Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Metody Numeryczne

Laboratorium 07: Interpolacja

Andrzej Świętek

16.04.2024

Contents

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Interpolacja

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach nie będących węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości.

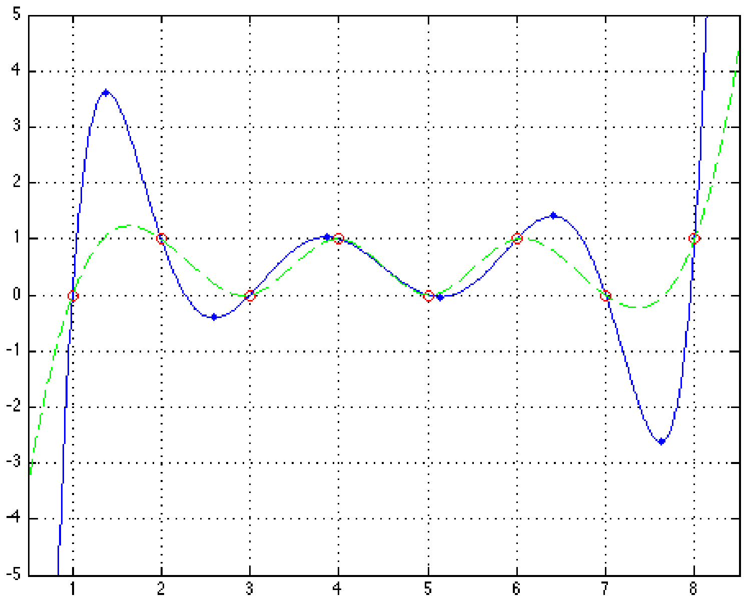

Figure 1: Przykładowa interpolacja (wynik nie zadawalający a poglądowy)

Problem interpolacji sprowadza się do znalezienia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja $y = f(x)$ czyli funkcja interpolowana (której postać funkcyjna może nie być nawet znana)

Interpolacja jest przydatna w wielu dziedzinach, takich jak nauki ścisłe, inżynieria, grafika komputerowa, analiza danych i wiele innych. Jest szeroko stosowana w sytuacjach, gdy mamy dyskretne punkty danych, ale chcemy poznać wartości funkcji dla innych punktów, które nie są bezpośrednio dostępne.

Istnieje wiele metod interpolacji, z których każda ma swoje własne zalety i ograniczenia. Najprostszą metodą jest liniowa interpolacja, która zakłada, że między dwoma sąsiadującymi punktami danej funkcji istnieje liniowy wzrost lub spadek. Jednak istnieją również bardziej zaawansowane metody, takie jak interpolacja wielomianowa (np. interpolacja Newtona, interpolacja Lagrange'a) oraz metody oparte na krzywych sklejanych, które pozwalają na dokładniejsze przybliżenie funkcji.

Interpolacja jest kluczowym narzędziem w analizie danych i przetwarzaniu sygnałów, a także w wielu innych dziedzinach, gdzie dokładne przybliżenie wartości funkcji jest istotne dla procesu podejmowania decyzji i rozwiązywania problemów.

1.2. Interpolacja Lagrange'a

Metoda interpolacji Lagrange'a jest jedną z najpopularniejszych technik interpolacyjnych, wykorzystującą wielomiany do przybliżania funkcji. Zakłada się, że dla danego zestawu węzłów $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, gdzie x_i to argumenty funkcji oryginalnej, a y_i to odpowiadające im wartości, istnieje jeden i tylko jeden wielomian $W_n(x)$ stopnia $n - 1$ (gdzie n to liczba węzłów), który przechodzi przez wszystkie te punkty.

Wielomian Lagrnge: $$W_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i \prod_{k=1}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right]$$

Gdzie:

- suma od i = 1 do n oznacza iterację przez wszystkie n - węzłów (i oczywyiście sumowanie)
- y_i wartość funckji oryginalnej w punkcie węzłowym o indexie i
- x_i argument funckji oryginalnej w f unkcie węzłowym o indexie i
- Stopień wielomiany $= n - 1$ np. Mając 3 węzły $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ wielomian będzie stopnia 2.

