

# Матан первая домашка.

Шахматов Андрей, Б02-304

25 февраля 2024 г.

## Содержание

1	T1	2
2	T2	4
3	T3	5
4	T5	5
5	T6	5
6	2.39	6
7	T10	6
8	T11	6
9	T12	7
10	T14	8
11	T15	9
12	T16	9
13	T17	9
14	T18	10
15	T19	10
16	T20	10
17	T21	11
18	T21 доп	12

## 1 Т1

$$f(x, y) = \sqrt{xy}$$

Тогда область определения  $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0)\}$

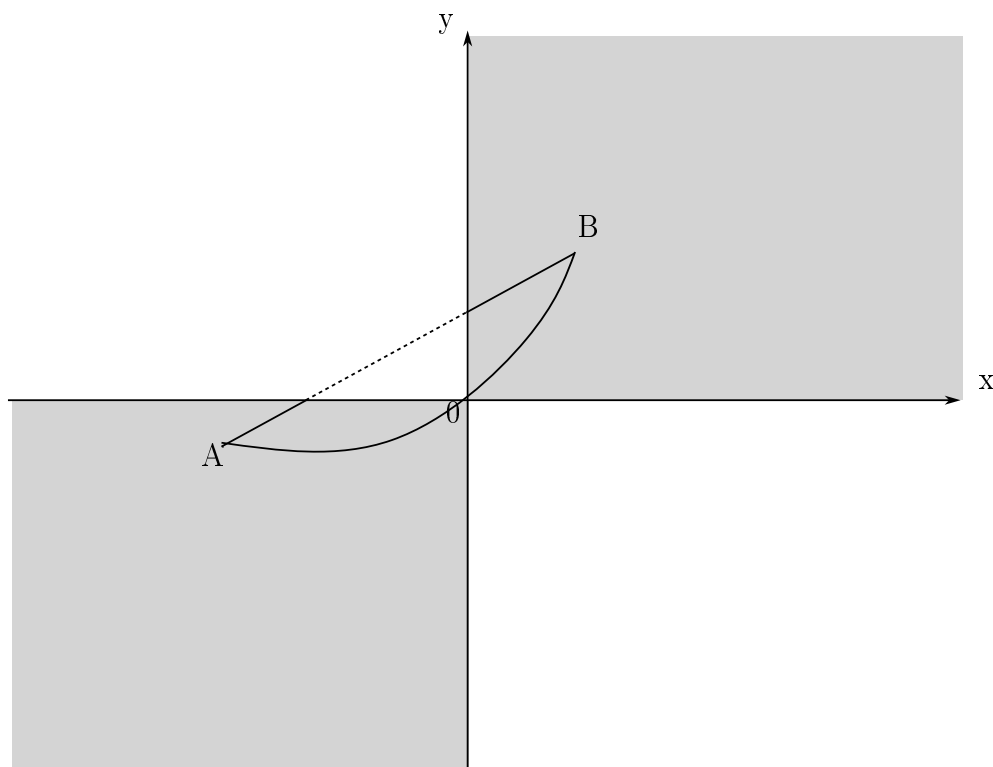


Рис. 1: Область определения функции

Область определения будет замкнутым множеством, так как совпадает со своим замыканием. Из рисунка 1 видно, что множество не является выпуклым, однако является линейно связным, ведь любые 2 точки можно соединить кривой проходящей через точку  $(0, 0)$ .

$$f(x, y) = \frac{1}{x^4 + y^4 - 1}$$

Область определения данной функции  $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 x^4 + y^4 \neq 1\}$

