Esercizi: Geometria e algebra
A.A. 2020/2021

December 3, 2020

1 Numeri Complessi

Esercizio 1. Sia $z \in \mathbb{C}$ uno numero complesso in forma cartesiana determinare la sua forma esponenziale nei casi :

1. $z = 3 + 3i$;
2. $z = 3 - 3i$;
3. $-3 + 3i$;
4. $5i$;
5. $4\sqrt{3} + 4i$;
6. $-4\sqrt{3} - 4i$;

Soluzione
(1) Abbiamo $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Imm(z)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ e $\theta arctan\frac{Re(z)}{Imm(z)} = arctan\ 1 = \frac{\pi}{4}$, quindi $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Esercizio 2. Sia $z \in \mathbb{C}$ uno numero complesso in forma esponenziale determinare la sua forma cartesiana nei casi :

1. $z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$;
2. $z = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;
3. $z = \frac{5}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;
4. $z = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$;
5. $z = 8e^{i\frac{7\pi}{10}}$;
6. $z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$;

Soluzione
(1) Abbiamo $Re(z) = |z|\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{2}$ e $Imm(z) = |z|\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{2}$, da cui $z = 0 + 5i$.

Esercizio 3. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana:

1. $(4+i)+(3-3i)$;
2. $5(2-i)+i(3-2i)$;
3. $(4+2i)(5-3i)$;
4. $(2+3i)(1+i)+(4-3i)$;
5. $\frac{5+i}{3+2i}$;
6. $\frac{3+3i}{i}$;
7. $\frac{i}{2-i}$;
8. $\frac{4+2i}{1-i}$;

Soluzione
(1) Abbiamo

$$z+w=(Re(z)+Re(w))+i(Imm(z)+Imm(w))=7-2i$$

(5) Abbiamo $\frac{5+i}{3+2i}$, la formula per la divisione di due numeri complessi é data da $\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}$ da cui

$$\frac{5+i}{3+2i}=\frac{(5+i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)}=\frac{17-7i}{13}=\frac{17}{13}-\frac{7}{13}i$$

,

Esercizio 4. Dati i numeri complessi $z,w\in\mathbb{C}$ calcolare $z+w, z\times w, \frac{z}{w}$

1. $w=3+2i, z=5-4i$;
2. $w=4i, z=-3+2i$.
3. $w=5, z=-7+2i$.
4. $w=6-3i, z=-1+7i$.

Esercizio 5. Per ogni numero complesso $z\in\mathbb{C}$ determinare $Re(z)$, $Imm(z)$, $\overline{z}$, $z\overline{z}$,$|z|$.

1. $z=5+2i$;
2. $z=3i$;
3. $(4+2i)(5-3i)$;
4. $(2+3i)(1+i)+(4-3i)$;

Soluzione
(1) Abbiamo $Re(z)=5$, $Imm(z)=2$, $\overline{z}=5-2i$, $z\overline{z}=|z|^2=29$, $|z|=\sqrt{29}$

Esercizio 6. Calcolare

1. $(-1-i)^2$;
2. $(-1+i)^3$;
3. $(2+2i)^6$;
4. $(\sqrt{3}+i)^8$;
5. $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$;

textbfSoluzione
(1) Abbiamo $z=-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, quindi $z^2=(\sqrt{2})^2e^{i\frac{2\pi}{4}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2 Spazi Vettoriali

Esercizio 7. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti.

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$;

8. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\4\\2\\5\end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$;

2

Soluzione

(1) Si tratta di 2 vettori di $\mathbb{R}^2$, saranno linearmente indipendenti se la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ che ha i vettori come colonne ha rango per colonne massimo, in questo caso $|A| = 1 \neq 0$ e $rg(A) = 2$, quindi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 8. Trovare un sottoinsieme massimo di vettori linearmente indipendenti nei casi $1-10$ dell'Esercizio (7).

Soluzione

(7) Si tratta di 3 vettori di $\mathbb{R}^3$, la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 1\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ che ha i vettori come colonne non ha rango massimo, infatti due volte la prima colonna piú la seconda ci da la terza quindi $|A| = 0$, abbiamo $rg(A) = 2$, ad esempio le prime due colonne sono linearmente indipendenti in quanto contengono un minore 2×2 con determinante diverso da 0.