Na przykład dla 3 węzłów $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$:

$$T = f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

Metoda ta jest użyteczna w praktyce ze względu na swoją prostotę oraz intuicyjność, ale może być nieefektywna obliczeniowo dla dużych wartości n ze względu na potrzebę wielokrotnego obliczania iloczynów Lagrange'a. Pomimo tego, nadal znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach, zwłaszcza tam, gdzie potrzebne są dokładne interpolacje przy niewielkiej liczbie węzłów.

1.3. Przykład Interpolacji Lagrange'a

Wielomian 3 stopnia.

$$(1,4), \quad (2,6), \quad (4,11), \quad (5,17)$$

1. Znalezienie wielomianu:

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 \\ & + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4 \end{aligned}$$

2. Podstawienie danych i uproszczenie wyrażenia

   Wyraz 1 (z y_1):

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)} \cdot 4 = -\frac{4}{12}\left[x^3 - 11x^2 + 38x - 40\right]$$

   Wyraz 2:

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)} \cdot 6 = -\frac{6}{6}\left[x^3 - 10x^2 + 29x - 20\right]$$

   Wyraz 3:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)} \cdot 11 = -\frac{11}{6}\left[x^3 - 8x^2 + 17x - 10\right]$$

   Wyraz 4:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)} \cdot 17 = -\frac{17}{12}\left[x^3 - 7x^2 + 14x - 8\right]$$

Zatem wracając z podstawieniem:

$$W(x) = x^3 \cdot \left[\frac{-4}{11} + 1 - \frac{6}{11} + \frac{17}{12}\right] \qquad + x^2 \cdot \left[\frac{144}{-12} - 10 - \frac{88}{-6} + \frac{(-119)}{23}\right]$$
$$+ x \cdot \left[\frac{4 \cdot 38}{-12} + \frac{29 \cdot 1}{1} + \frac{17 \cdot 11}{-6} + \frac{14 \cdot 17}{12}\right] \quad + \left[\frac{-40 \cdot 4}{-12} - 20 - \frac{10 \cdot 11}{-6} - 8(\frac{17}{12})\right]$$

$$W(x) = 0.25x^3 - 1.5833x^2 + 5x + 0.333$$

3. Sprawdzenie poprawności Wstawiając argumentty punktów węzłowych powinniśmy otrzymać dokładnie wartość y danego punktu, np.:

$$W(1) = 0.25 \cdot (1)^3 - 1.5833 \cdot (1)^2 + 5 \cdot (1) + 0.333 = 4$$

$$W(2) = 0.25 \cdot (2)^3 - 1.5833 \cdot (2)^2 + 5 \cdot (2) + 0.333 = 6$$
$$W(4) = 0.25 \cdot (4)^3 - 1.5833 \cdot (4)^2 + 5 \cdot (4) + 0.333 = 11$$
$$W(5) = 0.25 \cdot (5)^3 - 1.5833 \cdot (5)^2 + 5 \cdot (5) + 0.333 = 17$$

Dla wszystkich puntów równość jest prawdziwa w związku z tym interpolacja wykonana została poprawnie.

4. Podstawienie wartości za x do wyznaczonego wyrażenia. Wiedząc już, że funckja interpolacyjna została wyznaczona porpawnie chcąc poznać wartość pośrenią między œezłami np.: dla x =3 wystarczy wstawić do wielomianu:

$$W(3) = 0.25 \cdot (3)^3 - 1.5833 \cdot (3)^2 + 5 \cdot (3) + 0.333 = 7.833$$

1.4. Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa są szczególną klasą wielomianów, które posiadają wiele ciekawych własności matematycznych, a jedną z najważniejszych jest ich przydatność jako metoda optymalizacji.

