Esercizi: Geometria e algebra
A.A. 2020/2021

October 25, 2020

1 Vettori nello spazio

Esercizio 1. Siano $v = (1, 0, 2)$ e $w = (0, 2, t)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ con w dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

1. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che v é ortogonale a w;
2. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che w ha norma 2;
3. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che l'angolo θ tra v e w è $\frac{\pi}{2}$;

Soluzione
(1) Abbiamo $v = (1, 0, 2)$ e $w = (0, 2, t)$

1. v é ortogonale a w se e soltanto se $< v, w >= v^t w = 0$, quindi
$$< v, w >= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot t = 2t,$$
cioé v é ortogonale aw se e soltanto se $t = 0$.
2. $||w|| = \sqrt{< w, w >} = 2$ se e soltanto se $\sqrt{0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + t^2} = 2$ cioé se $t = 0$;
3. l'angolo θ tra v e w è $\frac{\pi}{2}$ è dato dalla formula
$$\cos\theta = \frac{< v, w >}{||v||||w||} = \frac{2t}{\sqrt{3}\sqrt{4 + t^2}}$$
che deve essere uguale a $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ quindi ancora $t = 0$.

Esercizio 2. Siano $v = (1, 2, 1)$ e $w = (t, -1, t)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ con w dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

1. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che v è ortogonale a w;
2. Trovare $t \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che w ha norma 0;
3. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che l'angolo θ tra v e w è $\frac{3}{2}\pi$;

Esercizio 3. Siano $v = (1, 1, 0)$ e $w = (t, 0, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^3$ con w dipendente da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

1. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che v è ortogonale a w;
2. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che w ha norma 1;
3. Trovare $t \in \mathbb{R}$ tale che l'angolo θ tra v e w è $\frac{\pi}{4}$;

2 Matrici

Esercizio 4. Moltiplicare le seguenti matrici

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$;

3. $A^2 - 7I_2$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $2A^2 - A^t + I_3$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

5. O^tO con $O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

6. U^tU con $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

Esercizio 5. Calcolare determinante e rango delle seguenti matrici:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & 13 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzione
(5) Usando la formula di *Laplace* per il determinante, e sviluppando rispetto alla seconda riga (quella con piú zeri) abbiamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 = 0,$$

analogamente si poteva notare che la prima riga piú due volte la seconda dá la terza. Quindi la matrice non ha rango massimo, cioé 3, ma bensí 2, infatti dutilizzando il metodo degli orlati, orlando dall'elemento 1 nella posizione $1, 1$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinate $1 \neq 0$.

Esercizio 6. Calcolare determinante e rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{pmatrix} k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} k-2 & 1 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4k \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzione
(1) Usando la formula di *Laplace* per il determinante, abbiamo

$$\det \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & k \end{pmatrix} = k^2 - k = k(k-1).$$

La matrice ha rango massimo, cioé 2, quando il determinante é diverso da zero cioé $k \neq 0$ o $k \neq 1$, mentre ha rango 1 quando $k = 0$ o $k = 1$, basta prendere il minore costituito dal solo elemento 1 nella posizione $1, 2$.

3 Sistemi Lineari

Esercizio 7. Risolvere i sistemi lineari omogenei associati alle matrici $1, \dots, 8$ dell'esercizio 5, stabilendo se ammettono soluzioni non banali.

Soluzione
Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice (5) poiché non ha rango massimo $3 - rg(A)$ ammette variabili libere, in particolare 1 in questo caso, usando Gauss Jordan, otteniamo

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad ;$$

Ponendo ad esempio come variabile libera $z = t$ otteniamo che una soluzione é data da $(-2t, 0, t)$, al variare del parametro t.

Esercizio 8. Studiare il sistema $Ax = b$ utilizzando il metodo di Gauss-Jordan nei seguenti casi :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -25 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -26 & 22 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione
(1) usando Gauss Jordan, otteniamo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -2y = -4 \end{cases} \quad ;$$

Il sistema lineare omogeneo associato alla matrice ha rango massimo 2, nella riduzione a scala quindi ammette un unica soluzione, dalla seconda sostituendo nella prima otteniamo $(3, 2)$.

Esercizio 9. Trovare la soluzione dei seguenti sistemi lineari usando il metodo di Gauss-Jordan.

