3t} \implies y = Ax + \frac{B}{x^3}$$

Подставляя граничные условия находим:

$$y = \frac{1}{x^3} - x$$

Проверим на максимум и минимум, сразу сократим члены первого порядка по h:

$$\Delta J(x,h) = \int_{-2}^{-1} x^3(h')^2 + 3xh^2dx = \int_{-2}^{-1} x\left(x^2(h')^2 + 3h^2\right)dx \leq 0, \text{ так как } x < 0$$

Существует максимум на решении $y = \frac{1}{x^3} - x$.

19.58

$$J(y) = \int_1^2 \left[x^2(y')^2 + yy' + 12xy\right]dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = 5$$

Уравнение Лагранжа:

$$12x + y' = \frac{d}{dt}\left(y + 2x^2y'\right) = y' + 2x^2y'' + 4xy' \implies xy'' + 2y' - 6 = 0$$

Введя замену $z = y'$ решаем уравнение:

$$xz' + 2z - 6 = 0$$

Решением является:

$$z = \frac{A}{x^2} + 3$$

Тогда относительно y:

$$y = \frac{A}{x} + B + 3x$$

Подставляя граничные условия получим:

$$y = 3x - \frac{2}{x}$$

Проверим на минимум-максимум:

$$\Delta J(y,h) = \int_1^2 x^2(h')^2 + hh'dx = \int_1^2 x^2(h')^2dx + \int_1^2 d(h^2) \geq 0$$

19.102

$$J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{16}{9}y^2 + 2y\sin x\right]dx,\ y(0)=0,\ y(\pi) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Уравнение Лагранжа:

$$2\sin x - \frac{32}{9}y = 2y'' \implies y'' + \frac{16}{9}y = \sin x$$

Общее решение имеет вид:

$$y = A\sin\frac{4}{3}x + B\cos\frac{4}{3}x$$

Частное решение найдём в виде $a\sin x$:

$$-a\sin x + \frac{16}{9}a\sin x = \sin x \implies \frac{7}{9}a = 1 \implies a = \frac{9}{7}$$

Всё решение выглядит как

$$y = A\sin\frac{4x}{3} + B\cos\frac{4x}{3} + \frac{9}{7}\sin x$$

Подставим начальные условия:

$$y = \sin\frac{4x}{3}$$

Такс:

$$\Delta J(y,h) = \int_0^\pi \left[(h')^2 - \frac{16}{9}h^2\right]dx$$

Заменим $x \leftrightarrow \frac{x}{\pi} \implies h' \leftrightarrow \frac{h'}{\pi}$:

$$\Delta J(y,h) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[(h')^2 - \frac{16\pi^2}{9}h^2\right]dx$$

Так как $\frac{4\pi}{3} > \pi$, то согласно упражнению из параграфа к задаче нет ни минимума ни максимума.

20.5

$$J(y) = \int_1^2 [x^2(y')^2 + 12y^2]dx,\ y(1) = 97$$

Уравнение Лагранжа:

$$24y = \frac{d}{dx}(2x^2y') = 4xy' + 2x^2y'' \implies x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$$

Подставим $x = e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' + y' - 12y = 0$$

Решением явялется:

$$y = Ae^{3t} + Be^{-4t} = Ax^3 + \frac{B}{x^4}$$

Из первого граничного условия находим $A+B=97$, второе граничное условие:

$$0 = 2\cdot 2^2 y'(2) \implies y'(2)=0 \implies 3A\cdot 4 = \frac{4B}{32} \implies B = 96A$$

Тогда решением является:

$$y = x^3 + \frac{96}{x^4}$$

Проверим на мин-макс:

$$\Delta J(y,h) = \int_1^2 \left[x^2(h')^2 + 12h^2\right] \geq 0 - \text{минимум}$$

5.9

$$J(y) = \int_1^3 [8yy'\ln x - x(y')^2 + 6xy']dx,\ y(3) = 15$$

Уравнение Лагранжа:

$$8y'\ln x = \frac{d}{dx}(8y\ln x - 2xy' + 6x) = 8y'\ln x + \frac{8y}{x} - 2y' - 2xy'' + 6$$

Сокращаем слагаемые и получаем:

$$xy'' + y' - \frac{4y}{x} = 3 \implies x^2y'' + xy' - 4y = 3x$$

Подставим $x=e^t, y' = e^{-t}y'_t, y'' = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$.

$$y'' - 4y = 3e^t$$

Решением является:

$$y = Ae^{2t} + Be^{-2t} - e^t = Ax^2 + \frac{B}{x^2} - x$$

Условием на конец является:

$$-2y'(1) + 6 = 0 \implies y' = 3 \implies 2A - 2B - 1 = 3 \implies A + B = 2$$

Из условия на другой конец находим $A = 2, B = 0$:

$$y = 2x^2 - x$$

Тогда

$$\Delta J(y,h) = \int_1^3 [8hh'\ln x - x(h')^2]dx < \int_1^3 [8(x-1)hh' - x(h')^2]dx = \int_1^3 [x(8hh' - (h')^2) - 8hh']dx$$

(((((А я не знаю что делать....)))))