Esercizio 9. Determinare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti:

1. $\begin{pmatrix}1\\t\\1\\t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}t\\1\\t\\1\end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}t\\-1\\2t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3t\\1\end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix}-1\\t\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\-2\\t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix}0\\t\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$;

Soluzione

(1) Si tratta di 2 vettori di $\mathbb{R}^4$, che saranno linearmente indipendenti se la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1\\ 1 & t\\ t & 1\end{pmatrix}$ che ha i vettori come colonne ha rango per colonne massimo, orlando dal minore $a_{1,1} = 1$ dobbiamo controllare solo i determinanti dei 3 minori 2×2

$$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix} = 1 - t^2, \begin{vmatrix}1 & t\\ 1 & t\end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix} = 1 - t^2$$

da cui se $t \neq \pm 1$ il primo e il terzo avranno determinate diverso da 0 cioé la matrice ha rango per colonne 2 e i vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 10. Stabilire se l'insieme di vettori $\mathcal{B}$ costituisce una base per lo spazio vettoriale V nei casi

1. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} =$ e $\mathcal{B} = ((7))$

2. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right)$

3. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\right)$

4. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right)$

5. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} =$ e $\mathcal{B} = ((1), (2))$

6. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$

7. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

8. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

9. $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 =$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Soluzione
(2) Si tratta di due vettori di $\mathbb{R}^2$, dobbiamo controllare

- $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ sono linearmente indipendenti;
- $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2$;

saranno linearmente indipendenti se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ che ha i vettori come colonne ha rango per colonne massimo, in questo caso $|A| = 2 \neq 0$ e $rg(A) = 2$, quindi sono linearmente indipendenti e la dimensione dello spazio generato dai due vettori é 2 come il rango, la stessa dimensione di $\mathbb{R}^2$, da cui i vettori generano tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi costituiscono una base per $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 11. Completare, se necessario, a una base i sottoinsiemi di vettori dell'Esercizio (8).

Soluzione
(2) Si tratta di 2 vettori di $\mathbb{R}^2$ saranno linearmente indipendenti se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ che ha i vettori come colonne ha rango per colonne massimo, in questo caso $|A| = 0$ e $rg(A) = 1$, i.e. sono linearmente dipendenti e la dimensione dello spazio generato dai due vettori é 1 come il rango, la dimensione di $\mathbb{R}^2$ é 2 da cui ad esempio fissando il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e completando con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinate diverso da zero da cui quindi $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ é una base per $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale. Stabilire se W è un sottospazio vettoriale nei seguenti casi:

1. $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x],\, p(1) = 0\}$;
2. $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x],\, p(0) = 1\}$;
3. $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,,\, det\ A \neq 0\}$;
4. $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,,\ \ traccia\ A = 0\}$;
5. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = -x_2\}$;
6. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2^2\}$;

Soluzione
(2) bisogna provare che sia verificata la definizione di sottospazio vettoriale, i.e.

- $W \ni 0_V$;
- $\forall v, w \in W$ allora $v + w \in W$;

In questo caso il vettore nullo di V é il polinomio nullo di grado 3, i.e. $p_0(x) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$, ora un generico elemento $p(x) \in W$ se e soltanto se $p(0) = 1$ ma $p_0(0) = 0$ quindi il vettore nullo di V non appertiene a W, segue che W non é un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 13. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi per lo spazio vettoriale V, e $[v]_{\mathcal{B}}$ vettore coordinate rispetto alla prima base. Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ e il vettore coordinate $[v]_{\mathcal{B}'}$ nei seguenti casi

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\}$,$\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$,$\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,$\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $V = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$,$\mathcal{B}' = \{(e_1, e_2, e_3\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $V = \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$,$\mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
6. $V = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathcal{B} = \{(2, -3 + x, x^2 - 5x + 7\}$,$\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = x^2 - 4x + 4$
7. $V = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathcal{B} = \{(21, x, x^2\}$,$\mathcal{B}' = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ e $[v]_{\mathcal{B}} = 8x^2 + 5x + 3$

