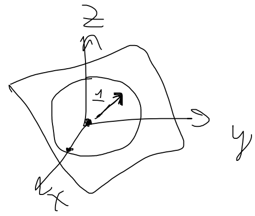
T2. а) $p\Gamma(p)=\Gamma(p+1) \Rightarrow p\Gamma(p)\to 1,\ p\to 0 \Rightarrow \Gamma(p)\sim \frac{1}{p},\ p\to 0$

T3. а) $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} dx\, \frac{\sin x}{x}\int_0^{x} dy = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$

в) $\int\limits_{0\le x_1 \dots x_n \le a} (x_1+\dots+x_n)^2\,dx_1\dots dx_n = a^{n-1}\int_0^a x^2\,dx\cdot n + 2na^{n-2}\int\limits_{0\le x,y\le a} xy\,dx\,dy = 2na^{n-2}\left(\int_0^a x\,dx\right)^2 + a^{n-1}n\int_0^a x^2dx$

$= 2na^{n-2}\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + na^{n-1}\frac{a^3}{3} = \frac{na^{n+2}}{2} + \frac{na^{n+2}}{3} = \frac{5na^{n+2}}{6}$



T.7. б) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2\,ds = I \Rightarrow 3I = \int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2+y^2+z^2\,ds = \int\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=0}} a^2\,ds = a^2\int_S ds = \underline{\underline{2\pi a^2}}$

T.4. б) б) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x+y+z)\,dxdydz; = \int\limits_{t^2+p^2+q^2\le a^2} f(t\sqrt{3})\,dt\,dq\,dp = \int_0^1 f(t\sqrt{3})\cdot\pi(a^2-t^2)\,dt$

введем
замену $x+y+z=t\sqrt{3}$
$\approx p$
$\approx q$

$\iint\limits_{p^2+q^2\le a^2-t^2} 1\,dt\,dq$

T.1. а) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^\beta}dx$, сход при $\alpha,\beta>0$ и $\alpha,\beta<0$

$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^\beta}dx = \left\{\begin{aligned} t&=x^\beta\\ dx&=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt\end{aligned}\right\} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-1}{\beta}}e^{-t}\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

в) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\ln x}{1+x^\beta}dx = \left\{\begin{aligned} x^\beta&=t\\ dx&=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}\end{aligned}\right\} = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\ln t}{1+t}dt = \frac{1}{\beta^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt$

$\left\{\gamma=\frac{\alpha+1}{\beta}\right\}$

$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}\ln t}{1+t}dt = \left\{\begin{aligned}\ln t&=p\\ dt&=e^p dp\end{aligned}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}\,p}{1+e^p}dp$

Р-ием $\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} = B(\gamma,1-\gamma) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\gamma-1}}{1+t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\gamma p}}{1+e^p}dp$

$-\frac{\pi^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{pe^{\gamma p}}{1+e^p}dp \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\ln x}{1+x^\beta}dx = -\frac{\pi^2\beta^2\cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)}$

T6. а) $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ 0\le x\le b \Rightarrow l=\int_0^b\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a}dx = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b = a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$

б) На доп семинаре

Д-во ф-лы дополнения.

$\boxed{\text{I.}}$ Д-жем, что $\pi\,\mathrm{ctg}\,x\pi = \frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

$f(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x+n}\right)$

---

1) Д-жем, что $g(x)$ опред для всех нецелых значений:

$g(x) = \frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$ – сход равномерно $\forall x\notin\mathbb{Z}$ т.к. $\frac{1}{x^2-n^2}\sim\frac{1}{n^2}\to$ сходится.

$f(x)$ – периодическое с периодом 1. $\boxed{g_N(x)=g_N(x+1)}$

$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$ — сход равномерно $\forall x \in K$ т.к. $x^2-n^2 \sim n^2$

2) Д-жем, что $g(x)$ и $f(x)$ — периодические с периодом 1.

