Geometria e Algebra

LISI

Prof. Marini Stefano

Secondo parziale, 17/12/2020, A.A. 2020/2021

Cognome .... Nome ....

Esercizio 1. *Siano* $z = 4 - 4i$ *e* $w = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ *numeri complessi :*

1. *Calcolare* $Re(z)$, $Imm(z)$, $\overline{z}$, $z\overline{z}$, $|z|$ *e la sua forma esponenziale;*
2. *Calcolare* $\frac{z}{w}$*;*
3. *Calcolare* z^4*;*

Esercizio 2. *Consideriamo lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$*. Sia* $\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ *l'insieme di vettori dipendenti dal paramentro* $t \in \mathbb{R}$*:*

1. *Stabilire per quali* $t \in \mathbb{R}$ *costituiscano una base di* V*;*
2. *Stabilire se per* $t = 1$ *si tratta du una base per* $\mathbb{R}^3$*, in caso affermativo estrarre una base ortonormale con il metodo di Gram-Schmidt.*

Esercizio 3. *Siano* $V = W = \mathbb{R}^3$ *con le rispettive basi canoniche di* $\mathbb{R}^3$*. Data l'applicazione lineare* $L_A : V \to W$ *definita da* $L_A((x, y, z)) = (y - x, z, x + y)$*,*

- *Calcolare* $KerL_A$*, una sua base e* $\dim KerL_A$*;*
- *Calcolare* $ImmL_A$*, una sua base e* $\dim ImmL_A$*;*
- *Stabilere se* L_A *e iniettiva, suriettiva o un isomorfismo;*
- *Sia* $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ *una base per* V *e* W*, determinare* $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(L_A)$*.*

Esercizio 4. *Sia* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un'applicazione lineare associata alla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare gli autovalori di* A*.;*
2. *Trovare gli autovettori di* A *rispettivi agli autovalori.*
3. *Stabilire se* L_A *é diagonalizzabile, in caso affermativo esibire la sua forma diagonale* D *e una base rispetto alla quale ammette tale forma.*

Esercizio 5. *Giustificando, stabilire se la seguente affermazione é vera o falsa:*
" Siano W_1 *e* W_2 *sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale* V*, con le rispettive dimensioni* $\dim W_1 = \dim W_2 = n$ *e* $\dim V = 2n - 1$*. Allora* $\dim W_1 \cap W_2 \geq 1$*"*