Soluzione
(1) Abbiamo che i vettori coordinate sono legati dalla formula

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}},$$

dove $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ é la matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$ scritti rispetto alla base $\mathcal{B}'$, quindi

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{1,1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{2,1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = a_{1,2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{2,2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

risolvendo i due sistemi lineari associati

$$\begin{cases} 3a_{1,1} - a_{2,1} = 2 \\ -a_{1,1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 3a_{1,2} - a_{2,2} = -1 \\ -a_{1,2} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

otteniamo la matrice
$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$
da cui $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 14. In $\mathbb{R}^n$ estrarre una base ortonormale con il metodo di *Gram-Schmidt* da $\mathcal{B}$ nei seguenti casi seguenti

1. $\mathcal{B} = \{(0,1)^t, (-1,0)^t\}$
2. $\mathcal{B} = \{(0,1)^t, (-1,3)^t\}$
3. $\mathcal{B} = \{(1,1)^t, (1,2)^t\}$
4. $\mathcal{B} = \{(1,2,0)^t, (8,1,-6)^t, (0,0,1)^t\}$
5. $\mathcal{B} = \{(2,0,1)^t, (3,-1,5)^t, (0,4,2)^t\}$
6. $\mathcal{B} = \{(1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (1,0,1)^t\}$
7. $\mathcal{B} = \{(2,2,2)^t, (1,0,-1)^t, (0,3,1)^t\}$
8. $\mathcal{B} = \{(1,-1,0)^t, (0,1,0)^t, (2,3,1)^t\}$

Soluzione
(3) Applichiamo Gram-Schmidt e calcoliamo la base ortonormale $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$. Fissiamo come primo vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da cui normalizzando $\hat{v}_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, per il secondo vettore dobbiamo sottrarre la proiezione di $\hat{v}_1$ su v_2; calcoliamo $v_2' = v_2 - < v_2, \hat{v}_1 > \hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ che normalizzando ci da $\hat{v}_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Esercizio 15. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. $W = \mathcal{L}((1,2)^t, (2,4)^t) \subseteq \mathbb{R}^2$
2. $W = \mathcal{L}((1,2)^t, (2,1)^t) \subseteq \mathbb{R}^2$
3. $W = \mathcal{L}((1,2,1)^t, (2,1,2)^t, (1,1,1)^t) \subseteq \mathbb{R}^3$
4. $W = \mathcal{L}((1,0,1)^t, (1,1,1)^t, (1,2,1)^t) \subseteq \mathbb{R}^3$
5. $W = \mathcal{L}((1,0,0)^t, (0,0,1)^t, (2,0,2)^t) \subseteq \mathbb{R}^3$
6. $W = \mathcal{L}((3,0,3)^t, (2,2,2)^t, (0,0,3)^t) \subseteq \mathbb{R}^3$
7. $W = \mathcal{L}((1,0,1,0)^t, (0,1,0,1)^t, (1,0,0,1)^t) \subseteq \mathbb{R}^4$
8. $W = \mathcal{L}((1,1,1,1)^t, (2,2,2,2)^t, (0,0,0,0)^t) \subseteq \mathbb{R}^4$
9. $W = \mathcal{L}((1,2,1,2)^t, (2,1,2,1)^t, (1,1,1,1)^t) \subseteq \mathbb{R}^4$
10. $W = \mathcal{L}((1,1,1,1)^t, (2,2,2,2)^t, (0,0,0,0)^t) \subseteq \mathbb{R}^4$

11. $W = \mathcal{L}((1, x, 2+3x) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$
12. $W = \mathcal{L}((1, x^2, 1-x+x^2) \subseteq \mathbb{R}_3[x]$
13. $W = \mathcal{L}((1+x, 1-x) \subseteq \mathbb{R}_1[x]$