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + 7y + 3z = -7 \\ 2x + 8y + 6z = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 8y - 4z = 0 \\ 2x + 11y + 5z = 9 \\ 4x + 18y + 3z = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 6z = 2 \\ 3x + 9y + 4z = 7 \\ x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 3y + 2z + 5w = 11 \\ -x + 2y - 2z + 5w = -6 \\ 2x + 6y + 4z + 7w = 19 \\ 5y + 2z + 6w = 5 \end{cases}$

Il teorema di Rouché-Capelli

Esercizio 10. Discutere le soluzioni dei seguenti sistemi lineari usando *Il teorema di Rouché-Capelli.*

1. $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ -x + 3y + z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x+y+z=2 \\ x-y=-1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$

Metodo di Cramer

Esercizio 11. Calcolarele le soluzioni dei seguenti sistemi lineari utilizzando il *Metodo di Cramer*.

1. $\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ 3x_1-4x_2=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-3x_2=6 \\ 4x_1-6x_2=12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1-3x_2=6 \\ 4x_1-6x_2=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2-x_3=5 \\ 3x_1-x_2+2x_3=12 \end{cases}$

Soluzione (1)Per Rouché e Capelli ammette un unica soluzione,usando il metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ 3x_1-4x_2=5 \end{cases}$ ha soluzione $x=\frac{\det A_x}{\det A}$ $y=\frac{\det A_y}{\det A}$ dove

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_x=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_y=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui $x=\frac{-33}{-11}=3$ e $y=\frac{-11}{-11}=1$.

Sistemi lineari con parametro

Esercizio 12. Studiare il sistema $Ax=b$ al variare del paramametro $k\in\mathbb{R}$:

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} k & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} -k & 1 & -1 \\ -2 & k+1 & -2 \\ -1 & k & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione (1) Il sistema $\begin{cases} x_1 + kx_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ abbiamo $\det A_k = -k$ da cui abbaimo due casi.

caso 1 $\boxed{k \neq 0}$ Per Rouché e Capelli il sistema ammette un unica soluzione, utilizando Cramer ha soluzione $x = \frac{\det A_{k,x}}{\det A_k}$ e $y = \frac{\det A_{k,y}}{\det A_k}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{k,x} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{k,y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $x = \frac{0}{-k} = 0$ e $y = \frac{-1}{-k} = \frac{1}{k}$.
caso 2 $\boxed{k = 0}$ Per Rouché e Capelli il sistema non ammette soluzioni poiché non compatibile, infatti $rgA_0 = 1 < 2 = rgA_0|b$

Esercizio 13. Discutere le soluzioni dei seguenti sistemi lineari per ogni valore del parametro $t \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 0 \\ tx - 2y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -tx + (t-1)y + z = 0 \\ (t-1)y + tz = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + tz = 2 \\ x + y + 3z = t - 1 \\ 2x + ty - z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} tx + y = 1 \\ 4x + 2y = -t \\ 6x + 3y = -3 \end{cases}$

5. $\left\{ \begin{array}{lll} tx & +z & = -1 \\ y & -tz & = 0 \\ x & +y & = 1 \end{array} \right.$

6. $\begin{cases} x + y + z = t \\ x + (t+1) + z = 2t \\ x + y + (t+1)z = 0 \end{cases}$

7. $\left\{ \begin{array}{l} (t-2)x + y = t - 1 \\ (t+1)y = t + 1 \\ (t-2)x - ty = -2 \end{array} \right.$

8. $\begin{cases} 2x + y + tz = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + tz = t \\ x + (t-1)y = 0 \\ x + (t-1)y + tz = t \end{cases}$

4 Rette e piani nello spazio

Rette nello spazio

Esercizio 14. Trovare la retta passante per il punto p e di direzione vettore v nei seguenti casi :

1. $p = (-4, -3, 0), v = (2, 5, 1)$;

2. $p = (6, 1, 1), v = (-3, -2, 2)$;

3. $p = (4, -1, 4), v = (8, -5, 3)$;

4. $p = (-8, 2, 1), v = (-6, 3, 1)$;

Soluzione
(1) Abbiamo che la retta é data dall'equazione

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 5t \\ t \end{pmatrix};$$

Esercizio 15. Trovare un'equazioni parametriche della retta passante per i due punti dello spazio p_1 e p_2 nei seguenti casi :

1. $p_1 = (1, 0, 2), p_2 = (1, 2, 3)$;

2. $p_1 = (1, 4, 1), p_2 = (1, 5, 1)$;

3. $p_1 = (0, 3, 4), p_2 = (0, 2, 2)$;

4. $p_1 = (7, 2, 5), p_2 = (9, 2, 4)$;

Soluzione

(1) Abbiamo che la retta passante per p_1 e p_2 ha direzione $v = \overline{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, un'equazione parametrica della retta é data quindi da

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix};$$

Esercizio 16. Passare dalle equazioni parametriche per le rette degli esercizi 4 e 5 a quelle cartesiane.

