32.8

9) $2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2+19x_3^2$;

$$2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2+19x_3^2=2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2+4x_3x_2)-$$
$$-8x_2^2-2x_3^2-8x_2x_3+9x_2^2+19x_3^2=$$
$$=2(x_1+2x_2+x_3)^2+x_2^2-8x_2x_3+17x_3^2=2(x_1+2x_2+x_3)^2+(x_2-4x_3)^2+x_3^2 \to A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}A=3$

$r^+=3$ — положит. определённая

$r^-=0$

$r^+-r^-=3$

12) (р) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$;

$x_1=y_1+y_2$

$x_2=y_1-y_2 \to y_1^2-y_2^2+y_1y_3-\cancel{y_2y_3}+y_1y_3+\cancel{y_2y_3}=$

$x_3=y_3$

$$=(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-y_2^2-y_3^2=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2 \to \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}=3$

$r^+=1$ → полуопред.

$r^-=2$

32.13. Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n-мерном пространстве:

4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

32.18. При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

3) $\lambda x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

$$\begin{pmatrix}\lambda&8&2\\8&8&2\\2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda-8&0&0\\0&8&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda-8&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$\lambda>8$ – п. опр

$\lambda=8$ – неотр. опр

$\lambda<8$ – неопред.

32.20

2) Доказать, что в матрице положительно определенной квадратичной формы максимальный по модулю элемент положителен.

32.21. 1) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X)=\mathrm{tr}(X^TX)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

2) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X)=\mathrm{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

1) $\mathrm{tr}(X^TX)=\mathrm{tr}((XX^T)^T)=\mathrm{tr}(XX^T)$ – кв. форма.

$XX^T_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$ при $a_i\neq0 \Rightarrow \mathrm{tr}(XX^T)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>0$

1) $tr(X^T X) = tr((XX^T)^T) = tr(XX^T)$ — ...

$XX^T_{ii} = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$ при $a_i \neq 0 \Rightarrow tr(XX^T) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$

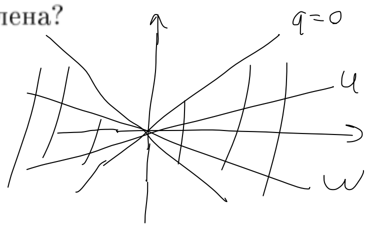
T.1. Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве удовлетворяют условиям $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$, $\delta_4 > 0$. Какими могут быть положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции формы q?

$\delta_4 > 0 \Rightarrow rk\, q = 4 \Rightarrow r^+ + r^- = 4$

$\delta_2 = \delta_3 = 0 \Rightarrow r^+ \neq 4,\ r^- \neq 4 \Rightarrow r^+ \neq 0,\ r^- \neq 0$

Также $r^+ r^- = 2k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Возможны варианты: $r^+ = 2$, $r^- = 2$

T.2*. Пусть $V = U \oplus W$ и ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда что q положительно определена?



Нет, пусть $q = x^2 - y^2$. Нарисуем, где $q > 0$. Спроецировав q на любую прямую из этой области получим $q|_U > 0$, $q|_W > 0$

25.7. В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, функциям f и g сопоставляется число

Д-нам, что $q(f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt > 0\ \forall f \neq 0$

Так как $f \neq 0$, то $\exists t\ f^2(t) > 0$

тогда т.к. f-непрерывна, то $\int_{-1}^{1} f^2(t) > 0$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение.

25.25. Найти скалярное произведение векторов, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Γ этого базиса:

1) $\|1\ 1\ 1\|^T$, $\|1\ 3\ 1\|^T$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{Vmatrix}$;

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ -1\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

25.21. Найти угол между ребром и диагональю n-мерного куба.

$a = (1, 0, \dots, 0)$, $b = (1, \dots, 1)$

$ab = (1, 0 \dots 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$|a| = 1$

$|b| = \sqrt{n}$

$\cos\alpha = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

25.23. Пусть в некотором базисе квадрат длины любого вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

$\sum (u_k + v_k)^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (v,v) + 2(u,v) = \sum u_k^2 + \sum v_k^2 + 2(u,v)$

$2(u,v) = 2\sum u_k v_k \Rightarrow (u,v) = \sum u_k v_k$ ЧТД

25.10. Пусть **e** — базис в линейном пространстве $\mathcal{E}$. Доказать, что в $\mathcal{E}$ существует одно и только одно скалярное произведение, относительно которого базис **e** — ортонормированный.

