



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

Metody Numeryczne

**Laboratorium 05: Uogólniony (symetryczny)
problem własny - wyznaczanie modów własnych
struny w 1D**

Andrzej Świętek

26.03.2024

Contents

1	Wstęp teoretyczny	1
1.1	Uogólniony problem własny	1
1.2	Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego	2
1.2.1	Dekompozycja Choleskiego	2
1.2.2	Redukcja do standardowego problemu własnego	2
1.2.3	Rozwiązanie standardowego problemu własnego	2
2	Problem	2
3	Implementacja	4
3.1	Inicjalizacja macierzy i parametrów:	4
3.2	Pętla rozwiązująca problem dla kolejnych wartości parametru α :	4
3.3	Funkcje pomocnicze:	5
4	Wyniki	6
5	Wizualizacja wyników	7
6	Wnioski	8

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Uogólniony problem własny

W matematyce, uogólniony problem własny jest rozszerzeniem standardowego problemu własnego na przestrzeń liniową z iloczynem skalarnym, który nie jest jedynie produktem skalarnym standardowym, ale zdefiniowanym przez symetryczną macierz dodatnio określoną. Formalnie, dla macierzy A i B o wymiarach $n \times n$, uogólniony problem własny polega na znalezieniu wektorów własnych x oraz odpowiadających im wartości własnych λ , takich że:

$$Ax = \lambda Bx$$

gdzie:

- x jest wektorem własnym
- λ jest wartością własną
- A jest macierzą operatora liniowego
- B jest symetryczną macierzą dodatnio określoną

Uogólniony problem własny występuje w wielu dziedzinach nauki i techniki, w tym w fizyce, inżynierii, statystyce, bioinformatyce itp. Jest kluczowym zagadnieniem w analizie danych oraz modelowaniu matematycznym, gdzie pozwala na wyodrębnienie istotnych cech lub struktur danych.

Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego ma wiele praktycznych zastosowań, takich jak analiza modalna w inżynierii strukturalnej, analiza danych w statystyce, kompresja danych, redukcja wymiarów w analizie wielowymiarowej oraz wiele innych.

1.2. Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego

Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego można uzyskać na różne sposoby, w zależności od konkretnego kontekstu i właściwości macierzy A i B . Jedną z najczęściej stosowanych metod jest metoda potęgowa, która polega na iteracyjnym przybliżaniu dominującego wektora własnego macierzy. Jednakże w przypadku uogólnionego problemu własnego, gdzie macierz B jest symetryczną i dodatnio określoną, często bardziej efektywnym podejściem jest zastosowanie dekompozycji Choleskiego oraz metody QR lub algorytmu Lanczosa.

1.2.1. Dekompozycja Choleskiego

Pierwszym krokiem w rozwiązaniu uogólnionego problemu własnego jest dokonanie dekompozycji Choleskiego macierzy B , aby uzyskać macierz trójkątną dolną L taką, że $B = LL^T$, gdzie L^T oznacza transpozycję macierzy L . Dekompozycja Choleskiego jest możliwa tylko wtedy, gdy macierz B jest symetryczna i dodatnio określona.

1.2.2. Redukcja do standardowego problemu własnego

Następnie dokonuje się transformacji uogólnionego problemu własnego do standardowego problemu własnego poprzez pomnożenie obu stron równania $Ax = \lambda Bx$ przez L^{-1} , co daje $L^{-1}AL^{-T}y = \lambda y$, gdzie $y = L^Tx$. W rezultacie uzyskuje się równoważny problem własny dla macierzy $L^{-1}AL^{-T}$.

1.2.3. Rozwiązanie standardowego problemu własnego

Ostatecznie, standardowy problem własny $L^{-1}AL^{-T}y = \lambda y$ jest rozwiązywany za pomocą algorytmów dedykowanych do macierzy symetrycznych, takich jak metoda QR lub algorytm Lanczosa. Te algorytmy pozwalają na efektywne obliczenie wartości własnych oraz odpowiadających im wektorów własnych macierzy $L^{-1}AL^{-T}$.

