Практика 4.

Шахматов Андрей, Б02-304

28 февраля 2024 г.

Содержание

1 1.1

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2\sin n}{(2+(-1)^n)\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то и исходный ряд расходится.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - 1 + \frac{4\pi^2}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right)$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} O(\frac{1}{n^3})$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{n^2}$ сходятся абсолютно, то и исходый ряд сходится.

2 1.2

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Воспользуемся критерием Даламбера:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{2}{e} < 1$$

Ряд сходится.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} 3 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$$

Ряд расходится.

3 1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2n-1}$$

Рассмотрим $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0, n \to \infty$$

Также проверим монотонность введя функцию $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-1}$:

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{2\sqrt{x}(2x-1)^2}$$

Производная при $x > 1$ меньше 0, а значит функция убывает, т.е $a_{n+1} < a_n \forall n > 1$. Тогда по теореме Лейбница ряд сходится. Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

А значит ряд расходится, т.е нет абсолютной сходимости.

4 2.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n},$$

где a_n - числа Фибоначчи. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Докажем, что последовательность $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ убывает:

$$\frac{a_n^2}{a_{n+1}a_{n-1}} < 1$$

Т.е $a_n^2 < (a_n + a_{n-1})a_{n-1} \implies t^2 < t+1$, t $= \frac{a_n}{a_{n-1}}$, такое неравентсво выполняется при $t < \phi$, т.е для любого числа Фибоначчи. Тогда последовательность $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ убывает и ограничена 0 снизу, а значит у неё есть предел. Тогда пусть $\frac{1}{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_n}{a_{n-1}} \implies q = 1 + \frac{1}{q} \implies q = \phi > 1$$

А значит исходный ряд расходится.

5 2.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha \ln n}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{\alpha \ln n}{n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha \ln n + O(\frac{\ln^2 n}{n^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{O(\frac{\ln^2 n}{n^2})} \cdot n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{\alpha})$$

То есть ряд сходится при $\alpha < -1$.

6 2.3

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\alpha}}$$

При $\alpha \leq 0$ ряд расходится так как невыполняется необходимое условие сходимости (Ряд косинусов тоже не сходится). При $\alpha > 0$ ряд сходится условно по тригонометрическому признаку. Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^{\alpha}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{\alpha}} + \frac{\cos 2n}{2n^{\alpha}}\right)$$

Тогда характер сходимости такого ряда задаётся его первой подсуммой, т.е ряд расходится если расходится сумма $\frac{1}{2n^{\alpha}}$, т.е при $\alpha \leq 1$. При $\alpha > 1$ ряд очевидно сходится абсолютно. Ответ: при $a \in (0, 1]$ ряд сходится условно, при $a > 1$ ряд сходится абсолютно. б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n \cdot \ln^2 n}{n^{\alpha}}$$

Условная сходимость существует, когда $\frac{\ln^2 n}{n^\alpha}$ монотонно стремится к 0, т.е при $\alpha > 0$. Проверим ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n| \ln^2 n}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^2 n}{2n^\alpha} - \frac{\sin 4n \ln^2 n}{n^\alpha} \right)$$

Тогда абсолютная сходимость ряда определяется сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^\alpha}$, который является эталонным рядом и сходится при $\alpha > 1$.

7 2.4

Пусть $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, тогда $a_n = R_n - R_{n+1}$, тогда:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| = \left| R_n b_n - R_{m+1} b_m + \sum_{k=n+1}^{m} R_k (b_k - b_{k-1}) \right|$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $R_n \to 0, n \to 0$. Также в силу абсолютной сходимости b_n выполняется $\sum_{k=n+1}^{m} |b_k| < M$.

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leq \varepsilon \left(|b_n| + |b_m| + \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| + \sum_{k=n+1}^{m} |b_{k-1}| \right) \leq 4\varepsilon M$$

8 2.5

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} O(\frac{1}{n^2})$$

Так как сумма сходится, то исходный предел существует.

9 2.6

Работоспособность формулы равносильна выполнению

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln k + n - n \ln n - \frac{1}{2} \ln n$$

Что эквивалентно

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln k + 1 - \ln \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} - \frac{1}{2} \ln \frac{k}{k-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \ln k + 1 - \ln \frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-1}} - \ln k - \frac{1}{2} \ln \frac{k}{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - (k - \frac{1}{2}) \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

Тогда раскладывая логарифм в Тейлора:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \left(k - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + O(\frac{1}{k^3}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + O(\frac{1}{k^3}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{4k^2} + O(\frac{1}{k^2})$$

Такой ряд сходится.

10 3.2

Построим последовательность b_n. Первые k членов равны последовательности $1 \cdot a_n$, k выберается такое, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = O(\frac{1}{1^3})$. Далее выбираются b_n как $2 \cdot a_n$ до тех пор пока $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = O(\frac{1}{2^3})$. Таким образом оценим сумму b_n($\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq S + 2 \cdot \left(S - \sum_{n=1}^{k_1} a_n \right) + \dots = S + 2O(\frac{1}{2^3}) + \dots nO(\frac{1}{n^3}) + \dots = S + \sum_{k=1}^{\infty} O(\frac{1}{k^2})$$

Конечный ряд сходится, а значит частичные суммы b_n ограничены, а значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

11 3.3

а) Пусть $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, тогда сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Лейбница. В то время как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

б) Пусть $a_n = \frac{\cos \frac{2\pi}{3} n}{\sqrt[3]{n}}$. Сумма ряда с членами такой последовательности сходится. Но $a_n^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{3 \cos \frac{2\pi}{3} n}{n} \right)$, первая подсумма последовательности расходится а вторая сходится, значит сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится. При $a_n \geq 0$ ряды сходятся абсолютно, а значит их произведение само на себя также сходится.