VETTORI NELLO SPAZIO

SOMMA e SOTTRAZIONE TRA VETTORI $v+w = x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3$ $v-w = x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3$
MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE $c \cdot v = c(x_1, x_2, x_3) = cx_1, cx_2, cx_3$

PRODOTTO SCALARE $\langle v, w \rangle$ se $=0$ v e w sono ortogonali
NORMA DI UN VETTORE $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
DISTANZA TRA VETTORI $\|v-w\|$
PROIEZIONE ORTOGONALE
TEOREMA LA NORMA DELLA SOMMA AL QUADRATO È UGUALE ALLA SOMMA DELLE NORME QUADRATE

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

DIMOSTRAZIONE

DISUGUAGLIANZA DI C-S $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$
ANGOLO TRA DUE VETTORI $\dfrac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1$

PRODOTTO VETTORIALE $v \times w = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$

1. DISTRIBUTIVA $(au + bw) \cdot w = a(u \cdot w) + b(v \cdot w)$
2. ORTOGONALITÀ $v \cdot w$ ORTO $v \rightarrow \langle v \cdot w, v \rangle = 0$
   $v \cdot w$ ORTO $w \rightarrow \langle v \cdot w, w \rangle = 0$
3. PRODOTTO VETTORIALE E VICEVERSA $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
4. se il PRODOTTO VETTORIALE è nullo uno dei due vettori è multiplo dell'altro.

LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$

MATRICI

una matrice $A_{m \times n}$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri (2 numeri naturali non nulli)
QUADRATA se $m = n$
IDENTITÀ se ha tutti 1 sulla diagonale principale
TRIANGOLARE -SUP- se i numeri sotto sono "0" -INF- i numeri sopra sono "0"
TRACCIA si ottiene sommando i numeri sulla diagonale.
OPERAZIONI SU MATRICI : somma, prodotto per scalare
PROPRIETÀ OPERAZIONI SU MATRICI : commutativa,
PRODOTTO DI MATRICI: se sono di formato opportuno
PROPRIETÀ PRODOTTO DI MATRICI :

IDEMPOTENTE : se il quadrato della matrice è l'Identità
NILPOTENTE : se la matrice elevata a un numero è nulla

MATRICI

una matrice $A_{m \times n}$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri (2 numeri naturali

QUADRATA se $m = n$

IDENTITÀ se ha tutti 1 sulla diagonale principale

TRIANGOLARE - SUP - se i numeri sotto sono "0" - INF - i numeri sopra sono "0"

TRACCIA si ottiene sommando i numeri sulla diagonale.

OPERAZIONI SU MATRICI : somma, prodotto per scalare

PROPRIETÀ OPERAZIONI SU MATRICI : commutativa,

PRODOTTO DI MATRICI: se sono di formato opportuno

PROPRIETÀ PRODOTTO DI MATRICI :

IDEMPOTENTE : se il quadrato della matrice è l'Identità

NIL POTENTE : se la matrice elevato a un numero è nulla

INVERSA : se esiste una matrice che moltiplicata dia l'identità

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot ((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}))^T$$

TRASPOSTA : si ottiene scambiando le righe con le colonne

PROPRIETÀ TRASPOSTA : $(A^T)^T = A$ $(A+C)^T = A^T + C^T$ $(CA)^T = CA^T$ $(AB)^T = B^T A^T$

SIMMETRICA : se la matrice è uguale alla sua trasposta

ANTISIMMETRICA : se l'opposto della matrice è uguale alla sua trasposta

DIAGONALE : se tutto è "0" tranne la diagonale

ORTOGONALE : se la matrice è invertibile e l'opposta è uguale alla trasposta

DETERMINANTE : SARRUS , LAPLACE $(-1)^{i+j} \cdot a_{ij} (\det A_{ij})$

PROPRIETÀ DET: $\det Id = 1$, $\det A = \det A^T$, se una colonna o riga è nulla $\det = 0$
se due colonne o righe $\det = 0$
BINET : $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

SINGOLARE : se il determinante è uguale da "0"

NON SINGOLARE : se il determinante è diverso da "0"

KRONECKER :

SISTEMI LINEARI:

il sistema è compatibile quando se ammette almeno una sol

il sistema non è compatibile quando non ammette sol

un sistema omogeneo ammette sempre sol (BANALE)

OPERAZIONI ELEMENTAR:

1. scambiare due righe
2. sommare ad una riga il multiplo di un'altra riga

KRONECKER:

SISTEMI LINEARI:
il sistema è compatibile quando se ammette almeno una Sol
il sistema non è compatibile quando non ammette Sol
un sistema omogeneo ammette sempre sol (BANALE)

OPERAZIONI ELEMENTAR:
1. scambiare due righe
2. sommare ad una riga il multiplo di un'altra riga
3. moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$

ELEMENTO DI TESTA: primo coefficiente non nullo di una riga da sx a dx di una matrice.

