32.8

9) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$;

$$2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2+19x_3^2 = 2(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2+4x_3x_2) -$$

$$-8x_2^2-2x_3^2-8x_2x_3+9x_2^2+19x_3^3 =$$

$$= 2(x_1+2x_2+x_3)^2+x_2^2-8x_2x_3+17x_3^2 = 2(x_1+2x_2+x_3)^2+(x_2-4x_3)^2+x_3^2 \to A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$rkA=3$

$r^+=3$ — положит. определенная

$r^-=0$

$r^+-r^-=3$

12) (р) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;

$x_1=y_1+y_2$

$x_2=y_1-y_2$ $\to$ $y_1^2-y_2^2+y_1y_3-\cancel{y_2y_3}+y_1y_3+\cancel{y_2y_3}=$

$x_3=y_3$

$$=(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-y_2^2-y_3^2=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2 \to \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$rk=3$

$r^+=1$ $\to$ полуопред.

$r^-=2$

32.13. Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n-мерном пространстве:

4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

32.18. При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$$\begin{pmatrix}\lambda&8&2\\8&8&2\\2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda-8&0&0\\0&8&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda-8&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$\lambda>8$ — п. опр

$\lambda=8$ — неотр. опр

$\lambda<8$ — неопред.

32.20

2) Доказать, что в матрице положительно определенной квадратичной формы максимальный по модулю элемент положителен.

32.21. 1) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}(X^TX)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

2) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

1) $tr(X^TX)=tr((XX^T)^T)=tr(XX^T)$ — кв. форма.

$XX^T = \sum^n a_i^2 > 0$ при $a_i \neq 0 \Rightarrow tr(XX^T)=\sum^n\sum^n a_i^2>0$

1) $tr(X^TX) = tr((XX^T)^T) = tr(XX^T)$ – кв-форма.

$XX^T_{ii} = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$ при $a_i \neq 0 \Rightarrow tr(XX^T) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_i^2 > 0$

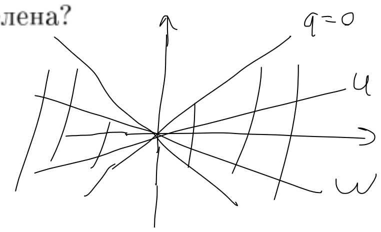
Т.1. Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве удовлетворяют условиям $\delta_1 > 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$, $\delta_4 > 0$. Какими могут быть положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции формы q?

$\delta_4 > 0 \Rightarrow rk\,q = 4 \Rightarrow r^+ + r^- = 4$

$\delta_2 = \delta_3 = 0 \Rightarrow r^+ \neq 4,\ r^- \neq 4 \Rightarrow r^+ \neq 0,\ r^- \neq 0$

Также $r^+ r^- = 2k,\ k \in N \Rightarrow$ Возможные варианты: $\boxed{\begin{matrix} r^+ = 2 \\ r^- = 2 \end{matrix}}$

Т.2*. Пусть $V = U \oplus W$ и ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда что q положительно определена?



Нет, пусть $q = x^2 - y^2$ нарисуем, где $q > 0$

Спроецировав q на любую прямую из этой области получим $q|_U > 0$

$q|_W > 0$

25.7. В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, функциям f и g сопоставляется число

Д-ем, что $q(t) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt > 0\ \forall f \neq 0$

Так как $f \neq 0$, то $\exists t\ f^2(t) > 0$

тогда т.к. f-непрерывна, то

$\int_{-1}^{1} f^2(t) > 0$

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt.$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение.

25.25. Найти скалярное произведение векторов, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Г этого базиса:

1) $\|1\ \ 1\ \ 1\|^T$, $\|1\ \ 3\ \ 1\|^T$, $\Gamma = \left\|\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{matrix}\right\|$;

$$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ -1\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

25.21. Найти угол между ребром и диагональю n-мерного куба.

$$\left.\begin{matrix} a = (1, 0, \ldots, 0) \\ b = (1, \ldots, 1) \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} ab = (1, 0 \ldots 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ |a| = 1 \\ |b| = \sqrt{n} \end{matrix}\right\} \cos\alpha = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

25.23. Пусть в некотором базисе квадрат длины любого вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

$$\sum (u_k+v_k)^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (v,v) + 2(u,v) = \sum u_k^2 + \sum v_k^2 + 2(u,v)$$

$$2(u,v) = 2\sum u_k v_k \Rightarrow (u,v) = \sum u_k v_k \quad \text{ЧТД}$$

25.10. Пусть **e** — базис в линейном пространстве $\mathcal{E}$. Доказать, что в $\mathcal{E}$ существует одно и только одно скалярное произведение, относительно которого базис **e** — ортонормированный.

Билинейная форма (ск. произв) однозначно зад. зн на базисных в-рах.