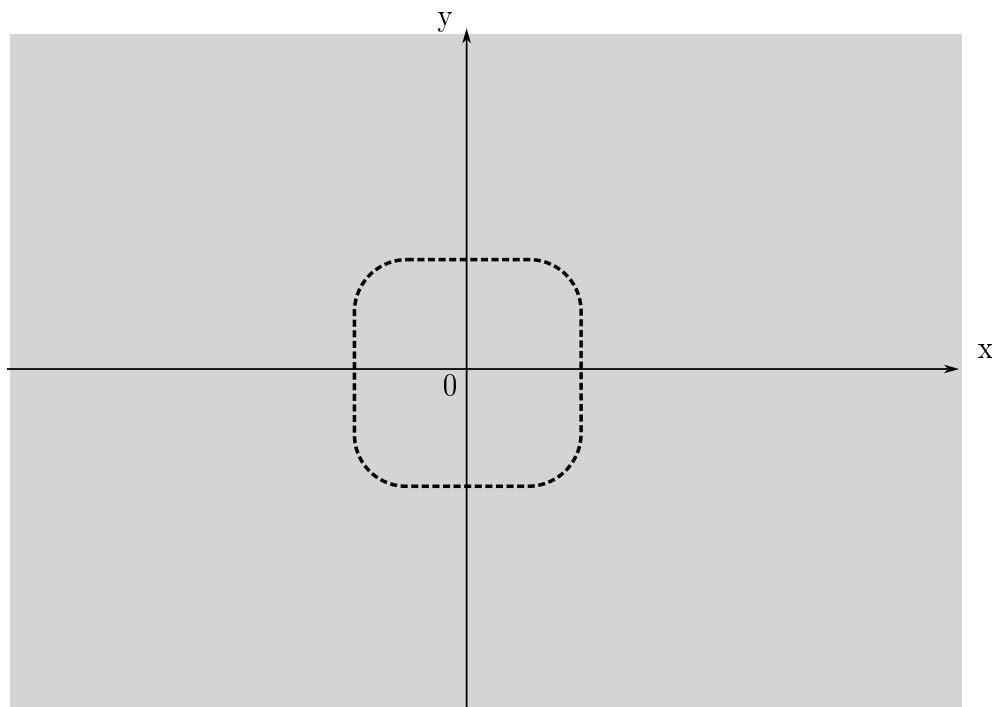


Рис. 2: Область определения функции

Областью определения является всё пространство кроме кривой  $x^4 + y^4 = 1$ . Так как такая кривая является замкнутой, то её дополнение открыто, а значит область определения открыта. Также область определения не является выпуклой, связной или линейно связной, так как разбивается кривой на два открытых непересекающихся множества.

$$f(x, y) = \ln(1 - 2x - x^2 - y^2)$$

Тогда область определения  $D_f = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 - 2x\}$ . Решим полученное неравенство  $x^2 + 2x + 1 + y^2 < 2$ , что эквивалентно  $(x + 1)^2 + y^2 < \sqrt{2}^2$ , что соответствует открытому шару радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в точке  $(-1, 0)$ .

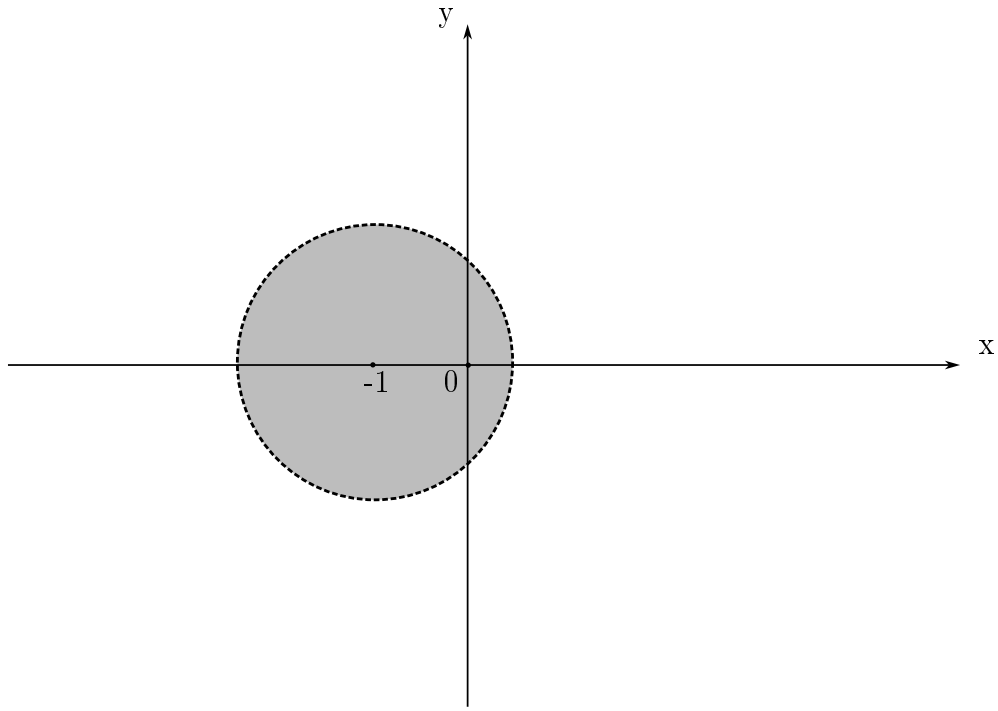


Рис. 3: Область определения функции

Так как область определения - открытый шар, то она открыта. Также область определения связна, линейно связна и выпукла.

