1. T1.

1) $\boxed{g^i = \varkappa^{ik} g_k} \rightarrow \delta_i^j = (g_i, g^j) = g_i \varkappa^{jk} g_k = \varkappa^{jk}(g_i g_k) = \varkappa^{jk} g_{ik}$

тогда $\varkappa^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$

$g^{ij} = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm}(g_k g_m) = \varkappa^{ik}\varkappa^{jm} g_{km} = \varkappa^{ik}\delta_k^j = \varkappa^{ij}$ $\Big\}$ $\boxed{\delta_i^j = g^{jk} g_{ik}}$

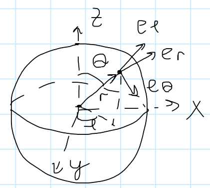
2) Мы получили, что $g^{ij} = \varkappa^{ij} \Rightarrow \boxed{g^i = g^{ij} g_j}$

3) $a = p^j g_j \Rightarrow a_i = (p^j g_j, g_i) = p^j (g_j, g_i) = p^j g_{ji} \Rightarrow a_i g^i = p^j g_{ji} g^i = p^j g_j = a$

Аналогично для $a = p_j g^j$ имеем $\boxed{a = a^i g_i}$

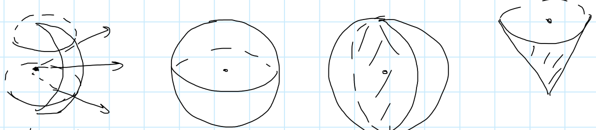
4) $a^i g_i = a_i g^i \Rightarrow a^i \underbrace{g_i g^j}_{\delta_i^j} = a_i g^i g^j \Rightarrow \boxed{a^j = a_i g^{ij}}$

T2.



$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$

$$(e_r\ e_\varphi\ e_\theta) = (i\ j\ k)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$



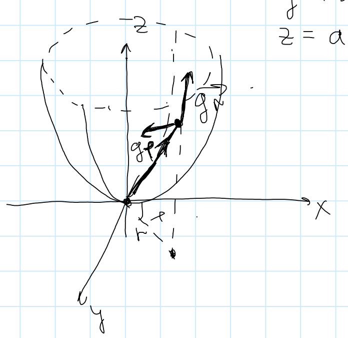
прямая/окр/окр — сфера — плоскость — конус

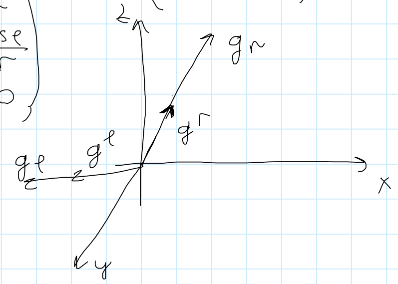
T3. $z = a(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = ar^2 \end{cases} \Rightarrow M_{r\varphi} = \begin{array}{cc} g_r & g_\varphi \end{array}$

$$M_{r\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 2ar & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2r^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$M^{r\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{4a^2r^2+1} & -\frac{\sin\varphi}{r} \\ \frac{\sin\varphi}{4a^2r^2+1} & \frac{\cos\varphi}{r} \\ \frac{2ar}{4a^2r^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$





T4*. т.к. ковар произв явл тензором, то её свёртка не изм при смене С.К.

Найдём $a^i_{;i}$ в ДСК, вектор $a = (x, y, z)$, а $\Gamma_{ijk} = 0$ //, тогда

$a^i_{;i} = \frac{\partial a_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \Rightarrow \boxed{a^i_{;i} = 3}$

2.

1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \mathrm{const}$.

