Теорвер 7.

Шахматов Андрей, Б02-304

23 октября 2024 г.

Содержание

1 T3

Начнём с сходимости по распределению:

$$F_{\xi_n} = \begin{cases} 0, t < 0 \\ (1 - p_n), 0 \leq t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

Тогда в случае $1 - p_n \to 1$ $F_{\xi_n} \to F_{\xi=0}$, из чего следует необходимым и достаточным условием слабой сходиомсти является $p_n \to 0$. Тогда так как сходимость является сходиомстью к константе, то такие же условия накладываются и на сходимость по вероятности. Исследуем сходиомсть в L_2:

$$E\xi_n = p_n \to 0 \leftrightarrow p_n \to 0.$$

Остаётся сходимость почти наверное. Я не знаю, но думаю, что тут нужно будет по определению показывать только.

2 T4

$$\forall m \in \mathbb{Z}\, P(\xi_n = m) = F_{\xi_n}\left(m + \frac{1}{2}\right) - F_{\xi_n}\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

Что стремится к

$$F_\xi\left(m + \frac{1}{2}\right) - F_\xi\left(m - \frac{1}{2}\right) = F_\xi(m) - F_\xi(m-1) = P(\xi = m) \implies P(\xi_n = m) \to P(\xi = m).$$

Аналогично повторяя в обратную сторону получаем доказательство в другую сторону.

3 T7

а) Исследуем на слабую сходимость к $\xi \equiv 1$. Распределение $F_{\max \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n} = \prod_{k=1}^{n} F_k$. Каждое из этих распределений равно $F_k = t$ на $(0, 1)$, тогда их произведение:

$$\prod_{k=1}^{n} F_k = \prod_{k=1}^{n} t = t^n \to \begin{cases} 0, t < 1 \\ 1, t \geq 1 \end{cases}$$

Функция распределения $\xi = 1$ имеет такой же вид, потому по теореме Александрова имеет место слабая сходимость.
б) Согласно задаче T2 слабая сходимость эквивалента сходмости по вероятности в случае сходимости к константе, поэтому сходимость по вероятности также имеет место.
в) Так как для последовательности выполнено, что $\eta_{n+1} \geq \eta_n$, то верно:

$$\{\omega \mid |\eta_{n+1} - 1| > \varepsilon\} \subset \{\omega \mid |\eta_n - 1| > \varepsilon\} \implies \bigcup_{n \geq N}^{\infty} \{\omega \mid |\eta_n - 1| > \varepsilon\} = \{\omega \mid |\eta_n - 1| > \varepsilon\}.$$

Тогда критерий сводимости почти наверное превращается в определение сходиомсти по мере, которую мы уже доказали. г) Исследуем на сходимость в среднем, как известно:

$$F_{\max \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n} = t^n \implies \rho_{\max \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n} = nt^{n-1} I(0, 1)$$

Тогда достаточно доказать, что $E \max(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \to 1$:

$$E \max(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \int_0^1 nt^{n-1} \, \mathrm{d}t = 1$$