**Т.1.** Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\underline{а)} \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch}\alpha x - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3}-2}\,dx;\ б) \int\limits_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch}\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\,dx;\ в) \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^\alpha)}{x\ln^\alpha(1+x)}\,dx.$$

б) $\operatorname{ch}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} = \left\{\begin{matrix}\text{т.к. } e^{-\frac{1}{x}} \text{ экспоненциально} \\ \text{мало при } x\to 0\end{matrix}\right\} \approx \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}$

$\left(\ln\left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}\right]\right)^\alpha = \left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{2}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}\left(1 + x\ln\frac{1}{2}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}\left(1 + \alpha x \ln\frac{1}{2} + o(x)\right) = \frac{1}{x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$

$\ln(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\int\limits_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch}\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}dx \Rightarrow$ гл. ч. $= \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{x^\alpha}dx}{\frac{1}{x}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx \Rightarrow$ инт. сходится при $\alpha - 1 < 1$
$\alpha < 2$//

в) $\alpha = 0$: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x}dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} + \int\limits_0^1 o(x)\,dx$
расходится.

$\alpha > 0$: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^\alpha)}{x\ln^\alpha(1+x)}dx \approx \int\limits_0^1 \frac{x+x^\alpha}{x\cdot x^\alpha}dx = \int\limits_0^1 \frac{1+x^\alpha}{x^\alpha}dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + 1 \Rightarrow$ сходится при $\underline{\underline{\overset{\lt}{0}\ \alpha < 1}}$

$\alpha < 0$: $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{x^{|\alpha|}}\right)}{x}\ln^{|\alpha|}(1+x)\,dx \approx \int\limits_0^1 x^{|\alpha|-1}dx \to$ сход при $|\alpha| - 1 > -1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha < 0}}$
$\frac{\pi}{2}$ $\quad x^{|\alpha|}$ $\quad |\alpha| > 0$

**Т.2.** Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\underline{а)} \int\limits_0^1 x^\alpha \ln^\beta x\,dx;\ б) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx;\ в) \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx.$$

б) Сделаем замену $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx = -\int\limits_{\pi/2}^0 \cos^\alpha x\sin^\beta x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^\beta x\cos^\alpha x\,dx$

То есть условия сходимости на $\alpha$ и $\beta$ симметричны

1) $\alpha, \beta \geqslant 0$ то инт Римановский $\Rightarrow$ сход/

2) $\alpha < 0$: $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^\beta x}{\sin^{|\alpha|}x}dx \approx \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^\beta x}{x^{|\alpha|}}dx \to$ сход при $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha > -1$.

Так как усл. симм, то $\beta > -1$ тоже сходится//.

в) $t = \frac{1}{x} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int\limits_0^1 \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^\alpha}(\ln 1/t)^\beta} = -\int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha-2}dt}{(-\ln t)^\beta} \approx \int\limits_0^1 t^{\alpha-2}|\ln t|^{-\beta}dt \to$ сход при $\alpha - 2 > -1 \wedge -\beta > -1$
$dx = -\frac{1}{t^2}dt$ $\qquad \alpha > 1 \wedge \beta < 1$

**$\underline{\text{Т.4}}$.** Найдите явное асимптотически эквивалентное выражение для интеграла

$$\int\limits_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2}\,dt$$

при $x \to +\infty$ в зависимости от параметра $\alpha$.

$\int\limits_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2}dt = -\int\limits_x^{+\infty} t^{\alpha-1}d\left(e^{-t^2/2}\right) = -t^{\alpha-1}e^{-t^2/2}\Big|_x^{+\infty} + \int\limits_x^{+\infty}(\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t^2/2}dt \ominus$

$\ominus\ x^{\alpha-1}e^{-x^2/2} + (\alpha-1)\int\limits_x^{+\infty} t^{\alpha-2}e^{-t^2/2}dt$ | Рлим $\int\limits_x^{+\infty} t^{\alpha-2}e^{-t^2/2}dt = \left\{\begin{matrix} y = \frac{x}{t} \\ dt = -\frac{x}{y^2}dy\end{matrix}\right\} = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{x}{y^2}\right)dy$

$\Phi(x) = \frac{1}{\quad}\int\limits^1 \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}dy \ominus$

$$\ominus\ x^{\alpha-1} e^{-x^2/2} + (\alpha-1)\int_x t^{\alpha-2} e^{-t^2/2}\,dt \quad \Big|\ \text{При}\ \int_x t \ldots \quad 0$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1} e^{-x^2/2}} \int_0^1 \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{x}{y^2}\,dy \ominus$$

$$\ominus \int_0^1 \frac{1}{y^\alpha} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}\,dy,\ \{x^2 \to +\infty \Rightarrow\}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{y^\alpha}\,dy \to \text{при } \alpha \geq 1 \text{ сход}, \quad \alpha \leq 1 \text{ расход}$$

**T.3.** Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int\limits_0^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}$

$\alpha = 0$: $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx \sim \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\,dx$ – расходится

$\alpha > 0$: проблемы при $x \to +\infty$ поэтому р-рим интеграл $\int_1^{+\infty}$

$$\int_1^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}dx \sim \int_1^{+\infty} x^{4\alpha/3}\cdot\frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha}dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{4\alpha}{3}+\frac{1}{2}}}{x^\alpha}dx = \int_1^{+\infty} x^{\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{2}}dx \text{ – сход, при } \frac{\alpha}{3}+\frac{1}{2} < -1,\ \alpha < -\frac{9}{2}$$

