

1.1. Для функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим следующие условия:

а) f непрерывна в точке (x_0, y_0) ;

б) в точке (x_0, y_0) существуют конечные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Следует ли из условия а) условие б)? Следует ли из условия б) условие а)?

а) Р-ция ф-ции $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

она непр. в т. $(0, 0)$ но частные произв не сущ.

б) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$ предела в $(0, 0)$ нет $\rightarrow f(x, y)$ разрывна.
но $\partial_x f = 0 \quad \partial_y f = 0$.

1.2. Исследуйте на существование частных производных и дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функции:

а) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; в) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

а) $\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1 = \partial_y f(0, 0)$
Р-ция предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - \partial_x f \cdot x - \partial_y f \cdot y}{\rho}$

$\frac{1}{\rho} |\Delta f - \partial_x f \cdot x - \partial_y f \cdot y| = \frac{1}{\rho} |\sqrt{x^2 + y^2} - x - y| = |1 - \cos \varphi - \sin \varphi|$ — зависит от поворота,
а значит $\neq 0 \Rightarrow$ ф-ция не предел. мн. ф-ция \Rightarrow не дифф.

б) $\partial_x f(0, 0) = 1 \quad \partial_y f(0, 0) = 1$

$\frac{1}{\rho} |\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y| = |\sqrt[3]{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} - \cos \varphi - \sin \varphi|$ — зависит от поворота.

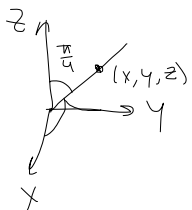
в) $\partial_x f(0, 0) = 0 \quad \partial_y f(0, 0) = 0$

$\frac{1}{\rho} |\sqrt{x^3 + y^3}| = \frac{1}{\rho} \cdot \rho^{3/2} |\sqrt{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}| \leq 2 \rho^{1/2} \rightarrow 0$ — ф-ция дифф.

1.3. Найдите производную функции

$$f(x, y, z) = \operatorname{sh}(x^2 + y) + e^z$$

в точке $(0, 0, 0)$ по направлению луча, образующего с координатными осями Ox, Oy, Oz углы соответственно $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.



$$\begin{aligned} z &= t \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{t\sqrt{2}}{2} \\ x &= t \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{t}{2} \\ y &= t \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}} \\ f'(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{t^4}{4} + \frac{1}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{t\sqrt{2}}{2}}}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

2.1. Докажите, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в \mathbb{R}^2 .

$$\{0,$$

$$x^2 + y^2 = 0,$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в \mathbb{R}^2 .

$$1) \quad d f(x, y) = d(x^2 + y^2) \left\{ \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right\} \Rightarrow \partial_x f = 2x \left(\sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\partial_y f = 2y \left(\sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0$$

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin \frac{1}{y^2}}{y} = 0$$

2) Проверим диф-емость в т. $(0, 0)$: $\frac{1}{\rho} |(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0| = \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2} = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} < \rho \rightarrow 0$
т.е. для диф-а в $(0, 0)$.

$$3) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \partial_x f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2x \left(\sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \cos \varphi \left(\sin \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cos \frac{1}{\rho^2} \right) =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} 2\rho \sin \frac{1}{\rho^2} - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2}{\rho} \cos \frac{1}{\rho^2} = -2 \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \cos \frac{1}{\rho^2} \text{ не существует.}$$

2.2. Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функции:

a) $f(x, y) = \sin \sqrt[5]{x^5 - y^5}$; б) $f(x, y) = \cos \sqrt[5]{x^5 - y^5}$.

a) $\partial_x f = 1$ $\frac{1}{\rho} |\sin \sqrt[5]{x^5 - y^5} - x + y| = |\sqrt[5]{\cos^5 \varphi - \sin^5 \varphi} + o(1) - \cos \varphi - \sin \varphi|$ — зависит от напр.

$\partial_y f = -1$

б) $\partial_x f = 0$ $\frac{1}{\rho} |\cos \sqrt[5]{x^5 - y^5} - 1| = \frac{1}{\rho} \left| -\frac{\rho^2}{2} \sqrt[5]{\cos^5 \varphi - \sin^5 \varphi} + o(\rho^2) \right| = \frac{\rho}{2} \sqrt[5]{\cos^5 \varphi - \sin^5 \varphi} + o(\rho) \rightarrow 0$

$\partial_y f = 0$

2.4. Приведите пример функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей в точке $(0, 0)$ конечные производные по всем направлениям, но не являющейся в этой точке непрерывной (а следовательно, и дифференцируемой).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{р-м } f'_t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2 t^3 t^2}{d^4 t^4 + \beta^2 t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2 \beta t^2}{d^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^2 \beta}{d^4 t^2 + \beta^2} = \frac{d^2}{\beta} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

р-м кривую $y = x^2$ и подставить но не $f(x, y) = \frac{1}{2}$ — предел не 0.