Soluzione
Nel secondo caso (1) abbiamo

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

da cui si puó espliciatre la t ad esempio dalla seconda equazione $t = \frac{y}{2}$ e sostituirla nella prima (dove in realtá non é presente e che quindi rimane immutata) e nella terza equazione ottenendo

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ -\frac{y}{2} + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 17. Passare dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche per le seguenti rette.

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x + 7y = 6 \\ y = 1 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 0 \end{cases}$;

Soluzione
Per (1) abbiamo $z = 0$ dall'ultima equazione, nella prima ponendo ad esempio $y = t$ otteniamo $x = 1 - t$ (notiamo che il sistema lineare associato ammette una variabile libera e che $(1 - t, t, 0)$ e soluzione del sistema per ogni $t \in \mathbb{R}$) quindi l'equazione della retta é

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 18. Dire se le rette r_1 e r_2 sono incidenti, coincidenti, sghembe, parallele o perpendicolari nei casi :

1. $r_1 : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} 3x - 3z = -1 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$;

2. $r_1 : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$;

3. $r_1 : \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3y - z = -1 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 3 \\ 3y - z = -3 \end{cases}$;

4. $r_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$;

5. $r_1 : \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} x - 5y = 2 \\ -y + z = -2 \end{cases}$;

Soluzione
Per (1) usiamo ad esempio la teoria dei sistemi lineari considerando il sistema lineare associato

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = -1 \\ 3x - 3z = -1 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

allora data la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ abbiamo $rg(A) = 3 < 4 = rg(A|b)$ quindi il sistema non é compatibile, cioé le due rette non si incontrano mai, in piú il rango di A é il massimo possibile quindi le due rette non sono parallele, si conclude che quindi sono sghembe.

Esercizio 19. Data la retta nello spazio r ed il punto p, esterno ad essa, trovare la retta parallela, e poi quella perpendicolare, a r passante per p nei seguenti casi:

1. $r : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad p : (2, 2, 2);$

2. $r : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad p : (1, 1, 0);$

3. $r : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = -t \\ y = 5 \\ z = -t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad p : (1, 0, 1);$

Soluzione

(1) Abbiamo che la retta r ha direzione $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. il vettore dei coefficienti davanti alla t, di conseguenza una retta con direzione proporzionale a $\underline{v}$ e passante per $\underline{p}$ avrá equazione parametrica $\underline{x} = \underline{v}t + \underline{p}$, i.e.

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix};$$

Per trovare invece una retta perpendicolare, prendiamo un generico punto sulla retta r, $\underline{p}' = (1, 1, t+1)$ allora il vettore direzione dell'ipotetica retta perpendicolare $v' = \overline{pp'} = \underline{p}' - \underline{p} = (-1, -1, t - 1)$ sará ortogonale al $\underline{v}$ della retta r se e soltanto se il prodotto scalare $< v, v' >= t - 1$ nullo, cioé $t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$. La retta perpendicolare avrá quindi direzione $(-1, -1, 0)$ e passerá per il punto $(1, 1, 2) \in r$, cioé avrà equazione

$$w : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix};$$

Esercizio 20. Date le rette dello spazio r_1 e r_2 trovare se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che siano parallele:

$$r_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \alpha t + 1 + \alpha \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \}, \qquad r_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\};$$

Soluzione
La retta r_1 ha direzione $v_1 = (1, 1, \alpha)$ mentre la retta r_2 ha direzione $v_2 = (1, 1, 1)$. Quindi $v_1 = kv_2$, cioé i loro vettori direzione sono proporzionali se e soltanto se $k = 1$ e quindi $\alpha = 1$. In questo caso $\alpha = 1$ le due rette hanno equazione cartesiana

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad , \; r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui il sistema lineare associato

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ abbiamo $rg(A) = 2 < 3 = rg(A|b)$ quindi il sistema non é compatibile, cioé le due rette non si incontrano mai, quindi sono parallele non coincidenti. Notare che il rango di A é due, cose che ci aspettavamo visto che per $\alpha = 1$ le direzioni sono proporzionali.