Soluzione
$(1-2)$ dobbiamo calcolare il rango della matrice che ha per colonne i vettori che generano. Quindi

$$rg\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} = 1 = \ dim\ W_1;$$

$$rg\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 2 = \ dim\ W_2.$$

Esercizio 16. Siano W_1 W_2 due sottospazi vettoriali tra quelli delle Esercizio (15), calcolare $W_1 \cap W_2$ e la dimensione dello spazio somma $W_1 + W_2$ nei casi:

1. W_1 del 1. W_2 del 2.;
2. W_1 del 3. W_2 del 4.;
3. W_1 del 5. W_2 del 6.;
4. W_1 del 7. W_2 del 8.;
5. W_1 del 9. W_2 del 10.;
6. W_1 del 11. W_2 del 12.;

Soluzione
$(1-2)$ Un vettore $v = (x, y)$ apparterrá all'intersezione se appartiene a W_1 e puó essere scritto rispetto a i vettori di una sua base

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

e appartiene a W_2 e puó essere scritto rispetto a i vettori di una sua base

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

cioé risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_3\\ 2x_1 = 2x_2 + x_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\end{cases}$$

che ammette n^o variabili- $rgA = 3 - 2 = 1$ variabili libere, ponendo $x_1 = t$ una soluzione é data da $(t, t, 0)$ per $t \in \mathbb{R}$. Da cui ad esempio per $t = 1$, $v = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, i.e. $W_1 \cap W_2 = \mathcal{L}(\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix})$ e $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ costituisce una base, quindi $\ dim\ W_1 \cap W_2 = 1$. Dalla formula di Grassmann abbiamo

$$dim\ W_1 + W_2 = \ dim\ W_1 + \ dim\ W_2 - \ dim\ W_1 \cap W_2. \tag{6}$$

dall' esercizio precedente sappiamo le dimensioni rispettivamente di W_1 e W_2, da cui

$$dim\ W_1 + W_2 = 2 + 1 - 1 = 2.$$

3 Applicazioni Lineari

Esercizio 17. Siano $V = \mathbb{R}^n$ e $W \subseteq \mathbb{R}^m$ spazi vettoriali e $L_A : V \to W$ un applicazione lineare: calcolare:

- $Ker L_A$, una sua base e $\dim Ker L_A$
- $Imm L_A$, una sua base e $\dim Imm L_A$
- stabilere se L_a e iniettiva, suriettiva, o un isomorfismo.

1. $V = \mathbb{R}^1$ e $W \subseteq \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $W \subseteq \mathbb{R}^1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
4. $V = \mathbb{R}^2$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
6. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^4$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^4$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
10. $V = \mathbb{R}^4$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $V = \mathbb{R}^4$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione
(5) $V = \mathbb{R}^3$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$ spazi vettoriali e $L_A : V \to W$ l'applicazione lineare data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $KerL_A$ é dato dai vettoeri $v = (x, y, z)^t$ tali che $Av = 0$, quindi studiamo le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

  che ammette un unica soluzione quella banale poiché la matrice dei coefficienti ha rango massimo quindi $KerL_A = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\dim KerL_A = 0$.

- L'immagine di L_A é generata dalle colone di A ed il numero massimo di colonne indipendenti costituisce una base, quindi $\mathcal{B}_{ImmL_A}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ e $dim\ ImmL_A = 3$, i.e. il rango di A, che eguaglia la dimensione di W, quindi é suriettiva.

- Essendo l'applicazione lineare sia suriettiva che iniettiva é un isomorfismo. Osserviamo che dal momento che $dim\ V = dim\ W$ bastava controllare soltanto una tra le due, iniettivitá o suriettivitá.

Esercizio 18. Siano V e W spazi vettoriali e $L_A : V \to W$ un applicazione lineare, calcolare:

- $KerL_A$, una sua base e $\dim KerL_A$
- $ImmL_A$, una sua base e $ImmL_A$
- stabilire se L_a e iniettiva, suriettiva, o un isomorfismo.