Билинейная форма (ск. произв) однозначно зад-ся на базисных в-рах.

25.35. Может ли третья строка матрицы Грама некоторого базиса в четырехмерном пространстве быть строкой:

3) $\|1\ 0\ 1\ 0\|$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T.5. Проведите ортогонализацию базиса $\{1, x, x^2\}$ пространства многочленов степени ≤ 2 со скалярным произведением из задачи Б 25.7.

$\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx = 2$ $\quad \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx = \frac{2}{3}$ $\quad \int_{-1}^{1} x^2 x^2\,dx = \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = 0$ $\quad \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\,dx = \frac{2}{3}$ $\quad \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx = 0$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T.6*. В пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$ найдите ортогональное дополнение к подпространству a) симметричных b) верхнетреугольных матриц.

а) Покажем, что если $X = X^T$ и $Y = -Y^T$, то $(X, Y) = 0$ | + сим и кососим обр. прямую сумму.

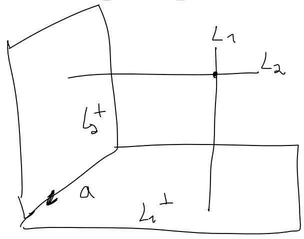
$(X,Y) = tr(X^T Y) = tr(XY) = tr(YX) = -tr(Y^T X) = -(Y,X) = -(X,Y)$

$2(X,Y) = 0 \Rightarrow (X,Y) = 0 \Rightarrow$ для люб кососим и сим матриц их ск. пр равно 0 - т.е. они орт.

б) X - верхнетреуг, Y - нижнетреуг $\Rightarrow (X,Y) = tr(X^T Y) = tr\left(\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ X & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ Y & \ddots \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ XY & 0 \end{pmatrix} = 0$

26.6. Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны. Обязательно ли ортогональны $\mathcal{L}_1^\perp$ и $\mathcal{L}_2^\perp$?

Нет пример.



$a \in L_2^\perp$, $a \in L_1^\perp$ и $(a,a) > 0 \Rightarrow L_2^\perp \not\perp L_1^\perp$

26.13. Подпространство $\mathcal{L}$ задано как линейная оболочка векторов, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы:

3) $\|3\ -15\ 9\ 1\|^T, \|3\ -6\ -3\ 2\|^T$;

Найти:
а) матрицу системы уравнений, определяющей $\mathcal{L}^\perp$,
б) базис в $\mathcal{L}^\perp$.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -15 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \to \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{9} \\ 2/3 & -1/9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - базис.

26.15. Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{o}$. Найти систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^\perp$:

2) $8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0,$
$-6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0;$

$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 & -6 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(-1 2 -1 0)

$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

2) $8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0,$ 1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim (10\ 1\ 0\ -2)$

$-6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0;$

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \varphi \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

26.27. Подпространство $\mathcal{L}$ — линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_k$. В ортонормированном базисе заданы координатные столбцы этих векторов и координатный столбец ξ вектора x. Найти координатные столбцы ξ' и ξ'' ортогональных проекций вектора x соответственно на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$:

2) $\mathbf{a}_1 = \|6\ 1\ 5\|^T$, $\mathbf{a}_2 = \|4\ -1\ 3\|^T$, $\xi = \|1\ 3\ -2\|^T$;

1) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in L_1$

$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in L_2$

2) $\xi' \in L_1 \wedge \xi'' \in L_2 \wedge \xi' + \xi'' = \xi$

$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$ Решаем с-му: $\begin{pmatrix} 34/21 \\ 17/42 \\ -85/42 \\ -13/21 \\ 109/42 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ $\in \xi'$, $\in \xi''$

28.19. Дана матрица A преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ с матрицей Грама Γ. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\to A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

30.7. Пусть A — матрица линейного преобразования в базисе с матрицей Грама Γ. Найти матрицу сопряженного преобразования:

$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ $\to A^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7i & 1 \\ -19 & 5i \end{pmatrix}$

28.27. Пусть преобразование φ диагонализуемо. Доказать, что φ^* также диагонализуемо.

