

32.8

$$9) 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2;$$

$$2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_3x_2) - 8x_2^2 - 2x_3^2 - 8x_2x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2 =$$

$$= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 17x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 4x_3)^2 + x_3^2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rk A = 3$$

$$r^+ = 3 \quad - \text{положит. определенная}$$

$$r^- = 0$$

$$r^+ - r^- = 3$$

$$12) (p) x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3;$$

$$x_1 = y_1 + y_2$$

$$x_2 = y_1 - y_2 \rightarrow y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 =$$

$$x_3 = y_3 \rightarrow (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 - y_3^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$rk = 3$$

$$r^+ = 1 \rightarrow \text{неопредел.}$$

$$r^- = 2$$

32.13. Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n -мерном пространстве:

$$4) \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$$

32.18. При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

$$3) \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda > 8 - \text{п.опр.} \\ \lambda = 8 - \text{неопр. оп.} \\ \lambda < 8 - \text{неопредел.} \end{matrix}$$

32.20

2) Доказать, что в матрице положительно определенной квадратичной формы максимальный по модулю элемент положителен.

32.21. 1) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $k(X) = \text{tr}(X^T X)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

2) Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $k(X) = \text{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

$$1) \text{tr}(X^T X) = \text{tr}((XX^T)^T) = \text{tr}(XX^T) - \text{аб. форма.}$$

$$XX^T_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 > 0 \text{ при } a_{ii} \neq 0 \Rightarrow \text{tr}(XX^T) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 > 0$$

$$1) \operatorname{tr}(X^T X) = \operatorname{tr}(X X^T) = \operatorname{tr}(X^T X) = \dots$$

$$X X^T_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 > 0 \text{ при } a_{i1} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(X X^T) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}^2 > 0$$

T.1. Пусть угловые миноры матрицы квадратичной формы q на четырехмерном вещественном пространстве удовлетворяют условиям $\delta_1 > 0, \delta_2 = \delta_3 = 0, \delta_4 > 0$. Какими могут быть положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции формы q ?

$$\delta_4 > 0 \Rightarrow \operatorname{rk} q = 4 \Rightarrow r^+ + r^- = 4$$

$$\delta_2 = \delta_3 = 0 \Rightarrow r^+ \neq 4, r^- \neq 4 \Rightarrow r^+ \neq 0, r^- \neq 0$$

Также $r^+ r^- = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Возможные варианты

$$\begin{matrix} r^+ = 2 \\ r^- = 2 \end{matrix}$$

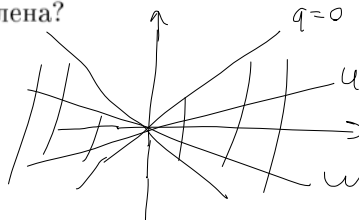
T.2*. Пусть $V = U \oplus W$ и ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены.

Следует ли отсюда что q положительно определена?

Нет, пусть $q = x^2 - y^2$ гипербола, где $q > 0$

Спроецировав q на подпространства

получим квадратичные формы $q|_U > 0$
 $q|_W > 0$



25.7. В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, функциям f и g сопоставляется число

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt > 0 \quad \forall f \neq 0$$

тогда $f \neq 0$, то $\exists t \quad f(t) > 0$

$$\text{тогда } \int_{-1}^1 f^2(t)dt > 0$$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение.

25.25. Найти скалярное произведение векторов, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Γ этого базиса:

$$1) \|1 \ 1 \ 1\|^T, \|1 \ 3 \ 1\|^T, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

25.21. Найти угол между ребром и диагональю n -мерного куба.

$$\begin{matrix} a = (1, 0, \dots, 0) \\ b = (1, \dots, 1) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} ab = (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ |a| = 1 \\ |b| = \sqrt{n} \end{matrix} \right\} \cos \alpha = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

25.23. Пусть в некотором базисе квадрат длины любого вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

$$\sum (u_i v_i)^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + (v, v) + 2(u, v) = \sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2(u, v)$$

$$2(u,v) = 2 \sum u_k v_k \Rightarrow (u,v) = \sum u_k v_k \quad (479)$$

25.10. Пусть e — базис в линейном пространстве E . Доказать, что в E существует одно и только одно скалярное произведение, относительно которого базис e — ортонормированный.