Piani nello spazio

Esercizio 21. Dire se i piani π e π' sono paralleli, coincidenti, incidenti nei seguenti casi:

1. $\pi : x + 2y + 3z = 0$, $\pi' : 2x + y + 2z = 1$;
2. $\pi : -2x + 2y + z = 0$, $\pi' : x + y + z = 2$;
3. $\pi : x - y + 2z = 0$, $\pi' : 2x - 2y + 4z = 0$;
4. $\pi : x + y + z = 0$, $\pi' : 3x + 3y + 3z = 2$;
5. $\pi : 5x - y + 4z = 0$, $\pi' : x + 3y + 2z = 1$;

Soluzione
(1) Il sistema lineare associato é

$$\pi \cap \pi : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

da cui la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo $rg(A) = 2 = rg(A|b)$, il sistema é compatibile e il Teorema di *Rouché e Capelli* ci dice che ammette $3 - rg(A)$ variabili libere, cioé 1 in questo caso. Quindi i due piani sono incidenti in una retta.

Esercizio 22. Trovare il piano per i tre punti P, Q e R, se non allineati, nei seguenti casi:

1. $P = (1, 0, 0),\; Q = (0, 1, 0),\; R = (0, 0, 1)$,

2. $P = (1, 2, 3),\ Q = (2, 4, 6),\ R = (4, 8, 12),$
3. $P = (1, 0, 1),\ Q = (1, 2, 1),\ R = (3, 2, 1),$
4. $P = (1, 1, 1),\ Q = (3, 3, 3),\ R = (12, 12, 12),$
5. $P = (0, 2, 1),\ Q = (0, 2, 1),\ R = (2, 0, 1),$
6. $P = (1, 1, 0), Q = (0, 1, 0), R = (0, 1, 1);$
7. $P = (1, 1, 1), Q = (2, 2, 2), R = (2, 3, 2);$
8. $P = (0, 0, 1), Q = (1, 0, 1), R = (2, 0, 3);$
9. $P = (1, 2, 1), Q = (1, 1, 2), R = (2, 1, 1);$

Soluzione
(1) Dalla formula l'equazione del piano é data da

$$det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x-1 & y & z \end{pmatrix} = 0,$$

quindi $\pi : x + y + z - 1 = 0$

Esercizio 23. Dato il piano π ed il piano generico π_α dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$, trovare α per cui sono paralleli nel caso

$$\pi : x - y + z = 2 \qquad \pi_\alpha : 2x + \alpha y + 2z = 2$$

Soluzione
I due piano sono paralalleli se e soltanto se le due giaciture sono proporzionali. π ha giacitura $n = (1, -1, 1)$ mentre π_α ha giacitura $n' = (2, \alpha, 2)$. Quindi $n = kn'$ se e soltanto se $k = \frac{1}{2}$ e quindi $\alpha = -2$. Quando $\alpha = -2$ il sistema lineare associato diventa

$$\pi \cap \pi_{-2} : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

da cui la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Abbiamo $rg(A) = 1 < 2 = rg(A|b)$, il sistema non é compatibile, quindi i due piani sono paralleli non coincidenti.

Mutua posizione di rette e piani

Esercizio 24. Dato il piano π ed il punto p, esterno ad esso, trovare, prima una retta parellela a π passante per p e poi la retta perpendicolare a π passante per p nei seguenti casi

1. $\pi : y + z = 0 \qquad p : (1, 1, 1);$
2. $\pi : x + 2y + z = 1 \qquad p : (2, -1, 3);$
3. $\pi : -x + y + z = 3 \qquad p : (1, 0, 1);$

Soluzione
(1) Il piano π ha giacitura $n = (0,1,1)$, per un direzione proporzionale a questa possiamo prendere n stessa mentre per una direzione ortogonale prendiamo $(1,0,0)$. La retta perpendicolare passante per p sará quindi quella data dall'equazione

$$r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R} \ \},$$

mentre una parallela

$$s : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 1 \\ y = t+1 \\ z = t+1 \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R} \ \},$$

Esercizio 25. Studiare la mutua posizione della retta r e del piano π nei seguenti casi:

1. $\pi : x + y - z = 1$, $r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t+1, \ t \in \mathbb{R}\} \end{cases}$;

2. $\pi : 2x - y + 3z = 1$, $r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = t \\ y = -5t+1 \\ z = t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}\}$;

3. $\pi : 3x + y + z = 1$, $r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}\}$;

4. $\pi : x = 1$, $r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R}\}$;

Soluzione
(1) Dall'equazione parametrica della retta passiamo a quella cartesiana sostituende la prima equazione nella seconda e nella terza:

$$r : \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad ;$$

il sistema lineare associato allora é

$$r \cap \pi : \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

da cui la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ quindi abbiamo $rg(A) = 3 = rg(A|b)$, il sistema é compatibile, quindi la retta é incidente al piano.

