32.8

9) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$;

$2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2+19x_3^2 = 2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2+4x_3x_2) -$
$- 8x_2^2 - 2x_3^2 - 8x_2x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^3 =$

$= 2(x_1+2x_2+x_3)^2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 17x_3^2 = 2(x_1+2x_2+x_3)^2 + (x_2-4x_3)^2 + x_3^2 \to A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rk}A = 3$
$r^+ = 3$ — положит. определённая
$r^- = 0$
$r^+ - r^- = 3$

12) (р) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;

$x_1 = y_1 + y_2$
$x_2 = y_1 - y_2 \to y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - \cancel{y_2y_3} + y_1y_3 + \cancel{y_2y_3} =$
$x_3 = y_3$
$= (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 - y_3^2 = (y_1+y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rk} = 3$
$r^+ = 1$ → полуопред.
$r^- = 2$

32.13. Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n-мерном пространстве:

4) $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$;

32.18. При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$\begin{pmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ $\lambda > 8$ — п. опр
$\lambda = 8$ — неотр. опр
$\lambda < 8$ — неопред.

32.20

2) Доказать, что в матрице положительно определенной квадратичной формы максимальный по модулю элемент положителен.

32.21. 1) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}(X^T X)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

2) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

1) $\mathrm{tr}(X^TX) = \mathrm{tr}((XX^T)^T) = \mathrm{tr}(XX^T)$ — кв. форма.

квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

1) $tr(X^TX) = tr((XX^T)^T) = tr(XX^T)$ – кв. форма.

$XX^T_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$ при $a_i \neq 0 \Rightarrow tr(XX^T) = \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$

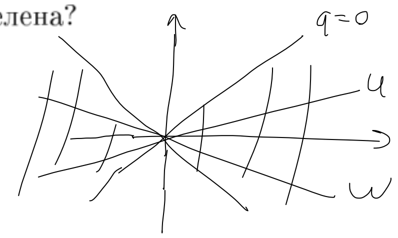
Т.1. Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве удовлетворяют условиям $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$, $\delta_4 > 0$. Какими могут быть положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции формы q?

$\delta_4 > 0 \Rightarrow rk\, q = 4 \Rightarrow r^+ + r^- = 4$

$\delta_2 = \delta_3 = 0 \Rightarrow r^+ \neq 4,\ r^- \neq 4 \Rightarrow r^+ \neq 0,\ r^- \neq 0$

Также $r^+ r^- = 2k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Возможные варианты: $r^+ = 2$, $r^- = 2$

Т.2*. Пусть $V = U \oplus W$ и ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда что q положительно определена?



Нет, пусть $q = x^2 - y^2$. Нарисуем, где $q > 0$

Спроецировав q на любую прямую из этой области получим $q|_U > 0$

$q|_W > 0$

25.7. В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, функциям f и g сопоставляется число

Д-ем, что $q(f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt > 0 \ \forall f \neq 0$

Так как $f \not\equiv 0$, то $\exists t\ f^2(t) > 0$

Тогда т.к. f-непрерывна, то

$\int_{-1}^{1} f^2(t) > 0$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение.

25.25. Найти скалярное произведение векторов, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Γ этого базиса:

1) $\|1\ 1\ 1\|^T$, $\|1\ 3\ 1\|^T$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{Vmatrix}$;

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ -1\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

25.21. Найти угол между ребром и диагональю n-мерного куба.

$a = (1, 0, \ldots, 0)$, $b = (1, \ldots, 1)$

$ab = (1, 0 \ldots 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$|a| = 1$

$|b| = \sqrt{n}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$b = (1, \dots, 1)$ $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{n}$ $\Big\}\ \cos\alpha = \dfrac{}{1\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

25.23. Пусть в некотором базисе квадрат длины любого вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

$\sum (u_k+v_k)^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (v,v) + 2(u,v) = \sum u_k^2 + \sum v_k^2 + 2(u,v)$

$2(u,v) = 2\sum u_k v_k \Rightarrow (u,v) = \sum u_k v_k$ ЧТД

25.10. Пусть $\mathbf{e}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{E}$. Доказать, что в $\mathcal{E}$ существует одно и только одно скалярное произведение, относительно которого базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный.