## 2 Т2

$$M = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Данное множество является образом непрерывной кривой, потому оно линейно связно (любые две точки можно соединить данной кривой), потому  $M$  - связно. Данное множество не является открытым, поскольку содержит некоторые свои граничные точки. При этом замыкание множества содержит точку  $(0, 0)$ , однако сама кривая её не содержит, так как  $R = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t > 0$ , что означает незамкнутость  $M$ .

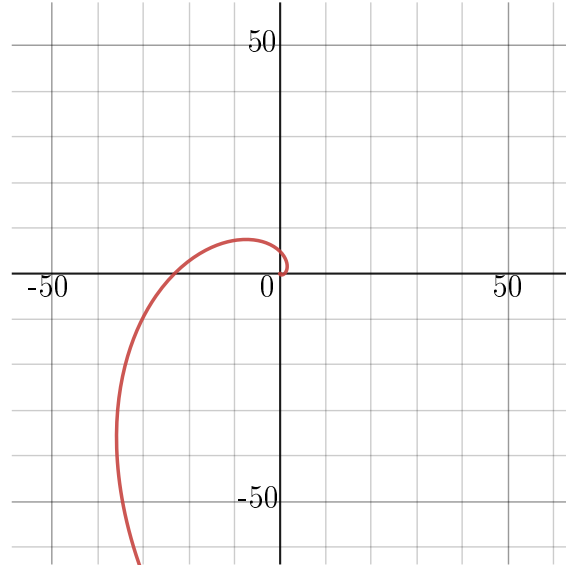


Рис. 4: График кривой

### 3 Т3

$$M = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2$$

Рассмотрим функцию  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , такая функция является непрерывной. Рассмотрим прообраз множества  $g^{-1}(Q)$ ,  $Q = (0, +\infty)$ , при этом прообраз равен исследуемому множеству  $M$ . По топологическому определению непрерывности прообраз открытого  $Q$  открыт, а значит  $M$  - открыто. Также множество  $M$  не является линейно связным, так как все кривые, соединяющие точки с координатами  $x_4$  разных знаков должны проходить через точку с координатой  $x_4 = 0$ , которая не содержится в множестве  $M$ . Тогда так как  $M$  - открыто и не линейно связно, то оно не связно.

### 4 Т5

Нужно доказать, что  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) = \{0\}$ . С одной стороны  $\forall k \in \mathbb{N} 0 \in B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \{0\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right)$ . С другой стороны рассмотрим множество  $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , для любого  $a \in A$  существует  $k$  такое что  $\frac{1}{k} < |a|$ , а значит  $a \notin B_0\left(\frac{1}{k}\right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \not\subseteq A \Rightarrow B_0\left(\frac{1}{k}\right) \not\subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_0\left(\frac{1}{n}\right) \in \{0\}$ . Тогда через двойное включение получаем требуемый факт.

### 5 Т6

Рассмотрим множество значений последовательности Гейне  $a_n \rightarrow 0$ . Данное множество не будет замкнутым, так как его замыкание будет содержать 0, но ни один из членов последовательности не равен 0. А также каждая точка данного множества является членом последовательности  $a_n$  и потому изолирована.

## 6 2.39

Рассмотрим две последовательности Гейне  $x_n \rightarrow x_0$  и  $y_k \rightarrow y_0$ . Требуется доказать, что при условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_k) = B(y_k)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = A$$

следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(y_k) = A$$

. В силу существования первых двух пределов для достаточно больших  $n, k$  выполняется:

$$|f(x_n, y_n) - A| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - B(y_k)| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| < \epsilon$$

Последнее неравенство выполняется в силу фундаментальности последовательности  $f(x_n, y_k)_n$ . Рассмотрим  $|B(y_k) - A| < |B(y_k) - f(x_n, y_k)| + |f(x_n, y_k) - f(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k) - A| < 3\epsilon$ . Что означает