$g_N = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \to g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n+1} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} \Rightarrow$ при $N\to\infty$ $\boxed{g_N(x) = g_N(x+1)}$

3) $f(x) = -f(-x)$; $g(x) = -g(-x)$ — очев

4) для $f(x)$: $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ $\left(\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x = \frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin \pi x} = \frac{\pi\left(\cos^2\frac{\pi x}{2} - \sin^2\frac{\pi x}{2}\right)}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}} = \pi\,\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2} + \pi\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$

для $g(x)$: $g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}$ => переходя к пределу

$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x)$

5) Тогда $h(x) \equiv f(x) - g(x)$ — нечёт непр ф-ция и $2h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Пусть $x_0 - h(x_0) = \max h(x_0) = m \Rightarrow 2m = h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$

Пусть $h\left(\frac{x_0}{2}\right) < m$: $2m < m + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > m$ — противор $\Rightarrow m = h\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Тогда $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow h(0) = \lim_{n\to\infty} h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$, но $h(0) = 0$ т.к. $\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi x \to \frac{1}{x}$ при $x\to 0$

Тогда $\boxed{m=0} \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

II. $\int_0^x \left(\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi t - \frac{1}{t}\right)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{2t}{t^2-n^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$

$$\| \qquad \ln\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right|$$

Тогда $\sin\pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$

III. $\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1 \left(1-x^{1/n}\right)^{\alpha-1}dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} B(n,\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$

IV. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!\,(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} =$

$= \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin\pi x}$ //

Т.10. $xe^{f+g} + fg = 1$, $ye^{f-g} - \frac{f}{1+g} = 2x$ в $x=1$ $y=2$ $f(1,2)=0$ $g(1,2)=0$

$$\begin{cases} e^{f+g}dx + xe^{f+g}(df+dg) + f\,dg + g\,df = 0 \\ e^{f-g}dy - \frac{(1+g)df - f\,dg}{(1+g)^2} = 2dx \end{cases} \xrightarrow{(1,2)} \begin{cases} dx + df + dg = 0 \\ dy - df = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dg = dx - dy \\ df = dy - 2dx \end{cases}$$

Т.12. $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $|J| > 0$

т.к. $|J|>0$ по т. об обр ф-ции $\forall x \in U$.

Пусть $W \subseteq U$ — откр, тогда $Q = \varphi(W) = \bigcup_{x\in W}\varphi(x) = \bigcup_{x\in W}\varphi_x(U_x)$, где

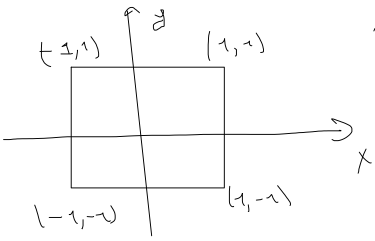
$\varphi_x = \varphi|U_x$, где $\exists\, \varphi^{-1}: W_x \to U_x$ причём т.к. φ непр, то W_x — открыто т.к. U_x — откр

$Q = \bigcup_{x\in W} W_x \Rightarrow Q$ — откр //

$Q = \bigcup\limits_{x \in W} W_x \Rightarrow Q$ - откр //

откр

T.14.



Тогда $\begin{cases} y' = tg\left(y\frac{\pi}{2}\right) \\ x' = tg\left(x\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = arctg\,(y')\frac{2}{\pi} \\ x = arctg\,(x')\frac{2}{\pi} \end{cases}$ - обратн.

непр диффер — непр диффер

нашли диффеоморф $I(0,1) \to \mathbb{R}^2$

т.к. в T13 уже найден д.м $\mathbb{R}^2 \to B(0,1) \Rightarrow I(0,1) \to B(0,1)$ — диффеоморф/

T.17. $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u\cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{pmatrix} = e^u \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$

$J^{-1} = e^{-u}\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \to \begin{cases} u_x = e^{-u}\cos v \\ v_x = e^{-u}\sin v \\ u_y = e^{-u}(-\sin v) \\ v_y = e^{-u}\cos v \end{cases} \to$

$u_{xx} = -e^{-u}u_x \cos v - e^{-u} v_x \sin v$

$u_{yy} = e^{-u}u_x \sin v - e^{-u} v_x \cos v$

$v_{xx} = -e^{-u}u_x \sin v + e^{-u} v_x \cos v$

$v_{yy} = -e^{-u}u_x \cos v - e^{-u} v_x \sin v$

$f_x = f_u u_x + f_v v_x$

$f_{xx} = (f_{uu}u_x + f_{uv}v_x)u_x + (f_{vu}u_x + f_{vv}v_x)v_x + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}$

$f_{yy} = (f_{uu}u_y + f_{uv}v_y)u_y + (f_{vu}u_y + f_{vv}v_y)v_y + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}$

$f_{xx} + f_{yy} = f_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2f_{uv}(v_x u_x + v_y u_y) + f_{vv}(v_y^2 + v_x^2) + f_v(v_{xx} + v_{yy}) + f_u(u_{xx} + u_{yy})$