25.35. Может ли третья строка матрицы Грама некоторого базиса в четырехмерном пространстве быть строкой:

3) $\|1\ 0\ 1\ 0\|$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

T.5. Проведите ортогонализацию базиса $\{1, x, x^2\}$ пространства многочленов степени ≤ 2 со скалярным произведением из задачи Б 25.7.

$$\left.\begin{matrix} \int_{-1}^{1} 1\cdot 1\, dx = 2 & \int_{-1}^{1} x\cdot x\, dx = \frac{2}{3} & \int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx = \frac{2}{5} \\ \int_{-1}^{1} 1\cdot x\, dx = 0 & \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2 dx = \frac{2}{3} & \int_{-1}^{1} x\cdot x^2 dx = 0 \end{matrix}\right\} \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T.6*. В пространстве $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T Y)$ найдите ортогональное дополнение к подпространству a) симметричных b) верхнетреугольных матриц.

а) Покажем, что если $X = X^T$ и $Y = -Y^T$, то $(X,Y) = 0$ | + сим и кососим обр. прямую сумму.

$$(X,Y) = tr(X^T Y) = tr(XY) = tr(YX) = -tr(Y^T X) = -(Y,X) = -(X,Y)$$

$2(X,Y) = 0 \Rightarrow (X,Y) = 0 \Rightarrow$ для люб кососим и сим матриц их ск. пр равно 0 - т.е. они орт.

б) X - верхнетреуг, Y - нижнетреуг $\Rightarrow (X,Y) = tr(X^T Y) = tr\left(\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ X & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ Y & \ddots \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ XY & 0 \end{pmatrix} = 0$

26.6. Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны. Обязательно ли ортогональны $\mathcal{L}_1^\perp$ и $\mathcal{L}_2^\perp$?

Нет пример.

$a \in L_2^\perp$ и $(a,a) > 0 \Rightarrow L_2^\perp \not\perp L_1^\perp$
$a \in L_1^\perp$

26.13. Подпространство $\mathcal{L}$ задано как линейная оболочка векторов, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы:

3) $\|3\ -15\ 9\ 1\|^T, \|3\ -6\ -3\ 2\|^T$;

Найти:
а) матрицу системы уравнений, определяющей $\mathcal{L}^\perp$,
б) базис в $\mathcal{L}^\perp$.

$$\left(\begin{matrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

б) $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \rightarrow \Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{8}{9} \\ 2/3 & -1/9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – базис.

26.15. Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\xi = \mathbf{o}$. Найти систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$:

2) $8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0,$
$-6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0;$

1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 & -6 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \Phi \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

26.27. Подпространство $\mathcal{L}$ — линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_k$. В ортонормированном базисе заданы координатные столбцы этих векторов и координатный столбец ξ вектора x. Найти координатные столбцы ξ' и ξ'' ортогональных проекций вектора x соответственно на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$:

2) $\mathbf{a}_1 = \|6\ 1\ 5\|^T$, $\mathbf{a}_2 = \|4\ -1\ 3\|^T$, $\xi = \|1\ 3\ -2\|^T$;

1) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in L_1$

$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in L_2$

2) $\varepsilon' \in L_1 \wedge \varepsilon'' \in L_2 \wedge \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$

$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$ Решаем с-му: $\begin{pmatrix} 34/21 \\ 17/42 \\ -35/42 \\ \hline -13/21 \\ 109/42 \\ 1/42 \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \varepsilon' \\ \\ \in \varepsilon'' \end{matrix}$

28.19. Дана матрица A преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ с матрицей Грама Г. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\to A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

30.7. Пусть A — матрица линейного преобразования в базисе с матрицей Грама Г. Найти матрицу сопряженного преобразования:

$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ $\to A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ -19 & 5i \end{pmatrix}$

28.27. Пусть преобразование φ диагонализуемо. Доказать, что φ^* также диагонализуемо.

Выберем базис, где $\Gamma = E \Rightarrow A^* = A^T$ тогда $\exists C$ т.ч. $C^{-1}AC = D$ но тогда

$D = D^T = (C^{-1}AC)^T = C^T A^T (C^T)^{-1} = C^T A^* (C^T)^{-1}$ – нашли преобр диаг. A^* //

29.5. Найти все самосопряженные ортогональные преобразования.

$\Gamma = E \Rightarrow A = A^T$ и $AA^T = E \Rightarrow A^2 = E \Rightarrow A$-диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

29.6. Найти все самосопряженные идемпотентные преобразования.

$\varphi^2(x) = \varphi(x) \to \varphi$-проектор, также $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \Rightarrow (\varphi^2(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ – ортогонален

29.19. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования φ и матрицу преобразования в этом базисе, если φ задано в ортонормирован-

1, 7 1)

59. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda)-4=0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda=-3 \\ \lambda=2 \end{matrix}$

$\lambda=-3$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → нормируем на 1: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$ $\quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix} \Big\}$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ортонорм. б-с a: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

29.37. Пусть φ линейное преобразование евклидова пространства. Доказать, что:

1) преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ — неотрицательные самосопряженные.