Выберем базис, где $\Gamma = E \Rightarrow A^* = A^T$ тогда $\exists C$ т.ч. $C^{-1}AC = D$ но тогда

$D = D^T = (C^{-1}AC)^T = C^T A^T (C^T)^{-1} = C^T A^* (C^T)^{-1}$ — нашли преобр диаг. A^* //

29.5. Найти все самосопряженные ортогональные преобразования.

$\Gamma = E \Rightarrow A = A^T$ и $AA^T = E \Rightarrow A^2 = E \Rightarrow$ A-диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

29.6. Найти все самосопряженные идемпотентные преобразования.

$\varphi^2(x) = \varphi(x) \to \varphi$ - проектор, также $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \Rightarrow (\varphi^2(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ — ортогонален

29.19. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования φ и матрицу преобразования в этом базисе, если φ задано в ортонормирован-

1, 7 1)

59. $\left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & ? \end{matrix} \right\| \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$

образования в этом базисе, если φ задано в ортонормирован-

1, 7 1)

59. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$ $\to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda)-4=0 \Rightarrow \lambda=-3,\ \lambda=2$

$\lambda=-3$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → нормируем на 1: $a_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad b_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=A$ $\quad \left.\begin{matrix}\lambda_1=3 \\ \lambda_2=-3\end{matrix}\right\}$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ортонорм. б-с a: $a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac12 \\ -\frac12 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

29.37. Пусть φ линейное преобразование евклидова пространства. Доказать, что:

1) преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ — неотрицательные самосопряженные.

1) $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi$ по правилам сопряжения

2) Пусть u – с в-тор $\varphi^*\varphi$: $\left.(u, \varphi^*\varphi(u)) = (\varphi(u), \varphi(u)) \geqslant 0\right\}$ $\underline{\underline{\lambda \geqslant 0}}$

$\quad \| \quad \lambda(u,u)$

29.47. Линейное преобразование φ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в столбцы матрицы B. Является ли φ ортогональным:

это базис потому для проверить на нём

1) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; $\quad (4,7)\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}=16+49=65$ $\quad$ OK. $\quad (2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=4+1=5$ OK.

$(8\ 1)\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}=64+1=64 \qquad (2\ -1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=4+1=5$

25.50. Может ли ортогональная матрица четвертого порядка содержать строку:

1) $(1\,0\,1\,0)$ — нет не может/

29.49. Пусть $\mathcal{L}$ — инвариантное подпространство ортогонального преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^\perp$ — также инвариантно относительно φ. Как этот результат связан с задачей 25.55?

$a \in L^\perp \Rightarrow \forall b \in L \quad (a,b)=0=(\varphi(a), \underset{c}{\varphi(b)}) \Rightarrow \varphi(a) \perp c \Rightarrow \varphi(a) \in L^\perp$, $\varphi(b) \in L$

т.к. φ не вырожденно/.

29.50. Ортогональное преобразование задано в ортонормированном базисе матрицей A. Найти матрицу S перехода к каноническому базису и матрицу A' преобразования в этом базисе:

2) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -3 & -\sqrt6 \\ -3 & -1 & \sqrt6 \\ \sqrt6 & -\sqrt6 & 2 \end{Vmatrix}$; $\quad \begin{vmatrix} -\frac14-\lambda & -\frac34 & -\sqrt6/4 \\ -\frac34 & -\frac14-\lambda & \sqrt6/4 \\ \sqrt6/4 & -\sqrt6/4 & \frac12-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^3=-1 \Rightarrow$ $\lambda=-1$, $\lambda=\frac{1+i\sqrt3}{2}$, $\lambda=\frac{1-i\sqrt3}{2}$

$\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} \frac34 & -\frac34 & -\frac{\sqrt6}{4} \\ -\frac34 & \frac34 & \frac{\sqrt6}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt6}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & -\frac{\sqrt6}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b \perp a \perp c$ //