MATRICE RIDOTTA A SCALA: pivot della 1ª riga è a sinistra del pivot della 2ª riga, e così via...

SISTEMA RIDOTTO: se la matrice dei coefficienti è ridotta a scala

Sol: 1°: righe diverse da zero < num. eq. $\nexists$ Sol
2°: se i termini noti è = "0"
a): se le righe diverse da zero = num. incognite $\exists!$ Sol
b): se le righe diverse da zero < num. incognite V.L.

GAUSS:

RANGO: è uguale al numero di righe r diverse da zero di una sua riduzione a scala con GAUSS.

TEOREMA R-C:
un sistema lineare non omogeneo è compatibile SSE $rg\,A = rg(A|b)$
le soluzioni dipendono da (num. eq − $rg\,A$) parametri = V.L.

TEOREMA CRAMER:

MUTUE POSIZIONI:

2 PIANI: COINCIDENTI $rg(A) = 1 = rg(A|b)$ 2 VL
PARAL ⟶ NON COINCIDENTI $\nexists$ Sol $rg(A) < rg(A|b)$
NON PARALLELI INCIDENTI IN UNA RETTA $rg(A) = 2 = rg(A|b)$

MUTUE POSIZIONI :

2 PIANI : COINCIDENTI $rg(A) = 1 = rg(A|b)$ ∞

PARAL $\rightarrow$ NON COINCIDENTI $\nexists$ sol $rg(A) < rg(A|b)$

NON PARALLELI INCIDENTI IN UNA RETTA $rg(A) = 2 = rg(A|b)$

1 RETTA 1 PIANO

r ORTO π $\exists!$ sol $rg(A) = 3 = rg(A|b)$

$r \parallel \pi$ $r \in \pi$ $\exists!$ sol $rg(A) = 2 = rg(A|b)$

2 RETTE

PARALLE COINCIDENTI

$\downarrow$ $\downarrow$ $rg(A) = 2 = rg(A|b)$ $\exists$ sol

$v = kv'$ $r \cap r' \neq \emptyset$

PARALLE NON COINCIDENTI $\rightarrow$ $r \cap r' = \emptyset$ $\nexists$ sol $rg(A) = 2 < 3 = rg(A|b)$

INCIDENTI $rg(A) = 3 = rg(A|b)$ $\exists$ sol

SGHEMBE $\nexists$ sol $rg(A) = 3 < 4 = rg(A|b)$

NUMERI COMPLESSI

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x+i)(x-i)$ $\sqrt{-1} = i$ $x = \pm i$

RAPP. CARTESIANA : $z = x + iy$

PARTE REALE : x , PARTE IMMAGINARIA : y

RAPP. POLARE : $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ $\rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

SOMMA : $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

MOLTIPLICAZIONE : $cz = cx + icy$

CONIUGATO : $z = x + iy \rightarrow z = x - iy$

DIVISIONE : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

SPAZI VETTORIALI

SOMMA $v + w$ + PRODOTTO PER SCALARE

- ELEMENTO NULLO
- OPPOSTO DI UN VETTORE

SPAZI VETTORIALI

SOMMA $v+w$ + PRODOTTO PER SCALARE

- ELEMENTO NULLO
- OPPOSTO DI UN VETTORE
- PR. COMMUTATIVA
- PR. ASSOCIATIVA CON SOMMA E CON PRODOTTO
- ELEMENTO NEUTRO (1)
- PR. DISTRIBUTIVA PER VETTORE E PER SCALARE

SOTTOSPAZIO VETTORIALE: W di V

- ELEMENTO NULLO DI V RISIEDE IN W
- SOMMA w_1+w_2 È IN W
- PRODOTTO PER SCALARE $aw \in W$.

COMBINAZIONE LINEARE:

$v \in V$ è comb. line. di $v_1, \dots, v_k \in V$ se $a_1, \dots, a_k$:

$$v = a_1 v_1, \dots, a_k v_k .$$

SPAZIO GENERATO:

sono tutte le comb. line. di $v_1, \dots, v_k \to \mathcal{L}(v_1 \dots v_k)$

LINEARE DIPENDENZA:

se il vettore nullo può essere scritto come comb. lin. non banale di $v_1, \dots, v_k$.