nei seguenti casi

1. $V = \mathcal{L}((1, 0)^t, (0, 1)^t)$, $W = \mathcal{L}((1, 1)^t, (1, -1)^t)$, $L_A(x, y) = (x + y, x - y)$
2. $V = \mathcal{L}((1, 1)^t, (1, -1)^t)$, $W = \mathcal{L}((1, 0)^t, (0, 1)^t)$, $L_A(x, y) = (x + y, x - y)$
3. $V = \mathcal{L}((2, 1)^t, (-1, 0)^t)$, $W = \mathcal{L}((1, 1)^t, (2, 1)^t)$, $L_A(x, y) = (x, -2y)$
4. $V = \mathcal{L}((1, 1)^t, (2, 1)^t)$, $W = \mathcal{L}((2, 1)^t, (-1, 0)^t)$, $L_A(x, y) = (x, -2y)$
5. $V = \mathcal{L}(1, x)$, $W = \mathcal{L}((0, 1)^t, (1, 0)^t)$, $L_A(a + bx) = (b, a)$
6. $V = \mathcal{L}((0, 1)^t, (1, 0)^t)$, $W = \mathcal{L}(1, x)$, $L_A(a, b) = (a + bx)$
7. $V = \mathcal{L}((1, 1)^t, (1, -1)^t)$, $W = \mathcal{L}(1 + x, 1 - x)$, $L_A(a, b) = (a + b + (a - b)x)$
8. $V = \mathcal{L}((1, 1, 3)^t, (2, 1, -1)^t)$, $W = \mathcal{L}(1, 1, 1)^t, (1, 0, -1)^t, (0, 1, 0)^t$, $L_A(x, y, z) = (x, y - x, z - y)$

Soluzione
(5) $\mathcal{B} = (1, x)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per $\mathcal{L}(1, x) = \mathbb{R}_1[x]$, similmente $\mathcal{B}' = ((1,0)^t, (0,1)^t)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per $W = \mathcal{L}((1,0)^t, (0,1)^t) = \mathbb{R}^2$. Adesso

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(L_A)([L_A(1)]_{\mathcal{B}'}[L_A(x)]_{\mathcal{B}'}) = (L_A)([\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}'}[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}'}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata A e la matrice identità che sappiamo essere un isomorfismo per definizione, in particolare

- $KerL_A = 0_{\mathbb{R}_1[x]}$, e $\dim KerL_A = 0$.
- $ImmL_A = W$, una sua base e data da tutto $\mathcal{B}'$.

Esercizio 19. Siano $V = \mathbb{R}^n$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ spazi vettoriali e $L_A : V \to W$ un applicazione lineare dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di t L_A é un isomorfismo.

1. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix}t+1 & 1 & 1\\1 & t+1 & 1\\1 & 1 & t+1\end{pmatrix}$
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $W \subseteq \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix}1 & t\\1 & 1\end{pmatrix}$
3. $V = \mathbb{R}^2$ e $W \subseteq \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix}t & 1\\1 & t\end{pmatrix}$
4. $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subseteq \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix}t-1 & 1 & 1\\0 & t & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Soluzione
(1) Abbiamo che la dimensione di V coincide con la dimensione di W, quindi L_A é iniettiva se e soltanto se suriettiva. Controlliamo l'iniettivitá, dobbiamo studiare il sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} tx + y + z = 0\\ x + ty + z = 0\\ x + y + tz = 0 \end{cases},$$

abbiamo bisogno che l'unica soluzione sia quella banale. Quindi il rango della matrice dei coefficienti deve essere 3, e cioé il suo determinante deve essere diverso da zero.
Ora $\begin{vmatrix}t+1 & 1 & 1\\1 & t+1 & 1\\1 & 1 & t+1\end{vmatrix} = t^3 + t^2 = t^2(t+3)$. Quindo per $t \neq 0, -3$ il sistema lineare ammette soltanto la soluzione banale e L_A é iniettiva.

4 Diagonalizzazione di operatori e matrici

Esercizio 20. Data la matrice A calcolare gli autolavori nei casi

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
13. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
18. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3

Soluzione
(9) Per trovare gli autovalori della matrice troviamo gli zeri del polinomio caratteristico.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6 = \lambda(-\lambda^2 - \lambda + 6) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 2$.

Esercizio 21. Date le matrici A dell'esercizio (20) calcolare gli autovettori nei casi $1 - 18$.