Wielomiany Czebyszewa definiowane są jako:

$$T_k(x) = cos(k \cdot arccos(x))$$

Gdzie $k = 0, 1, 2...$

Postać wielomianów możemy określić korzystając z relacji rekurencyjnych

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = cos(arccos(x)) = x$$

$$T_2(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2$$

Zera wielomianów określa formuła

$$x_m = cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots n$$

Gdzie n - stopień wielomianu, m - numer zera wielomianu
Właściwości Wielomianów Czebyszewa:

1. Ortogonalność:
   Wielomiany Czebyszewa są wzajemnie ortogonalne na przedziale $[-1, 1]$ względem miary ważonej przez $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Jest to istotne ze względu na ich zastosowanie w numerycznych metodach optymalizacji.
2. Minimalizacja Efektu Rungego:
   W przeciwieństwie do wielomianów interpolacyjnych bazujących na równoodległych węzłach, interpolacja wielomianowa Czebyszewa pozwala uniknąć efektu Rungego, czyli nadmiernego oscylowania wielomianu przy końcach przedziału.
3. Minimalizacja Błędu Interpolacji:
   Wielomiany Czebyszewa pozwalają na minimalizację błędu interpolacji, szczególnie w przypadku interpolacji funkcji ostrych i oscylacyjnych.

Zastosowanie Wielomianów Czebyszewa w Optymalizacji

Metoda interpolacji wielomianowej Czebyszewa jest szeroko stosowana w praktyce jako efektywna technika optymalizacji. Zamiast wykorzystywać standardowe równoodległe węzły interpolacji, wielomiany Czebyszewa używają węzłów Czebyszewa, które są rozłożone w sposób optymalny na przedziale. Dzięki temu osiągają lepsze wyniki interpolacji przy mniejszej liczbie węzłów.

2. Problem

1. Celem jest interpolacja funkcji

$$y(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

   w przedziale $x \in [-3, 8]$

2. Wykonać interpolację funkcji $y(x)$ dla $n = 5, 10, 15$. Dla każdego n należy wykonać interpolację dla:
   i) węzłów rozłożonych równomiernie oraz
   ii) węzłów liczonych jako zera wielomianów Czebyszewa.

3. Dla każdego n sporządzić rysunek zawierający przebieg funkcji $y(x)$ oraz obu wielomianów interpolacyjnych (węzły równomiernie i nierównomiernie rozłożone). Wykresy mają być gładkie tj. wykonane dla dużej liczby punktów np. 100 lub 200.

4. W sprawozdaniu należy przeanalizować wpływ liczby węzłów oraz ich rozłożenia na wynik (jakość) interpolacji.

3. Implementacja

Implementacja Funkcji Interpolacji Lagrange'a
Ta część kodu zawiera implementację funkcji interpolacji Lagrange'a. Funkcja ta przyjmuje dwa wektory:
x i y, zawierające węzły interpolacji oraz odpowiadające im wartości funkcji. Dodatkowo przyjmuje punkt xi, dla którego ma zostać obliczona interpolacja. Algorytm iteruje po wszystkich węzłach i wykorzystuje wielomiany Lagrange'a do obliczenia wartości interpolowanej w punkcie xi.

```
double lagrangeInterpolation(const vector<double>& x, const vector<double>& y,
    double xi) {
    double result = 0.0;
    for (size_t i = 0; i < x.size(); ++i) {
        double term = y[i];
        for (size_t j = 0; j < x.size(); ++j) {
            if (j != i) {
                term *= (xi - x[j]) / (x[i] - x[j]);
            }
        }
        result += term;
    }
    return result;
}
```

Listing 1: Implementacja funkcji interpolacji Lagrange'a

Inicjalizacja zmiennych
W tej części kodu definiowane są parametry funkcji i tworzone są punkty na wykresie funkcji oryginalnej $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Następnie wykonywane jest równomierne rozmieszczenie węzłów interpolacji między wartościami xa i xb oraz obliczane są odpowiadające im wartości funkcji.

```cpp
    const int num_nodes[] = {5, 10, 15};
    const double xa = -3.0;
    const double xb = 8.0;

    // Funkcja y(x) = x / (1 + x^2)
    auto y_func = [](double x) { return x / (1 + x * x); };

    // Wykresy
    const int num_points = 200;
    vector<double> x_values(num_points), y_values(num_points);

    double dx = (xb - xa) / (num_points - 1);
    for (int i = 0; i < num_points; ++i) {
        x_values[i] = xa + i * dx;
        y_values[i] = y_func(x_values[i]);
    }
```