$\Delta f = f_{uu}e^{-2u} + f_{vv}e^{-2u} + 2f_{uv}\cdot 0 + f_v e^{-u}(u_x(\sin v + \cos v) - v_x(\sin v + \cos v)) +$
$+ f_u e^{-u}(v_x(\sin v + \cos v) - u_x(\sin v + \cos v)) \ominus$

$\ominus\, e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + (f_v - f_u)e^{-u}(\sin v + \cos v)e^{-u}(\cos v - \sin v) \ominus$

$\ominus\, e^{-2u}(f_{uu} + f_{vv}) + e^{-2u}(f_v - f_u)\cos 2v$ //

Лапласиан в сфер коорд

$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \to J = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

$H_1^2 = 1$, $H_2^2 = \frac{1}{r^2}$, $H_3^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Будем считать в терм виде $(x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$
$(r,\theta,\varphi) = (y_1,y_2,y_3)$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}$

Мы знаем, что сфер.коорд ортогональные т.е. $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_i} = H_{kl}^2$, $H_{kl} = \begin{cases} H_k, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

$\Delta f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j} = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_j} H_j + \sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}$

Мы знаем, что сфер. коорд. ...

$$\Delta f=\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}\cdot\underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}_{H_{kj}^2}+\sum_i \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}=\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_j}H_j+\sum_i \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}$$

1) $\frac{\partial^2 r}{\partial^2 x^2}=\frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial x}=\frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial(\sin\theta\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r}+\frac{\sin^2\varphi}{r}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 y}=\frac{\partial(\sin\theta\sin\varphi)}{\partial y}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r}+\frac{\cos^2\varphi}{r}$

$\frac{\partial^2 r}{\partial^2 z}=\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial z}=+\frac{\sin^2\theta}{r}$

$\Bigg\}\ \sum\frac{\partial^2 r}{\partial^2 x_i}=\frac{2}{r}$

2) $\theta_{xx}=\frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cos\theta\cancel{\sin\theta\cos^2\varphi}-\cancel{\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi}{r^2}}-\frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2\sin\theta}$

$\theta_{yy}=\frac{\partial\left(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi-\frac{\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2}-\frac{\cos\theta\cos^2\varphi}{r^2\sin\theta}$

$\Bigg\}\ \sum\theta_{x_ix_i}=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}$

$\theta_{zz}=\frac{\partial\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)}{\partial z}=\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}$

3) $\varphi_{xx}=\frac{\partial\left(\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1}+\frac{\sin\varphi}{r^2}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta\cdot\cos\varphi+\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$

$\varphi_{yy}=\frac{\partial\left(\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1}+\frac{\cos\varphi}{r}\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta\,\frac{\sin\varphi}{r}-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$

$\Bigg\}\ \sum\varphi_{x_ix_i}=0$

$\varphi_{zz}=0$

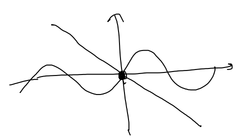
Тогда $\underline{\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}}$

V. Экстремумы функций неск. переменных.

Т.21. б) $F(f,x,y)=f+\sin f-x^2+y^2=0$

1) $df+\cos f\,df-2x\,dx+2y\,dy=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}1+\cos f\ne 0\\ -2x=0\\ 2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos f\ne -1\\ x=y=0\end{cases}$ Если $x=y=0\Rightarrow f+\sin f=0$, $-f=\sin f$, единств. реш. $f=0$//



2) $F_{xy}=\frac{1}{1+\cos 0}\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ — неопределена $\Rightarrow$ нет ни макс ни мин.

Т.22. а) $\begin{cases}f=x+y+z\\ F=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow L=f-\lambda F$

$L_x=1-\lambda\cdot 2x=0\Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2\lambda}\Rightarrow\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2\cdot 3=1\Leftrightarrow$

$L_y=1-\lambda\cdot 2y=0$ $\qquad\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow x=y=z=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

$L_z=1-\lambda\cdot 2z=0$

$d^2L=-2\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\left\{\lambda=-\frac{\sqrt3}{2}\right\}=+\sqrt3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ — положительно определена $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ она остается п. опр при сужении на $T_xS\Rightarrow$ в т. $\left(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac{\sqrt3}{2},-\frac{\sqrt3}{2}\right)$ — минимум

тогда в т. $\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac{\sqrt3}{2},\frac{\sqrt3}{2}\right)$ — максимум из-за симметрии ф-ии отн знака.