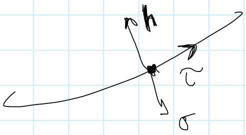
$\vec w \parallel \vec r$ если $0 = w_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \Rightarrow 2\frac{dr}{r} + \frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi} = 0 \Rightarrow 2\ln r + \ln\dot\varphi = const \overset{exp}{\Rightarrow}$

$\overset{exp}{\Rightarrow} r^2\dot\varphi = const$

1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

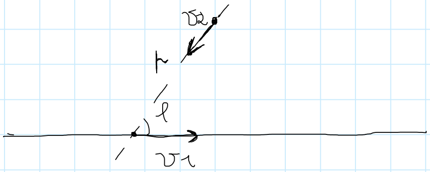
$\vec w = \dot v\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$, т.к. $\begin{cases}\vec w\perp\vec v\\ \vec v\parallel\vec\tau\end{cases} \Rightarrow \dot v = 0$

$\frac{v^2}{\rho}\vec n = a(\vec v\times\vec r)$

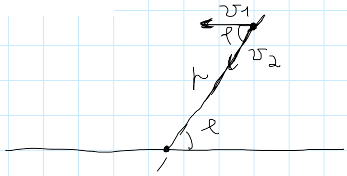


$\left|\frac{v^2}{\rho}\vec n\right| = |a(\vec v\times\vec r)| \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = |a||\vec v\times\vec r| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{|a||\vec v\times\vec r|}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



в С.О уб.

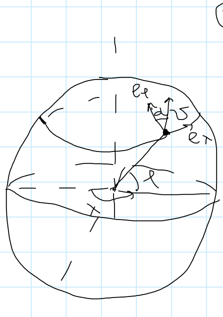


$\left.\begin{array}{l}\dot r = v_r = -(v_2 + v_1\cos\varphi)\\ r\dot\varphi = v_\varphi = v_1\sin\varphi\end{array}\right\} -\frac{v_2+v_1\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{v_2}{v_1}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \frac{d\varphi}{tg\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\frac{v_2}{v_1}\ln\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = r_0 e^{-\left(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\varphi_0}{2}}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}}$

T.5.*



$\begin{cases}v_r = \dot r = 0\\ v_\lambda = r\cos\varphi\,\dot\lambda = v\sin\alpha\\ v_\varphi = r\dot\varphi = v\cos\alpha\end{cases}$

1) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \cos\varphi\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\lambda-\lambda_0}{tg\alpha} = \ln\left(\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)$

$\Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)e^{ctg\alpha(\lambda-\lambda_0)}$ //

2)

T6* $v_i \dot v^i - v^i \dot v_i = v_i \dot v^i - g^{ik} v_k \frac{d}{dt}\left(g_{ij} v^j\right) =$

$= v_i \dot v^i - g^{ik} v_k \dot v^j g_{ij} - g^{ik} v_k v^j \dot g_{ij} = \left\{ 0 = (g^{ik} g_{ij})^{\cdot} = \dot g^{ik} g_{ij} + g^{ik} \dot g_{ij} \right\} =$

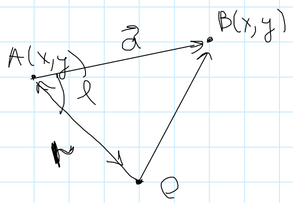
$= v_i \dot v^i - v_k \dot v^j \delta^k_j + \dot g^{ik} g_{ij} v^j v_k = \underline{v_i \dot v^i} - \underline{v_k \dot v^k} + \dot g^{ik} v_i v_k =$

$= (\dot g^i, g^k) v_i v_k = (\dot g^i, g^k v_k) v_i + (\dot g^i v_i, g^k) v_k = (v, v_i \dot g^i) + (v, v_k \dot g^k) =$

$= (v, 2 \cdot v_i \dot g^i) = 2(v, v_i \dot g^i)$

3.

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.



$\vec A = \vec\omega \times \vec{OA} \Rightarrow A = \omega \cdot OA$

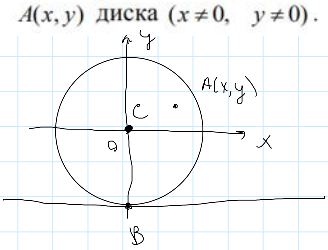
$\vec B = \vec\omega \times (\vec{OA} + \vec a) = \vec\omega \times \vec{OA} + \vec\omega \times \vec a \Rightarrow B = \omega \cdot |OA + a|$

$\lambda = \frac{|OA+a|}{OA} \Rightarrow \lambda^2 OA^2 = OA^2 + a^2 - 2a \cdot OA \cos\varphi$

$(1-\lambda^2) r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 = 0$

$r = \frac{+a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi - a^2(1-\lambda^2)}}{1-\lambda^2} = a \cdot \frac{\pm\sqrt{\lambda^2 - \sin^2\varphi} + \cos\varphi}{1-\lambda^2}$ – видимо окружность Аполлония.