Listing 2: Inicjalizacja

Interpolacja dla Różnej Liczby Węzłów

W tej części kodu wykonuje się pętla po różnych wartościach liczby węzłów interpolacji. Dla każdej liczby węzłów wykonywane jest równomierne rozmieszczenie węzłów, obliczana jest interpolacja Lagrange'a dla tych węzłów, a następnie wyniki interpolacji zapisywane są do pliku.

```cpp
    for (int n : num_nodes) {
        // W z y r wnomiernie roz o one
        vector<double> x_uniform(n + 1), y_uniform(n + 1);
        for (int i = 0; i <= n; ++i) {
            x_uniform[i] = xa + i * (xb - xa) / n;
            y_uniform[i] = y_func(x_uniform[i]);
        }
        saveNodesToFile(x_uniform, y_uniform, n);

        // Interpolacja Lagrange'a
        vector<double> interpolated_values(num_points);
        for (int i = 0; i < num_points; ++i) {
            interpolated_values[i] =
                lagrangeInterpolation(x_uniform, y_uniform, x_values[i]);
        }
        saveInterpolationResultsToFile(x_values, y_values, interpolated_values, n
    );
    }
```

Listing 3: Wykonanie interpolacji dla każdego punktu dla 3 wartości N

Optymalizacja Czebyszewa

```cpp
    vector<double> chebyshevNodes(int num_nodes, double xa, double xb) {
    vector<double> nodes(num_nodes + 1);
    for (int i = 0; i <= num_nodes; ++i) {
        nodes[i] = (xa + xb) / 2.0 + 0.5 * (xb - xa) * cos((2.0 * i + 1.0) * M_PI
     / (2.0 * num_nodes + 2.0));
    }
    return nodes;
}
```

Listing 4: Optymalizacja Czebyszewa

4. Wyniki

Table 1: Wartości interpolacji dla $N = 5$

x	y	F(x)
-3	-0.3	-0.3
-2.94472	-0.304478	-0.383114
-2.88945	-0.309068	-0.459564
-2.83417	-0.313774	-0.529604
-2.77889	-0.318598	-0.593483
⋮	⋮	⋮
2.29648	0.220788	0.145614
2.35176	0.218267	0.139275
2.40704	0.215799	0.133417
2.46231	0.213383	0.128056
2.51759	0.211017	0.123209
⋮	⋮	⋮
7.94472	0.123907	0.156382
8	0.123077	0.123077

Table 2: Wartości interpolacji dla $N = 10$

x	y	F(x)
-3	-0.3	-0.3
-2.94472	-0.304478	-0.0794078
-2.88945	-0.309068	0.089026
-2.83417	-0.313774	0.212154
-2.77889	-0.318598	0.296211
⋮	⋮	⋮
2.29648	0.220788	0.145614
2.35176	0.218267	0.139275
2.40704	0.215799	0.133417
2.46231	0.213383	0.128056
2.51759	0.211017	0.123209
⋮	⋮	⋮
7.94472	0.123907	0.156382
8	0.123077	0.123077

Table 3: Wartości interpolacji dla N = 15

x	y	Interpolacja
-3	-0.3	-0.3
-2.94472	-0.304478	2.65358
-2.88945	-0.309068	4.29664
-2.83417	-0.313774	5.0033
-2.77889	-0.318598	5.06559
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-2.61307	-0.333805	3.36752
-2.55779	-0.339127	2.59922
-2.50251	-0.344577	1.857
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5.01253	0.191991	0.189798
5.04523	0.191663	0.190309
5.07793	0.191372	0.191004
5.11063	0.191117	0.191879
5.14333	0.1909	0.192934

