112. Доказать теорему Теплица: *пусть* 1) $P_{nk} \geqslant 0$; 2) $\sum_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$ *при каждом фиксированном* k; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. *Тогда последовательность с членами* $t_n = \sum_{k=1}^{n} P_{nk}x_k$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

1) $P_{n1}x_1 + P_{n2}x_2 + \ldots + P_{nn}x_n = P_{n1}x_1 + P_{n2}x_2 + \ldots + (1 - P_{nn-1} - \ldots P_{n1})x_n =$

$= P_{n1}(x_1 - x_n) + P_{n2}(x_2 - x_n) + \ldots + x_n = \boxed{\sum_{k=1}^{n-1} P_{nk}(x_k - x_n) + x_n = t_n}$ — что будет значить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$, если $\sum_{k=1}^{n-1} P_{nk}(x_k - x_n)$ — б.м.

2) Д-жем, что $\sum_{k=1}^{n-1} P_{nk}(x_k - x_n)$ — б.м

$\left|\sum_{k=1}^{n-1} P_{nk}(x_k - x_n)\right| < \varepsilon$

$|P_{n1}(x_n - x_1) + P_{n2}(x_2 - x_n) + \ldots P_{nn-1}(x_n - x_{n-1})| \leq |P_{n1}||x_n - x_1| + |P_{n2}||x_n - x_2| + \ldots |P_{nn-1}||x_n - x_{n-1}| \leq$

$\leq |P_{n1}||x_n - a| + |P_{n2}||x_1 - a| + \ldots + |P_{nn-1}||x_n - a| + |P_{nn-1}||x_n - a| + \underline{|P_{nn}||x_n - x_n| + |P_{nn}||x_n - a|}$

$= \left(\sum_{k=1}^{n} P_{nk}\right)|x_n - a| + \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| = |x_n - a| + \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| =$

$= |x_n - a| + \sum_{k=1}^{n} P_{nk}|x_k - a| = \sum_{k=1}^{N-1} P_{nk}|x_k - a| + \sum_{k=N}^{n} P_{nk}|x_k - a| + |x_n - a| \leq$, где N из $x_n \to a$: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |x_n - a| < \varepsilon$ и

$\leq \sum_{k=1}^{N-1} P_{nk}|x_k - a| + \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=N}^{n} P + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} P_{nk}|x_k - a| = \frac{\varepsilon}{2} + P_{n1}|x_1 - a| + \ldots + P_{nN-1}|x_{N-1} - a| \leq$

тогда для каждого P_{nk} $\exists N_k \geq N$ т.ч. $P_{nk} \leq \frac{\varepsilon}{2|x_k - a|(N-1)}$, где $k \leq N-1$

тогда если взять за $N' = \max(N_k)$ получим:

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|x_1 - a|(N-1)}|x_1 - a| + \ldots \frac{\varepsilon}{2|x_{N-1} - a|(N-1)}|x_{N-1} - a| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

ЧТД.