Билинейная форма (скалярное произведение) однозначно задается на базисных векторах.

25.35. Может ли третья строка матрицы Грама некоторого базиса в четырехмерном пространстве быть строкой:

$$3) \|1 \ 0 \ 1 \ 0\|; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T.5. Проведите ортогонализацию базиса $\{1, x, x^2\}$ пространства многочленов степени ≤ 2 со скалярным произведением из задачи Б 25.7.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx &= 2 & \int_{-1}^1 x \cdot x dx &= \frac{2}{3} & \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx &= \frac{2}{5} \\ \int_{-1}^1 1 \cdot x dx &= 0 & \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx &= \frac{2}{3} & \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx &= 0 \end{aligned} \right\} G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T.6*. В пространстве $M_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(X, Y) = \text{tr}(X^T Y)$

найдите ортогональное дополнение к подпространству а) симметричных

б) верхнетреугольных матриц.

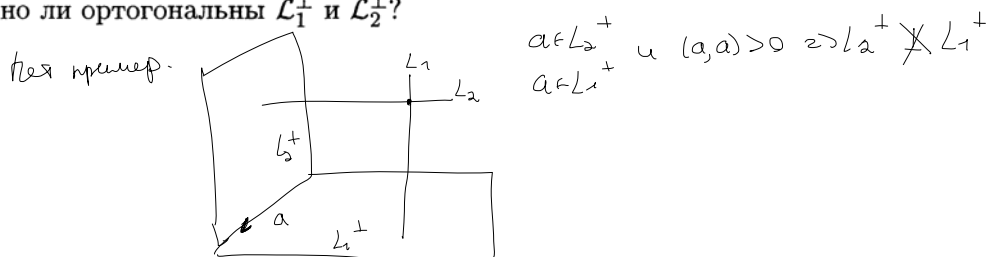
а) Покажем, что если $X = X^T$ и $Y = -Y^T$, то $(X, Y) = 0$ + симметричные и антисимметричные матрицы ортогональны.

$$(X, Y) = \text{tr}(X^T Y) = \text{tr}(X Y) = \text{tr}(Y X) = -\text{tr}(Y^T X) = -(Y, X) = -(X, Y)$$

$2(X, Y) = 0 \Rightarrow (X, Y) = 0 \Rightarrow$ для любых симметричной и антисимметричной матриц скалярное произведение равно 0 — т.е. они ортогональны.

б) X — верхнетреугольная, Y — нижнетреугольная $\Rightarrow (X, Y) = \text{tr}(X^T Y) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix} = 0$

26.6. Подпространства L_1 и L_2 ортогональны. Обязательно ли ортогональны L_1^\perp и L_2^\perp ?



26.13. Подпространство L задано как линейная оболочка векторов, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы:

$$3) \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Найти:}$$

а) матрицу системы уравнений, определяющей L^\perp ,
б) базис в L^\perp .

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -15 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -15 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 & 2/3 \\ 0 & 2 & -4 & 2/3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/3 & 8/9 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/9 \end{array} \right) \Rightarrow \Phi \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/9 \\ 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{базис}$$

26.15. Подпространство L задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\xi = 0$. Найти систему уравнений подпространства L^\perp :

$$2) \begin{aligned} 8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0, \\ -6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 0; \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 & 0 & 2 & -6 \\ 10 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ -6 & 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

26.27. Подпространство \mathcal{L} — линейная оболочка векторов a_1, \dots, a_k . В ортонормированном базисе заданы координатные столбцы этих векторов и координатный столбец ξ вектора x . Найти координатные столбцы ξ' и ξ'' ортогональных проекций вектора x соответственно на \mathcal{L} и \mathcal{L}^\perp :

$$2) a_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$1) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_2$$

$$2) \xi' \in \mathcal{L}_1 \wedge \xi'' \in \mathcal{L}_2 \wedge \xi' + \xi'' = \xi$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{array}$$

Решаем с-матр.:

$$\begin{pmatrix} 34 & 12 & 1 \\ 17 & 42 \\ -26 & 42 \\ -13 & 21 \\ 103 & 42 \\ 1 & 42 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \xi' \\ \\ \\ \\ \in \xi'' \end{array}$$

28.19. Дана матрица A преобразования φ в базисе e с матрицей Грама Γ . Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30.7. Пусть A — матрица линейного преобразования в базисе e с матрицей Грама Γ . Найти матрицу сопряженного преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 6 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ -19 & 5i \end{pmatrix}$$

28.27. Пусть преобразование φ диагонализуемо. Доказать, что φ^* также диагонализуемо.