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x,y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.



1) $\omega = \frac{v_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{w_c}{R}$

2) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c + \frac{v_c y}{R} \\ -v_c x/R \\ 0 \end{pmatrix} = v_c \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{R} \\ -x/R\, v_c \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$

$= \begin{pmatrix} w_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{w_c}{R} y \\ -\frac{w_c}{R} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_c/R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{v_c y}{R} \\ -\frac{v_c \cdot x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= w_c \begin{pmatrix} 1 + y \\ -\frac{w_c x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_c^2}{R^2} x \\ -\frac{v_c^2}{R^2} y \\ 0 \end{pmatrix}$

4.4. Юла вращается вокруг своей К задаче 4.4

39

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, образуя с ней постоянный угол

1) $\bar\Omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2$

$|\Omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta}$

2) Ось поворота со ск. ω_2 при этом

$|\Omega| = const \Rightarrow$

оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.

К задаче 4.4

2) Ось поворота со ск. ω_2 при этом $|\Omega| = const \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{\omega_\Omega} = [\omega_2, \Omega] = [\omega_2, \omega_1] + \underbrace{[\omega_2, \omega_2]}_{0} = [\omega_2, \omega_1]$$

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$a = [\varepsilon, r] + [\omega, [\omega, r]]$ 1) $a_\varepsilon = [\varepsilon, r] = \dfrac{(a, v)}{v^2} v = \dfrac{(a, v)}{v^2}[\omega, r]$

$v = [\omega, r]$

$\left[r, \varepsilon - \dfrac{(a, v)}{v^2}\omega\right] = 0$ т.е $r \parallel$ в $\in \langle \varepsilon, \omega \rangle$

2) $r = \alpha\omega + \beta\varepsilon \Rightarrow v = \beta[\omega, \varepsilon]$

$a_\varepsilon = \alpha[\varepsilon, \omega]$

$a = \alpha[\varepsilon, \omega] + [\omega, \beta[\omega, \varepsilon]]$

Тогда $\dfrac{(a, v)}{v^2} v = -\dfrac{\alpha\beta[\omega, \varepsilon]^2}{\beta^2[\omega, \varepsilon]^2} \cdot \beta[\omega, \varepsilon] + \left(\dfrac{\beta[\omega, \varepsilon]}{\beta^2[\omega, \varepsilon]^2}, \beta\underbrace{[\omega, \overset{\omega(\omega,\varepsilon) - \varepsilon\omega^2}{[\omega, \varepsilon]}]}_{0}\right) =$

$= -\alpha[\omega, \varepsilon] = \alpha[\varepsilon, \omega] = a_\varepsilon$ ЧТД

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

A – ортогональная матрица, из линейной алгебры у неё есть $\lambda = 1$ – с.зн. и с.в-тор v.

Тогда поворачивая отн. v (ось) получим переход от $Oxyz \to OXYZ$.

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника ($\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$).

К задаче 3.35

1) $\overline{b} \parallel \overline{\omega}$

2) $[\omega, \tau] = \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\tau}{d\sigma} \cdot \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{1}{\rho}\vec{n}|v|$

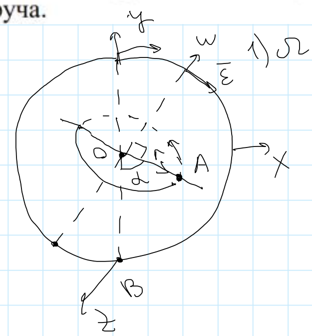
$|\omega| = \dfrac{|v|}{\rho} = \dfrac{v}{\rho}$

3) $\overline{\varepsilon} \parallel \overline{\omega} \parallel B$; $\varepsilon = \dot{\omega} = \dfrac{\dot{v}\rho - \dot{\rho}v}{\rho^2}$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.

