(Т) Теорема Фубини для рядов. $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right)$, если ряд сх. абсолютно.

(Т) Теорема о перемножении рядов: Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_m$ абс. сходятся

то $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1} a_n b_{s-n}\right)$

Д-во $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum^{N}|a_n|\right)\left(\sum^{N}|b_m|\right) =$

$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}|a_n b_m| = \sum_{n,m=1}^{\infty}|a_n b_m|$ (по опр. суммы как супремума)

Значит абс. сход. $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \lim_{N\to\infty}\sum_{n,m=1}^{N} a_n b_m$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \lim\sum_{n=1}^{N} a_n \lim\sum_{m=1}^{N} b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$

Упр. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} z^n = \lim_{N\to\infty}\frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \begin{cases}\frac{1}{1-z}, & |z|<1\\ \text{не сходится}\end{cases}$ ряд сх. абс. при $|z|<1$.

$\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n = \frac{1-|z|^{N+1}}{1-|z|} = \begin{cases}\frac{1}{1-|z|}, & |z|<1\\ \text{не сходится}\end{cases}$

Упр. $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$

Теорема Если $a_n = O(b_n)_{n\to\infty}$ и $\sum b_n$ абс сход, то $\sum a_n$ – абс. сход.

Д-во $|a_n| \le C|b_n|$ для д.б. n

абс. сход не меняется при замене $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$

и аналог для b_n.

$\sum_{n=N}^{\infty}|a_n| \le C\sum_{n=N}^{\infty}|b_n| < +\infty \Rightarrow |a_n|$ – сход. абсолютно.

Теорема Признак Коши для сходимости

Р-рим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $q = \overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}$, тогда если $q<1$ то ряд сход.

$q>1$ то ряд расход.

$q=1$ – не известно.

Д-во 1) Если $q<1$, р-рим $Q\in(q,1)$

тогда $|a_n|^{1/n} > Q$ конечное число раз $\Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n|^{1/n} < Q$ для д.б. $n \Rightarrow |a_n| < Q^n \Rightarrow a_n < O(Q^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n$ – сходится.

2) $|a_n|^{1/n} > 1$ беск. много раз $\Rightarrow |a_n| > 1$ – ряд расходится.

Теорема. Признак Даламбера.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пусть существует $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ $\quad q = \begin{cases} <1 & \text{есть}\\ =1 & \text{х3}\\ >1 & \text{нет}\end{cases}$

Д-во. 1) $q<1 \Rightarrow Q\in(q,1)$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le Q$ для д.б. $n \ge N$

Д-во. 1) $q<1 \Rightarrow Q\in(q,1)$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq Q$ для д.б. $n \geq N$

$|a_{N+1}| \leq Q|a_N|$

$|a_{N+k}| \leq Q^k|a_N|$

$a_n = O(Q^{n-N}) = O(Q^n)$

2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n| > 0$ и $|a_n| \not\to 0$.

Упр. Если $a_n \geq 0$ и убывает то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится

Решение. $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$ $a_{2^{k-1}} \geq a_k \geq a_{2^k}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=2^k}^{n=2^{k+1}-1} a_n\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}\right)$$

Упр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k (2^k)^{-s} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-s)}$ – геом прогрессия, сход при $2^{1-s} < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1-s<0 \Leftrightarrow s>1$

Упр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Равномерная сходимость функциональных послед. и рядов.

$f_n: X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ Если $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ то f_n сходится к f поточечно

Определение. f_n сходится равномерно к f на мн-ве X если

$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X\} \to 0$ $n\to\infty$