5. Wizualizacja

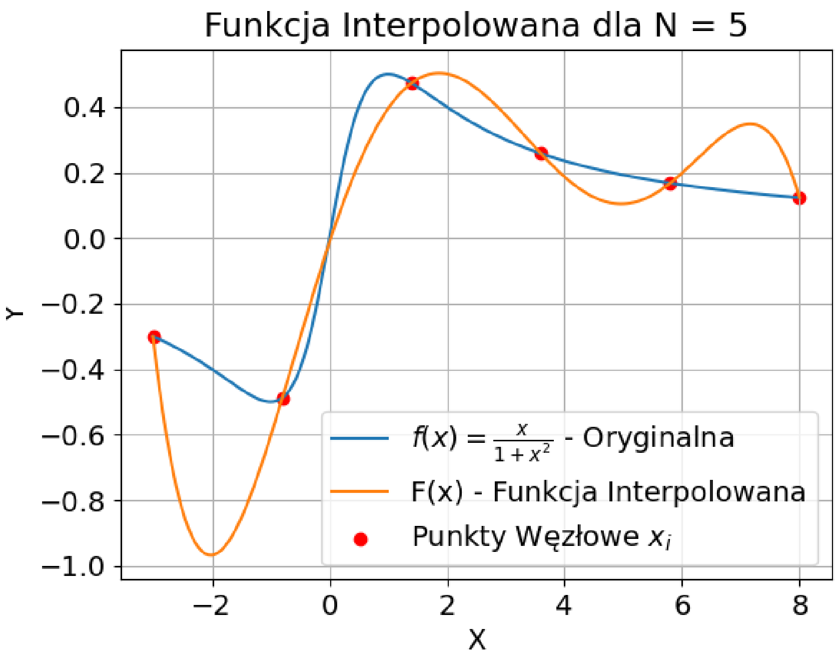

Figure 2: Wykres funkcji interpolowanej dla 5 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

Dla 5 punktów węzłowych funkcja interpolowana różni się przebiegiem od funkcji oryginalnej. Nie mniej wartości $F(x) = f(x)$ dla funkcjów węzłowych, co spełnia założenie interpolacji.

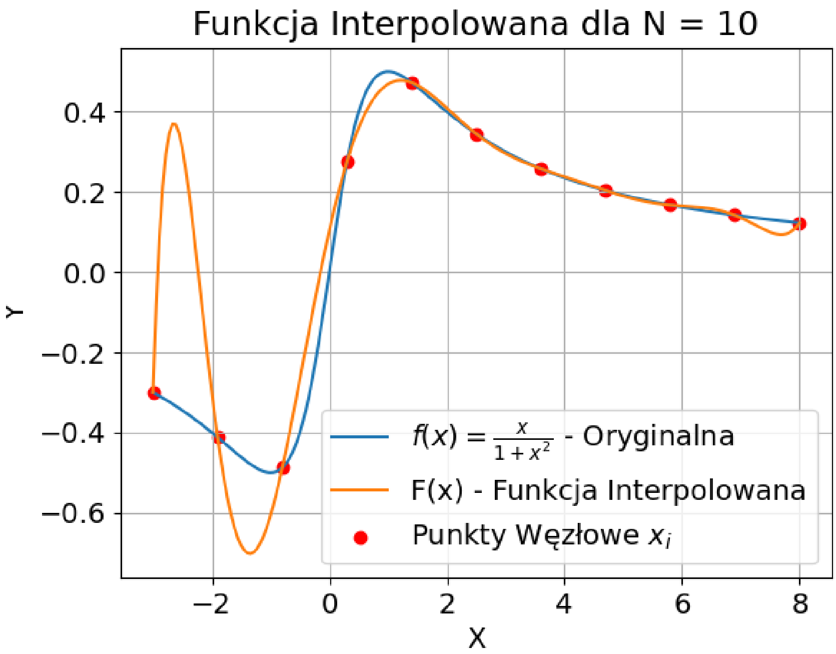

Figure 3: Wykres funkcji interpolowanej dla 10 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