$\gamma \quad v \quad |v| \quad = \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix}$

соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



1) $\Omega = \frac{v}{R}$ 2) $v_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\omega = \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$r_A = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_A = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix}$ //

3) $|\omega| = const \Rightarrow \varepsilon = [\Omega, \omega] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{R} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v\omega\sin\alpha}{R} \\ -\frac{v\omega\cos\alpha}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_A = 0 + \underbrace{\begin{pmatrix} v\omega\sin\alpha/R \\ -v\omega\cos\alpha/R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{0} + \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r\sin\alpha \\ \omega^2 r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ //

4. **2.9.** В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{e}_z\omega_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e}_z\varepsilon_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Or цилиндрической системы координат $Or\varphi z$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?

$w_a = \varepsilon\times r + \omega\times(\omega\times r) + w_r + 2\omega\times v_r = \varepsilon_e[e_z\times r] + \omega_e^2[e_z\times[e_z\times r]] + e_r w_r + 2\omega_e v_r[e_z\times e_r] =$ $\left(r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \varepsilon_e r e_\varphi + r\omega_e^2 e_r + e_r w_r + 2\omega_e v_r e_\varphi = 0 \Rightarrow$

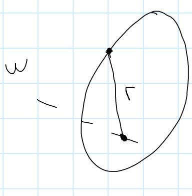
$\Rightarrow$ $w_r = -r\omega_e^2$

$v_r = -\frac{\varepsilon_e r}{2\omega_e v_r}$

2.38. Точка движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$. Движение происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot\varphi = C$, где C – постоянная величина. Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через фокус. Найти величины абсолютных скорости и ускорения точки в зависимости от r.

$\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 = e^2\cos^2\varphi$

$e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1$



1) $\dot r = +\frac{ep\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot\varphi = \frac{Cep\sin\varphi}{r^2(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{Cep\sin\varphi}{p^2} = C\frac{e\sin\varphi}{p}$

2) $v = [\omega\times r] + v_r = \omega[e_z\times re_r] + v_r =$ $v = \begin{pmatrix} \omega r + \frac{Ce\sin\varphi}{p} \\ \frac{C}{r} \end{pmatrix}$

$= +\omega r e_\varphi + \frac{Ce\sin\varphi}{p}e_r + \frac{C}{r}e_\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow |v|^2 = \left(+\omega r + \frac{C}{r}\right)^2 + \frac{C^2e^2\sin^2\varphi}{p^2} = \omega^2r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2e^2\sin^2\varphi}{p^2} =$

$= \omega^2r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2}{p^2}\left(e^2 - \left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right) = \omega^2r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2e^2}{p^2} + \frac{2C^2}{pr} - \frac{C^2}{p^2} =$

$= \omega^2r^2 + \frac{2\omega C}{r} + \frac{C^2(e^2-1)}{p^2} + \frac{2C^2}{pr}$

3) $\ddot r = \frac{Ce}{p}\cos\varphi\,\dot\varphi = \frac{Ce}{p}\cos\varphi\,\frac{C}{r^2} = \frac{C^2e}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}$

$\ddot\varphi = \left(\frac{C}{r^2}\right)^{\cdot} = -\frac{2C}{r^3}\dot r = -\frac{2C}{r^3}\cdot C\frac{e\sin\varphi}{p} = -\frac{2C^2e}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^3}$

$w_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{C^2e}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{C^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r}-1\right) - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{C^2}{pr^2}$

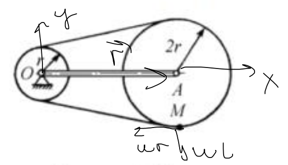
$w_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 2\frac{Ce\sin\varphi}{p}\cdot\frac{C}{r^2} - \frac{2C^2e\sin\varphi}{r^2p} = 0$

4) $w = [\omega,[\omega,r]] + w_r + 2[\omega, v_r] =$

$= \begin{pmatrix}\omega^2 r\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{C^2}{pr^2}\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{2\omega C}{r}\\ \frac{2\omega Ce\sin\varphi}{p}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^2 r - \frac{C^2}{pr^2} - \frac{2\omega C}{r}\\ \frac{2\omega Ce\sin\varphi}{p}\\0\end{pmatrix}$

