Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Metody Numeryczne

Laboratorium 12: Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów: trapezów i $\frac{3}{8}$

Andrzej Świętek

21.05.2024

Contents

1. Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne jest jedną z fundamentalnych technik obliczeniowych w analizie matematycznej i inżynierii. Umożliwia ono aproksymację wartości całek, które nie mogą być wyrażone w sposób analityczny. W praktyce, wiele problemów wymaga całkowania funkcji, których pierwotna postać nie jest znana lub jest zbyt skomplikowana do analitycznego rozwiązania. Dlatego stosuje się metody numeryczne, które pozwalają na obliczenie wartości całki z zadaną dokładnością. W niniejszym sprawozdaniu skupimy się na dwóch popularnych metodach całkowania numerycznego: metodzie trapezów oraz metodzie $\frac{3}{8}$.

2. Całkowanie numeryczne metodą Newtona-Cotesa

Metody Newtona-Cotesa to klasyczny zestaw technik stosowanych do całkowania numerycznego. Polegają one na aproksymacji całki przez sumę wartości funkcji w wybranych punktach, przemnożonych przez odpowiednie współczynniki. Techniki te dzielą przedział całkowania na mniejsze podprzedziały i przybliżają całkę poprzez sumowanie pól figur geometrycznych, takich jak trapezy lub paraboliczne segmenty, zależnie od wybranej metody.

2.1. Całkowanie metodą Trapezów

Metoda trapezów jest jedną z najprostszych i najczęściej stosowanych metod całkowania numerycznego. Polega ona na przybliżeniu obszaru pod wykresem funkcji za pomocą sumy pól trapezów.

Załóżmy, że chcemy obliczyć całkę z funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$. Dzielimy ten przedział na N równych części, z których każda ma długość $h = \frac{b-a}{N}$. Punkty podziału oznaczamy jako $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$, gdzie $x_i = a + i \cdot h$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Wartości funkcji w tych punktach to odpowiednio $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)$.

Całkę można przybliżyć sumą pól trapezów, które tworzą się między kolejnymi punktami x_i i x_{i+1}. Pole pojedynczego trapezu, którego podstawy mają długości $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$, a wysokość h, wynosi:

$$\text{Pole trapezu} = \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

Suma pól wszystkich trapezów daje przybliżenie całki:

$$S \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

Wzór ten można uprościć do postaci:

$$S \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N)\right)$$

Metoda trapezów ma dokładność rzędu $O(h^2)$, co oznacza, że błąd przybliżenia zmniejsza się kwadratowo wraz ze zmniejszaniem się kroku h.

2.1.1. Algorytm metody trapezów

Algorytm metody trapezów można zapisać w następujących krokach:

1. Podziel przedział $[a, b]$ na N równych części, wyznaczając punkty x_i.
2. Oblicz wartości funkcji $f(x_i)$ w tych punktach.
3. Zastosuj wzór na sumę pól trapezów do przybliżenia całki.

2.2. Całkowanie metodą $\frac{3}{8}$

Metoda $\frac{3}{8}$ jest bardziej zaawansowaną metodą całkowania, również należącą do rodziny metod Newtona-Cotesa. Dzieli ona przedział całkowania na podprzedziały, z których każdy składa się z trzech segmentów. Przybliżenie wartości całki wyraża się wzorem:

$$S = \sum_{i=0}^{(N/3)-1} \frac{3h}{8}(f_{3i} + 3 \cdot f_{3i+1} + 3 \cdot f_{3i+2} + f_{3i+3})$$

gdzie $h = \frac{b-a}{3N}$

2.3. Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona jest techniką używaną do poprawy dokładności przybliżeń numerycznych. Metoda ta wykorzystuje wyniki uzyskane dla różnych kroków całkowania h do oszacowania wartości całki przy zerowym kroku, co zwiększa dokładność wyniku. W metodach całkowania numerycznego, takich jak trapezów i $\frac{3}{8}$, ekstrapolacja Richardsona może być wykorzystana w następujący sposób:

Generalnie jest to proces rekurencyjnego wyznaczania pewnej wielkości (pochodnej, całki), co można zdefiniować przy pomocy wzoru

$$D_{n,k-1} = L + \sum_{j=k}^{\infty} A_{jk} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j}$$

1. Obliczamy wartości całki dla kolejnych coraz mniejszych kroków h tworząc pierwszą kolumnę macierzy D.
2. Następnie, dla każdej kolejnej kolumny, wartości są wyznaczane za pomocą wzoru:
$$D_{n,k} = \frac{4^k \cdot D_{n,k-1} - D_{n-1,k-1}}{4^k - 1}$$
Uzyskane w ten sposób wartości tworzą macierz ekstrapolacyjną, której elementy diagonalne są przybliżeniami o coraz wyższej dokładności.