20.14

$$J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 4e^x y - 8xe^x y']dx$$

Уравнение Лагранжа:

$$2y - 4e^x = 2y'' - 8e^x - 8xe^x \implies y'' - y = 2e^x + 4xe^x$$

В задаче оба конца свободные:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(1) = 4e \end{cases}$$

Общим решением является:

$$y = A\cosh x + B\sinh x + x^2e^x$$

Производная:

$$y' = A\sinh x + B\cosh x + 2xe^x + x^2e^x \implies B = 0,\ A = \frac{e}{\sinh e}$$

(((((Ну чёт как-то не пошло)))))

3 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

668

Если два решения ϕ и ψ имеют максимум при одном и том же аргументе x, то $\exists x_0\, \phi'(x_0) = \psi'(x_0)$. Тогда в некоторой точке вронскиан имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \phi(x_0) & \psi(x_0) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Что означает линейную зависимость ϕ и ψ.

679

Решением может быть только дифференциальное уравнение 3 порядка:

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

Тогда так как x, x^2, e^x являются решениеми, то

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ b + cx = 0 \\ 2a + 2bx + cx^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ b + cx = 0 \\ 2a + bx = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x - \frac{x^2}{2} - 1} \\ b = \frac{x}{\frac{x^2}{2} + 1 - x} \\ c = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} - 1} \end{cases}$$

723

$$y'' + qy = 0$$

Имеет матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Которая всегда больше нуля, что означает при начальных $y' > 0$ и $y > 0$ их производные и вторые производные будут оставаться положительными, а значит и y и y' будут возрастающими функциями.

9.11

$$xy'' - (6x+2)y' + (9x+6)y = 12x^3e^{3x}$$

Поищем решение в виде $y = e^{ax}$, подходит $a = 3$. Посчитаем $\int \frac{6x+2}{x}dx = 6x + 2\ln x + C$. Тогда по формуле Лиувилля-Остроградского:

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & u \\ 3e^{3x} & u' \end{vmatrix} = Cx^2e^{6x} \implies \left(\frac{u}{e^{3x}}\right)' = Cx^2$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = e^{3x}(C_1x^3 + C_2)$$

Заметим, что $y = 3x^4e^{3x}$ является частным решением, тогда общее решением имеет вид:

$$y = e^{3x}(C_1x^3 + C_2 + 3x^4)$$

9.24

$$x^2(x-1)y'' + 2xy' - 2y = x^3e^x$$

Одним частным решением будет $y = x$, тогда так как $e^{-\int \frac{2}{x(x-1)}dx} = (\frac{x}{x-1})^2$.

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = C\frac{1}{(x-1)^2}$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$y = x(C_1 + \frac{C_2}{x-1})$$

Ну и частное решение неоднородного уравнения подбиваем:

$$y = \frac{x}{x-1}e^x$$

9.52

$$x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = e^{-x}$$

Одно из решений подбираем $y = \frac{1}{x}$.

9.74

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 2$$

Сделаем замену $yx = t \implies y' = \frac{t'x - t}{x^2} \implies y'' = \frac{xt'' - t'}{x^2} - \frac{x^2t' - 2xt}{x^4}$:

$$\frac{xt'' - t'}{x^2} - \frac{x^2t' - 2xt}{x^4} + 2\frac{t'x - t}{x^3} + \frac{t}{x} = 0$$

Сокращая подобные слагаемы получим:

$$t'' + t = 0$$

Такое уравнение имеем решения вида:

$$t = yx = A\cos x + B\sin x$$

Тогда полное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{x}(A\sin x + B\cos x) + 2$$

T.5

Пусть существует такие два линейно независимые ϕ и ψ, тогда вронскиан должен быть ограничен, однако:

$$Vr = Ce^{\int a(x)dx} = Ce^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{C}{x} \to \infty,\ x \to 0$$

Противоречие.