$|w|^2 = \left(\omega^2 r - \frac{C^2}{pr^2} - \frac{2\omega C}{r}\right)^2 + \frac{2\omega^2C^2e^2}{p^2}\left(1-\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right)$

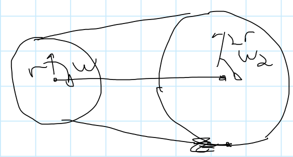
3.20. Кривошип OA длины l вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R=2r$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа в рассматриваемый момент – ω и ε. Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.



К задаче 3.20

1) В СО, где кш покоится:

$\omega_2 = \frac{\omega}{2} \Rightarrow$



$\Rightarrow v_M = \omega_2\cdot 2r = \omega r$

2) $|v| = \sqrt{(\omega r)^2 + (\omega l)^2} = \omega\sqrt{r^2+l^2}$

$v = \begin{pmatrix}-\omega r\\-\omega l\\0\end{pmatrix}$

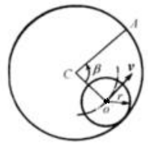
3) В СО кр-па $w_M' = \begin{pmatrix}-\varepsilon r\\ -\frac{\omega^2 r}{2}\\0\end{pmatrix}$

$w_M = [\varepsilon, r] + [\omega,[\omega,r]] + w_M' + 2[\omega, v] =$

$= \begin{pmatrix}0\\-\varepsilon l\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\omega^2 l\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\varepsilon r\\-\frac{\omega^2 r}{2}\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\\omega^2 r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\varepsilon r+\omega^2 l\\ -\varepsilon l - \frac{\omega^2 r}{2} + 2\omega^2 r\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow |w|^2 = (\varepsilon r - \omega^2 l)^2 + \left(\varepsilon l - \frac{3}{2}\omega^2 r\right)^2$

3.30. Цилиндр радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Угол между линией центров цилиндров CO и радиусом неподвижного цилиндра, проходящим через точку A, равен β. Скорость центра O движущегося цилиндра постоянна по величине и

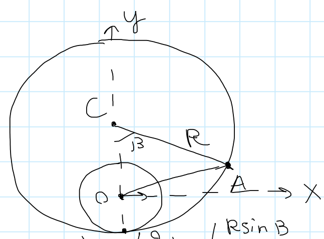


К задаче 3.30

равна v. Найти величины скорости и ускорения точки A неподвижного цилиндра относительно системы координат, связанной с подвижным цилиндром.

1) $\omega_0 = \frac{v}{R}$ $v_0 = v$

$\omega = \frac{v}{r}$



$0 = \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}R\sin\beta\\R-r-R\cos\beta\\0\end{pmatrix} + v_A'$

$v_A' = \begin{pmatrix}-v - \frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta)\\ +\frac{v}{r}R\sin\beta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{vR}{r}(1-\cos\beta)\\ +\frac{vR}{r}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$|v_A'| = 2\frac{vR}{r}\sin\frac{\beta}{2}$ //

$0 = \begin{pmatrix}0\\-\frac{v^2}{R-r}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}R\sin\beta\\R-r-R\cos\beta\\0\end{pmatrix}\right) + a_A' + 2\begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{vR}{r}(1-\cos\beta)\\\frac{vR}{r}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$