Soluzione
(9) Per trovare gli autovettori dobbiamo calcolare lo spazio delle soluzioni dei rispettivi sistemi omogenei per $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 2$, i.e.

$$Ker(A - \lambda_i Id).$$

- Per $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 0 & 0 \\ -1 & 3-0 & 3 \\ 6 & -6 & -6-0 \end{pmatrix}$$

il sistema lineare associato é

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y - 6z = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzione dipendente da una variabile libera $(0, t, -t)$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi ad esempio $v_{\lambda_1} = (0, 1, -1)^t$

- Per $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 0 & 0 \\ -1 & 3+3 & 3 \\ 6 & -6 & -6+3 \end{pmatrix}$$

il sistema lineare associato é

$$\begin{cases} 5x = 0 \\ -x + 6y + 3z = 0 \\ 6x - 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzione dipendente da una variabile libera $(0, t, -2t)$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi ad esempio $v_{\lambda_2} = (0, 1, -2)^t$

- Per $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 3-2 & 3 \\ 6 & -6 & -6-2 \end{pmatrix}$$

il sistema lineare associato é

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ 6x - 6y - 8z = 0 \end{cases}$$

che ammette soluzione dipendente da una variabile libera $(t, t, 0)$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi ad esempio $v_{\lambda_2} = (1, 1, 0)^t$.

Esercizio 22. Date le matrici A dell'esercizio (20) dire quando sono diagonalizzabili nei casi $1 - 18$, in caso affermativo trovare una base rispetto a cui é diagonalizzabile

Soluzione

(9) Bisogna calcolare la molteplicitá algebrica e quella geometrica, e verificare se coincido per ogni autovalore. Ora tutti e tre gli autovalori compaiono con esponente uno nella scomposizione in polinomi irriducibili del polinomio caratteristico quindi

$$m_a(0) = m_a(-3) = m_a(2) = 1.$$

Quella geometrica coincide con la dimensione dei rispettivi autospazi, cioé

$$m_g(0) = m_g(-3) = m_g(2) = 1$$

quindi le molteplicitá algebriche e geometriche coincidono per ogni autovalore e la matrice é diagonalizabile, rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ammette la forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Esercizi teorici sulle sezioni precedenti

Esercizio 23. Giustificando la risposta stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. Siano z, w due numeri complessi allora $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. Siano z, w due numeri complessi allora $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. Fissato $z = a+ib \in \mathbb{C}$ esiste sempre un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ tale che si ha $z \cdot w = w \cdot z \in \mathbb{R}$
4. Siano V e W due sotto spazi vettoriali. Allora $V \cup W$ é un sottospazio vettoriale.
5. Siano V e W due sotto spazi vettoriali. Allora $V \cap W$ é un sottospazio vettoriale.
6. Un piano in $\mathbb{R}^3$ é sempre un sottospazio vettoriale
7. Siano V e W due sotto spazi vettoriali. Allora $\ dimV + W > \ dim\ V \quad dimV + W > \ dim\ W$
8. Sia W sotto spazio vettoriale di V allora $\ dimV + W = \ dim\ V$
9. Se $\ dimV + W = \ dim\ V$ allora W é sotto spazio vettoriale di V
10. Sia W sotto spazio vettoriale di V allora $\ dimV \cap W = \ dim\ W$
11. L'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ individuata da $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é una rotazione
12. L'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ individuata da $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é una rotazione
13. Sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un applicazione lineare allora $\mathbb{R}^n = KerL_A + ImmL_A$
14. Il nucleo di un applicazione lineare non può essere vuoto
15. Esistono due applicazioni lineari T e S su uno spazio vettoriale V tali che $\ KerT = \ KerS$ ma $T \neq S$
16. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare, allora L é iniettiva se il rango della matrice associata é n
17. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare, se $n > m$ non è mai iniettiva
18. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un applicazione lineare, se $n < m$ non è mai suriettiva
19. Per ogni $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ applicazione lineare, 0 non é mai autovalore
20. Autovettori distinti hanno sempre autovalori distinti
21. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora ha n autovalori distinti.
22. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora ha al piú n autovalori distinti.