Kolejne kroki algorytmu można zapisać w postaci tablicy

$$D = \begin{matrix} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{M,0} & D_{M,1} & D_{M,2} & \cdots & D_{M,M} \end{matrix}$$

Czyli wyznaczamy kolejno: 1 kolumnę, 2 kolumnę, $\cdots$., M-tą kolumnę (liczbę) $D_{M,M}$ - to najlepsze (teoretycznie) przybliżenie wartości pochodnej (lub całki)

3. Problem

Dana jest funkcja:

$$f(x) = ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1) \cdot sin(18x)$$

Należy obliczyć wartość całki:

$$I = \int_0^1 f(x) \qquad (= -0.186486896)$$

Zadanie należy wykonać dwoma metodami:

- trapezów
$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$
- 3/8
$$S = \sum_{i=0}^{(N/3)-1} \frac{3h}{8}(f_{3i} + 3 \cdot f_{3i+1} + 3 \cdot f_{3i+2} + f_{3i+3})$$

Dla każdej z powyższych metod należy napisać funkcję, która będzie wyznaczać wartość całki na podstawie przekazywanych jej: stablicowanych wartości funkcji (tablica jednowymiarowa), wartości h i wartości N. Zaprogramować metodę ekstrapolacji Richardsona.

4. Implementacja

```
// Function to calculate the Trapezoidal rule integral
double trapezoidalIntegral(const vector<double>& f, double h, int n) {
    double sum =0.0;
        for( int i = 0; i <= n+1; i++ ) {
        sum += 0.5*h *( f[i]  + f[i+1]);
    }
    return sum;
}
```

Listing 1: Funcje wykonujące całkowanie metodą trapezów

```
double simpsonIntegral(const vector<double>& f, double h, int n) {
    if (n % 3 != 0) {
        throw invalid_argument("n must be a multiple of 3 for Simpson's 3/8 rule.");
    }
    double sum = f[0] + f[n];
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        if (i % 3 == 0) {
            sum += 2 * f[i];
        } else {
            sum += 3 * f[i];
        }
    }
    return (3 * h / 8) * sum;
}
```

Listing 2: Funcje wykonujące całkowanie metodą simpsona

```
vector<vector<double>> richardsonExtrapolation(const function<double(double)>& f, double a, double b, int maxN, bool useSimpson) {
    vector<vector<double>> integrals(maxN + 1, vector<double>(maxN + 1));

    for (int n = 0; n <= maxN; n++) {
        int N = useSimpson ? 3 * pow(2, n) : pow(2, n);
        double h = (b - a) / N;
        vector<double> f_values(N + 1);

        for (int i = 0; i <= N; ++i) {
            double x = a + i * h;
            f_values[i] = f(x);
        }

        if (useSimpson) {
            integrals[n][0] = simpsonIntegral(f_values, h, N);
        } else {
            integrals[n][0] = trapezoidalIntegral(f_values, h, N);
        }

        for (int k = 1; k <= n; k++) {
            integrals[n][k] = (pow(4, k) * integrals[n][k - 1] - integrals[n - 1][k - 1]) / (pow(4, k) - 1);
        }
    }

    return integrals;
}
```

Listing 3: Ekstrapolacja Richardsona z użyciem całkowania metodą trapezów i Simpsona

```
 double a = 0;
    double b = 1;
    int maxN = 8;

    // Define the function f(x)
    function<double(double)> func = [](double x) {
        return log(x * x * x + 3 * x * x + x + 0.1) * sin(18 * x);
    };
```

Listing 4: Inicjalizacja

```
// Calculate integrals using Richardson Extrapolation
auto integralsTrapezoidal = richardsonExtrapolation(func, a, b, maxN,
false);
auto integralsSimpson = richardsonExtrapolation(func, a, b, maxN, true
);

// Save results to files
saveResults(integralsTrapezoidal, "data/integrals_trapezoidal.txt");
saveResults(integralsSimpson, "data/integrals_simpson.txt");
```

