1.1. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{(n+1)}}\right)^n z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n}$.

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{n+1}}\right|^{\frac{n}{n}} = \left\{ n=2k \right\} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{2+1}{3-1}\right) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow R = \dfrac{2}{3}$ //

б) $t=z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{R_t} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow R_t = 4 \Rightarrow R_z = 2$ //

1.2. Пусть степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ имеют радиусы сходимости соответственно R_1, R_2, R_3, причём $R_1 \neq R_2$. Докажите, что $R_3 = \min(R_1, R_2)$. Останется ли это утверждение верным при $R_1 = R_2$?

1) при $R_3 < R_1, R_2$: $\sum a_n z^n$ и $\sum b_n z^n$ сход абс $\Rightarrow \sum (a_n+b_n)z^n$ сход абс

2) при $R_2 > R_3 > R_1$: то $\exists z$ т.ч. $\sum a_n z^n$ – расх и $\sum b_n z^n$ – сход абс $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum(a_n+b_n)z^n$ расход

Значит $\left.\begin{matrix} R_3 < R_1 \\ R_3 < R_2 \text{ //.} \end{matrix}\right\} R_3 = \min(R_1, R_2)$

3) $\left.\begin{matrix} \sum z^n, \; R_1 = 1 \\ \sum -z^n, \; R_2 = 1 \end{matrix}\right\} \sum 0\cdot z^n, \; R_3 = \infty$. //

2.1. Найдите радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i^n)^n z^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1-in}{1+in}\right)^{n^2} z^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^{n!}z^{n!}$.

а) $t=z^2 \Rightarrow \dfrac{1}{R_t} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|1+i^n| = 2 \Rightarrow R_t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow R_z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

б) $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\|\dfrac{1-in}{1+in}\right\|^n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{|1-in|^n}{|1+in|^n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^2}\right)^n = 1 \Rightarrow R = 1$ //

в) $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left|3^{k!}\right|^{\frac{1}{k!}} = 3 \Rightarrow R = \dfrac{1}{3}$

2.2. Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и найдите радиус сходимости полученного ряда:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}}. = \frac{x}{\sqrt{(x-3)^2+1}} = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^k \Rightarrow f(x) = 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^k + t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!}t^{k+1} \ominus$$

$$\ominus\ 3 - \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}t^{k+1}\left(\frac{(2k-1)!!\,(-1)^k}{2^k k!} + \frac{(2k+1)!!\,(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}\right)$$

$R = 1$

2.3. Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и найдите радиус сходимости полученного ряда:

$$f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+3}. \qquad x+1 = t$$

$g(t) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{t-2}{t+2}\right) \Rightarrow g' = \dfrac{2}{4+t^2} = \dfrac{1}{[illegible]}\cdot\dfrac{1}{[illegible]\,t^2} = \sum [illegible]\dfrac{(-1)^n}{[illegible]}\cdot\dfrac{t^{2n}}{[illegible]^n} \Rightarrow g(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}\cdot\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)4^n} - \operatorname{arctg}1$

$$f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+3}.$$ $x+1=t$

$g(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t-2}{t+2}\right) \Rightarrow g' = \frac{2}{4+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{t^{2n}}{4^n} \Rightarrow g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)4^n} - \operatorname{arctg}1$

$f(t) = (-\operatorname{arctg}1)\cdot t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{2\cdot 4^n(2n+1)}$

$R = 2$ //

2.4. Найдите $f^{(2022)}(0)$, где $f(x) = \ln(6 - x^2 - x^4)$ $= \ln(2-x^2) + \ln(x^2+3) = \ln 6 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$

$6 - x^2 - x^4 = -(x^2-2)(x^2+3)$

$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n} + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{3^n\cdot n} = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(2022)} = \{n = 1011\} = \frac{2022!}{1011}\cdot\left(\frac{1}{2^{1011}} + \frac{1}{3^{1011}}\right)$

3.2. При $|x| \le 1$ найдите сумму ряда

$$\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \ldots \quad \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{(1-x)}{x}\ln(1-x) + 1$

3.1. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(0,1)$ к функции $S(x)$, и пусть существует $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *суммируем методом Пуассона–Абеля*, а число A называют *суммой ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *в смысле Пуассона–Абеля*.