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(y_k) = A$$

## 7 T10

Пусть существует  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g$  - непрерывна и инъективна. Рассмотрим сужение  $g_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_y(x) = g(x, y)$ . Тогда  $g_y$  также непрерывна, а значит он переводит связные множества в связные, из чего следует  $g_y(\mathbb{R}) = Q(y)$ , где  $Q(y)$  - отрезок, интервал или полуинтервал. Тогда так как  $g$  - инъективна выполняется:  $\mathbb{R} = \bigsqcup_{y \in \mathbb{R}} Q(y)$ . Докажем промежуточную лемму: инъективная и непрерывная функция монотонна. Предположим противное:  $\exists x_1 < x_2 < x_3 \mid f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \vee f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ , строгие знаки получены с учётом инъективности. Без ограничения общности рассмотрим первый вариант  $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ . Пусть  $f(x_3) > f(x_1)$ , тогда по теореме о промежуточных значениях существует  $x \in (x_1, x_2) \mid f(x) = f(x_3)$ , тогда так как  $x < x_3 \Rightarrow x \neq x_3$ , но  $f(x) = f(x_3)$  - противоречие с инъективностью. Тогда оказывается, что каждая из  $g_y$  - монотонна. Так как функция  $g_y$  монотонна то по теореме об обратной функции обратная  $f^{-1}$  - непрерывна, а значит  $f$  переводит открытые в открытые. А значит все множества  $Q(y)$  - интервалы. Тогда так как из покрытия открытого множества интервалами можно выбрать счётное подпокрытие  $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Q(y_n)$ . Но тогда мы получили дизъюнктное разбиение действительной прямой непустыми интервалами - противоречие со связностью.

## 8 T11

Построим кривую Пеано. Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$  и квадрат  $[0, 1]^2$ . Будем итеративно строить разбиения: на первом шаге разобьём отрезок на 4 равных отрезка, а квадрат на 4 равных квадрата, на втором разобьём квадрат на 16 квадратов и отрезок на 16 отрезков. Согласно Рис. 5 сопоставим отрезкам соответствующие квадраты.

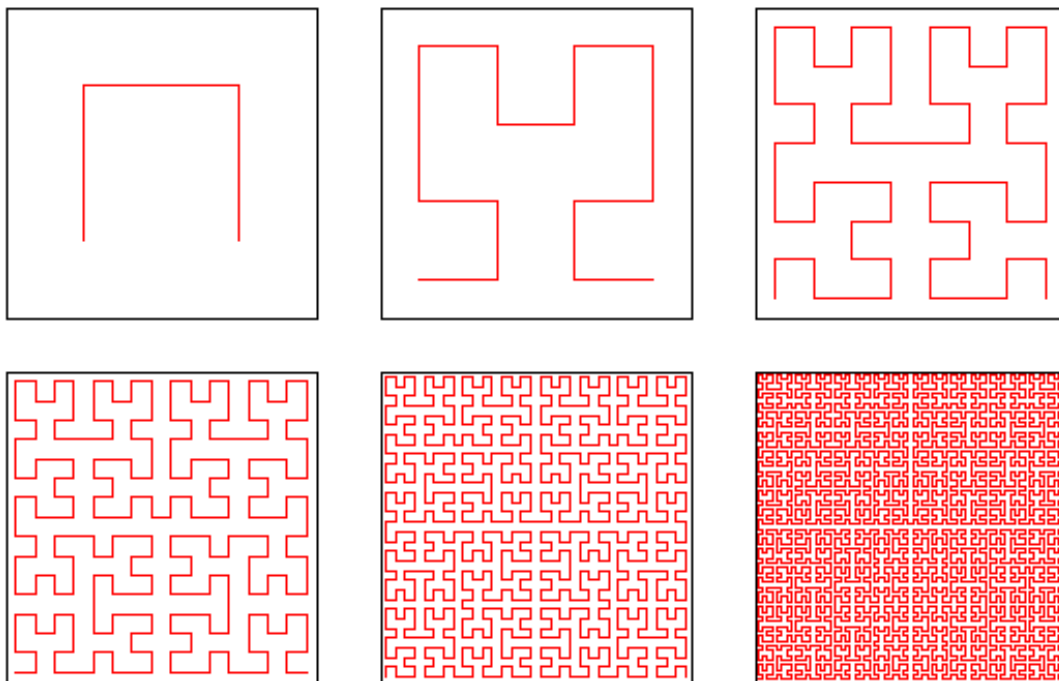


Рис. 5: Обходы для квадратов 1 - 6 уровня.