$\lambda=\frac{1+i\sqrt3}{2}$: можно считаем и получаем

Тогда $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt3}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow S=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30.44. Для унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе:

1) $A = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|$; $\to \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

29.53. Получить полярное разложение матрицы:

2) $\left\| \begin{matrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{matrix} \right\|$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1=5 \\ \lambda_2=45 \end{cases}$ Тогда $\left.\begin{matrix} \sqrt5 = a+5b \\ \sqrt{45} = a+45b \end{matrix}\right\}$ $a=\frac{2\sqrt5}{4}$, $b=\frac{\sqrt5}{20}$

$B=\sqrt{AA^T} = \begin{pmatrix} 2\sqrt5 & \sqrt5 \\ \sqrt5 & 2\sqrt5 \end{pmatrix}$ $Q = AB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt5}{3} & -\frac{\sqrt5}{3} \\ \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2\sqrt5}{15} \end{pmatrix}$

12.82. Представить каждое из аффинных преобразований задачи 12.81 в виде произведения $f = h_2 h_1 g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

7) $x^* = 2x + 5y$, $y^* = -11x + 10y$; $\to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Найдем QB разложение $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} = A \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 225 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} 5 = a+25b \\ 15 = a+225b \end{matrix}\right\}$ $b = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$, $a = \frac{15}{4}$ $\sqrt{AA^T} = \frac{15}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 74 \end{pmatrix} = h_2 h_1 = B$

$Q = B^{-1}A = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$ $= g$ // – орто. преобр.

Теперь найдём канон. вид B: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 74 \end{pmatrix}$ его $\begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 15 \end{matrix}$, т.е. канон. вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

два растяжения отн-но с-мы векторов.

Тогда найдём м-цу перехода: $\lambda_1=5$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=15$: $\begin{pmatrix} -\frac{49}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Тогда $B = CB'C^{-1} = CB_1'B_2'C^{-1} = \underbrace{CB_1'C^{-1}}_{B_1}\underbrace{CB_2'C^{-1}}_{B_2} = \underbrace{\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 123 & -14 \\ -14 & 27 \end{pmatrix}}_{\text{раст-ся-по с-в-ра}} \cdot \underbrace{\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 32 & 49 \\ 49 & 368 \end{pmatrix}}_{\text{раст-ся-по др. с-в-ра}}$

Т.12. a) Выясните, может ли какая-нибудь из приведенных ниже матриц являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad 2)\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\quad 3)\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

1) Нет, т.к. $\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1=0$, т.е. $\lambda\notin\mathbb{R}$ а значит не диагонализируется.

2) $\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-1&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=3$, тогда B приводится к виду $\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ – не диагональная.

3) $\begin{vmatrix}-\lambda&1\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{matrix}\lambda_1=-1\\\lambda_2=2\end{matrix}\rightarrow J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ да, она с/с

найдём базис, где она диаг.

1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

b)* В случае положительного ответа предъявите (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

вектора a и b должны быть перпенд. т.е. $a^T\Gamma b=0\rightarrow(-1,1)\Gamma\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=0$

$\Gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\rightarrow(-1,1)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=(-1,1)\begin{pmatrix}a-2b\\c-2d\end{pmatrix}=-a+2b+c-2d=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}b=c\\a=1\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}3b=2d+1\\d>b^2\end{matrix}\right.\rightarrow\begin{matrix}b=\frac{3}{5}\\d=\frac{2}{5}\end{matrix}$

$ad-b^2>0$

Выберем $d=b=1$: $\Gamma=\begin{pmatrix}1&3/5\\3/5&2/5\end{pmatrix}\sim\underline{\underline{\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}}}$

32.27. Квадратичная (билинейная) функция записана в ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид.