Listing 5: Wykonanie ekstrapolacji

5. Wyniki

Table 1: Wyniki całkowania

N	Trapezoidal Rule
0	-1.22354
1	-0.301064
2	0.346923
3	-0.320942
4	-0.207555
5	-0.198149
6	-0.19231
7	-0.189398
8	-0.187943

Table 2: Wyniki całkowania

N	Simpson's 3/8 Rule
0	-0.305892
1	0.0961922
2	-0.290929
3	-0.175069
4	-0.18677
5	-0.186485
6	-0.186487
7	-0.186487
8	-0.186487

5.1. Wyniki ekstrapolacji Richardson'a do liczenia całki oznaczonej metodą trapezów

−1.22354								
−0.531683	−0.301064							
0.096897	0.306424	0.346923						
−0.179737	−0.271949	−0.310507	−0.320942					
−0.205057	−0.213497	−0.2096	−0.207998	−0.207555				
−0.200754	−0.19932	−0.198375	−0.198197	−0.198158	−0.198149			
−0.194837	−0.192865	−0.192435	−0.19234	−0.192317	−0.192312	−0.19231		
−0.190964	−0.189674	−0.189461	−0.189414	−0.189402	−0.189399	−0.189399	−0.189398	
−0.188801	−0.18808	−0.187974	−0.18795	−0.187944	−0.187943	−0.187943	−0.187943	−0.187943

5.2. Wyniki ekstrapolacji Richardson'a do liczenia całki oznaczonej metodą $\frac{3}{8}$

−0.305892								
−0.00432877	0.0961922							
−0.201133	−0.266734	−0.290929						
−0.187155	−0.182495	−0.176879	−0.175069					
−0.186526	−0.186316	−0.186571	−0.186725	−0.18677				
−0.186489	−0.186477	−0.186488	−0.186487	−0.186486	−0.186485			
−0.186487	−0.186486	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487		
−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	
−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487	−0.186487

6. Wnioski

Wyniki przedstawione w tabelach oraz wyniki ekstrapolacji Richardsona pozwalają na kilka wniosków dotyczących obu metod całkowania oraz ich złożoności obliczeniowej:

1. **Metoda Trapezów**:
   - Jak widać z wyników, metoda trapezów daje stopniowo lepsze przybliżenia wartości całki wraz ze wzrostem liczby podziałów przedziału N.
   - Złożoność obliczeniowa tej metody jest rzędu $O(N)$, co oznacza, że czas obliczeń rośnie liniowo wraz z zwiększeniem liczby podziałów N.
   - Metoda ta ma dokładność rzędu $O(h^2)$, co oznacza, że zmniejszenie kroku h o połowę powoduje zmniejszenie błędu całkowania czterokrotnie.
2. **Metoda $\frac{3}{8}$**:
   - Wyniki dla metody $\frac{3}{8}$ są zbliżone do tych uzyskanych metodą trapezów, jednak wydaje się, że ta metoda daje nieco lepsze przybliżenia dla tego konkretnego przypadku.
   - Złożoność obliczeniowa metody $\frac{3}{8}$ jest również rzędu $O(N)$, ale wydaje się, że może działać nieco szybciej niż metoda trapezów dla tych samych wartości N, co może być związane z różnicą w liczbie operacji arytmetycznych między tymi dwiema metodami.
3. **Ekstrapolacja Richardsona**:
   - Wyniki ekstrapolacji Richardsona dla obu metod są zbliżone do wartości rzeczywistej całki, co pokazuje skuteczność tej techniki w poprawianiu dokładności przybliżeń numerycznych.
   - Jednakże, liczba potrzebnych kroków obliczeniowych rośnie wraz z zwiększaniem się stopnia ekstrapolacji, co może prowadzić do wzrostu czasu obliczeń.
   - Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona może być szczególnie korzystne, gdy wymagana jest bardzo wysoka dokładność, ale może być mniej efektywne dla prostych przybliżeń o mniejszej dokładności.

Podsumowując, obie metody całkowania numerycznego oraz ekstrapolacja Richardsona są skutecznymi narzędziami do obliczania wartości całek, ale wybór odpowiedniej metody zależy od wymagań dotyczących dokładności, złożoności obliczeniowej i dostępnych zasobów obliczeniowych.