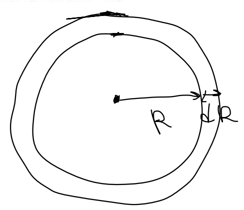
7.18. В центре сферы радиусом R в некоторый момент времени создается N молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре T. Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность j потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени t_0, когда поток максимален, и найти скорость молекул v_0, подлетающих к стенке в этот момент.



1) $v = R/t \Rightarrow dv = -\frac{R}{t^2}dt$

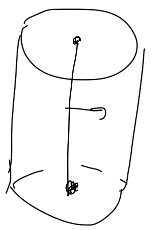
2) $dn = -N\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\cdot 4\pi v^2 dv =$

$= N\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mR^2}{2kTt^2}}\cdot 4\pi \frac{R^3}{t^4}dt$

3) $j = \frac{dn}{S\cdot dt} = \frac{NR}{t^4}\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mR^2}{2kTt^2}}$

4) $j \to max$ при $t_0 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{m}{kT}}$, $v_0 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$

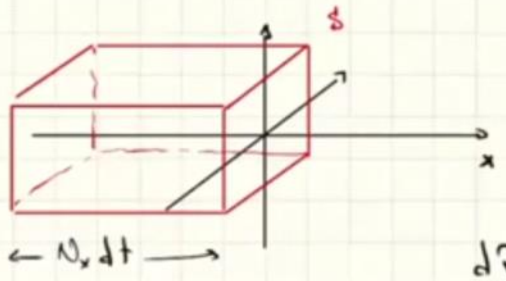
7.14. В диоде электроны, эмитируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой $T = 1150$ К, определить долю электронов α, преодолевающих задерживающий потенциал: 1) $V = 0{,}2$ В; 2) $V = 0{,}4$ В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.



$f(v) = C\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\cdot 2\pi v\,dv$

тогда $p = \int_{v_0}^{+\infty} f(v)dv \Big/ \int_{0}^{+\infty} f(v)dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{kT}\int_{v_0}^{+\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,d(v^2) = e^{-\frac{mv_0^2}{2kT}} = \boxed{e^{-\frac{eV_1}{kT}}}$

7.20. Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое полупроводника, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить частоту z ударов электронов, приходящихся на единицу длины периметра границы области, в которой заключен этот «газ». Считать при этом заданными температуру T, поверхностную концентрацию частиц n и массу электрона m.



$\vartheta_x \div \vartheta_x + d\vartheta_x$

$$n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}\right) d\vartheta_x \quad \vartheta_x dt S = dN$$

$$d\nu_x = \frac{dN}{dt\,S} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}\right) \vartheta_x d\vartheta_x$$

$$\nu = \int_0^{+\infty} n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}\right) \vartheta_x d\vartheta_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \frac{kT}{m} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}}\, d\,\frac{\vartheta_x^2}{2}\frac{m}{kT} =$$

$$= n\frac{kT}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\left(-e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}}\right)\Big|_0^{+\infty} = n\left(\frac{8kT}{8\cdot 2\pi m}\right)^{1/2} \qquad \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

7.27. Через какое время давление воздуха в тонкостенном откачанном сосуде, в стенке которого имеется отверстие площадью $S = 10^{-6}$ см^2, возрастает от $P_1 = 10^{-4}$ мм рт. ст. до $P_2 = 10^{-2}$ мм рт. ст., если давление наружного воздуха $P_0 = 760$ мм рт. ст., а температура 20 °C? Объем сосуда $V = 1$ л. Через какое время давление в сосуде станет равным половине атмосферного давления?

$p = nkT$ 1) $\frac{dN}{S\,dt} = \Delta j = j_{out} - j_{in} = -\frac{1}{4} n\bar{v} + \frac{1}{4} n_{out}\bar{v} = -\frac{1}{4}\bar{v}\left(n + \frac{p_0}{kT}\right)$

2) $dN = V dn$ $\searrow$ $V dn = \frac{1}{4}\bar{v}\left(\frac{p_0}{kT} - n\right) S dt$

$$\frac{dn}{\frac{p_0}{kT} - n} = \frac{S}{4V}dt$$

$$\frac{4V}{S}\ln\left(\frac{\frac{p_0}{kT} - n_0}{\frac{p_0}{kT} - n_1}\right) = \tau$$

7.70. Определить, во сколько раз изменится доля молекул водорода, которые имеют скорость, отличающуюся от наиболее вероятной скорости не более, чем на ±3 м/с, при уменьшении температуры газа от 600 К до 400 К? Газ считать идеальным.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2^2 e^{-\frac{mv_2^2}{2kT_2}} \cdot \left(\frac{1}{T_2}\right)^{3/2}}{v_1^2 e^{-\frac{mv_1^2}{2kT_1}} \cdot \left(\frac{1}{T_1}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_2}}}{\sqrt{\frac{1}{T_1}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \approx 1,2$$

7.16. Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить для этого газа величину α — отношение наивероятнейшей и среднеквадратичной скоростей.

$f(v) = \left(\frac{m}{2kT\pi}\right) \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 2\pi v\, dv$

$v^* = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ — наив. ск-ть,

$\searrow \frac{v^*}{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\frac{m\langle v^2\rangle}{2} = E = \frac{ikT}{2} = \{i=2\} = \frac{2kT}{\cancel{2}} \Rightarrow \langle v^2\rangle = 2kT$$

7.67. В тонкостенном сосуде, содержащем одноатомный идеальный газ при температуре T, имеется небольшое круглое отверстие, через которое атомы газа вылетают в вакуум. Размеры отверстия малы по сравнению с длиной свободного пробега. Атомы газа имеют массу m, и в каждый момент времени их скорость описывается максвелловским распределением. 1) Определить наивероятнейшее значение скорости атомов, покидающих сосуд. 2) Определить среднюю по модулю скорость атомов в пучке, вылетающих из отверстия.

Указание. $\int\limits_0^\infty x^{2n} \exp(-ax^2)\, dx = \frac{1}{2a^n} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

$$dE = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m\vartheta^2}{2kT}\right) \cdot \frac{m\vartheta^2}{2} \cdot \vartheta_x\, S\, dt\, d\vartheta_x\, d\vartheta_y\, d\vartheta_z$$

$$D\langle v\rangle = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot v \cdot v_x S\, dt\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$