3) $7x_1^2+4\sqrt{3}x_1x_2+3x_2^2\rightarrow\begin{pmatrix}7&2\sqrt3\\2\sqrt3&3\end{pmatrix}$ – с/с с $\begin{matrix}\lambda_1=1\\\lambda_2=9\end{matrix}\Rightarrow$ д.в. $\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}\Leftrightarrow y_1^2+9y_2^2$

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}6&2\sqrt3\\2\sqrt3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&\sqrt3\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow a\begin{pmatrix}-1\\\sqrt3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&\sqrt3\\\sqrt3&1\end{pmatrix}$

$\lambda=9$. $\begin{pmatrix}-2&2\sqrt3\\2\sqrt3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&\sqrt3\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow b\begin{pmatrix}\sqrt3\\1\end{pmatrix}$

13) $x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac12\\-\frac12&1&\frac12\\\frac12&\frac12&1\end{pmatrix}$ – с/с $\begin{matrix}\lambda_1=0\\\lambda_2=3/2\\\lambda_3=3/2\end{matrix}\rightarrow$ н. в. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3/2&0\\0&0&3/2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=0$: $\begin{pmatrix}1&-\frac12&+\frac12\\-\frac12&1&\frac12\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $a\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3}=3/2$ $\begin{pmatrix}-\frac12&-\frac12&-\frac12\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow b\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\sim$

$b_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$b_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

9.4. Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

2) (р) $4xy-3y^2-4x+10y-6=0$; $\rightarrow\begin{pmatrix}0&2\\2&-3\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\lambda_1=-4\\\lambda_2=1\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}-4&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=1$: $\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\rightarrow a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\rightarrow C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ ну канон. вид $\boxed{y^2-4x^2=4}$

$\begin{pmatrix}4&2\\ \end{pmatrix}$ $b\begin{pmatrix}-1\\ \end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{ }\begin{pmatrix}-1\\ \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ну и канон. вид $|y - 4x - \ldots|$

$\lambda_2 = -4: \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

32.33. В базисе **e** евклидова пространства задана квадратичная форма. Найти в том же базисе матрицу присоединенного к ней преобразования, если матрица Грама базиса **e** равна Γ:

1) $4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$, $\quad \Gamma = A_{56}$; $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

$A = G^{-1}H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

32.39. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму g к каноническому

виду, а квадратичную форму f к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f.

1) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $\quad g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$; $\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|H - tG| = \begin{vmatrix} 1-10t & 1-3t \\ 1-3t & 1-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} t=0 \\ t=5 \end{matrix} \Rightarrow H_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

32.36. Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих форм.

3) $f = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$, $\quad g = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;
4) $f = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$, $\quad g = 2x_1x_2 - x_2^2$;

3) $G = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ По к. Сильвестра $H > 0$, а G - знакоперменная

$|H - \lambda G| = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 13-11\lambda & -5+3\lambda \\ -5+3\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 7 \end{cases}$

$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad |a| = \sqrt{a^TGa} = \sqrt6$

$\lambda = 7: \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |b| = \sqrt{b^TGb} = \sqrt3$

$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 \\ 1/\sqrt3 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix}$

4) $G = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to |H - \lambda G| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -9\lambda & 1+5\lambda \\ 1+5\lambda & -1-3\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac12 \end{matrix}$

$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to |a| = \sqrt{a^TGa} = \sqrt3$

$\to S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt3 & \sqrt3 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$$\lambda=1: \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to |a| = \sqrt{a^T G a} = \sqrt{3}$$

$$\lambda=-\frac{1}{2}: \begin{pmatrix} +\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |b| = \sqrt{b^T G b} = \sqrt{6}$$

$$\to S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Линейные функции.

31.21. Пусть t_0 — фиксированное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция φ на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Вычислить координатную строку функции φ в базисах $1, t, \ldots, t^n$ и $1, t-t_0, \ldots, (t-t_0)^n$.

$p \to p(t_0)$ 1) линейность: $(p+g)(t_0) = p(t_0) + g(t_0)$ — очевидно

$(\lambda p)(t_0) = \lambda p(t_0)$

2) $\{1, t \ldots t^n\} \to (1, t_0, \ldots t_0^n)$

$\{1, t-t_0, \ldots (t-t_0)^n\} \to (1, 0, 0, \ldots 0)$

31.30. Доказать, что всякую ненулевую линейную функцию f на $\mathcal{L}_n$ подходящим выбором базиса в $\mathcal{L}_n$ можно привести к виду $f(x) = \xi_1$, где ξ_1 — первая координата вектора x.

