1.1. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{(n+1)}}\right)^n z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n}$.

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{n+1}}\right)^{\frac{n}{n}} = \{n=2k\} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{2+1}{3-1}\right) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow R=\dfrac{2}{3}$ //

б) $t=z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{R_t} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow R_t = 4 \Rightarrow R_z = 2$ //

1.2. Пусть степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ имеют радиусы сходимости соответственно R_1, R_2, R_3, причём $R_1 \neq R_2$. Докажите, что $R_3 = \min(R_1, R_2)$. Останется ли это утверждение верным при $R_1 = R_2$?

1) при $R_3 < R_1, R_2$: $\sum a_n z^n$ и $\sum b_n z^n$ сход абс $\Rightarrow \sum(a_n+b_n)z^n$ сход абс

2) при $R_2 > R_3 > R_1$: то $\exists z$ т.ч. $\sum a_n z^n$ – расх и $\sum b_n z^n$ – сход абс $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum(a_n+b_n)z^n$ расход

Значит $\left.\begin{matrix} R_3 < R_1 \\ R_3 < R_2 \text{ //.} \end{matrix}\right\} R_3 = \min(R_1, R_2)$

3) $\left.\begin{matrix} \sum z^n, \ R_1 = 1 \\ \sum -z^n, \ R_2 = 1 \end{matrix}\right\} \sum 0 \cdot z^n, \ R_3 = \infty$. //

2.1. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i^n)^n z^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1-in}{1+in}\right)^{n^2} z^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n!}z^{n!}$.

а) $t=z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{R_t} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|1+i^n| = 2 \Rightarrow R_t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow R_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

б) $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\|\dfrac{1-in}{1+in}\right\|^n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{|1-in|^n}{|1+in|^n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^2}\right)^n = 1 \Rightarrow R=1$ //

в) $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|C_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{k\to\infty}|3^{k!}|^{\frac{1}{k!}} = 3 \Rightarrow R = \dfrac{1}{3}$

2.2. Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и найдите радиус сходимости полученного ряда:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}}. = \frac{x}{\sqrt{(x-3)^2+1}} = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^k \Rightarrow f(x) = 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^k + t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^{k+1} \ominus$$

$$\ominus\ 3 - \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}t^{k+1}\left(\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!} + \frac{(2k+1)!!\,(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}\right)$$

$R = 1$

2.3. Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и найдите радиус сходимости полученного ряда:

$$f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+3}.$$

$x+1=t$

$g(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t-2}{t+2}\right) \Rightarrow g' = \frac{2}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{t^{2n}}{4^n} \Rightarrow g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)4^n} - \operatorname{arctg} 1$

$f(t) = (-\operatorname{arctg} 1)\cdot t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{2\cdot 4^n(2n+1)}$

$R = 2$ //

2.4. Найдите $f^{(2022)}(0)$, где $f(x) = \ln(6 - x^2 - x^4)$ $= \ln(2-x^2) + \ln(x^2+3) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$

$6 - x^2 - x^4 = -(x^2-2)(x^2+3)$

$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n} + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{3^n\cdot n} = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(2022)} = \{n = 1011\} = \frac{2022!}{1011}\cdot\left(\frac{1}{2^{1011}} + \frac{1}{3^{1011}}\right)$

2.5. Приведите пример степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ с радиусом сходимости 1, который

а) сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$;

б) расходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$;

в) расходится при $z = 1$ и сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$ и $z \neq 1$.