б) Другие знаки. Мы получим, что в $\frac{1}{\sqrt3}\left(1,1,1,\frac{1}{2}\right)\to\max$.

$\lambda>0$: Если $x<0$ и $y<0$, то $f(x,y,z)=xyz$ также дост. максимума т.к.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{1}{3\sqrt3}=f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ — максимум. — знач локальный т.к. и глобал

$\lambda>0$: Если $x<0$ и $y<0$, то $f(x,y,z)=xyz$ также дост...

$f\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{1}{3\sqrt3}=f\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ – максимум. → как локальный так и глобал

$\lambda<0$: Ф-ция достиг минимума, т.к. это единственные точки, подозр на минимум, а f должна достиг минимума как непр на компакте.

g) $\begin{cases} f(\bar x)=Q(\bar x) \text{ – симм кв форма.} \\ |\bar x|^2=1 \end{cases}$ 1) Сделаем ортогональную замену коорд, где Q – диагональная м-ца с с.знач на диагонали. Т.к. ∃ к ортогональная, то условие $|\bar x|^2=1$ сохраняется и в н-с коорд.

2) Мы свели з-чу к з-че, где $Q=\mathrm{diag}(\lambda_1\dots\lambda_n)$ в т-случае

$Q(\bar x)=\lambda_1x_1^2+\dots+\lambda_nx_n^2$ и $x_1^2+\dots+x_n^2=1$

Если $\exists\,\lambda_i=\lambda_j$ то в-ведем замену $x_i^2+x_j^2=y_k^2$ Тогда

$f(\bar x)=\lambda_i y_i^2$, где $\lambda_i\neq\lambda_j$

$L=(\lambda_i-\mu)y_i^2$, μ: – мн-ли Л-жа.

$dL=2(\lambda_i-\mu)y_idy_i$ => k решение $\mu_k=\lambda_i$, $y_i=\pm1$, $y_{j\neq i}=0$

$d^2L=2(\lambda_i-\mu)dy_i^2$ $\quad T_{y_0}S:\ y_idy_i=0$

пусть $\left.\begin{matrix} y_1=1 \\ \mu=\lambda_1\end{matrix}\right\}$ $d^2L=\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n-\lambda_n\end{pmatrix}$ $\left.T_{y_0}S:\ dy=0\right\}$ т.е. Сужение на $T_{y_0}S$: $A=\begin{pmatrix}\lambda_2-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n-\lambda_n\end{pmatrix}$ т.е. в случае, если $\lambda_1=\min(\lambda_1\dots\lambda_n)$ – $A>0$ – минимум, $\lambda_1=\max(\lambda_1\dots\lambda_n)$ $A<0$ – максимум

$f_{max}=\max(\lambda_1\dots\lambda_n)$
$f_{min}=\min(\lambda_1\dots\lambda_n)$ | больше макс и минимумов нет//

, где $\lambda_1\dots\lambda_n$ – с.значения Q.

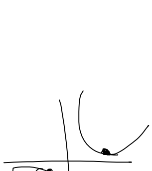
T.23. $\det A=\det(S^{-1}D(A)S)=\det D(A)=xyzt=1$

$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}(S^{-1}D(A)S)=\mathrm{tr}(S^{-1}S\,D(A))=\mathrm{tr}(D(A))=x+y+z+t$

Тогда: $\begin{cases} f(x,y,z,t)=x+y+z+t \\ xyzt=1\end{cases}$

$yzt\neq0 \Rightarrow x=\frac{1}{yzt} \Rightarrow f=y+z+t+\frac{1}{yzt}$

$df=dy\underbrace{\left(1-\frac{1}{zty^2}\right)}_{f_y}+dz\underbrace{\left(1-\frac{1}{z^2yt}\right)}_{f_z}+dt\underbrace{\left(1-\frac{1}{zyt^2}\right)}_{f_t}=0 \Rightarrow \begin{cases} zty^2=1 \\ zyt^2=1 \\ ytz^2=1\end{cases}$



$z=\frac{1}{ty^2} \Rightarrow t^2y\cdot\frac{1}{ty^2}=1 \Rightarrow \frac{t}{y}=1 \Rightarrow t=y=z=\pm1$

$d^2f(+1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}>0$ – мин

– строгие.