Выберем базис, где $\Gamma = E \Rightarrow A^* = A^T$ тогда $\exists C$ т.ч. $C^{-1}AC = \Phi$ по тогда

$$\Phi = \Phi^T = (C^{-1}AC)^T = C^T A^T (C^{-1})^T = C^T A^* (C^T)^{-1} - \text{наш базис преобр. диагон. } A^* //$$

29.5. Найти все самосопряженные ортогональные преобразования.

$$\Gamma = E \Rightarrow A = A^T \text{ и } AA^T = E \Rightarrow A^2 = E \Rightarrow A - \text{диагональная матрица с } \pm 1 \text{ на диагонали.}$$

29.6. Найти все самосопряженные идемпотентные преобразования.

$$e^2(x) = e(x) \rightarrow e - \text{проектор, т.е. } (e(x), y) = (x, e(y)) \Rightarrow (e^2(x), y) = (e(x), e(y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) = (e(x), e(y)) - \text{ортогонален}$$

29.19. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования φ и матрицу преобразования в этом базисе, если φ задано в ортонормирован-

1) **59.** $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$
 $\lambda = 2$

образования в этом базисе, если φ задано в ортонормирован-

1) 59. $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$
 $\lambda = 2$

$\lambda = -3$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ нормируем на 1: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Ортонорм. б-с a_i : $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Тогда матрица перехода: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и матрица $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

29.37. Пусть φ линейное преобразование евклидова пространства. Доказать, что:

1) преобразования $\varphi^* \varphi$ и $\varphi \varphi^*$ — неотрицательные самосопряженные.

1) $(\varphi^* \varphi)^* = \varphi^* \varphi$ по правилам сопряжения
 2) Пусть u — с-вектор $\varphi^* \varphi$: $(u, \varphi^* \varphi(u)) = (\varphi(u), \varphi(u)) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$
 $\lambda(u, u)$

29.47. Линейное преобразование φ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в столбцы матрицы B . Является ли φ ортогональным: \rightarrow это базис, поэтому для проверки на ноль

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} (4, 7) \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 16 + 49 = 65 \\ (8, 1) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 64 + 1 = 65 \end{matrix} \quad \text{OK.} \quad \left| \begin{matrix} (2, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5 \\ (2, -1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + 1 = 5 \end{matrix} \right. \text{OK.}$

25.50. Может ли ортогональная матрица четвертого порядка содержать строку:

1) $(1 \ 0 \ 1 \ 0)$ — нет не может

29.49. Пусть \mathcal{L} — инвариантное подпространство ортогонального преобразования φ . Доказать, что \mathcal{L}^\perp — также инвариантно относительно φ . Как этот результат связан с задачей 25.55?

$a \in \mathcal{L}^\perp \Rightarrow \forall b \in \mathcal{L} \quad (a, b) = 0 = (\varphi(a), \varphi(b)) \Rightarrow \varphi(a) \perp \mathcal{L} \Rightarrow \varphi(a) \in \mathcal{L}^\perp$
 т.к. φ не вырожденно/

29.50. Ортогональное преобразование задано в ортонормированном базисе матрицей A . Найти матрицу S перехода к каноническому базису и матрицу A' преобразования в этом базисе:

2) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} - \lambda \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{2}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow \lambda = -1$
 $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
 $\lambda = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta \perp \alpha \perp \gamma //$$

$$\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \text{ много выходов и путей}$$

$$\text{Тогда } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

30.44. Для унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей A , найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе:

$$1) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

29.53. Получить полярное разложение матрицы:

$$2) \left\| \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\|, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 45 \end{cases} \quad \text{Тогда } \begin{cases} \sqrt{5} = a + 5b \\ \sqrt{45} = a + 45b \end{cases} \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{5}}{4} \\ b = \frac{\sqrt{5}}{20} \end{cases}$$

$$B = \sqrt{AA^T} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad Q = AB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