Выберем точку из отрезка. Если точка не принадлежит 2 отрезкам никакого уровня, для каждого уровня разбиения отрезка получим соответствие отрезка, к которому принадлежит точка и квадрата. Тогда получаем что каждой точке соответствует последовательность вложенных стягивающихся квадратов. Их общая точка и будет образом точки отрезка. В случае если на каком-то шаге точка из отрезка принадлежит 2 подотрезкам, они обязательно будут связаны к квадратами с общей стороной (из построения обхода), тогда будем рассматривать прямоугольники, образованные данными квадратами, они также стягиваются и точка их пересечения - образ точки отрезка. Повторяя аналогичные рассуждения в обратном порядке получим, что исследуемое отображение сюръективно. Докажем непрерывность отображения. Для точки выберем квадрат, полностью лежащий в заданной  $\epsilon$  окрестности. рассмотрим отрезок, соответствующий данному квадрату. Все точки из этого отрезка будут лежать в этом квадрате, так как близким отрезкам соответствуют близкие квадраты (обход такой).

Теперь пусть такое отображение называется  $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$ , тогда применяя к функции гомеоморфизм арктангенса слева и по координатный тангенс слева получим непрерывное отображение из  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

## 9 T12

(б)

$$\begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{x^2+y^2}\right\}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Найдём частные производные:

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\{-\frac{1}{x^2}\}}{x} = 0$$

$$\partial_y f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp\{-\frac{1}{x^2}\}}{y} y = 0$$

Проверим дифференцируемость функции:

$$\frac{1}{\rho} \left| \exp\left\{-\frac{1}{h^2 + h^2}\right\} \right| = \frac{1}{\rho} \left| \exp\left\{-\frac{1}{\rho^2}\right\} \right| \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$$

(в)

$$f(x, y) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y})$$

Частные производные равны нулю:

$$\left| \frac{1}{\rho} \ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y}) \right| = \left| \frac{1}{\rho} \ln(1 + \rho \sqrt[3]{\cos^2 \phi \sin \phi}) \right|$$

Предел такого выражения зависит от направления, например при  $\phi = 0$  предел равен 0, а при других углах 1. Тогда разность приращения и дифференциала не равна  $o(\rho)$ , что недифференцируемость функции.

## 10 T14

$$f(x, y, z) = (1 + x)^\alpha (1 + y)^\beta (1 + z)^\gamma$$

$$\ln f(x, y, z) = \alpha \ln(1 + x) + \beta \ln(1 + y) + \ln(1 + z)^\gamma$$

$$d \ln f(x, y, z) = \frac{df(x, y, z)}{f(x, y, z)} = \frac{\alpha dx}{1 + x} + \frac{\beta dy}{1 + y} + \frac{\gamma z^{\gamma-1} dz}{1 + z^\gamma}$$

$$df(0, 0, 0) = \alpha dx + \beta dy$$

$$d^2 f(x, y, z) = d(f(x, y, z) \cdot d \ln f(x, y, z)) = df(x, y, z) \otimes d \ln f(x, y, z) + f(x, y, z) \cdot d^2 \ln f(x, y, z)$$

Первое слагаемое:

$$df(0, 0, 0) \otimes d \ln f(0, 0, 0) = (\alpha dx + \beta dy)^2$$

Второе слагаемое:

$$d^2 \ln f(x, y, z) = -\frac{\alpha dx^2}{(1 + x)^2} - \frac{\beta dy^2}{(1 + y)^2} + \frac{\gamma(\gamma - 1)z^{\gamma-2} - \gamma z^{2\gamma-2}}{(1 + z^\gamma)^2}$$

Тогда второй дифференциал в нуле равен:

$$d^2 f(0, 0, 0) = (\alpha dx + \beta dy)^2 - \alpha dx^2 - \beta dy^2 = (\alpha^2 - \alpha)dx^2 + (\alpha^2 - \alpha^2)dy^2 + 2\alpha\beta dx \otimes dy$$



## 11 T15

(a)

$$ef = e^{x-y+f}$$

$$edf = (dx - dy + df)ef \implies df = \frac{f}{1-f}(dx - dy)$$

$$d^2f = df \otimes (dx - dy + df) + f d^2f + df^2$$

$$d^2f = \frac{1}{1-f}(2df^2 + df \otimes dx - df \otimes dy)$$

б)

$$f^3 - 3xyf - 2 = 0, f(1, 1) = 2$$

$$3f^2df - 3yfdx - 3xfty - 3xydf = 0 \implies df = \frac{dx + dy}{f^2 - xy}$$

Значение  $df(1, 1) = \frac{dx+dy}{3}$

$$d^2f = d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) \otimes (dx + dy)$$

$$d\left(\frac{1}{f^2 - xy}\right) = -\frac{2fdf - ydx - xdy}{(f^2 - xy)^2} = -\frac{4df - dx - dy}{9}$$

$$d^2f(1, 1) = (dx + dy) \otimes -\frac{\frac{4}{3}dx + \frac{4}{3}dy - dx - dy}{9} = \frac{1}{27}(dx + dy)^2$$

Тогда частные производные одинаковы и равны:  $\frac{1}{27}$ .