$d^2f=\begin{pmatrix}\frac{2}{zty^3} & \frac{1}{z^2y^2t} & \frac{1}{y^2t^2z} \\ \frac{1}{z^2y^2t} & \frac{2}{z^3ty} & \frac{1}{z^2t^2z} \\ \frac{1}{y^2t^2z} & \frac{1}{z^2t^2z} & \frac{2}{zt^3y}\end{pmatrix}$ $\quad d^2f(-1)=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}<0$ – макс

T.26. $f(x,y)=x\left((x^2-1)^2+\frac{3}{5}\right)+xy^2$

$x=0 \Rightarrow 1+y^2=0$ – нет реш.

... $x^2=0.8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{0.8}$

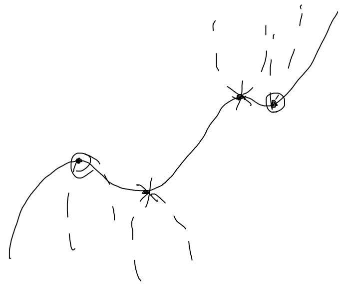
T.26. $f(x,y) = x\left((x^2-1)^2 + \frac{3}{5}\right) + xy^2$

$f_x = 5x^4 - 6x^2 + \frac{8}{5} + y^2 = 0$, $f_y = 2xy = 0$ $\Big\}$ $x=0 \Rightarrow 1+y^2=0$ — нет реш.; $y=0 \Rightarrow 5x^4-6x^2+\frac{8}{5}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0{,}8 \to x=\pm\sqrt{0{,}8} \\ x^2=0{,}4 \quad x=\pm\sqrt{0{,}4}\end{array}\right.$

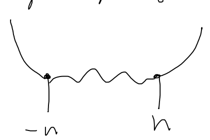
$$d^2 f = \begin{pmatrix} 20x^3-12x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = \{x=\sqrt{0{,}8}\} = \begin{pmatrix} \underbrace{20(0{,}8)^{3/2}-12\cdot 0{,}8}_{>0} & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}8} \end{pmatrix} > 0 \to \text{минимум}$$

при $x=-\sqrt{0{,}8}$ — макс.

$\{x=\sqrt{0{,}4}\} \approx \begin{pmatrix} -2{,}5 & 0 \\ 0 & 2\cdot\sqrt{0{,}4} \end{pmatrix}$ — неопределена



T.25. $n=1$: 1) Если $P(x)$ — нечёт степени, то $\exists\, x_0$ т.ч. $P(x_0)=0$ и т.к. $|P(x)|\geq 0$ то $|P(x_0)|=0$ — мин дост.
2) Если $P(x)$ — чёт степени и не имеет корней то б.о.о. $P(x)>0$
Тогда для д.б. n $P(x\,|\,|x|>n)$ — строго возрастает или убывает
тогда $P|_{[-n,n]}$ — дост мин-ма на компакте, то
тогда P дост м-ма на $\mathbb{R}^n$.



$n=2$: $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^2 \geq 0$ $\inf f(x,y) = 0$ при $y_n \to 0$, $x = \frac{1}{y_n}$ не достигается.

T.24. 1) В случае если A — диагонализируемая, то задача экв пред-щей ($\underline{T.23}$) и $\min \operatorname{tr} A = 1+1+\frac{1}{1} = 3$ // при $x=y=1$

2) A — недиаг. → решение на фото.//

T.19. б) $\sin(x+y+z) - \sin x - \sin y - \sin z = f(x,y,z)$

$f_x = f_y = f_z = 0 \Rightarrow \cos(x+y+z) = \cos x = \cos y = \cos z \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2\pi k_1,\ y=2\pi k_2,\ z=2\pi k_3 & p_0 \\ x=2\pi k_1+\pi,\ y=2\pi k_2+\pi,\ z=2\pi k_3+\pi & p_1 \\ x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_1,\ y=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_2,\ z=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k_3 & p_2 \end{array}\right.$

$$d_2 f = \begin{pmatrix} -\sin(x+y+z)+\sin x & -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z) \\ -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z)+\sin y & -\sin(x+y+z) \\ -\sin(x+y+z) & -\sin(x+y+z & -\sin(x+y+z)+\sin z \end{pmatrix}$$

$d_2 f(p_0) = 0$ — полуопределена $\Big\}$ р-рим $f|_{y=-\frac{x}{2},\ z=-\frac{x}{2}} = \sin(0) - \sin x - \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = -\left(\sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) \to$ что >0 при $x>0$ и <0 при $x<0$ // — нет мин и макс.

