1.2. Используя понятие «сумма линейных подпространств», доказать неравенство $\operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$, где A и B — матрицы порядка $m \times n$. При каких условиях имеет место равенство?

$A=(a_i)$ тогда $\operatorname{rk} A = \dim\langle a_i\rangle$

$B=(b_i)$ базисные ст-цы. $\operatorname{rk} B = \dim\langle b_i\rangle$

$A+B = \dim\langle a_i+b_i\rangle$

$\dim\langle a_i+b_i\rangle = \dim\langle a_i\rangle + \dim\langle b_i\rangle - \dim\langle a_i\rangle\cap\langle b_i\rangle =$

$\operatorname{rk} A+B \leq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$, где р-во дост. при

$\langle a_i\rangle\cap\langle b_i\rangle = \{0\}$

1.3. Доказать, что линейное пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой верхнетреугольных и кососимметричных матриц порядка n. Найти проекции матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ на каждое из этих подпространств параллельно другому подпространству.

$A\in M_n$. $A = A^{\urcorner} + A^{\llcorner} = \underbrace{A^{\urcorner} + A^{\llcorner T}}_{\text{верхтреуг}} + \underbrace{A^{\llcorner} - A^{\llcorner T}}_{\text{кососим}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{\urcorner} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{\llcorner} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{\llcorner T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{\urcorner} + A^{\llcorner T} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $A^{\llcorner} - A^{\llcorner T} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2.1. В пространстве P - многочленов с действвительными коэффициентами степени не выше 3 даны подпространства $U = \langle 1+t+t^2+t^3;\ -1-2t+t^3\rangle$ и $V = \langle -1-t+t^2-t^3;\ 2+2t+t^3\rangle$. Доказать, что $P = U \oplus V$. Найти проекцию вектора $4+2t+4t^2+4t^3$ на подпространство U параллельно подпространству V.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\dim U = 2$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\dim V = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim U+V = 4 \Rightarrow \dim U\cap V = 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$

Разложение: $\underbrace{-1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} + \underbrace{5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

2.2. Пусть L_1 и L_2 — подпространства конечномерного линейного пространства V. Доказать, что если $\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, то пересечение равно одному из этих подпространств, а сумма другому.

$\dim(L_1+L_2) = \dim(L_1\cap L_2)+1 \geq \dim L_1 \geq \dim L_1\cap L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dim L_1 = \dim(L_1\cap L_2) \Rightarrow \dim L_2 = \dim(L_1+L_2) \\ \dim L_1 = \dim(L_1+L_2) \Rightarrow \dim L_2 = \dim(L_1\cap L_2) \end{array}\right.$

2.3. Найдите какую-нибудь максимальную линейно независимую систему векторов в $\mathbb{R}^4$ относительно подпространства решений СЛОУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{д-вим вектор}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

д-вим вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – в-ра ЛНЗ