т.е. инт. всегда расх при $\alpha > 0$

$$\alpha < 0: \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{4|\alpha|/3}} \operatorname{arctg}\frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{1+x^{|\alpha|}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^{4|\alpha|/3}}\operatorname{arctg}\frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{1+x^{|\alpha|}}}_{(1)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4|\alpha|/3}}\operatorname{arctg}\frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{1+x^{|\alpha|}}}_{(2)}$$

$$(1): \int_0^1 \frac{1}{x^{4|\alpha|/3}}\operatorname{arctg}\frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{1+x^{|\alpha|}}dx \sim \int_0^1 \frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4|\alpha|}{3}}}dx = \int_0^1 x^{-\frac{|\alpha|}{3}+\frac{1}{2}}dx \text{ – сход, при } -\frac{|\alpha|}{3}+\frac{1}{2} > -1$$

$$|\alpha| < \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha > -\frac{9}{2} //$$

$$(2): \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4|\alpha|/3}}\operatorname{arctg}\frac{x^{|\alpha|+\frac{1}{2}}}{1+x^{|\alpha|}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{4|\alpha|/3}}dx \text{ – сход при } -\frac{4|\alpha|}{3}+1 < 0$$

$$|\alpha| > \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha < -\frac{3}{4}$$

т.е. $\alpha \in \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ //

; в) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\frac{\cos x^3}{x+1}\,dx$; – проблема в $+\infty$ т.к. $\cos x^3$ огр $\Rightarrow$

$x^3 = t \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

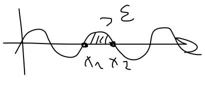
$$\sim \int_1^{+\infty} t^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}}+1}\right)dt = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\cos t}{t^{1/3}+1}\right)dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/3}+1}}_{\text{сход усл}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 t}{t}}_{\text{сход усл } (\cos^3 t \to \cos 3t,\ 3\cos t)} + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right)$$

Вид не сход абс, т.к. $\int_1^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{\cos t}{t^{1/3}+1}\right)\right|dt \geq$

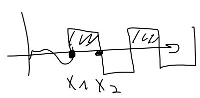
$$\geq \int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{\cos t}{t^{1/3}+1}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/3}+1} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2\cos t}{t^{1/3}+1}\right)dt$$

$$\sim \int_0^{+\infty} dt \text{ – расход}$$

г) $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$; $\alpha = 0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx$ – расходится.




$\alpha < 0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(x^{|\alpha|}\cos x)\,dx$ – расход.




$\alpha > 0$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^\alpha}\right)dx$ при $\alpha > 1$ $\int \frac{\cos x}{x^\alpha}$ сход абс $\Rightarrow$ исх. инт также сход абс //.

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^\alpha}\right)dx = \underbrace{x\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^\alpha}\right)\Big|_1^{+\infty}}_{\text{сход}} - \int_1^{+\infty} x\,\frac{1}{1+\frac{\cos x}{x^\alpha}}\cdot\frac{-\sin x\cdot x^\alpha - \cos x\cdot\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}\,dx$$

$$\sim \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha-1}} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \text{ – т.е. сход при } \alpha - 1 > 0,\ \alpha \geq 1 //$$

Проверим $\alpha = 1$: $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x}\right)dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx}_{\text{сход усл}//} + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

т.е. при $\alpha=1$ - сход усл
при $\alpha>1$ - сход абс.

e) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^2\cos x^3}{(3x-\operatorname{arctg} x)^\alpha}\,dx;$ $\sim$ $\alpha>0$ $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{(3t^{1/3}-\operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha}dt = \int\limits_1^{+\infty} \cos t\,dt\left(1+\dfrac{\alpha \operatorname{arctg} t^{1/3}}{t^{1/3}}+O\left(\dfrac{1}{t^{2/3}}\right)\right)\dfrac{1}{t^{1/3\alpha}} = !$

$= \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^{\alpha/3}}dt + \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} t^{1/3} \cos t}{t^{\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{3}}} + \int\limits_1^{+\infty} \cos t \cdot O\left(\dfrac{1}{t^{2/3+\alpha}}\right) \to$ $\alpha>3$ - абс. сход.
$\alpha\in(2,3]$ - сход усл.
$\alpha\in(0,2]$ - сход усл

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{|\cos t|}{(3t^{1/3}-\operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha}dt \geq \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{|\cos t|}{t^{\alpha/3}}dt$ - расх при $\alpha\in[0,3]$ //

$\alpha\leq 0$ Расходится, так как $\int\limits_1^{+\infty} \cos t\,(3t^{1/3}-\operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha dt$ по К.R.:
пусть $t\in(x_1,x_2)$ $\cos t>0$ $\to \int\limits_{x_1}^{x_2} \cos t\,(3t^{1/3}-\operatorname{arctg} t^{1/3})^\alpha dt \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} \cos t \cdot 2^\alpha t^{\frac{\alpha}{3}} dt \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} \cos t\, 2^\alpha x_1^{\alpha/3} = C > 0$

**T.5.** Определён ли интеграл по прямой как интеграл Лебега

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$?

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = 2\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \left\{\begin{array}{l} t=x^2 \\ x=\sqrt{t} \\ dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array}\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ - сходится усл. как эталон.

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx$ - сходится условно как эталон