2.5. Пусть у функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности точки (x_0, y_0) существует производная $\frac{\partial f}{\partial x}$, непрерывная в точке (x_0, y_0) . Пусть также в точке (x_0, y_0) существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Докажите, что функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0) .

р-м $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) =$

$$= \begin{cases} \text{по т. о.} \\ \text{по т. о.} \end{cases} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)(x - x_0) + o(|x - x_0|) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)(y - y_0) + o(|y - y_0|) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{т.е. } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ — непрерывно, то} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \text{при } y \rightarrow y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

о(ρ) чтд

3.2. Исследуйте на дифференцируемость в точке (0, 0) функцию

$$f(x, y) = \sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y}.$$

$$\partial_x f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} = 1$$

$$\partial_y f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2023]{\sin^{2024} y} - 0}{y} = 0$$

$$\frac{1}{p} \left| \sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y} - x \right| = \left| \sqrt[2023]{\cos^{2023} t + p \sin^{2023} t + o(p)} - \cos t \right| \leq$$

$$\leq \left| \sqrt[2023]{\cos^{2023} t + 2p} - \cos t \right| = g(t) = \left| \sqrt[n]{\cos^n t + 2p} - \cos t \right| = \left| \sqrt[n]{t^n + 2p} - t \right| \leq$$

$$g'(t) = (t^n + 2p)^{\frac{1-n}{n}} t^{n-1} - 1 = 0 \Rightarrow (t^n + 2p)^{\frac{1-n}{n}} = t^{1-n}, \text{ при } t < 0$$

$$t^n + 2p = -t^n \Rightarrow t^n = -p \Rightarrow t_{\max} = \sqrt[n]{p}$$

$$u_{g_{\max}} = \sqrt[n]{-p+2p} + \sqrt[n]{p} = 2\sqrt[n]{p}$$

$$\leq 2\sqrt[n]{p} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{ф-ция дифер.}$$

3.1. Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке (0, 0) при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{1/2} \cdot |y|^\alpha), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

при $\alpha \leq 0$ не существует $\partial_x f \Rightarrow$ не дифер.

$$\alpha > 0: \partial_x f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 0)}{x} = 0$$

$$\partial_y f = 0$$

$$\frac{1}{p} \left| \ln(1 + |x|^{1/2} |y|^\alpha) \right| = \frac{1}{p} \left| \ln(1 + p^{\frac{1}{2}+\alpha} |\cos t \sin t|) \right| = \frac{1}{p} \left| p^{\frac{1}{2}+\alpha} |\cos t \sin t| + o(p^{\frac{1}{2}+\alpha}) \right| \leq$$

$$\leq p^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot A, \text{ при } \alpha > \frac{1}{2} \quad p^{\alpha-\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ и ф-ция дифер.}$$

при $\alpha = \frac{1}{2}$: $p^{\alpha-\frac{1}{2}} |\cos t \sin t| + o(1) = |\cos t \sin t| + o(1)$ — предел зависит от $\cos t$

при $\alpha < \frac{1}{2}$: $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}-\alpha}} |\cos t \sin t| + o(p^{\alpha-\frac{1}{2}})$ — бесконечность.

2.3. Исследуйте на дифференцируемость в точке (0, 0) функции:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} \operatorname{tg}(2x), & x \neq 0, \\ y^4 + |y|^{3/2}, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5}{x^3} \ln \left(1 + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right), & x \neq 0, \\ y^2, & x = 0. \end{cases}$

$$a) \partial_x f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{y^2}{x} \operatorname{tg} 2x}{x} = 0$$

$$\partial_y f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 + |y|^{3/2}}{y} = 0$$

1) $x \neq 0$: $\frac{1}{p} \left| \frac{y^2 \operatorname{tg} 2x}{x} \right| = \frac{p^2 \cos^2 t}{p} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} =$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left| p^2 \cos^2 t \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \right| = \lim_{p \rightarrow 0} p \cos^2 t \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 0$$

т.е. ф-ция дифер.

$$2) \quad x=0 \quad \frac{1}{y} |y^4 + |y|^3|_2 \rightarrow 0$$

$$5) \quad \begin{aligned} \partial_x f &= 0 \\ \partial_y f &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 1) \quad x \neq 0 \quad & \frac{1}{p} \left| \frac{y^5}{x^3} \ln \left(1 + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \right| = \left| \frac{p \cos^5 \varphi}{\sin^3 \varphi} \ln(1 + \cos \varphi \sin \varphi) \right| \leq \\ & \left(\begin{aligned} \text{т.е. } x \neq 0 \quad \sin^3 \varphi \neq 0 \\ \text{т.е. } \frac{|\sin \varphi \cos \varphi|}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(1 + \sin \varphi \cos \varphi) \rightarrow -\infty \end{aligned} \right) \leq |p| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{не определено} \end{aligned}$$