Rozwiązując w ten sposób uogólniony problem własny, można efektywnie wyznaczyć wartości własne oraz wektory własne, co znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki.

2. Problem

Wyznaczenie częstotliwości drgań własnych struny, której wychylenie w czasie i przestrzeni opisuje funkcja $\psi = \psi(x, t)$. Dynamiką struny rządzi równanie falowe (N-naciąg struny, $\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości):

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Dokonujemy separacji zmiennych:

- i) najpierw podstawiając $\psi(x, t) = u(x)\Theta(t)$,
- ii) a następnie dzieląc przez iloczyn $u\Theta$

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \text{const} = -\lambda$$

$$\lambda = \omega^2, \omega - \text{częstość własna drgań}$$

dzięki czemu otrzymujemy równanie różniczkowe zależne tylko od zmiennej położeniowej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u$$

Struna przymocowana jest w punktach $\pm L/2$ (L-długość struny). Wprowadzamy siatkę równoodległych węzłów: $x = x_i$, $u(x) = u_i$, $\rho(x) = \rho_i$ Odległość pomiędzy węzłami wynosi

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}$$

a położenie w przestrzeni wyznaczamy tak

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Teraz możemy dokonać dyskretyzacji równania (3) podstawiając trójpunktowy

iloraz różnicowy centralny za drugą pochodną

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i$$

co można zapisać w postaci (A, B - macierze, \mathbf{u} - wektor)

$$A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u}$$

co stanowi tzw. uogólniony problem własny, w którym elementy macierzowe są zdefiniowane następująco

$$A_{i,j} = \frac{(-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})}{\Delta x^2}$$

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}$$

Definicja funkcji $\delta_{i,j}$:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = j \\ 0 & \text{jeśli } i \neq j \end{cases}$$

1. Przyjmujemy następujące parametry:
 $L = 10$, $n = 200$, $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, $N = 1$
2. Utworzyć macierze A i B oraz wypełnić je zgodnie z wzorami (8) i (9).
3. Rozwiązać równanie (7) dla $\alpha \in [0, 100]$ z krokiem $\Delta\alpha = 2$. Dla każdej wartości parametru α dopliku zapisać wartości pierwiastków z 6 kolejnych najmniejszych wartości własnych i sporządzić odpowiedni wykres ($\omega = \sqrt{\lambda} = f(\alpha)$)
4. Dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = 100$ zapisać do pliku wektory własne odpowiadające 6 najniższym wartościom własnym i sporządzić ich wykresy.

3. Implementacja

3.1. Inicjalizacja macierzy i parametrów:

W tym fragmencie kodu inicjalizowane są macierze oraz parametry potrzebne do rozwiązania problemu. Przyjęte są wartości dla liczby węzłów, długości struny, oraz stałych fizycznych. Ponadto, alokowane są odpowiednie wskaźniki i obliczana jest wartość kroku siatki.

```

1  const int n = 200;
2  const int L = 10; // dlugosc struny
3  const int N = 1;
4
5  gsl_vector *eval = gsl_vector_calloc(n);
6  gsl_eigen_gensymmv_workspace *w = gsl_eigen_gensymmv_alloc(n);
7
8  gsl_matrix *A = gsl_matrix_calloc(n, n);
9  gsl_matrix *B = gsl_matrix_calloc(n, n);
10 gsl_matrix *evec = gsl_matrix_calloc(n, n); // eigen vectors
11
12 double deltaX = 10.0/(200.0 - 1.0); // L/(n-1)