Пусть $a = (a_1, \ldots a_n)$ — коорд. строка в пр. б-се, тогда нужно д-ть, что $\exists C$

$a = eC$, где $e = (1, 0 \ldots 0)$

т.е. $a = (c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}) \to$ очевидно $c_{11} = a_1, c_{12} = a_2, \ldots$

31.31. В базисе $\mathbf{e}$ линейная функция f имеет строку коэффициентов $\boldsymbol{\varkappa}$. Найти ее строку коэффициентов $\boldsymbol{\varkappa}'$ в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, если:

2) $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{c}_{64}^T$, $S = A_{202}$;

$$S\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \to f(a) = \varkappa\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \varkappa'\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} \quad \Big\} \ \varkappa S = \varkappa'$$

$$= \varkappa S\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varkappa' = (5\ -5\ 2)$$

31.33(2)

2) Многочлены $1, t-t_0, \ldots, (t-t_0)^n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

$$e_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k p}{dt^k}\Big|_{t=t_0}$$

31.35. 1) Пусть базису e_1, e_2, e_3 пространства $\mathcal{L}_3$ биортогонален базис f_1, f_2, f_3 пространства $\mathcal{L}_3^*$. Найти базис, биортогональный базису $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3$.

1) $g_1(e_1+e_2) = 1$

$g_1(e_2+e_3) = 0$ $\Big\}$ $g_1(e_2) = 0$ $\Big\}$ $g_1(e_1) = 1 = f_1(e_1) \Rightarrow g_1 = f_1$

$g_1(e_3) = 0$

2) $g_2(e_2+e_3) = 1$ $\Big\}$ $g_2(e_3) = 0$

$g_2(e_1+e_2) = 0$ $\quad g_2(e_2) = 1$ $\Big\}$ $g_2 = f_1 - f_2$

$g_2(e_3) = 0$ $\quad g_2(e_1) = -1$

3) $g_3(e_1+e_2) = 0$

$g_3(e_2+e_3) = 0$ $\Big\}$ $g_3 = f_3$

3) $g_3(e_1+e_2)=0$
$g_3(e_2+e_3)=0$
$g_3(e_3)=1$ $\Big\}$ $g_3=f_3$

Т.16. Докажите, что любая линейная функция f на пространстве матриц $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ имеет вид $f(X)=\mathrm{tr}\,(AX)$, где $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, причем матрица $A=A_f$ функцией f определяется однозначно.

$C=AX \Rightarrow C_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ji} \Rightarrow tr(AX)=\sum_i^n\sum_j^n a_{ij}x_{ji}=\sum_{i,j=1} a_{ij}x_{ji}=(a_{11}\,a_{12}\ldots)\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\\vdots\end{pmatrix}$ – ЧТД

Тензоры. (Везде применяется правило суммирования Эйнштейна)

35.14. Тензор типа (1, 1) имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & \text{если } i=j;\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Изменяются ли его компоненты при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

$\delta'^k_l = d^k_i c^j_l\, \delta^i_j = d^k_i c^i_l = \delta^k_l$, так как $D=C^{-1} \Rightarrow DC=E$, т.е. $d^k_i c^i_l$

т.е. δ^i_j не изм при смене базиса

Геом. смысл: δ^i_j изоморфен тождественному оператору Id_V.

35.15. Тензор типа (0, 2) имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j;\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Как изменятся его компоненты при переходе к другому базису? Какая билинейная функция соответствует этому тензору?

$\underbrace{\delta'_{kl}} = c^j_k c^i_l \delta_{ij} = \underbrace{c^j_k c^j_l} \neq \delta_{kl}$

Такому тензору соотв нормальный вид м-цы скал. произведения $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

35.21. 1) Тензор типа $(0, n)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n}=\begin{cases}(-1)^{N(i_1\ldots i_n)}, & \text{если все числа } i_1,\ldots,i_k \text{ различны};\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

($N(i_1\ \ldots\ i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке $(i_1,\ldots,i_n)$). Вычислить компоненты данного тензора в базисе $\mathbf{e}'=\mathbf{e}S$.