1) $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi$ по правилам сопряжения

2) Пусть u - с в-тор $\varphi^*\varphi$: $(u, \varphi^*\varphi(u)) = (\varphi(u), \varphi(u)) \geqslant 0 \Big\}$ $\underline{\underline{\lambda \geqslant 0}}$

$\overset{\shortparallel}{\lambda(u,u)}$

29.47. Линейное преобразование φ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в столбцы матрицы B. Является ли φ ортогональным:

это базис поэтому для проверить на нём

1) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$;

$(4,7)\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 16+49=65$ ok.

$(8\ 1)\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 64+1=64$

$(2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4+1=5$ ok.

$(2 -1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4+1=5$

25.50. Может ли ортогональная матрица четвертого порядка содержать строку:

1) $(1\,0\,1\,0)$ — нет не может/

29.49. Пусть $\mathcal{L}$ — инвариантное подпространство ортогонального преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^\perp$ — также инвариантно относительно φ. Как этот результат связан с задачей 25.55?

$a \in L^\perp \Rightarrow \forall b \in L \quad (a,b) = 0 = (\varphi(a), \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{\overset{\in L}{\varphi(b)}}) \Rightarrow \varphi(a) \perp c \Rightarrow \varphi(a) \in L^\perp$

т.к. φ не вырожденно/.

29.50. Ортогональное преобразование задано в ортонормированном базисе матрицей A. Найти матрицу S перехода к каноническому базису и матрицу A' преобразования в этом базисе:

$_1\| -1 \quad -3 \quad -\sqrt{6} \|$

$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & -\frac{3}{4} - \sqrt{6}/4 \end{vmatrix}$

$\sim \lambda^3 = -1 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -1 \\ \lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{} \end{matrix}$

к каноническому базису и матрицу A' преобразования в этом базисе:

2) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{Vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}-\lambda & -\frac{3}{4} & -\sqrt{6}/4 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}-\lambda & \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow$ $\lambda = -1$, $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b \perp a \perp c$ //

$\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; несложно считаем и получаем

Тогда $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30.44. Для унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе:

1) $A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$; $\longrightarrow \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}}}$

29.53. Получить полярное разложение матрицы:

2) $\begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 48 \end{cases}$ Тогда $\left.\begin{matrix} \sqrt{5} = a + 5b \\ \sqrt{45} = a + 45b \end{matrix}\right\}$ $a = \frac{2\sqrt{5}}{4}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{20}$

$B = \sqrt{AA^T} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $Q = AB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}$

12.82. Представить каждое из аффинных преобразований задачи 12.81 в виде произведения $f = h_2h_1g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

7) $x^* = 2x + 5y$, $y^* = -11x + 10y$; $\to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Найдём QB разложение $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} = A \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} \to$ $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 225$

$\left.\begin{matrix} 5 = a + 25b \\ 15 = a + 225b \end{matrix}\right\}$ $b = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$, $a = \frac{15}{4}$ $\sqrt{AA^T} = \frac{15}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 74 \end{pmatrix} = h_2h_1$ $= B$

$Q = B^{-1}A = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}$ $= g$ // – ортог. преобр.

Теперь найдём канон. вид B: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 74 \end{pmatrix}$ его $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 15$, т.е. канон. вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

два растяжения вд-по собств. векторов.

Тогда найдём м-цу перехода: $\lambda_1 = 5$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 15$: $\begin{pmatrix} -\frac{49}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to b\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Тогда $B = CB'C^{-1} = CB_1'B_2'C^{-1} = \underbrace{CB_1'C^{-1}}_{B_1}\underbrace{CB_2'C^{-7}}_{B_2} = \underbrace{\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 123 & -14 \\ -14 & 27 \end{pmatrix}}_{\text{раст-ие-по с-в-ра}} \cdot \underbrace{\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 32 & 49 \\ 49 & 368 \end{pmatrix}}_{\text{раст-ие-по др. с-в-ра}}$

Т.12. a) Выясните, может ли какая-нибудь из приведенных ниже матриц являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad 2)\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\quad 3)\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

1) Нет, т.к. $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2+1=0$, т.е $\lambda \notin \mathbb{R}$ а значит не диагонализируется/.

2) $\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3$, тогда B приводится к виду $\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$ − не диагональная.

3) $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=2\end{matrix} \rightarrow J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$

$\uparrow$ да, он с/с

найдём базис, где она диаг.

1) $\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow a\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow b\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

b)* В случае положительного ответа предъявите (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

В-ра a и b д-ны быть перпенд т.е. $a^T\Gamma b=0 \rightarrow (-1,1)\,\Gamma\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=0$

$\Gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \rightarrow (-1,1)\begin{pmatrix}d&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=(-1,1)\begin{pmatrix}a-2b\\c-2d\end{pmatrix}=-a+2b+c-2d=0$ $\Rightarrow \begin{cases}b=c\\a=1\end{cases}$ $\begin{cases}3b=2d+1\\d>b^2\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}b=\frac{3}{5}\\ d=\frac{2}{5}\end{matrix}$

$ad-b^2>0$

Выберем $d=b=1$; $\Gamma=\begin{pmatrix}1&3/5\\3/5&2/5\end{pmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}}}$