```

Listing 1: Inicjalizacja

3.2. Pętla rozwiązująca problem dla kolejnych wartości parametru α :

W tej części kodu iteracyjnie rozwiązywany jest problem dla różnych wartości parametru α . Następuje wypełnienie macierzy A i B zgodnie z danymi równaniami, a następnie obliczane są wartości własne za pomocą funkcji z biblioteki GSL. Sortowane są one rosnąco, a następnie zapisywane do pliku. Dodatkowo, dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = 100$ zapisywane są wektory własne dla 6 najniższych wartości własnych.

```

1 for(int alpha = 0; alpha <= 100; alpha+=2) { // Pojedynczy problem == jedna alpha
2
3
4     // Wypełnienie Macierzy A i B
5     for(int i =0; i < n; i++){
6         for(int j = 0; j < n; j++) {
7             double value = (
8                 -delta_kroneckera(i, j+1)
9                 + 2*delta_kroneckera(i,j)
10                - delta_kroneckera(i,j-1)
11            )/(deltaX*deltaX);
12            gsl_matrix_set(A,i,j,value);
13            double beta_i_j = rho(i, alpha)/N * delta_kroneckera(i,j);
14            gsl_matrix_set(B,i,j, beta_i_j);
15
16            // Zapis do pliku value ...
17        }
18    }
19
20    gsl_eigen_gensymmv(A, B, eval, evec, w);
21
22    // Sortowanie warto ci w asnych
23    gsl_eigen_gensymmv_sort(eval, evec, GSL_EIGEN_SORT_ABS_ASC);
24
25    // Zapisanie warto ci pierwiastk w do pliku
26    fprintf(fp_alpha, "%d\n", alpha);
27    for (int i = 0; i < 6; i++) {
28        double eigenvalue = sqrt(gsl_vector_get(eval, i));
29        fprintf(fp_eigenvalues, "%d\t%f", alpha, eigenvalue);
30    }
31    fprintf(fp_eigenvalues, "\n");
32
33    if (alpha == 0 || alpha == 100) {
34        // Zapis do pliku wektor w w asnych: gsl_matrix_get(evec, j, i);
35    }
36 }

```

Listing 2: Inicjalizacja

3.3. Funkcje pomocnicze:

Ten fragment zawiera definicje funkcji pomocniczych, takich jak funkcja $\rho(x, \alpha)$ oraz funkcja delta Kroneckera $\delta_{i,j}$. Pierwsza z nich oblicza rozkład gęstości $\rho(x)$ dla danej wartości α , natomiast druga implementuje funkcję delta Kroneckera, która zwraca 1 dla $i = j$ i 0 w przeciwnym przypadku. Te funkcje są wykorzystywane do wypełniania macierzy A i B oraz w pętli rozwiązującej problem.

```

1 double rho(double x, double alpha) {
2     return 1 + 4*alpha*x*x;
3 }
4
5 int delta_kroneckera(int i, int j){
6     return i == j ? 1 : 0;
7 }

