Теорема. (правило Лопиталя для $\frac{\infty}{\infty}$) Пусть f, g опр и дифф. на интервале с концом a, $g' \neq 0$ на этом интервале $f, g \to \infty$ $x \to a$ $\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Д-во Используем опред по Коши $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ $\forall$ окр V $\exists A$ $\exists$ лев. или пр. $\mathring{U} \ni a$ $\forall x \in \mathring{U}$ $\frac{f'(x)}{g'(x)} \in V$.

по Гейне $x_n \to a$

$\exists N \in \mathbb{N}$ $x_n \in U$ при $n \geq N$ $\frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $(\xi \in U) \Rightarrow \frac{f(x_n) - f(x_N)}{g(x_n) - g(x_N)} \in V$

$$\frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(x_N)}{f(x_n)}\right)}{g(x_n)\left(1 - \frac{g(x_N)}{g(x_n)}\right)}, \quad \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \mathrm{cl}\, V$$

$$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \in \mathrm{cl}\, V$$

Не

Лит. очев

Производные высших порядков.

если f - дифф на (a, b) то $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$

f' - д - то $f'' : (a, b) \to \mathbb{R}$

$f^{(k)}$ - д то $f^{(k+1)} (a, b) \to \mathbb{R}$

Опр f n раз дифф в x_0, если $f, \dots f^{(n-1)}$ опр в $U(x_0)$ и $\exists f^{(n)}(x_0)$

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha - 1) \dots x^{\alpha - k} = k! \binom{\alpha}{n} x^{\alpha - k}$$

$$(\ln x)^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{1}{x^k} (k-1)!$$

$$(e^{\alpha x})^{(k)} = \alpha^k e^{\alpha x}$$

$$(\sin \alpha x)^{(k)} = \alpha^k \sin\left(\alpha x + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$(fg)^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$