12.82. Представить каждое из аффинных преобразований задачи 12.81 в виде произведения $f = h_2 h_1 g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

$$7) x^* = 2x + 5y, \quad y^* = -11x + 10y; \rightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Найдём Q в разложении $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} = A \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 225 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5 = a + 25b \\ 15 = a + 225b \end{cases} \begin{cases} b = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}, a = \frac{15}{4} \end{cases} \quad \sqrt{AA^T} = \frac{15}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 29 & 28 \\ 28 & 221 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix} = h_2 h_1 = B$$

$$Q = B^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow g // \text{ — сжат. преобр.}$$

Теперь найдём канон. базис B : $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}$ но $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 15$, т.е. канон. базис $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

Тогда найдём м-цу перехода: $\lambda_1 = 5: \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\lambda_2 = 15: \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Тогда $B = C B_1 C^{-1} = C B_1' B_2' C^{-1} = \underbrace{C B_1' C^{-1}}_{B_1} \underbrace{C B_2' C^{-1}}_{B_2} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 123 & -14 \\ -14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 32 & 49 \\ 49 & 368 \end{pmatrix}$
 рас-ся-по с-бра рас-ся-по гур-с-бра

Т.12. а) Выясните, может ли какая-нибудь из приведенных ниже матриц являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad 3) C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Нет, т.к. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$, т.е. $\lambda \in \mathbb{R}$ а значит не диагонализуется.
- 2) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$, тогда B приводится к виду $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - не диагональная.
- 3) $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ найдем базис, где она diag.
 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 где, орт/с

б)* В случае положительного ответа предъявите (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

б) при α и β g-мат базис правильный т.е. $\alpha^T \Gamma \beta = 0 \Rightarrow (-1, 1) \Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$
 $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow (-1, 1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1, 1) \begin{pmatrix} a-2b \\ c-2d \end{pmatrix} = -a+2b+c-2d = 0 \Rightarrow \begin{cases} b=c \\ a=d-b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b=2d+1 \\ d > b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{5} \\ d = \frac{2}{5} \end{cases}$
 Проверим $d=b=1$: $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

32.27. Квадратичная (билинейная) функция записана в ортонормированном базисе n -мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид.

3) $7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} - \text{с/с} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 9 \end{matrix} \Rightarrow \text{г.в.} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_1^2 + 9y_2^2$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 9$: $\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

13) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \text{с/с} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3/2 \\ \lambda_3 = 3/2 \end{matrix} \Rightarrow \text{н.в.} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1=0}$: $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3=3/2}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.4. Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

2) (р) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$; $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ну и канон. вид $y^2 - 4x^2 = 4$

$\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1=1: \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ по уравнению } 1y - 4x - 1$$

$$\lambda_2=-4: \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

32.33. В базисе e евклидова пространства задана квадратичная форма. Найти в том же базисе матрицу присоединенного к ней преобразования, если матрица Грама базиса e равна Γ :

$$1) 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2, \quad \hat{\Gamma} = \hat{A}_{56}; \quad \hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \Gamma^{-1}H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

32.39. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму g к каноническому

виду, а квадратичную форму f к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f .

$$1) f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2; \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$|H - tG| = \begin{vmatrix} 1-10t & 1-3t \\ 1-3t & 1-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} t=0 \\ t=5 \end{array} \Rightarrow H_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

32.36. Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих форм.

$$3) f = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2, \quad g = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2;$$

$$4) f = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2, \quad g = 2x_1x_2 - x_2^2;$$

$$3) G = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{по к. Симплекса } H > 0, \text{ а } G - \text{индифферентная}$$

$$|H - \lambda G| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 13-11\lambda & -5+3\lambda \\ -5+3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 7 \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |a| = \sqrt{a^T G a} = \sqrt{6}$$

$$\lambda = 7: \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |b| = \sqrt{b^T G b} = \sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$4) G = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |H - \lambda G| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -9\lambda & 1+5\lambda \\ 1+5\lambda & -1-3\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |a| = \sqrt{a^T G a} = \sqrt{3} \rightarrow S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |a| = \sqrt{a^T G a} = \sqrt{3}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}: \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |b| = \sqrt{b^T G b} = \sqrt{8}$$

$$\rightarrow S = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{8} & 3/\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

Линейные функции.