```

Listing 3: Funkcja Rho i delta Kroneckera

4. Wyniki

Table 1: Wartości własne dla różnych wartości α

α	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0	0.3110300	0.6220410	0.9330140	1.2439310	1.5547710	1.865516
2	0.0009762	0.0020752	0.0031772	0.0042802	0.0053832	0.006485
4	0.0006904	0.0014674	0.0022464	0.0030264	0.0038064	0.004586
6	0.0005646	0.0011986	0.0018346	0.0024716	0.0031086	0.003744
8	0.0004888	0.0010378	0.0015888	0.0021408	0.0026918	0.003243
10	0.00043710	0.00092810	0.00142110	0.00191410	0.00240710	0.002900
12	0.00039912	0.00084712	0.00129712	0.00174712	0.00219712	0.002647
14	0.00036914	0.00078414	0.00120114	0.00161814	0.00203414	0.002451
16	0.00034516	0.00073416	0.00112316	0.00151316	0.00190316	0.002293
18	0.00032518	0.00069218	0.00105918	0.00142718	0.00179418	0.002162
20	0.00030920	0.00065620	0.00100520	0.00135320	0.00170220	0.002051
22	0.00029422	0.00062622	0.00095822	0.00129022	0.00162322	0.001955
24	0.00028224	0.00059924	0.00091724	0.00123524	0.00155424	0.001872
26	0.00027126	0.00057526	0.00088126	0.00118726	0.00149326	0.001799
28	0.00026128	0.00055428	0.00084928	0.00114428	0.00143928	0.001733
30	0.00025230	0.00053630	0.00082030	0.00110530	0.00139030	0.001674
32	0.00024432	0.00051932	0.00079432	0.00107032	0.00134632	0.001621
34	0.00023734	0.00050334	0.00077134	0.00103834	0.00130534	0.001573
36	0.00023036	0.00048936	0.00074936	0.00100936	0.00126936	0.001529
38	0.00022438	0.00047638	0.00072938	0.00098238	0.00123538	0.001488
40	0.00021840	0.00046440	0.00071040	0.00095740	0.00120440	0.001450
42	0.00021342	0.00045342	0.00069342	0.00093442	0.00117542	0.001415
44	0.00020844	0.00044244	0.00067744	0.00091244	0.00114844	0.001383
46	0.00020446	0.00043346	0.00066246	0.00089246	0.00112246	0.001352
48	0.00019948	0.00042348	0.00064848	0.00087448	0.00109948	0.001324
50	0.00019550	0.00041550	0.00063550	0.00085650	0.00107750	0.001297
52	0.00019152	0.00040752	0.00062352	0.00083952	0.00105652	0.001272
54	0.00018854	0.00039954	0.00061154	0.00082454	0.00103654	0.001248
56	0.00018556	0.00039256	0.00060056	0.00080956	0.00101756	0.001226
58	0.00018158	0.00038558	0.00059058	0.00079558	0.00100058	0.001204
60	0.00017860	0.00037960	0.00058060	0.00078160	0.00098360	0.001184
62	0.00017562	0.00037362	0.00057162	0.00076962	0.00096762	0.001165
64	0.00017364	0.00036764	0.00056264	0.00075764	0.00095264	0.001146
66	0.00017066	0.00036166	0.00055366	0.00074566	0.00093766	0.001129
68	0.00016768	0.00035668	0.00054568	0.00073468	0.00092368	0.001112
70	0.00016570	0.00035170	0.00053770	0.00072370	0.00091070	0.001096
72	0.00016372	0.00034672	0.00052972	0.00071372	0.00089772	0.001081
74	0.00016174	0.00034174	0.00052274	0.00070474	0.00088574	0.001066
76	0.00015876	0.00033776	0.00051576	0.00069476	0.00087376	0.001052
78	0.00015678	0.00033278	0.00050978	0.00068578	0.00086278	0.001038
80	0.00015480	0.00032880	0.00050280	0.00067780	0.00085180	0.001025
82	0.00015282	0.00032482	0.00049682	0.00066882	0.00084182	0.001013
84	0.00015184	0.00032084	0.00049084	0.00066084	0.00083184	0.001001
86	0.00014986	0.00031686	0.00048486	0.00065386	0.00082186	0.000989
88	0.00014788	0.00031388	0.00047988	0.00064588	0.00081188	0.000978
90	0.00014690	0.00030990	0.00047490	0.00063890	0.00080290	0.000967
92	0.00014492	0.00030692	0.00046892	0.00063192	0.00079492	0.000956
94	0.00014294	0.00030394	0.00046394	0.00062494	0.00078594	0.000946
96	0.00014196	0.00029996	0.00045996	0.00061896	0.00077796	0.000936
98	0.00013998	0.00029698	0.00045498	0.00061198	0.00076998	0.000926
100	0.000138100	0.000293100	0.000449100	0.000605100	0.000761100	0.000917