а) Найдите суммы следующих рядов в смысле Пуассона–Абеля:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n; \qquad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos nx; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin nx \quad (x \in [0, 2\pi)).$$

б) Докажите *регулярность суммирования методом Пуассона–Абеля*: если ряд сходится, то он также сходится в смысле Пуассона–Абеля, причём к той же самой сумме.

в) Найдите суммы рядов:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots; \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$, при $x \to 1$

2) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos nx$ р-рим $\sum_{n=1}^{k} x^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{k}(xe^{ix})^n = \frac{x(e^{ix} - e^{i(k+1)x}x^k)}{1 - e^{ix}x} =$

$= \frac{x(e^{ix} - e^{i(k+1)x}x^k)(1 - xe^{-ix})}{1 + x^2 - xe^{-ix} - xe^{ix}} = \frac{xe^{ix} - e^{i(k+1)x}x^{k+1} - x^2 + x^{k+1}e^{ikx}}{1 + x^2 - 2x\cos x} =$

$x\cos x + ix\sin x - x^{k+1}\cos((k+1)x) - ix^{k+1}\sin((k+1)x) - x^2 + x^{k+1}\cos(kx) + x^{k+1}i\sin(kx)$

$$\Leftrightarrow \frac{}{1+x^2-xe^{-ix}-xe^{ix}} = \frac{}{1+x^2-2x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\cos x + ix\sin x - x^{k+1}\cos((k+1)x) - ix^{k+1}\sin((k+1)x) - x^2 + x^{k+1}\cos(kx) + x^{k+1} i\sin(kx)}{1+x^2-2x\cos x}$$

$$S(x) = \frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{1+x^2-2x\cos x} = \frac{x\cos x + ix\sin x - x^2}{1+x^2-2x\cos x}$$

$$\operatorname{Re} S(x) \to \frac{\cos 1 - 1}{2-2\cos 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos nx = 0 //$$

$$\operatorname{Im} S(x) \to \frac{\sin 1}{2-2\cos 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 1}{1-\cos 1}\right)$$

в) Найдите суммы рядов:

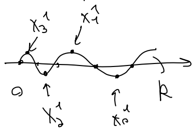
$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots; = \ln 2 \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x) \Rightarrow \ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \operatorname{arctg} x \to \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

б) Докажите *регулярность суммирования методом Пуассона–Абеля*:
если ряд сходится, то он также сходится в смысле Пуассона–Абеля, причём к той же самой сумме.

3.3. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ к функции $f(x)$, и пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $f(x_n) = 0$, где $\{x_n\}$ — некоторая последовательность Гейне в точке x_0, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0\ \forall n$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на $(x_0 - R, x_0 + R)$. $\quad x_0 = 0$

1) f — непрерывна на $(-R, R) \Rightarrow 0 = \lim_{x_n \to 0} f(x_n) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

2) 

т.к. ф-ция непр, то по т. Ролля найдется x_n^1 т.ч. $f'(x_n^1) = 0$

берём x_n^i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Тогда учитывая что $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ — тоже предст. в виде ряда

и $0 = \lim_{x_n^1 \to 0} f'(x_n^1) = f'(0) \Rightarrow a_1 = 0$

Аналогично для $\forall k$ строим $x_n^k \to 0$ т.ч. $f^{(k)}(x_n^k) = 0$ и получаем $a_k = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k\ a_k = 0$ т.е. $f(x) = \sum 0 \cdot x^n \equiv 0 //$

2.5. Приведите пример степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ с радиусом сходимости 1, который

а) сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$;

б) расходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$;

в) расходится при $z = 1$ и сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$ и $z \neq 1$.

в) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \frac{z^n - 1}{z - 1} = \begin{cases} \text{при } z = 1 \text{ не сущ} \\ \text{при } z \neq 1 \end{cases} = \frac{1}{1-z}$

?

б)