1) $\varepsilon'_{k_1\ldots k_n}=\varepsilon_{i_1\ldots i_n} s^{i_1}_{k_1}\ldots s^{i_n}_{k_n} \overset{\text{Эйнштейн без перех}}{=}$

$= \sum_{i_1\ldots i_n \in S_n} \varepsilon_{i_1\ldots i_n} s^{i_1}_{k_1}\ldots s^{i_n}_{k_n} \overset{\text{по определению определителя}}{=} \begin{cases} sgn(k_1\ldots k_n)\det S\\ 0, (k_1\ldots k_n)\notin S_n\end{cases}$

То есть $\varepsilon'_{k_1\ldots k_n}=\varepsilon_{k_1\ldots k_n}\cdot\det S$

2) Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n$ сопоставлены числа $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$. Будет ли это соответствие тензором типа $(0, n)$?

нет, так как при переходе от базиса к базису $\varepsilon'_{i_1\ldots i_n}=\det C\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ так как $|\det C|\neq 1$

47.2. Найти значение $F(v, f)$ тензора

$$F=e^1\otimes e_2+e^2\otimes(e_1+3e_3)\in\mathbb{T}_1^1(V).$$

где $v=e_1+5e_2+4e_3$, $f=e^1+e^2+e^3$.

$F(v)=\left(e^1\otimes e_2+e^2\otimes(e_1+3e_3)\right)\left(e_1+5e_2+4e_3,\ e^1+e^2+e^3\right)=$

$=\underbrace{e^1(e_1+5e_2+4e_3)}_{1}\underbrace{e_2(e^1+e^2+e^3)}_{1}+\underbrace{e^2(e_1+5e_2+4e_3)}_{5}\cdot\underbrace{(e_1+3e_3)(e^1+e^2+e^3)}_{4}=21$

47.7. Найти координаты:
а) $\tilde{t}^1_{21}$ тензора $e^1\otimes e^2\otimes(e_1+e_2)\in\mathbb{T}^1_2(V)$ в базисе

$$(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix};\quad D=C^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$$

$t^1_{11}=0$ $\quad t^2_{11}=0$
$t^1_{12}=1$ $\quad t^2_{12}=1$
$t^1_{22}=0$ $\quad t^2_{22}=0$

$\tilde{t}'^1_{21}=d^1_i c^j_2 c^k_1 \tilde{t}^i_{jk}= t^1_{12}\cdot c^1_2 c^2_1 d^1_1 + t^2_{12} c^2_1 c^1_2 d^1_2 = 6-2=4$

$t^{1}_{12}=1 \qquad t^{2}_{12}=1$

$t^{1}_{22}=0 \qquad t^{2}_{22}=0$

$t^{1}_{21}=0 \qquad t^{2}_{21}=0$

47.11. Найти ранг билинейных функций:

а) $(e^1+e^2)\otimes(e^1+e^3)-e^1\otimes e^1-e^2\otimes e^2$; $=T$

$T(u,v)=(u_1+u_2)(v_1+v_3)-u_1v_1-u_2v_2=u_1v_3+u_2v_1+u_2v_3-u_2v_2 \sim \begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{rk=2},$

47.13. Найти полную свертку тензоров:

а) $(e_1+3e_2-e_3)\otimes(e^1-2e^2+3e^4)-(e_1+e_3)\otimes(e^1-3e^3+e^4)$;

$$\left.\begin{aligned} &T(e^1,e_1)=1\cdot1-1\cdot1=0\\ &T(e^2,e_2)=3\cdot(-2)-0=-6\\ &T(e^3,e_3)=-1\cdot0-1\cdot(-3)=3 \end{aligned}\right\}\ tr^1_1 T=-6+3=-3$$

$T(e^4,e_4)=0-0=0$

47.16. Пусть на пространстве V задано скалярное произведение с матрицей

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Провести опускание и подъем индексов у тензоров:

а) $e^1\otimes e_3+e^2\otimes e_4$; б) $(e^1+e^2)\otimes(e_3+e_4)-(e^1+e^3)\otimes e_3$;