LINEARE INDIPENDENZA:

se l'unica comb. lin. è quella banale = al vettore nullo.

BASE: $(v_1, \dots, v_k \in V)$ $\{v_1, \dots v_k\}$ è una base di V se:

- $v_1, \dots, v_k$ generano $V \to \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$
- $v_1, \dots, v_k$ sono L.I.

IL RG DI UNA MATRICE È UGUALE AL NUMERO DELLE SUE RIGHE L.I.

PROPOSIZIONE 6.6.1. (Pg. 62)

COORDINATE RISPETTO A UNA BASE:

$B = (v_1, \dots, v_m)$ base di V, ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come comb. lin. dei vettori di B.

I coeff. della comb. l. si chiamano COORDINATE DI V RISPETTO ALLA BASE B

$$\longrightarrow [v]_B = (a_1, \dots, a_m)^T$$

vettore coordinate di v rispetto a B.

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE:

È il numero di vettori di una qualsiasi base di uno sp. vett. V

$$\dim V = m \quad \text{allora num. generatori} \geq m$$

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE:

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE:

$B = (v_1, \dots, v_n)$ $B' = (w_1, \dots, w_n)$

è la matrice che ha come j-esima colonna le coordinate di w_j RISPETTO A B.

PROPRIETÀ: B, B', B'' basi di sp. vett. V

① $M_{BB'} \cdot M_{B'B''} = M_{BB''}$

② $M_{BB'}$ è invertibile, inversa $= M_{B'B}$

In conclusione il legame fra $[v]_B$ e $[v]_{B'}$ è il seguente:

$$[v]_B = M_{BB'} \cdot [v]_{B'} \qquad [v]_{B'} = M_{B'B} \cdot [v]_B$$

SPAZIO SOMMA

Uno sp. vett. V si dice SOMMA DIRETTA DI due sotto sp. U e W se

$$V = U + W \text{ e } U \cap W = \{0_V\}$$

Lo SPAZIO SOMMA di U e W è il sotto sp. generato da U e W

$$U + W = \mathcal{L}(U, W) = \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

TEOREMA: GRASSMAN

V sp. vett. U e W sotto sp. con dim. p e q.

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

DIM

BASE $U \cap W = \{v_1 \dots v_k\}$ Base $U = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots v_p\}$

Base $W = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots v_q\}$

Dimostriamo la tesi se A è base di U + W

$$A = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots v_p, v_{k+1}, \dots v_q\}$$

infatti: $\dim(U+W) = k + (p-k) + (q-k) = p + q - k$

APPLICAZIONI LINEARI

S e T insiemi $f: S \to T$

se $U \subseteq S$ $f(U) = \{t \in T \mid \exists s \in U \text{ con } f(s) = t\}$, questo insieme è IMMAGINE DI U secondo f.

se $V \subseteq T$ $f^{-1}(V) = \{s \in S \mid f(s) \in V\}$ è CONTROIMMAGINE di V su f.

$F: V \to W$ si dice lineare se:

$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ ADDITIVITÀ

$F(a v_1) = a F(v_1)$ OMOGENEITÀ

~~IMMAGINE DI APP. L.~~

$F(v_1+v_2) = F(v_1)+F(v_2)$ ADDITIVITÀ

$F(a v_1) = a F(v_1)$ OMOGENEITÀ

IMMAGINE DI APP. L.

$F: V \to W$

$\operatorname{Im} F$: è sott. sp. di W e la dim è rg di F.

F è SURIETTIVA se $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(F(v_1), \dots, F(v_k))$ tale che $v_1, \dots, v_k$ generano V

NUCLEO DI APP. L.

$\operatorname{Ker} F$: è sott. sp. di V e la dim è nullità di F

F è INIETTIVA sse $\operatorname{Ker} F = \{0_V\}$

UN'APP. LINEARE SI DICE ISOMORFISMO SE È BIIETTIVA, SIA INIETTIVA SIA SURIETTIVA

GRAM - SCHIMD

Permette di far diventare dei vettori L.I. in vettori ortonormali.

DIAGONALIZZAZIONE

$T: V \to V$

T si dice diagonalizzabile se esiste una base di V tale che la matrice che rappresenta T rispetto a B sia diagonale.