$-a_A' = \begin{pmatrix}0\\+\frac{v^2}{R-r}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-v/r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta)\\-\frac{v}{r}R\sin\beta\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}\frac{v^2R}{r^2}\sin\beta\\\frac{v^2R}{r^2}(1-\cos\beta)\\ \end{pmatrix}$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ +\frac{v^2}{R-r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{v}{r}(R-r-R\cos\beta) \\ -\frac{v}{R}R\sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{v^2R}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2R}{r^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v^2}{R-r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v^2R}{r^2}\sin\beta \\ -\frac{v^2}{r^2}(R-r-R\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{Rv^2}{r^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a_A{}' = \begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2}{R-r} + \frac{v^2R}{r^2}\left(1-\cos\beta+\frac{r}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Rv^2}{r^2}\sin\beta \\ \frac{v^2R}{r(R-r)} + \frac{v^2R}{r^2}(1-\cos\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|a_A|^2 = \left(\frac{Rv^2}{r^2}\right)^2\left(\sin^2\beta + \Big(\underbrace{\frac{r}{R-r}}_{\gamma} + 1-\cos\beta\Big)^2\right) = \left(\frac{Rv^2}{r^2}\right)^2\left(4\sin^2\frac{\beta}{2} + \gamma^2 + 4\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$|a_A| = \frac{Rv^2}{r^2}\sqrt{\gamma^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(\gamma+1)} = \frac{Rv^2}{r^2(R-r)}\sqrt{\left(\frac{r}{R-r}\right)^2(R-r)^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(R-r)^2\frac{R}{R-r}} \Leftrightarrow$$

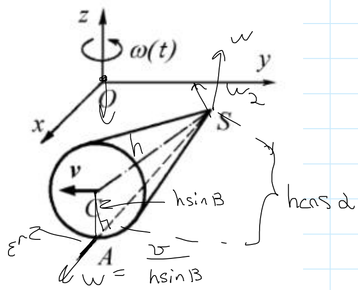
$$\Leftrightarrow \frac{Rv^2}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2 + 4\sin^2\frac{\beta}{2}(R-r)R}$$

/A

К задаче 4.25

4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. По плоскости катится без скольжения конус так, что центр его основа-

ния движется относительно плоскости с постоянной по величине скоростью v в направлении, указанном на рисунке. Высота конуса h, угол при вершине 2β. Найти величины абсолютных угловой скорости и углового ускорения конуса.



К задаче 4.25

1) $|W| = \sqrt{\frac{v^2}{h^2\sin^2\beta} + w^2}$

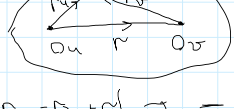
2) $\varepsilon^\varepsilon = \dot{w}$

$\varepsilon^r = [w_2 \times w]$ ↑ w вр от-но верт оси.

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon^\varepsilon = \dot w \\ \varepsilon^r = [w_2\times w]\end{matrix}\right\} \varepsilon = \varepsilon^\varepsilon + \varepsilon^r + w^\varepsilon \times w^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{h\sin\beta}\cdot\frac{v}{h\cos\beta} + \frac{wv}{h\sin\beta} \\ \dot w \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| = \sqrt{\dot w^2 + \left(\frac{v^2}{h\sin\beta}\right)^2\left(w - \frac{v}{h\cos\beta}\right)^2} \quad //$$

11.1. Показать, что моменты инерции твёрдого тела относительно любых двух параллельных осей u и v связаны соотношением $J_v = J_u + m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_C)$, где векторы $\mathbf{r} = \overline{O_uO_v}$ и $\mathbf{r}_C = \overline{O_uC}$ лежат в плоскости, проходящей через центр масс C тела, перпендикулярно этим осям. Оси u и v пересекают упомянутую плоскость соответственно в точках O_u и O_v.



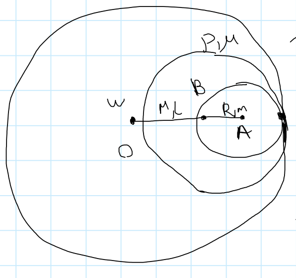
I Рассмотрим сечения твердого тела пл-ми, перпенд u и v, через C пр-дем ось $\parallel$ u и v. И по т Фубини (m_2 – масса сечения) $S_1 \times S_2 = S$ – все тело

$$\{r_u = r_v + r\}\quad J_v = \iint\limits_{S_1\times S_2} dm_1 dm_2\, r_v^2 = \int\limits_{S_1} dm_1 \int\limits_{S_2} (r_u - r)^2 dm_2 = \underbrace{\iint\limits_{S_1\times S_2} r_u^2 dm_2 dm_1}_{J_u} - \underbrace{2r\iint\limits_{S_1\times S_2} r_u dm_1 dm_2}_{-2r r_C M} + \underbrace{\iint\limits_{S_1\times S_2} r^2 dm_1 dm_2}_{Mr^2} \Leftrightarrow$$

