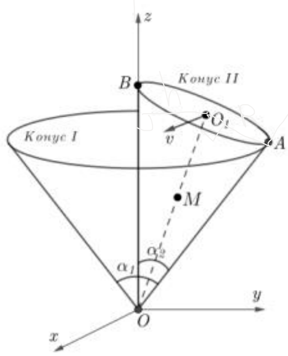
T7.* Конус II (см. рисунок) с углом при вершине $\alpha_2 = 45°$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90°$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l, а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v. Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найдите абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.



1) $\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin\alpha_2 \\ \Omega\cos\alpha_2 \end{pmatrix}$ $\quad |\Omega| = v/R$. $\quad R = l\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_2}{2}$

2) $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ $\quad |\omega| = v/h,\ h = l\sin\frac{\alpha_2}{2}$

$$\varepsilon = [\omega\times\Omega] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\alpha_2 \\ \Omega\cos\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\Omega\sin\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $$v_M = [\Omega\times r] + \dot f e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\sin\alpha_2 \\ \Omega\cos\alpha_2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ l/2\,\sin\frac{\alpha_2}{2} \\ l/2\,\cos\frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot f\sin\frac{\alpha_2}{2} \\ \dot f\cos\frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Omega l}{2}\left(\sin\alpha_2\cos\frac{\alpha_2}{2} - \cos\alpha_2\sin\frac{\alpha_2}{2}\right) \\ \dot f\sin\frac{\alpha_2}{2} \\ \dot f\cos\frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{v}{2\,\mathrm{tg}\,\pi/8}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \\ \dot f\sin\frac{\pi}{8} \\ \dot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v\sqrt2}{8\sin\pi/8} \\ \dot f\sin\frac{\pi}{8} \\ \dot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

4) $$a_M = [\varepsilon\times r] + [\Omega\times(\Omega\times r)] + a_0 + 2[\Omega\times v] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega\Omega\frac{\sqrt2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ l/2\,\sin\frac{\pi}{8} \\ l/2\,\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\frac{\sqrt2}{2} \\ \Omega\frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \frac{\Omega l\sqrt2}{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot f\sin\frac{\pi}{8} \\ \ddot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\frac{\sqrt2}{2} \\ \Omega\frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ \dot f\sin\frac{\pi}{8} \\ \dot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega\Omega l\sqrt2}{4}\cos\frac{\pi}{8} \\ -\frac{\omega\Omega l\sqrt2}{4}\sin\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{\Omega^2 l}{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \\ -\frac{\Omega^2 l}{4}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot f\sin\frac{\pi}{8} \\ \ddot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega\sqrt2\,\dot f\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\dot f v\sqrt2}{2\sin\pi/8} \\ \frac{v^2}{l}\frac{\sqrt2}{4} + \frac{v^2}{4l\,\mathrm{tg}^2\pi/8}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) + \ddot f\sin\frac{\pi}{8} \\ -\frac{v^2\sqrt2}{4l\,\mathrm{tg}^2\pi/8} - \frac{v^2}{4l\,\mathrm{tg}^2\pi/8}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right) + \ddot f\cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

T.5. Продолжение.

2) $$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{d}{dt}\left(v, \frac{dv}{d\dot q_i}\right) - \left(v, \frac{dv}{dq_i}\right)\right)$$

$$w_r = -\frac{v^2}{r}$$

$$w_r = -\frac{v^2}{r}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}(r\dot\varphi r) - r\dot\lambda\sin\varphi\, r\dot\lambda\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi - r^2\dot\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi\right) = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi - r\dot\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi = r\ddot\varphi - r\dot\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\ddot\varphi = \dot\varphi'(\lambda)\dot\lambda$$

$$\varphi'(\lambda) = -ctg\alpha\cos\varphi$$

$$v = const \Rightarrow \dot\varphi = -\frac{v\cos\alpha}{r}, \quad \dot\lambda = \frac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi}, \quad \ddot\varphi = 0$$

$$\ddot\lambda = \frac{v\sin\alpha}{r}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\dot\varphi = -\frac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$w_\varphi = -\frac{v^2}{r}\sin^2\alpha\, tg\varphi$$

$$w_\lambda = \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\frac{d}{dt}(r^2\dot\lambda\cos\varphi) - n\right) = r\ddot\lambda - r\dot\lambda\dot\varphi\, tg\varphi =$$

$$= -\frac{v^2}{r}\sin\alpha\cos\alpha\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{v^2}{r}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0$$

$$|w| = \frac{v^2}{r}\sqrt{1+\sin^4\alpha\, tg^2\varphi}$$

$$\rho = \frac{v^2}{|w|} = \frac{r}{\sqrt{1+\sin^4\alpha\, tg^2\varphi}}$$