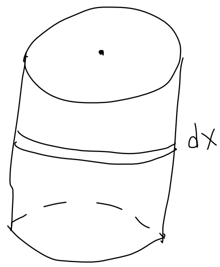
13.7. Резиновый цилиндр высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на его верхнее основание поставить второй такой же цилиндр?



$u=\frac{\sigma^2}{2E}$, $\sigma=\frac{mg}{h}\frac{x}{S}$

$dV = u\,dV = \frac{m^2g^2x^2}{S^2 2h^2E}\cdot S\,dx \Rightarrow W=\frac{m^2g^2\,h}{6ES}$

$W_2 = W(2h)-W(h) = 7W$

13.16. Однородный круглый резиновый жгут длиной l и диаметром D помещен в стальную трубку того же диаметра (рис. 349), при

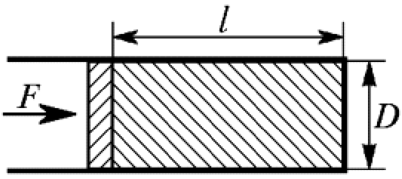
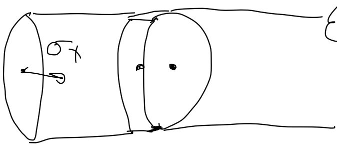


Рис. 349

193

этом один конец трубки открыт, а второй запаян. На конец жгута со стороны открытого конца трубки начинает действовать сила F, равномерно распределенная по всему сечению жгута. На сколько уменьшится при этом длина жгута? Упругие свойства резины считать известными.



$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) = \frac{\sigma_x}{E}\left(1-\frac{2\mu^2}{1-\mu}\right) = \boxed{\frac{\sigma_x}{E}\left(\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu}\right)}$

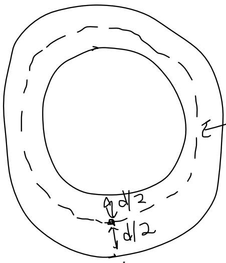
$\sigma_y-(\sigma_x+\sigma_z)\mu=0$

$\sigma_z-(\sigma_x+\sigma_y)\mu=0$

$\sigma_y+\sigma_z = 2\mu\sigma_x+\mu(\sigma_y+\sigma_z)$

$\sigma_y+\sigma_z=\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_x$

13.41. Нерадивый студент, находясь в физической лаборатории, свернул в замкнутое кольцо правильной формы стальную линейку. Какую при этом он совершил работу? Длина линейки $L = 1$ м, ширина $b = 6$ см, толщина $d = 1$ мм; модуль Юнга стали $E = 2\cdot 10^{11}$ Н/м^2.



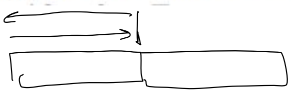
$2\pi r_0 = L$

$\varepsilon_x = \frac{2\pi(r_0+x)-2\pi r_0}{L} = \frac{2\pi x}{L}$

$u=\frac{E\varepsilon_x^2}{2}=\frac{4\pi^2x^2E}{2L^2}$

$W=\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\frac{4\pi^2E}{2L^2}\cdot x^2\cdot \underbrace{2\pi(r_0}_{L}+\underbrace{x}_{0\ \text{т.к. нечет}})\,b\,dx = \frac{2\pi^2Eb}{L}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi^2Ebd^3}{6L}$

13.39. Два одинаковых тонких стальных бруска длиной $l = 10$ см ($\rho = 7{,}8$ г/см^3, $E = 2\cdot10^{12}$ дин/см^2) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет $T_у = 200$ Н/мм^2?



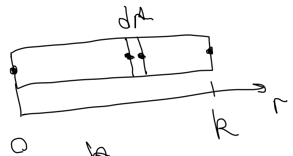
1) $l = 2ct \Rightarrow t = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\rho}{E}}$

2)

13.36. В центре астероида Паллада (радиус $R = 290$ км, ускорение силы тяжести на поверхности астероида $g_0 = 0{,}17$ м/с^2) обнаружены залежи ценных ископаемых. Бурильщики затребовали ровно 290 км труб из вольфрамового сплава (плотность 19 300 кг/м^3, модуль Юнга $E = 4\cdot10^{11}$ Па) постоянного сечения. Какую часть труб бурильщики рассчитывали сэкономить и применить для собственных надобностей, используя растяжение под действием силы тяже-

сти? Считать, что вся система труб может свободно висеть, не касаясь стенок. Считать также Палладу однородным невращающимся шаром.