$$\iint\limits_{S_1\times S_2} \ldots \quad \int\limits_{S_1} \int\limits_{S_2} \ldots \quad \underbrace{\iint\limits_{S_1\times S_2} \ldots}_{J_ц} \quad \underbrace{\iint\limits_{S_1\times S_2} \ldots}_{-2 r r_c M} \quad \underbrace{\iint\limits_{S_1\times S_2} r^2\, dm_1 dm_2}_{M r^2} =$$

$$= J_ц + M(r^2 - 2 r r_c)$$

7.4. Однородный стержень OA длины l и массы M вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O. Другой конец стержня несет ось A, на которую насажен однородный диск радиуса r и массы m. Диск катится без скольжения внутри цилиндрической полости радиуса $R = l + r$, прижимая к ней тонкий обруч радиуса ρ и массы μ. Найти кинетическую энергию системы.



1) $v_A = wL$

$v_B = w(L + R - p)$

2) $T_L = \dfrac{\frac{ML^2}{3}\cdot w^2}{2} = \dfrac{M L^2 w^2}{6}$

$T_R = \dfrac{M(wL)^2}{2} + \dfrac{MR^2}{2}\cdot\dfrac{\left(\frac{wL}{R}\right)^2}{2} =$

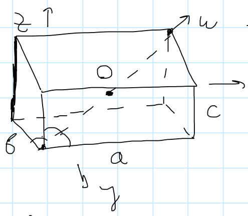
$= \dfrac{Mw^2L^2}{2} + \dfrac{ML^2w^2}{4} = \dfrac{3}{4}ML^2w^2$

$T_p = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\mu p^2\cdot\left(\dfrac{w^2(L+R-p)^2}{p^2}\right) = \mu w^2 (L+R-p)^2$

$T = \dfrac{ML^2w^2}{6} + \dfrac{3}{4}ML^2w^2 + \mu w^2 (L+R-p)^2$

11.18. Однородный параллелепипед массы m с рёбрами a, b, c вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно своей

диагонали OB. Найти кинетическую энергию T параллелепипеда и его момент импульса $\mathbf{K}_A$ относительно произвольной точки A пространства.



$e_u = (a, b, c)/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = |w|\, e_u$

$J_x = p\int dx\,dy\,dz\,(y^2+z^2) = p\, x \left(2\cdot\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} + 2\cdot\dfrac{\left(\frac{c}{2}\right)^3}{3}\right) = \dfrac{M(b^2+c^2)}{12}$

Аналог для J_y, J_z. Вспом. моменты равны 0

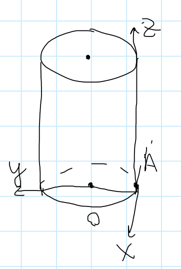
$J_u = \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} J_x + \ldots = \dfrac{M}{12}\left(\dfrac{a^2(b^2+c^2) + b^2(c^2+a^2) + c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}\right) = \dfrac{M}{12}\left(\dfrac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right) =$

$= \dfrac{M}{6}\left(\dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}\right) \Rightarrow T = \dfrac{J_u w^2}{2} = \dfrac{Mw^2}{12}\left(\dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

$K_A = Jw = \begin{pmatrix} \dfrac{Ma(b^2+c^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{Mb(a^2+c^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{Mc(b^2+c^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$

К задаче 11.11

11.11. Высота однородного кругового цилиндра равна H, радиус его основания – R, а масса – m. Найти главные оси инер-



$J_z = \dfrac{MR^2}{2} + MR^2 = \dfrac{3MR^2}{2}$

$J_x = \dfrac{3MR^2}{2} + \dfrac{MH^2}{3}$

$J_y = \dfrac{MR^2}{4} + \dfrac{MH^2}{3}$

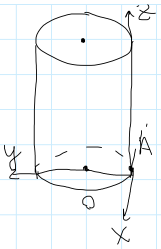
классич м-ты от-но ц масс + смещение.