31.21. Пусть t_0 — фиксированное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leq n$ его значение при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция φ на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Вычислить координатную строку функции φ в базисах $1, t, \dots, t^n$ и $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n$.

$$p \rightarrow p(t_0) \quad 1) \text{ линейность: } (p+q)(t_0) = p(t_0) + q(t_0) \quad \text{— очевидно}$$

$$(\lambda p)(t_0) = \lambda p(t_0)$$

$$2) \{1, t, \dots, t^n\} \rightarrow (1, t_0, \dots, t_0^n)$$

$$\{1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n\} \rightarrow (1, 0, \dots, 0)$$

31.30. Доказать, что всякую ненулевую линейную функцию f на \mathcal{L}_n подходящим выбором базиса в \mathcal{L}_n можно привести к виду $f(x) = \xi_1$, где ξ_1 — первая координата вектора x .

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — коэф. ф-ии впр. δ -се, тогда нужно g -е, что $\exists C$

$$a = eC, \text{ где } e = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\text{т.е. } a = (c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \text{очевидно } c_1 = a_1, \dots, c_n = a_n$$

31.31. В базисе e линейная функция f имеет строку коэффициентов χ . Найти ее строку коэффициентов χ' в базисе $e' = eS$, если:

$$2) \chi = \underline{c_{64}^T}, \quad S = A_{202}; \quad S \begin{pmatrix} \chi' \\ \vdots \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \vdots \\ \chi \end{pmatrix} \rightarrow f(a) = \chi \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \chi' \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \chi S = \chi' \\ \chi S \begin{pmatrix} \chi' \\ \vdots \\ \chi' \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \chi' = (5 \ -5 \ 2)$$

3133(2)

2) Многочлены $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

$$e_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k p}{dt^k} \Big|_{t=t_0}$$

31.35. 1) Пусть базису e_1, e_2, e_3 пространства \mathcal{L}_3 биортогонален базис f_1, f_2, f_3 пространства \mathcal{L}_3^* . Найти базис, биортогональный базису $e'_1 = e_1 + e_2, e'_2 = e_2 + e_3, e'_3 = e_3$.

$$1) \begin{cases} g_1(e_1 + e_2) = 1 \\ g_1(e_2 + e_3) = 0 \\ g_1(e_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow g_1(e_1) = 1 = f_1(e_1) \Rightarrow g_1 = f_1$$

$$2) \begin{cases} g_2(e_2 + e_3) = 1 \\ g_2(e_1 + e_2) = 0 \\ g_2(e_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_2(e_3) = 0 \\ g_2(e_2) = 1 \\ g_2(e_1) = -1 \end{cases} \Rightarrow g_2 = f_1 - f_2$$

$$3) \begin{cases} g_3(e_1 + e_2) = 0 \\ g_3(e_2 + e_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow g_3 = f_3$$

$$3) \left. \begin{aligned} g_3(e_1+e_2) &= 0 \\ g_3(e_2+e_3) &= 0 \\ g_3(e_3) &= 1 \end{aligned} \right\} g_3 = f_3$$

T.16. Докажите, что любая линейная функция f на пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ имеет вид $f(X) = \text{tr}(AX)$, где $A \in M_n(\mathbb{R})$, причем матрица $A = A_f$ функцией f определяется однозначно.

$$C = AX \Rightarrow C_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ji} \Rightarrow \text{tr}(AX) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_{ji} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_{ji} = (a_{11} a_{22} \dots) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \end{pmatrix} = \text{tr} \underline{A} \underline{X}$$

Тензоры. (Везде применяется правило суммирования Эйнштейна)

35.14. Тензор типа $(1, 1)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

$$\delta_l^k = \delta_l^i C_i^k \quad \delta_j^i = \delta_l^i C_l^k = \delta_l^k$$

$$\text{так как } D = C^{-1} \Rightarrow DC = E, \text{ т.е. } \delta_l^k C_l^i = \delta_l^i$$

Изменяются ли его компоненты при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

т.е. δ_j^i не изм при смене базиса

Геом. смысл: δ_j^i изоморфизм тождественному оператору Id_V .