$d_2 f(p_1) = 0$

$d_2 f(p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$ — минимум //
аналог для $-\frac{\pi}{2}$ — максимум //

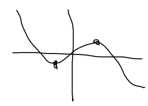
T22. в) $f = xyz \to f = -xy(x+y)$
$\{x+y+z=0 \to 2x^2+2y^2+2xy=1 \to (x+y)^2 - xy = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\left\{\begin{array}{l} xy=p \\ x+y=q \end{array}\right\}$

T22. в) $f = xyz \to f = -xy(x+y)$

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \to 2x^2+2y^2+2xy=1 \to (x+y)^2 - xy = \frac{1}{2}$

$x^2+y^2+2xy-xy=\frac{1}{2}$

$\left\{ \begin{matrix} xy \\ x+y=t \end{matrix} \right\}$



$$f = -(x+y)\left((x+y)^2 - \frac{1}{2}\right) = -t\left(t^2-\frac{1}{2}\right) = -t^3 + \frac{t}{2}$$

$f'(t) = -3t^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{6^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$ – макс

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{6^{3/2}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$ – мин

VI. T.28.

а) $\omega(x,y) = x\,dy - y\,dx$

$d\omega = (1+1)\,dx\wedge dy = 2\,dx\wedge dy$

в) $\omega(x,y) = f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy) = \frac{f(x^2+y^2)}{2}\,d(x^2+y^2) = \frac{f(g)}{2}\,dg \overset{(1)}{=} dF(g)$ т.к. $\frac{f(g)}{2}$ – непр. дифф., то $\exists F(g)$

$F'(g) = \frac{f(g)}{2}$

тогда $d\omega = d^2F = 0$ //

T.29. б) $\omega = xy\,dz + yz\,dx + zx\,dy$

$d\omega = (y\,dx + x\,dy)\wedge dz + (z\,dy + y\,dz)\wedge dx + (x\,dz + z\,dx)\wedge dy =$

$= \underbrace{y\,dx\wedge dz + y\,dz\wedge dx}_{0} + \underbrace{x\,dy\wedge dz + x\,dz\wedge dy}_{0} + \underbrace{z\,dy\wedge dx + z\,dx\wedge dy}_{0} = 0$

T.30. б) $\omega(x,y,z) = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} dx = dr\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi \\ dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi \\ dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta \end{cases}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r & \theta & \varphi \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

T.18. $f_{xx}+f_{yy} = f_{uu}(\underbrace{u_x^2+u_y^2}_{d^2}) + f_{vv}(\underbrace{v_x^2+v_y^2}_{d^2}) + 2f_{uv}(\underbrace{u_xv_x+u_yv_y}_{0}) + f_u(\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{0}) +$

$+ f_v(\underbrace{v_{xx}+v_{yy}}_{0}) \Leftrightarrow d^2f_{uu} + d^2f_{vv} = d^2(f_{uu}+f_{vv}) \Rightarrow f_{xx}+f_{yy}=0 \Leftrightarrow$

$f_{uu}+f_{vv}=0$

т.к. м-ца орт., то

$\Big\{$ м-ца A имеет вид $d\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \sim d\begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{matrix} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy} = 0$, аналог. $v_{xx}+v_{yy}=0$ //

T.16. а) $f_x^2 + f_y^2$ – ?

$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \to \begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{matrix} \to \begin{matrix} \varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r} & r_x = \cos\varphi \\ \varphi_y = \frac{\cos\varphi}{r} & r_y = \sin\varphi \end{matrix}$

$f_x = f_\varphi\varphi_x + f_r r_x =$

$= -f_\varphi\frac{\sin\varphi}{r} + f_r\cos\varphi$

$f_y = f_\varphi\frac{\cos\varphi}{r} + f_r\sin\varphi$

$\Big\} f_x^2 + f_y^2 = f_\varphi^2\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + f_r^2\cos^2\varphi - 2f_\varphi f_r\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + f_\varphi^2\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + f_r^2\sin^2\varphi + 2f_\varphi f_r\frac{\cos\sin}{r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f_\varphi^2}{r^2} + f_r^2$ //

в) аналог. T18: $f_{xx}+f_{yy} = d^2(f_{uu}+f_{vv}) = \left\{ d^2 = r \right\} = r f_{rr} + r f_{\varphi\varphi}$ //

б) $x f_y - y f_x = \cos^2\varphi \cdot f_\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi\, f_r + \sin^2\varphi\, f_\varphi - f_r\cos\varphi\sin\varphi\, r = f_\varphi$ //