Билинейная форма (ск. произв) однозначно зад. зн на базисных в-рах.

25.35. Может ли третья строка матрицы Грама некоторого базиса в четырехмерном пространстве быть строкой:

3) $\|1\ 0\ 1\ 0\|$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T.5. Проведите ортогонализацию базиса $\{1, x, x^2\}$ пространства многочленов степени ≤ 2 со скалярным произведением из задачи Б 25.7.

$\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx = 2$ $\int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx = \frac{2}{3}$ $\int_{-1}^{1} x^2 x^2\,dx = \frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = 0$ $\int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\,dx = \frac{2}{3}$ $\int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx = 0$

$\Big\}\ \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T.6*. В пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$ найдите ортогональное дополнение к подпространству a) симметричных b) верхнетреугольных матриц.

а) Покажем, что если $X = X^T$ и $Y = -Y^T$, то $(X,Y) = 0$ | + сим и кососим обр. прямую сумму.

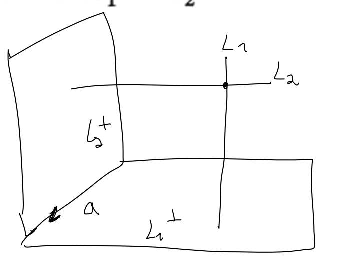
$(X,Y) = tr(X^T Y) = tr(XY) = tr(YX) = -tr(Y^T X) = -(Y,X) = -(X,Y)$

$2(X,Y) = 0 \Rightarrow (X,Y) = 0 \Rightarrow$ для люб кососим и сим матриц их ск. пр равно 0 - т.е. они орт.

б) X - верхнетреуг, Y - нижнетреуг $\Rightarrow (X,Y) = tr(X^T Y) = tr\left(\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ X & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ Y & \ddots \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ XY & 0 \end{pmatrix} = 0$

26.6. Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны. Обязательно ли ортогональны $\mathcal{L}_1^\perp$ и $\mathcal{L}_2^\perp$?

Нет пример.



$a \in L_2^\perp$, $a \in L_1^\perp$ и $(a,a) > 0 \Rightarrow L_2^\perp \not\perp L_1^\perp$

26.13. Подпространство $\mathcal{L}$ задано как линейная оболочка векторов, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы:

3) $\|3\ -15\ 9\ 1\|^T, \|3\ -6\ -3\ 2\|^T$;

Найти:
а) матрицу системы уравнений, определяющей $\mathcal{L}^\perp$,
б) базис в $\mathcal{L}^\perp$.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -15 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right.$

3) $\|3\ -15\ 9\ 1\|^T$, $\|3\ -6\ -3\ 2\|^T$; а) матрицу системы уравнений, определяющей $\mathcal{L}^{\perp}$,
б) базис в $\mathcal{L}^{\perp}$.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -15 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \to \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{9} \\ 2/3 & -1/9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$ базис.

26.15. Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\xi = \mathbf{o}$. Найти систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$:

2) $\begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0, \\ -6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 0; \end{aligned}$

1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 & -6 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

26.27. Подпространство $\mathcal{L}$ — линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_k$. В ортонормированном базисе заданы координатные столбцы этих векторов и координатный столбец $\boldsymbol{\xi}$ вектора x. Найти координатные столбцы $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\xi}''$ ортогональных проекций вектора x соответственно на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$:

2) $\mathbf{a}_1 = \|6\ 1\ 5\|^T$, $\mathbf{a}_2 = \|4\ -1\ 3\|^T$, $\boldsymbol{\xi} = \|1\ 3\ -2\|^T$;

1) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow L_1$

$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow L_2$

2) $\varepsilon' \in L_1 \wedge \varepsilon'' \in L_2 \wedge \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$

$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$ Решаем с-му: $\begin{pmatrix} 34/21 \\ 17/42 \\ -85/42 \\ -13/21 \\ 109/42 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ $\leftarrow \varepsilon'$ $\leftarrow \varepsilon''$