35.15. Тензор типа $(0, 2)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

$$\delta'_{kl} = C_k^i C_l^j \delta_{ij} = C_k^i C_l^i = \delta_{kl}$$

То есть тензор δ_{ij} — нормальный бид-у-скал. произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Как изменятся его компоненты при переходе к другому базису? Какая билинейная функция соответствует этому тензору?

35.21. 1) Тензор типа $(0, n)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} (-1)^{N(i_1 \dots i_n)}, & \text{если все числа } i_1, \dots, i_n \text{ различны;} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$(N(i_1 \dots i_n) — \text{число нарушений порядка в перестановке } (i_1, \dots, i_n))$. Вычислить компоненты данного тензора в базисе $e' = eS$.

$$\text{то есть } \varepsilon'_{k_1 \dots k_n} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \det S$$

$$1) \varepsilon'_{k_1 \dots k_n} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_n}^{i_n} \quad \text{базис не перемешивается}$$

$$\Rightarrow \sum_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_n}^{i_n} = \begin{cases} \text{sgn}(k_1 \dots k_n) \det S \\ 0, (k_1 \dots k_n) \notin S_n \end{cases}$$

2) Каждому базису пространства \mathcal{L}_n сопоставлены числа $\varepsilon_{i_1, \dots, i_n}$. Будет ли это соответствие тензором типа $(0, n)$?

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \det S \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \quad \text{так как } \det C \neq 1$$

47.2. Найти значение $F(v, f)$ тензора

$$F = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes (e_1 + 3e_3) \in T_1^1(V).$$

$$\text{где } v = e_1 + 5e_2 + 4e_3, f = e^1 + e^2 + e^3.$$

$$F(v) = (e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes (e_1 + 3e_3))(e_1 + 5e_2 + 4e_3, e^1 + e^2 + e^3) =$$

$$= e^1(e_1 + 5e_2 + 4e_3) e_2(e^1 + e^2 + e^3) + e^2(e_1 + 5e_2 + 4e_3) \cdot (e_1 + 3e_3)(e^1 + e^2 + e^3) = 21$$

47.7. Найти координаты:

а) t_{21}^1 тензора $e^1 \otimes e^2 \otimes (e_1 + e_2) \in T_2^1(V)$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} t_{11}^1 &= 0 & t_{11}^2 &= 0 \\ t_{12}^1 &= 1 & t_{12}^2 &= 1 \\ t_{22}^1 &= 0 & t_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \right| \quad T_{21}^1 = d_i^1 c_2^i c_1^k \tilde{t}_{jk}^1 = t_{12}^1 \cdot c_2^1 c_1^2 d_1^1 + t_{12}^2 c_1^2 c_2^1 d_2^1 = 6 - 2 = 4 //$$

$$\begin{array}{cc|l} t_{12}^1 = 1 & t_{12}^2 = 1 & \\ t_{22}^1 = 0 & t_{22}^2 = 0 & \\ t_{21}^1 = 0 & t_{21}^2 = 0 & \end{array}$$

47.11. Найти ранг билинейных функций:

a) $(e^1 + e^2) \otimes (e^1 + e^3) - e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2$; = T

$$T(u, v) = (u_1 + u_2)(v_1 + v_3) - u_1 v_1 - u_2 v_2 = u_1 v_3 + u_2 v_1 + u_2 v_3 - u_1 v_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2$$

47.13. Найти полную свертку тензоров:

a) $(e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^2 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4)$;

$$\left. \begin{array}{l} T(e^1, e_1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \\ T(e^2, e_2) = 3 \cdot (-2) - 0 = -6 \\ T(e^3, e_3) = -1 \cdot 0 - 1 \cdot (3) = -3 \\ T(e^4, e_4) = 0 - 0 = 0 \end{array} \right\} \text{tr}_1 T = -6 + 3 = -3$$

47.16. Пусть на пространстве V задано скалярное произведение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Провести опускание и подъем индексов у тензоров:

a) $e^1 \otimes e_3 + e^2 \otimes e_4$; б) $(e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3$;