5. Wizualizacja wyników

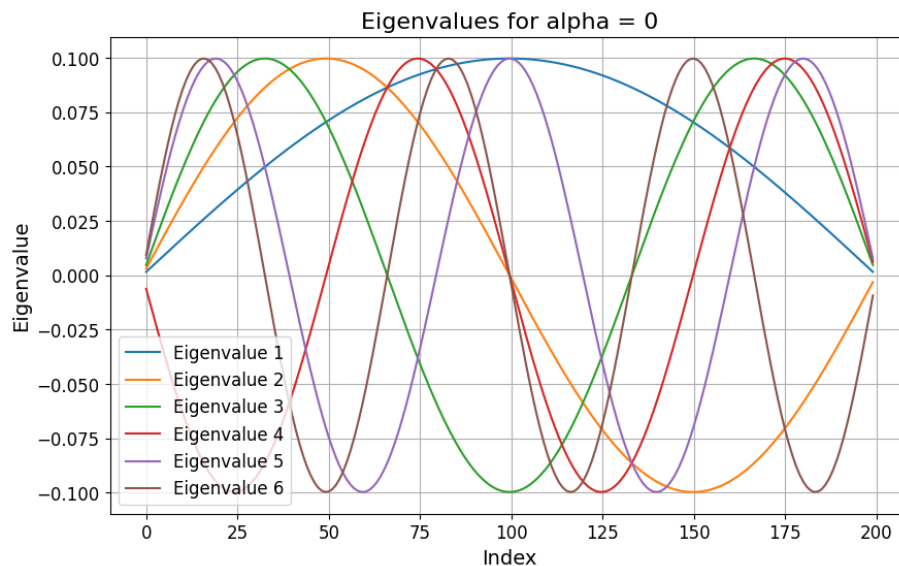


Figure 1: Wykres wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$

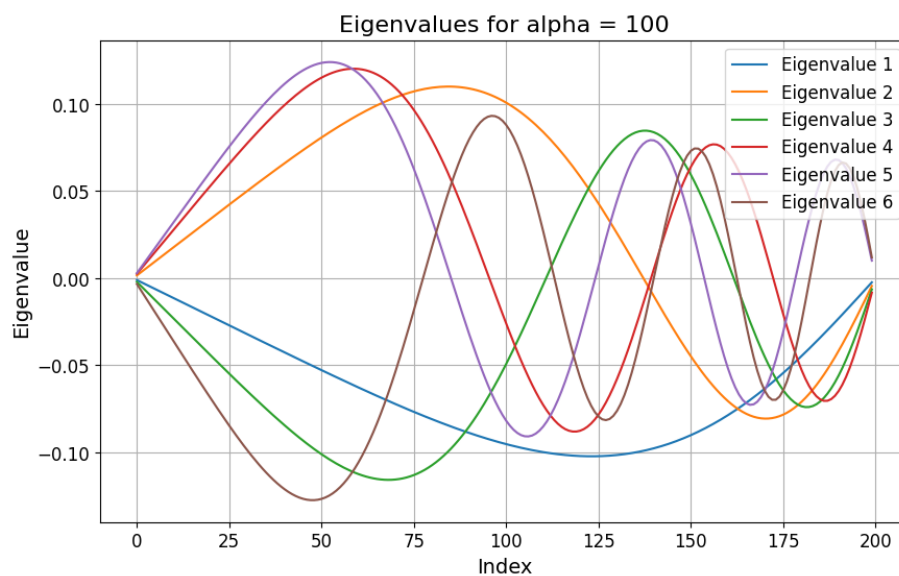


Figure 2: Wykres wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 100$

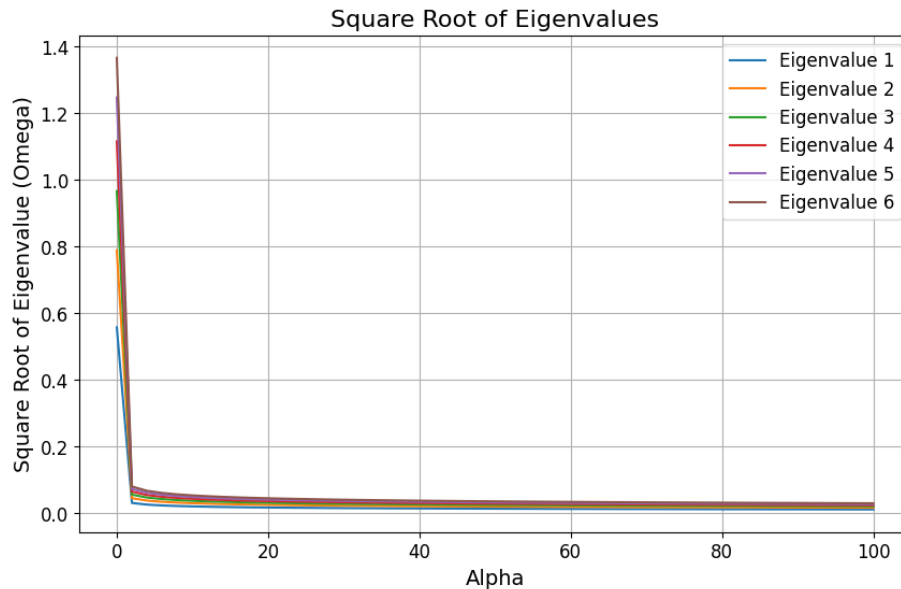


Figure 3: Wykres $\omega(\alpha)$ dla każdych wartości własnych

6. Wnioski

Na podstawie analizy implementacji uogólnionego problemu własnego dla dynamiki struny oraz wyników eksperymentu, można wyciągnąć następujące wnioski w kontekście przedmiotu Metody Numeryczne:

1. **Skuteczność algorytmów numerycznych:** Implementacja rozwiązania oparta na bibliotece GSL wykazuje wysoką skuteczność w obliczaniu wartości własnych i wektorów własnych dla uogólnionego problemu własnego. Wykorzystanie algorytmów numerycznych pozwala na efektywne rozwiązywanie skomplikowanych problemów matematycznych.
2. **Złożoność obliczeniowa:** Zastosowanie biblioteki GSL umożliwia wykorzystanie zoptymalizowanych algorytmów numerycznych, co wpływa na efektywność obliczeń. Optymalizacja algorytmów pozwala na zmniejszenie złożoności obliczeniowej, co jest istotne przy rozwiązywaniu problemów o dużych rozmiarach.
3. **Wpływ parametrów na rozwiązanie:** Analiza zależności wartości własnych od parametrów, takich jak α , pokazuje istotność rozważania różnych warunków początkowych lub właściwości materiału. Zrozumienie wpływu tych parametrów na rozwiązanie uogólnionego problemu własnego jest kluczowe dla analizy zachowania układu fizycznego.
4. **Interpretacja wyników:** Wygenerowane wyniki, takie jak wykresy wartości własnych czy wektorów własnych, wymagają odpowiedniej interpretacji pod kątem fizycznego kontekstu problemu. Zrozumienie charakterystyki rozwiązań oraz ich implikacji fizycznych jest kluczowe dla wyciągania poprawnych wniosków z eksperymentu.