$g = g_0 \frac{r}{R}$,

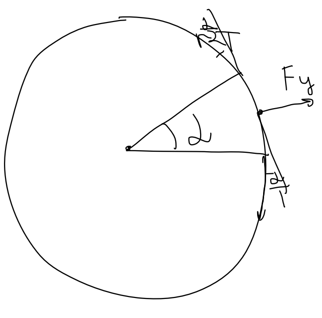


$dF(r) = g_0 \frac{r}{R}\, dm = g_0 \frac{r}{R}\, dr \frac{m}{R}$

$F(r) = \int_0^r \frac{g_0 m}{R^2} r\, dr = \frac{m g_0}{2R^2} r^2$

$\frac{dl}{dr} = \varepsilon_r = \frac{m g_0 r^2}{2R^2 ES} \to \int dl = \int_0^R \frac{m g_0}{2R^2 ES} r^2\, dr = \boxed{\frac{m g_0 R}{6ES} = \Delta r}$

13.49. Барабан центрифуги цилиндрической формы радиусом $R = 100$ мм вращается с частотой $\nu = 400$ об/с. На сколько увеличился при вращении диаметр тонкостенного барабана, если модуль упругости стали, из которой он сделан, равен $E = 2\cdot10^{11}$Па, а плотность стали $\rho = 7800$ кг/м^3. Какую прочность $T_{пр}$ должна иметь сталь, чтобы барабан не разрушился?



$F_y = 2T\sin\frac{\alpha}{2} \to T\alpha$

$F_y = \omega^2 R_1 \frac{m}{2\pi}\alpha$

$T = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi} = E\cdot\varepsilon\cdot S$

$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi ES}$

$\frac{2\pi R_1 - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = \frac{m\omega^2 R_1}{2\pi ES}$

$\frac{R_1}{R_0} - 1 = \frac{m\omega^2}{2\pi ES} R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_0} - \frac{m\omega^2}{2\pi ES}}$

$R_1 - R_0 = \frac{1 - \frac{R_0}{R_0} + \frac{m\omega^2 R_0}{2\pi ES}}{\frac{1}{R_0} - \frac{m\omega^2}{2\pi ES}} = \frac{\frac{m\omega^2 R_0}{2\pi ES}}{\frac{1}{R_0} - \frac{m\omega^2}{2\pi ES}}$

Рис. 354

13.35. Однородный тонкий стержень (рис. 354) свободно движется в горизонтальной плоскости со скоростью **v**, направленной перпендикулярно самому стержню и составляющей 0,2% от скорости звука $v_{зв}$ в материале тонкого стержня. Одним концом стержень зацепляется за вертикальную ось A и вращается вокруг нее без трения. Каково будет при этом относительное удлинение стержня?

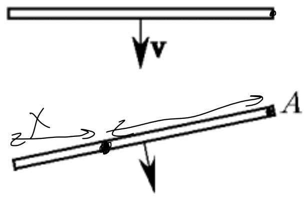


Рис. 354

1) $L = \frac{m v l_0}{2}$

2) $L = \frac{m l^2}{3} \cdot w$

$\frac{w l^2}{3} = \frac{v l_0}{2} \Rightarrow w l_0^2 = \frac{3}{2} v l_0 \to w = \frac{3}{2}\frac{v}{l_0}$

3) $\frac{d\Delta l}{dx} = \frac{w^2 x \frac{m}{l} \cdot \left(l - \frac{x}{2}\right)}{ES} \Rightarrow \Delta l = \int_0^l \frac{w^2 m}{ESl}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \frac{w^2 m l^2}{2ES} - \frac{w^2 m l^2}{6ES} = \frac{w^2 m l^2}{3ES}$

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\frac{9}{4}\frac{v^2}{l_0^2} m l_0}{3ES} = \frac{3 v^2 m}{4 l_0 S}$

13.42. Кабина лифта массой $m = 1000$ кг опускается с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Стальной трос с площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и модулем Юнга $E = 10^{11}$ Н/м^2 одним концом закреплен на вращающемся барабане, расположенном на чердаке здания, а вторым через очень коротенькую пружину соединен с кабиной. Коэффициент жесткости пружины $k = 4 \cdot 10^5$ Н/м. Когда кабина опустилась на расстояние $l = 10$ м, барабан заклинило. Вычислить максимальную силу $F_{\max}$, действующую на систему (трос, пружина) из-за внезапной остановки кабины. Изменением сечения троса и его весом пренебречь.

$k_э = \frac{1}{1/k + l/ES} = \frac{kES}{ES + kl}$

ЗСЭ: $\frac{mv^2}{\cancel{2}} = \frac{F_{max}^2}{\cancel{2}k_э} \Rightarrow F_{max} = v\sqrt{mk_э}$