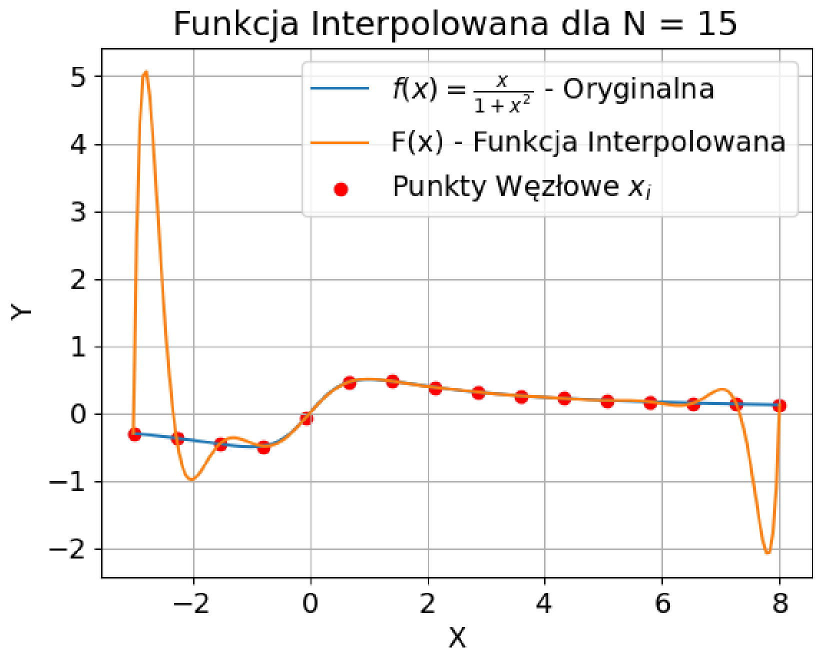

Figure 4: Wykres funkcji interpolowanej dla 15 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

Dla ilości węzłów $N = 10$ widać wyraźną poprawę jakości dopasowania funkcji w stosunku do tej dla $N = 5$. Nadal dla początkowych węzłów co prawda jest daleka od funkcji dokładnej ale dla argumentów większych od 2 wykres funkcji pokrywa się z funkcją oryginalną w conajmniej zadawalającym stopniu.

Wykres funkcji interpolowanej dla ilości węzłów $N = 15$ niemal całkowicie pokrywa się z wykresem funkcji oryginalnej. Dokładność przybilżenia w środku przedziału jest bardzo satysfakcjonująca ale na granicach zgodnie z oczekiwaniami widoczny się staje efekt Rungego w postaci potężnych odchyłów.

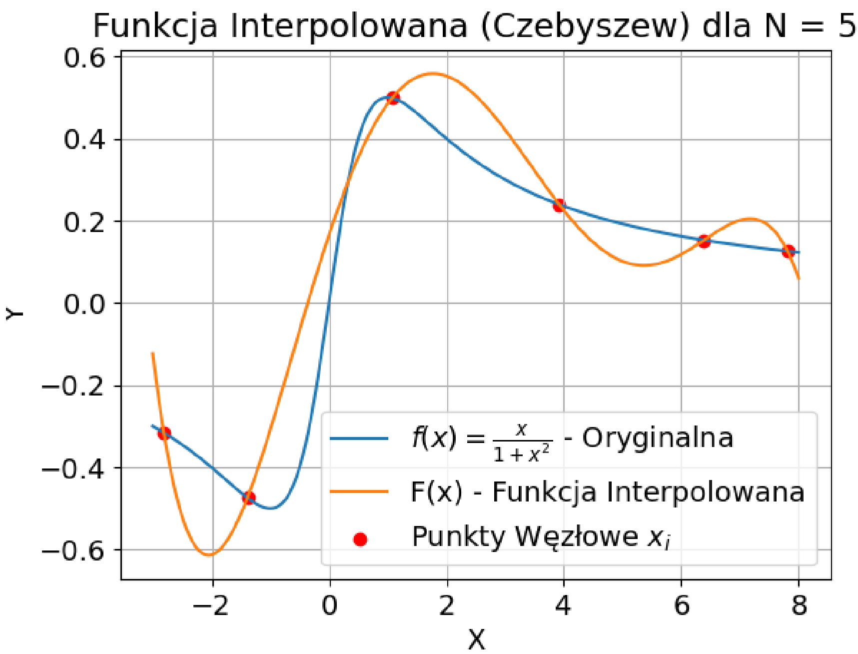

Figure 5: Wykres funkcji interpolowanej z optymalizacją Czebyszewa dla 5 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