Esercizio 26. Dato il piano π e la retta generica r_α dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ non nullo, trovare α per cui sono paralleli o perpendicolari :

$$\pi : 7z = 1 \qquad r : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha t \\ z = \alpha \end{cases} \quad ;$$

Soluzione

L'equazione cartesiana di r é data dalla prima e dall'ultima equazione, (la y costituiesce la variabile libera di quel sistema)

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad ;$$

il sistema lineare associato allora é

$$r \cap \pi : \begin{cases} x = 0 \\ z = \alpha \\ 7z = 1 \end{cases} \quad ;$$

da cui la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ e quella completa $A|b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ quindi abbiamo $rg(A) = 2$ sempre mentre usando il metodo degli orlati $rg(A|b) = \begin{cases} 3 \ \ se \ \alpha \neq \frac{1}{7} \\ 2 \ \ se \ \alpha = \frac{1}{7} \end{cases}$, quindi se $\alpha \neq \frac{1}{7}$ il sistema é incompatibile e l'unico caso possibile é che la retta é parallela al piano, mentre $\alpha = \frac{1}{7}$ il sistema é compatibile, ammette una variabile libera e quindi la retta é contenuta nel piano.

5 Esercizi teorici sulle tutte le sezioni precedenti

Esercizio 27. Giustificando la risposta stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. Siano u, v, w vettori di $\mathbb{R}^3$, tale che u é ortogonale a v e v é ortogonale a w, allora u é orotgonale a w.
2. Siano r, r' due rette nello spazio parallele e π, un piano nello spazio, se r é ortogonale a π allora r' é ortogonale a π;
3. Date due rette sghembe r, r' nello spazio non esiste un piano piano parallelo a entrambe che non contenga nessuna delle due;
4. L'intersezione di tre piano nello spazio non puó essere una retta.
5. Se la retta é ortogonale al piano, lo interseca in un punto.
6. Sia $A \in M_{n\times n}$ invertibile allora A^{-1} é invertibile.
7. Sia $T \in M_{n\times n}$ una matrice triangolare inferiore allora T^t é triangolare superiore.
8. Ogni matrice $O \in M_{n\times n}$ ortogonale é invertibile.
9. Ogni matrice $O \in M_{n\times n}$ ortogonale é simmetrica .
10. Ogni matrice $O \in M_{n\times n}$ ortogonale é antisimmetrica .
11. Siano $A, B \in M_{n\times n}$ ortogonali allora AB é ortogonale.
12. Siano $A, B \in M_{n\times n}$ simmetriche allora AB é simmetrica.
13. Un $O \in M_{n\times n}$ ortogonale allora $det(O) = \pm 1$.
14. Ogni matrice $N \in M_{n\times n}$ nilpotente non é mai ortogonale.
15. Sia $A \in M_{n\times n}$, allora $A + A^t$ é simmetrica.
16. Sia $A \in M_{n\times n}$, allora $A + A^t$ é ortogonale.
17. Il rango di una matrice $O \in M_{n\times n}$ ortogonale é sempre massimo.
18. Ogni sistema lineare omogeneo ammette sempre una soluzione non banale.
19. Non esistono sistemi lineari in una sola variabile e piú di un equazione.

Soluzione:
Per la (11) abbiamo *VERA*, infatti dalla definizione di matrice ortotogonale abbiamo $AA^t = BB^t = Id_n$ da cui $AB(AB)^t = ABB^tA^t = AId_nA^t = Id_n$, da cui segue la tesi.
Per la (12) abbiamo invece *FALSA*, infatti dalla definizione di matrice simmetrica abbiamo $A = A^t$ e $B = B^t$ da cui $AB \neq (AB)^t$ in generale, come controesempio infatti possiamo prendere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$da cui $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ che differisce dalla sua trasposta, quindi segue la tesi.