Всилу симм $J_{xz} = 0$

11.11. Высота однородного кругового цилиндра равна H, радиус его основания – R, а масса – m. Найти главные оси инер-

К задаче 11.11

ции в точке A цилиндра. Для случая $H=\sqrt{3}R$ выписать моменты инерции относительно найденных осей.



$J_z = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

$J_x = \frac{3MR^2}{2} + \frac{MH^2}{3}$

$J_y = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}$

м-ты от-но ц масс + смещение.

В силу симм $J_{xz}=0$

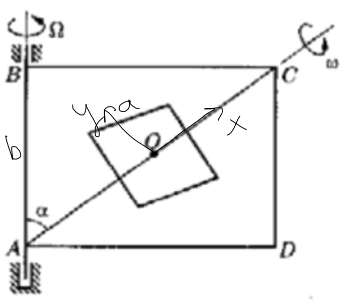
$$J_{xy} = -\rho\int xy\,dm = -\rho\int r\sin\varphi\, r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi\,dh = -\rho H\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi} r^3 dr = -\rho H\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,\frac{(2R\sin\varphi)^4}{4} \ominus$$

$$\ominus -\rho H\cdot 4\cdot R^4\cdot 0 = 0$$

$$J_{yz} = -\rho\int yz\,dm = -\rho\int r\sin\varphi\, h\, r\,dr\,d\varphi\,dh = -\rho\frac{H^2}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2R\sin\varphi} r^2 dr = -\rho\frac{H^2}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\cdot\frac{(2R)^3}{3} = -\rho\frac{H^2R^3\cdot 8}{3}\cdot\frac{3\pi}{8}\ominus$$

$$\ominus -\rho H^2R^3\pi = -MRH$$

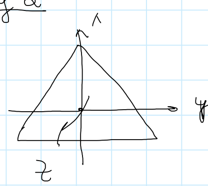
$$J = \begin{pmatrix} \frac{3MR^2}{2}+\frac{MH^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2}+\frac{MH^2}{3} & -MRH \\ 0 & -MRH & \frac{3MR^2}{2} \end{pmatrix} = \left\{\gamma = \frac{H}{R}\right\} = MR^2\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\gamma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{\gamma^2}{3} & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



1) по т. Кёнига $T = T_{ц.м} + T_{отн}$

$$T_{цм} = \frac{mb^2\Omega^2 tg^2\alpha}{2^2\cdot 2} = \frac{mb^2\Omega^2 tg^2\alpha}{8}$$

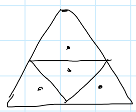
2) $J_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{24} & & 0 \\ & \frac{ma^2}{24} & \\ 0 & & \frac{ma^2}{12} \end{pmatrix}$



$J_x = J_y$ т.к. Δ симм в пл xy

$J_z = J_x + J_y = 2J_x$

Jz считаем из подобия



3) Тело вр с $\Omega+\omega$, $T_0 = (\Omega+\omega, J(\Omega+\omega))\frac{1}{2}$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega\cos\alpha \\ \Omega\sin\alpha\cos\omega t \\ \Omega\sin\alpha\sin\omega t \end{pmatrix} \to \omega+\Omega = \begin{pmatrix} \omega+\Omega\cos\alpha \\ \Omega\sin\alpha\cos\omega t \\ \Omega\sin\alpha\sin\omega t \end{pmatrix} \mapsto J(\Omega+\omega) = \begin{pmatrix} \omega+\Omega\cos\alpha \\ \Omega\sin\alpha\cos\omega t \\ 2\Omega\sin\alpha\sin\omega t \end{pmatrix}\frac{ma^2}{24}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{ma^2}{24}\left((\omega+\Omega\cos\alpha)^2 + \Omega^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + 2\Omega^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t\right)\ominus$$

$$\ominus \frac{ma^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos^2\alpha + \Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)\right)$$

$$T = \frac{m b^2 \Omega^2 \sin^2\alpha}{8} + \frac{m a^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos^2\alpha + \Omega^2\left(1 + \sin^2\alpha \sin^2\omega t\right)\right)$$