**1.1.** Для функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ рассмотрим следующие условия:
а) $f$ непрерывна в точке $(x_0, y_0)$;
б) в точке $(x_0, y_0)$ существуют конечные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Следует ли из условия а) условие б)? Следует ли из условия б) условие а)?

а) Р-рим ф-цию $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

Она непр. в т. $(0,0)$ но частные произв не сущ.

б) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq0 \wedge y\neq0\\ 0, & x=0 \vee y=0\end{cases}$ предела в $(0,0)$ нет предела $\Rightarrow$ $f(x,y)$ - разрывна. но $\partial_x f=0$ $\partial_y f=0$.

**1.2.** Исследуйте на существование частных производных и дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:
а) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$; в) $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$.

а) $\partial_x f(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1=\partial_y f(0,0)$

Р-рим предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\Delta f-\partial_x f\cdot x-\partial_y f\cdot y}{\rho}$

$\frac{1}{\rho}|\Delta f-\partial_x f\cdot x-\partial_y f\cdot y|=\frac{1}{\rho}\left|\sqrt{x^2+y^2}-x-y\right|=|1-\cos\varphi-\sin\varphi|$ - зависит от направления,

а значит $\neq o(1)$ $\Rightarrow$ ф-ция не предст. лин. ф-цией $\Rightarrow$ не дифф.

б) $\partial_x f(0,0)=1$ $\partial_y f(0,0)=1$

$\frac{1}{\rho}\left|\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y\right|=\left|\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}-\cos\varphi-\sin\varphi\right|$ - зависит от направления.

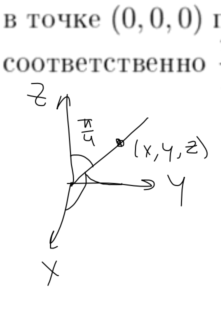
в) $\partial_x f(0,0)=0$ $\partial_y f(0,0)=0$

$\frac{1}{\rho}\left|\sqrt{x^3+y^3}\right|=\frac{1}{\rho}\cdot\rho^{3/2}\left|\sqrt{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right|<2\rho^{1/2}\to0$ - ф-ция дифф.

**1.3.** Найдите производную функции

$$f(x,y,z)=\operatorname{sh}(x^2+y)+e^z$$

в точке $(0,0,0)$ по направлению луча, образующего с координатными осями $Ox, Oy, Oz$ углы соответственно $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}$.




$z=t\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{t\sqrt2}{2}$

$x=t\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}$

$y=t\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}$

$f(t)=\operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t}{2}\right)+e^{\frac{t\sqrt2}{2}}$

$f'(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t}{2}\right)+e^{\frac{t\sqrt2}{2}}-1}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\left(\frac{4t^3}{4}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t}{2}\right)+\frac{\sqrt2}{2}e^{\frac{t\sqrt2}{2}}}{1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1+\sqrt2}{2}$

**2.1.** Докажите, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

является дифференцируемой, но не непрерывно дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$.

1) $df(x,y) = d(x^2+y^2)\left\{\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right\} \Rightarrow \partial_x f = 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$\partial_y f = 2y\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0$

$\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y} = 0$

2) Проверим диф-емость в т. $(0,0)$: $\frac{1}{\rho}\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2} = \rho\sin\frac{1}{\rho^2} < \rho \to 0$

ф-ция дифф в $(0,0)$.

3) $\lim\limits_{\rho\to 0}\partial_x f(x,y) = \lim\limits_{\rho\to 0} 2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho\cos\varphi\left(\sin\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\cos\frac{1}{\rho^2}\right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho\sin\frac{1}{\rho^2}}_{0} - \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{2}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2} = -2\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\cos\frac{1}{\rho^2}$ — не существует.

**2.2.** Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:
а) $f(x,y) = \sin\sqrt[5]{x^5-y^5}$; б) $f(x,y) = \cos\sqrt[5]{x^5-y^5}$.

а) $\partial_x f = 1$ $\quad \frac{1}{\rho}\left|\sin\sqrt[5]{x^5-y^5} - x + y\right| = \left|\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(1) - \cos\varphi - \sin\varphi\right|$ — зависит от напр.