## 12 T16

$$f(x, y, z) = \ln x + y + z = \ln g$$

$$d^n f(x, y, z) = \partial_{g^n} f \cdot dg^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n} \cdot (dx + dy + dz)^n$$

То есть все частные производные равны между собой и равны:  $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y+z)^n}$ .

## 13 T17

а) Нужно доделать))).

$$f(x, y) = (1+x)^y = e^{y \ln(1+x)}$$

$$df = (1+x)^y(dy \ln(1+x) + \frac{ydx}{1+x})$$

Тогда  $df(0, 0) = 0$ .

$$d^2f = df \otimes (dy \ln(1+x) + \frac{ydx}{1+x}) + f(x, y)(dy \otimes \frac{dx}{1+x} + dx \otimes \frac{dy(1+x) - ydx}{(1+x)^2})$$

Тогда  $d^2f(0, 0) = 2dy \otimes dx$

$$f(h) = 1 + h^1 h^2 + o(||h||^2)$$

## 14 T18

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$$

## 15 T19

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha n} n^{\beta}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{\alpha n} n^{\beta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha} (n^{\frac{1}{n}})^{\beta} = e^{\alpha}$$

При  $\alpha > 0$  ряд расходится, при  $\alpha < 0$  ряд сходится. Рассмотрим случай  $\alpha = 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{\beta}$$

Но так как экспонента растёт быстрее степени, то не выполняется необходимое условие сходимости, а значит ряд расходится.

## 16 T20

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  - сходится абсолютно, то и исходный ряд сходится абсолютно.

в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n! 3^n}$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+1} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Так как  $q < 1$  то исходный ряд сходится абсолютно.

г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^3}$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+5}{n^2+6} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2+6} \right)^{n^2} = \frac{1}{e} < 1$$

Ряд сходится.

е)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

По признаку Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{(n!)^2}{(n+1)!^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$$

Ряд сходится.

ж)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$$

По признаку Дирихле:  $(-1)^n$  - ограничена. А для достаточно больших  $n$  последовательность  $\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$  монотонна и стремится к 0. Что означает, что ряд сходится. Теперь рассмотрим модуль последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\cos 4x}{\sqrt{n}}$$

Один из подрядов расходится а второй сходится по тригонометрическому признаку, потому общий ряд тоже расходится.

з)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\sin^3 n}{6n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$$

Подсумма с  $O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$  сходится абсолютно, подсумма  $\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$  сходится по тригонометрическому признаку.

$$\frac{\sin^3 n}{6n} = \frac{1}{24n} (3 \sin x - \sin 3x)$$

Оба ряда сходятся по тригонометрическому признаку. А значит исходный ряд сходится.

## 17 Т21

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left( 1 + \sin \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Последовательность из  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  сходится абсолютно. Тогда рассмотрим первые 2 члена суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{n^{\alpha-1} - 1} \right] \right)$$

При  $\alpha = 1$  сумма равна 0 и ряд сходится. при остальных  $\alpha$  сумма расходится.

б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n \ln^\alpha n}$$

По тригонометрическому признаку ряд сходится при любом  $\alpha$ , так как  $\frac{1}{n \ln^\alpha n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Доделать)))

## 18 Т21 доп

Проверить, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\phi$  расходится. Обозначим частичные суммы  $S_n$ , тогда:

$$S_n \cdot 2 \sin \frac{\phi}{2} = \cos \left( \phi - \frac{\phi}{2} \right) - \cos \left( \phi + \frac{\phi}{2} \right) + \dots = \cos \frac{\phi}{2} - \cos \phi \left( n + \frac{n}{2} \right)$$

Но тогда сумма расходится, так как предела частичных сумм не существует.

## 19 15.33

По неравенствам Гёльдера и Минковского получим, что последовательность частичных сумм ограничена и возрастает (так как последовательности положительные), а значит существует предел частичных сумм - ряд сходится. После перехода к пределу в неравенствах получим неравенство для сумм рядов.

## 20 Специальный критерий Коши