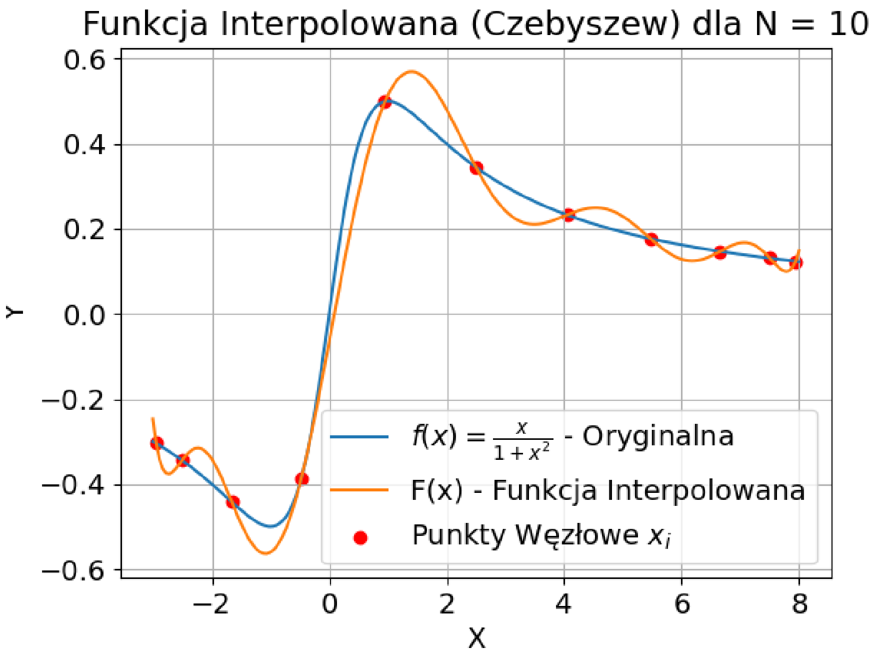

Figure 6: Wykres funkcji interpolowanej z optymalizacją Czebyszewa dla 10 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

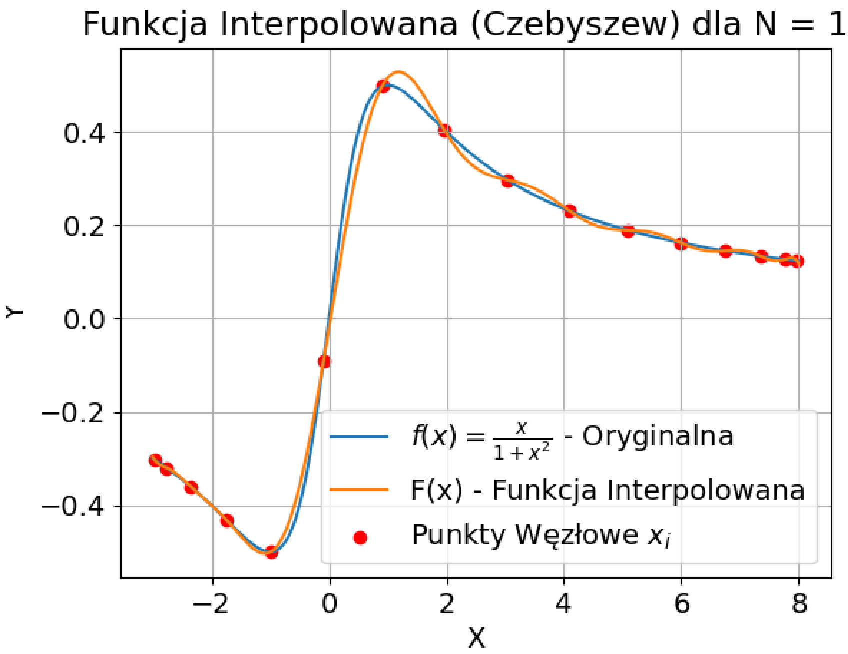

Figure 7: Wykres funkcji interpolowanej z optymalizacją Czebyszewa dla 15 węzłów i funkcji oryginalnej $f(x)$