5. **Dobra uwarunkowanie metody:** Analiza kształtu wykresów oraz stabilność obliczeń potwierdzają, że metoda jest dobrze uwarunkowana dla rozwiązywania uogólnionego problemu własnego dla równań falowych. Odpowiednie dobranie parametrów oraz zoptymalizowane algorytmy numeryczne przyczyniają się do skuteczności rozwiązania.
6. **Skuteczność metody w praktyce:** Krótki czas obliczeń oraz kształt wykresów wartości własnych i wektorów własnych potwierdzają skuteczność metody w rozwiązaniu problemu dynamiki struny opartego na równaniach falowych. Efektywne wykorzystanie algorytmów numerycznych pozwala na szybkie i dokładne obliczenia, co jest kluczowe w praktycznych zastosowaniach.
7. **Zastosowanie w analizie fizycznej:** Wyniki eksperymentu dostarczają istotnych informacji na temat zachowania się struny oraz wpływu różnych czynników, takich jak parametr α , na jej dynamikę. Metoda numeryczna pozwala na modelowanie rzeczywistych układów fizycznych oraz analizę ich zachowania w różnych warunkach.
8. **Potencjalne dalsze zastosowania:** Metoda numeryczna stosowana do rozwiązania uogólnionego problemu własnego dla równań falowych ma potencjał do zastosowania w różnych dziedzinach nauki i techniki. Może być wykorzystana do analizy drgań strun, płyt czy innych układów mechanicznych, co pozwala na badanie ich własności oraz projektowanie odpowiednich rozwiązań.

Wnioski te podkreślają zarówno skuteczność metody numerycznej w rozwiązywaniu problemów fizycznych, jak i jej potencjał do dalszego zastosowania w różnych dziedzinach nauki i techniki. Dobre uwarunkowanie metody oraz krótki czas obliczeń stanowią ważne atuty, które potwierdzają jej skuteczność i przydatność w praktyce.