$\partial_y f = -1$

б) $\partial_x f = 0$ $\quad \frac{1}{\rho}\left|\cos\sqrt[5]{x^5-y^5} - 1\right| = \frac{1}{\rho}\left|-\frac{\rho^2}{2}\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(\rho^2)\right| = \frac{\rho}{2}\sqrt[5]{\cos^5\varphi - \sin^5\varphi} + o(\rho) \to 0$

$\partial_y f = 0$

**2.4.** Приведите пример функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющей в точке $(0,0)$ конечные производные по всем направлениям, но не являющейся в этой точке непрерывной (а следовательно, и дифференцируемой).

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \\ 0 \end{cases}$ Р-рим $f'_t = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\alpha^2 t\beta t^2}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2}}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^2}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta}$

р-рим кривую $y = x^2$ и подходя по ней $\underline{f(x,y) = \frac{1}{2}}$ — предел не 0.

**2.5.** Пусть у функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ существует производная $\frac{\partial f}{\partial x}$, непрерывная в точке $(x_0, y_0)$. Пусть также в точке $(x_0, y_0)$ существует производная $\frac{\partial f}{\partial y}$. Докажите, что функция $f$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$. ?

Р-рим $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) =$

$= \left\{\text{по т Лагранжа}\right\} = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2)(y-y_0) \ominus$ $\left\{\begin{array}{l}\text{т.к. } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ -непр,} \\ \text{то } \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \xi \to x_0 \\ y \to y_0\end{array}\right\}$

$\ominus \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(|y-y_0|) \ominus$

$\ominus \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + o(\rho)$ ЧТД.

**3.2.** Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию

$$f(x,y) = \sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y}.$$

$\partial_x f = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$

$\partial_y f = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt[2023]{\sin^{2024} y}}{y} = 0$

$\frac{1}{\rho}\left|\sqrt[2023]{x^{2023} + \sin^{2024} y} - x\right| = \left|\sqrt[2023]{\cos^{2023}\varphi + \rho\sin^{2023}\varphi + o(\rho)} - \cos\varphi\right| \leq$

$\leq \left|\sqrt[2023]{\cos^{2023}\varphi + 2\rho} - \cos\varphi\right| = g(\varphi) = \left|\sqrt[n]{\cos^n\varphi + 2\rho} - \cos\varphi\right| = \left|\sqrt[n]{t^n + 2\rho} - t\right| \leq$

$g'(t) = (t^n + 2\rho)^{\frac{1-n}{n}} t^{n-1} - 1 = 0 \Rightarrow (t^n + 2\rho)^{\frac{1-n}{n}} = t^{1-n}$, при усл. $t < 0$

$t^n + 2\rho = -t^n \Rightarrow t^n = -\rho \Rightarrow t_{max} = -\sqrt[n]{\rho}$

И $g_{max} = \sqrt[n]{-\rho + 2\rho} + \sqrt[n]{\rho} = 2\sqrt[n]{\rho}$

$\leq 2\sqrt[n]{\rho} \to 0 \Rightarrow$ ф-ция дифф.

**3.1.** Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0,0)$ при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(1 + |x|^{1/2} \cdot |y|^{\alpha}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

при $\alpha \leq 0$ не сущ. $\partial_x f \Rightarrow$ нет дифф.

$\alpha > 0$: $\partial_x f = \lim \frac{\ln(1+0)}{x} = 0$

$\partial_y f = 0$

$\frac{1}{\rho}\left|\ln(1 + |x|^{\frac{1}{2}}|y|^{\alpha})\right| = \frac{1}{\rho}\left|\ln(1 + \rho^{\frac{1}{2}+\alpha}|\cos\varphi||\sin\varphi|)\right| = \frac{1}{\rho}\left|\rho^{\frac{1}{2}+\alpha}|\cos\varphi||\sin\varphi| + o(\rho^{\frac{1}{2}+\alpha})\right| \leq$

$\leq \rho^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot A$, при $\alpha > \frac{1}{2}$ $\rho^{\alpha-\frac{1}{2}} \to 0$ и ф-ция дифф.

при $\alpha = \frac{1}{2}$: $\rho^{\alpha-\frac{1}{2}}|\cos\varphi\sin\varphi| + o(1) = |\cos\varphi\sin\varphi| + o(1)$ — предел зависит от напр

при $\alpha < \frac{1}{2}$: $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}-\alpha}}|\cos\varphi\sin\varphi| + o(\rho^{\alpha-\frac{1}{2}})$ — вроде расходится.