Po dokonaniu optymalizacji Czebyszewa węzły "zagęszczją" się bliżej granicy przedziałów gdzie w wersji podstwaowej występowały największe odchyły od wartości dokładnej.
Niestety w przypadku $N = 5$ i $N = 10$ odbyło się to kosztem lokalnej dokładności. Na skutek zmian pojawiły się drobne oscylacje, które jednak wraz z powiększeniem liczby rozpatrywanych węzłów zdają się zanikać lub maleć do wartości pomijalnie małych. Tego typu oscylacje często mogą pojawiać się dla funkcji parzystych lub nieparzystych, kiedy ilość węzłów jest źle dobrana (pod kątem parzystości). Ważnym spostrzeżeniem jest fakt, że dla większej ilości węzłów, mimo bardzo dokładnych wartości na granicach przedziału (dla węzłów brzegowych), tracimy na dokładności dla wartości środkowych.

6. Wnioski

- Interpolacja Lagrange'a vs. Interpolacja Czebyszewa: Porównaliśmy wyniki interpolacji funkcji $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ za pomocą interpolacji Lagrange'a oraz interpolacji Czebyszewa. Obie metody są skuteczne, ale różnią się węzłami interpolacyjnymi oraz jakością interpolacji w zależności od liczby węzłów. Wpływ liczby węzłów na wynik interpolacji: Zauważamy, że zwiększanie liczby węzłów poprawia jakość interpolacji. Dla N=5 funkcja interpolacyjna jest bardziej skokowa, natomiast dla N = 15 jest bardziej gładka i lepiej odzwierciedla funkcję oryginalną.
- Równomierne vs. nierównomierne rozmieszczenie węzłów: Interpolacja z węzłami równomiernie rozłożonymi jest bardziej podatna na efekt Rungego, szczególnie na krańcach przedziału. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwala uniknąć tego efektu i uzyskać lepszą jakość interpolacji.
- Złożoność obliczeniowa: Interpolacja Lagrange'a wymaga obliczenia iloczynów Lagrange'a dla każdego punktu interpolacji, co może być czasochłonne dla dużej liczby węzłów. Z kolei obliczenie węzłów Czebyszewa jest prostsze i efektywniejsze.
- Optymalizacja i wybór metody: W zależności od konkretnego problemu oraz wymagań dotyczących dokładności i szybkości obliczeń, należy dokonać odpowiedniego wyboru między interpolacją Lagrange'a a interpolacją Czebyszewa.
- Praktyczne zastosowanie: Interpolacja jest ważnym narzędziem w analizie danych, modelowaniu matematycznym i inżynierii. Zrozumienie różnych metod interpolacji oraz ich zastosowań pozwala efektywnie rozwiązywać problemy praktyczne.
- Najlepszy wynik dałoby łączenie mniejszych rozwiązań dla niedużych N
- **Dla funkcji parzystych:**
  Wybierając nieparzystą liczbę węzłów Czebyszewa, unikamy sytuacji, w której węzły interpolacji są umieszczone symetrycznie względem osi OY. Dzięki temu, interpolacja będzie dokładniejsza, ponieważ unikamy sytuacji, w której interpolowane punkty są zgrupowane wokół osi symetrii funkcji.
- **Dla funkcji nieparzystych:**
  Wybierając parzystą liczbę węzłów Czebyszewa, zapewniamy, że punkty interpolacji będą rozmieszczone symetrycznie względem osi OY. Dla funkcji nieparzystych, które są niesymetryczne względem osi OY, równomierne rozmieszczenie punktów interpolacji może przynieść lepsze rezultaty interpolacji.

Warto jednak zauważyć, że wybór liczby węzłów Czebyszewa nie jest zawsze krytyczny, a ostateczna dokładność interpolacji zależy od wielu czynników, takich jak stopień wielomianu interpolacyjnego, własności funkcji itp. W praktyce, eksperymentalne testowanie różnych konfiguracji węzłów interpolacji może być konieczne, aby uzyskać optymalne wyniki interpolacji dla danej funkcji.

Źródła:

Fig 1: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13151-lagrange-interpolator-polynomial