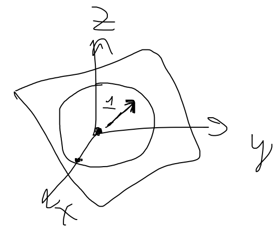
Т2. а) $p\Gamma(p) = \Gamma(p+1) \Rightarrow p\Gamma(p) \to 1,\ p \to 0 \Rightarrow \Gamma(p) \sim \frac{1}{p},\ p \to 0$.

Т3. а) $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} dx\, \frac{\sin x}{x} \int_0^{x} dy = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$.

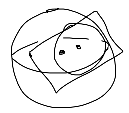
в) $\int\limits_{0 \le x_1 \dots x_n \le a} (x_1 + \dots + x_n)^2\, dx_1 \dots dx_n = a^{n-1} \int_0^a x^2\, dx \cdot n + 2na^{n-2} \int\limits_{0 \le x, y \le a} xy\, dx\, dy = 2na^{n-2} \left(\int_0^a x\, dx \right)^2 + a^{n-1} n \int_0^a x^2 dx$

$= 2na^{n-2} \left(\frac{a^2}{2} \right)^2 + na^{n-1} \frac{a^3}{3} = \frac{na^{n+2}}{2} + \frac{na^{n+2}}{3} = \frac{5na^{n+2}}{6}$



Т.7. б) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0}} x^2\, ds = I \Rightarrow 3I = \int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0}} x^2+y^2+z^2\, ds = \int\limits_{\substack{x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0}} a^2\, ds = a^2 \int_S ds = \underline{\underline{2\pi a^2}}$

Т.4. б) б) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} f(x+y+z)\, dxdydz; = \begin{Bmatrix} t = x+y+z \\ y = y \\ z = z \end{Bmatrix}$ $\iiint\limits_{h} f(t)\, dt\, dy\, dz = \int_0^a dt\, f(t)\, \pi (a^2 - t^2)$



Т.1. а) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x^\beta} dx$, сход при $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha, \beta < 0$

$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x^\beta} dx = \begin{Bmatrix} t = x^\beta \\ dx = \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt \end{Bmatrix} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-1}{\beta}} e^{-t} \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

в) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1 + x^\beta} dx = \begin{Bmatrix} x^\beta = t \\ dx = \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \ln t}{1+t} dt = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1} \ln t}{1+t} dt$

$\left\{ \gamma = \frac{\alpha+1}{\beta} \right\}$

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1} \ln t}{1+t} dt = \begin{Bmatrix} \ln t = p \\ dt = e^p dp \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma p}\, p}{1 + e^p} dp$

Р-рим $\frac{\pi}{\sin(\pi\gamma)} = B(\gamma, 1-\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma p}}{1+e^p} dp$

$-\frac{\pi^2 \cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p e^{\gamma p}}{1 + e^p} dp \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1 + x^\beta} dx = -\frac{\pi^2 \beta^2 \cos(\pi\gamma)}{\sin^2(\pi\gamma)}$

Т6. а) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ 0 \le x \le b \Rightarrow l = \int_0^b \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx = \int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{a} dx = a\,\mathrm{sh}\frac{x}{a} \Big|_0^b = a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$

б) На доп семинаре

Д-во ф-лы дополнения.

$\boxed{\text{I.}}$ Д-жем, что $\pi \mathrm{ctg}\, x\pi = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$

$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ $\qquad g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$

$g(x)$ опред для всех нецелых значений;

$f(x)=\frac{\quad}{\sin\pi x}$ $\qquad g(x)= x \ \ldots \sum\limits_{n=1} \ldots$

1) Д-жем, что $g(x)$ опред для всех нецелых значений:

$g(x)=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}$ — сход равномерно $\forall x\notin\mathbb{Z}$ т.к. $\frac{1}{x^2-n^2}\sim\frac{1}{n^2}$ → сходится.

2) Д-жем, что $g(x)$ и $f(x)$ — периодические с периодом 1.

$g_N=\sum\limits_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$ $\to g_N(x+1)=\sum\limits_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n+1}=\sum\limits_{n=-N+1}^{N+1}\frac{1}{x+n}$ ⇒ при $N\to\infty$ $\boxed{g_N(x)=g_N(x+1)}$

3) $f(x)=-f(-x)$; $g(x)=-g(-x)$ — очев

4) для $f(x)$: $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$ $\left(\pi \operatorname{ctg}\pi x=\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin\pi x}=\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\pi x}{2}-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}+\pi\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$

для $g(x)$: $g_N\left(\frac{x}{2}\right)+g_N\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g_{2N}(x)+\frac{2}{x+2N+1}$ → переходя к пределу

$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g(x)$

5) Тогда $h(x)\equiv f(x)-g(x)$ — нечёт непр ф-ция и $2h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)+h\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Пусть x_0 — $h(x_0)=\max h(x_0)=m$ ⇒ $2m=h\left(\frac{x_0}{2}\right)+h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$

Пусть $h\left(\frac{x_0}{2}\right)<m$: $2m<m+h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)$ ⇒ $h\left(\frac{x_0+1}{2}\right)>m$ — противор ⇒ $m=h\left(\frac{x_0}{2}\right)$

Тогда $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=m$ ⇒ $h(0)=\lim\limits_{n\to\infty}h\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=m$, но $h(0)=0$ т.к. $\pi\operatorname{ctg}\pi x\to\frac{1}{x}$ при $x\to 0$

Тогда $\boxed{m=0}$ ⇒ $h(x)=0$ ⇒ $f(x)=g(x)$

II. $\int\limits_0^x\left(\pi\operatorname{ctg}\pi t-\frac{1}{t}\right)dt=\int\limits_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-n^2}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x\frac{2t}{t^2-n^2}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\ln\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)$

$\qquad ||$

$\ln\left|\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right|$

Тогда $\sin\pi x=\pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$

III. $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^1\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx =$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\int\limits_0^1\left(1-x^{1/n}\right)^{\alpha-1}dx=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}B(n,\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}$

IV. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!\,(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} =$

$=\frac{1}{\alpha}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ //