



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

# Metody Numeryczne

**Laboratorium 13: Całkowanie numeryczne przy  
użyciu kwadratur Gaussa**

*Andrzej Świętek*

10.06.2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Wstęp teoretyczny</b>	<b>2</b>
1.1	Kwadratura Gaussa-Legendre'a . . . . .	2
1.2	Kwadratura Gaussa-Hermite'a . . . . .	2
1.3	Kwadratura Gaussa-Laguerre'a . . . . .	3
1.4	Podsumowanie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Problem</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Implementacja</b>	<b>4</b>
3.1	Zadanie 1 . . . . .	4
3.2	Zadanie 2 . . . . .	5
3.3	Zadanie 3 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Wyniki</b>	<b>7</b>
4.1	Zadanie 1: . . . . .	7
4.2	Zadanie 2: . . . . .	8
4.3	Zadanie 3: . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Wizualizacja wyników</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Analiza wyników</b>	<b>15</b>
6.1	Zadanie 1: Kwadratura Gaussa-Legendre'a . . . . .	15
6.2	Zadanie 2: Kwadratura Gaussa-Laguerre'a . . . . .	15
6.3	Zadanie 3: Kwadratura Gaussa-Hermite'a . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Wnioski</b>	<b>16</b>

## 1. Wstęp teoretyczny

Kwadratury Gaussa to metoda numerycznego całkowania, która wykorzystuje specjalnie dobrane węzły i wagi, aby jak najdokładniej aproksymować wartość całki oznaczonej. Główna idea polega na przekształceniu całki w skończoną sumę wartości funkcji w określonych punktach (węzłach), przemnożonych przez odpowiednie współczynniki (wagi). Dzięki temu można uzyskać bardzo precyzyjne wyniki przy relatywnie małej liczbie obliczeń w porównaniu z innymi metodami numerycznymi.

W przypadku kwadratur Gaussa, węzły i wagi są dobierane w taki sposób, aby metoda była dokładna dla wielomianów o jak najwyższym stopniu. W zależności od wyboru wielomianów ortogonalnych, na których opiera się kwadratura, możemy wyróżnić różne typy kwadratur Gaussa: Gaussa-Legendre'a, Gaussa-Hermite'a i Gaussa-Laguerre'a.

### 1.1. Kwadratura Gaussa-Legendre'a

Kwadratura Gaussa-Legendre'a jest jedną z najczęściej stosowanych metod całkowania numerycznego. W tej metodzie węzły i wagi są wyznaczane na podstawie wielomianów Legendre'a, które są ortogonalne względem przedziału  $[-1, 1]$ . Całka w przedziale  $[-1, 1]$  jest aproksymowana jako:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (1)$$

gdzie  $x_i$  to węzły (pierwiastki wielomianu Legendre'a  $P_n(x)$ ), a  $w_i$  to odpowiadające im wagi.

Aby zastosować kwadraturę Gaussa-Legendre'a do całek w dowolnym przedziale  $[a, b]$ , dokonuje się odpowiedniego przekształcenia zmiennej.

### 1.2. Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Kwadratura Gaussa-Hermite'a jest stosowana do całkowania funkcji z wagą  $e^{-x^2}$  w przedziale od  $-\infty$  do  $\infty$ . W tej metodzie węzły i wagi są wyznaczane na podstawie wielomianów Hermite'a, które są ortogonalne względem funkcji wagowej  $e^{-x^2}$ . Całka z funkcji  $f(x)$  jest aproksymowana jako:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (2)$$

gdzie  $x_i$  to węzły (pierwiastki wielomianu Hermite'a  $H_n(x)$ ), a  $w_i$  to odpowiadające im wagi.

### 1.3. Kwadratura Gaussa-Laguerre'a

Kwadratura Gaussa-Laguerre'a jest stosowana do całkowania funkcji z wagą  $e^{-x}$  w przedziale od 0 do  $\infty$ . W tej metodzie węzły i wagi są wyznaczone na podstawie wielomianów Laguerre'a, które są ortogonalne względem funkcji wagowej  $e^{-x}$ . Całka z funkcji  $f(x)$  jest aproksymowana jako:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x} dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (3)$$

gdzie  $x_i$  to węzły (pierwiastki wielomianu Laguerre'a  $L_n(x)$ ), a  $w_i$  to odpowiadające im wagi.

### 1.4. Podsumowanie

Kwadratury Gaussa oferują efektywne i dokładne metody całkowania numerycznego, które są szczególnie przydatne w przypadkach, gdy analityczne wyznaczenie wartości całki jest trudne lub niemożliwe. Wybór odpowiedniego rodzaju kwadratury zależy od specyfiki funkcji podcałkowej oraz zakresu całkowania.

## 2. Problem

### Zadanie 1

Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a wartość całki:

$$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2 + 1} dx \quad (4)$$

Wartość dokładną można obliczyć korzystając z rozwiązania analitycznego:

$$c_{1,a} = \int_x^a \frac{2x^2 \pm c^2}{dx} = \frac{1}{2a^2} \ln |a^2 x^2 \pm c^2| \quad (5)$$

Wykonać wykres  $|c_1 - c_{1,a}| = f(n)$ , dla liczby węzłów  $n = 2, 3, \dots, 20$ .

W sprawozdaniu dodatkowo należy:

- sprawdzić ile wynosi suma współczynników kwadratury dla każdego  $n$ ,
- umieścić wykres całkowanej funkcji.

### Zadanie 2

Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a wartość całki:

$$c_2 = \int_0^\infty x^k \exp(-x) dx \quad (6)$$

Wartość dokładną można obliczyć korzystając z rozwiązania analitycznego:

$$c_{2,a} = \int_0^\infty x^k \exp(-x) dx = k! \quad (7)$$

Wykonać wykresy:

a)  $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$ , dla  $k = 5$  i dla liczby węzłów  $n = 2, 3, \dots, 20$ ,

b)  $|c_2 - c_{2,a}| = f(n)$ , dla  $k = 10$  i dla liczby węzłów  $n = 2, 3, \dots, 20$ .

W sprawozdaniu należy dodatkowo:

a) przedyskutować dokładność oszacowania wartości całki ze względu na stopień wielomianu podcałkowego i liczbę użytych węzłów,

b) sprawdzić ile wynosi suma współczynników kwadratury dla każdego  $n$ ,

c) sporządzić wykres całkowanej funkcji.

### Zadanie 3

Obliczyć numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a wartość podwójnej całki:

$$c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(x) \sin^4(y) \exp(-x^2 - y^2) dx dy \quad (8)$$

(wartość dokładna:  $c_{dok} = 0.1919832644$ ).

Uwaga: węzły i wagi kwadratury wyznaczamy tylko raz, które wykorzystujemy do obliczenia wartości całki w podwójnej pętli (bo całkujemy w 2 wymiarach).

Proszę wykonać wykres  $|c_3 - c_{dok}| = f(n)$ , dla liczby węzłów  $n = 2, 3, \dots, 15$ .

## 3. Implementacja

### 3.1. Zadanie 1

```
1 double integrand(double x) {
2     return x / (4 * x * x + 1);
3 }

1     double a = 0;
2     double b = 2;
3     int max_n = 20;

4
5     std::cout << "n\tApprox Integral\tExact Integral\tError" << std::endl;
6     //double exact = 1/8 * log(16.0 / 3.0); // derived from the provided
7     //analytical solution
8     double exact = 0.3542;
9     for (int n = 2; n <= max_n; ++n) {
10         std::vector<double> x, w;
11         gauleg(a, b, x, w, n);
12
13         double integral = 0.0;
14         for (int i = 0; i < n; i++) {
15             integral += w[i] * integrand(x[i]);
16         }
17
18         double error = fabs(integral - exact);
19         std::cout << n << "\t" << integral << "\t"
20             << exact << "\t" << error << std::endl;
```

## 3.2. Zadanie 2

```
1 double integrand(double x, double k){
2     return pow(x, k);
3 }

1 int n = 20;
2     int k1 = 5;
3     int k2 = 10;
4
5     std::cout << "\n\n===== [k=05] =====\n\n";
6
7     for (int i = 2; i <= n; ++i) {
8         std::vector<double> x;
9         std::vector<double> w;
10        gaulag(x, w, i, 0);
11
12        double integral = 0.0;
13        for(int j=0; j<=i; j++){
14            integral += w[j] * integrand(x[j], k1);
15        }
16        cout <<i<< " "<<integral<< endl;
17    }
18
19    std::cout << "\n\n===== [k=10] =====\n\n";
20
21    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
22        std::vector<double> x;
23        std::vector<double> w;
24        gaulag(x, w, i, 0);
25
26        double integral = 0.0;
27        for(int j=0; j<=i; j++){
28            integral += w[j] * integrand(x[j], k2);
29        }
30        cout <<i<< " "<<integral<< endl;
31    }
```

### 3.3. Zadanie 3

```
1 double integrand(double x, double y) {
2     return sin(x) * sin(x) * sin(y) * sin(y) * sin(y) * sin(y);
3 }

1     int max_n = 15;
2     double exact = 0.1919832644;
3
4     std::cout << "n\tApprox Integral\tExact Integral\tError" << std::endl;
5
6     for (int n = 2; n <= max_n; ++n) {
7         std::vector<double> x, w;
8         gauher(x, w, n);
9
10        double integral = 0.0;
11        for (int i = 0; i < n; i++) {
12            for (int j = 0; j < n; j++) {
13                integral += w[i] * w[j] * integrand(x[i], x[j]);
14            }
15        }
16
17        double error = fabs(integral - exact);
18        std::cout << n << "\t" << integral << "\t"
19                << exact << "\t" << error << std::endl;
20    }
```

## 4. Wyniki

### 4.1. Zadanie 1:

Table 1: Porównanie Wyniku działania programu z wartością dokładną

$n$	Przybliżenie całki	Rozwiązanie dokładne	Błąd
2	0.390533	0.3542	0.0363325
3	0.35436	0.3542	0.000160228
4	0.352174	0.3542	0.00202611
5	0.353945	0.3542	0.000255342
6	0.354238	0.3542	3.80348e-05
7	0.354172	0.3542	2.84919e-05
8	0.354149	0.3542	5.09814e-05
9	0.35415	0.3542	4.9664e-05
10	0.354152	0.3542	4.83243e-05
11	0.354152	0.3542	4.82599e-05
12	0.354152	0.3542	4.83251e-05
13	0.354152	0.3542	4.83352e-05
14	0.354152	0.3542	4.83327e-05
15	0.354152	0.3542	4.83319e-05
16	0.354152	0.3542	4.83319e-05
17	0.354152	0.3542	4.8332e-05
18	0.354152	0.3542	4.8332e-05
19	0.354152	0.3542	4.8332e-05
20	0.354152	0.3542	4.8332e-05



## 4.2. Zadanie 2:

Table 2: Porównanie Wyniku działania programu z wartością dokładną dla  $k = 5$

$n$	Przybliżenie całki	Rozwiązanie dokładne	Błąd
2	68	120	52
3	120	120	0
4	120	120	0
5	120	120	0
6	120	120	0
7	120	120	0
8	120	120	0
9	120	120	0
10	120	120	0
11	120	120	0
12	120	120	0
13	120	120	0
14	120	120	0
15	120	120	0
16	120	120	0
17	120	120	0
18	120	120	0
19	120	120	0
20	120	120	0

Table 3: Porównanie Wyniku działania programu z wartością dokładną dla  $k = 10$

$n$	Approx Integral	Exact Integral	Error
2	1.03857e+06	3.6288e+06	2.59023e+06
3	1.00818e+06	3.6288e+06	2.62062e+06
4	5.46768e+06	3.6288e+06	1.83888e+06
5	3.6144e+06	3.6288e+06	1.44e+04
6	3.86767e+06	3.6288e+06	2.3887e+05
7	3.6288e+06	3.6288e+06	0
8	3.63416e+06	3.6288e+06	5.36e+03
9	3.6288e+06	3.6288e+06	0
10	3.62885e+06	3.6288e+06	5.0e+01
11	3.6288e+06	3.6288e+06	0
12	3.6288e+06	3.6288e+06	0
13	3.6288e+06	3.6288e+06	0
14	3.6288e+06	3.6288e+06	0
15	3.6288e+06	3.6288e+06	0
16	3.6288e+06	3.6288e+06	0
17	3.6288e+06	3.6288e+06	0
18	3.6288e+06	3.6288e+06	0
19	3.6288e+06	3.6288e+06	0
20	3.6288e+06	3.6288e+06	0

### 4.3. Zadanie 3:

Table 4: Porównanie Wyniku działania programu z wartością dokładną

$n$	Przybliżenie całki	Rozwiązanie dokładne	Błąd
2	0.236142	0.191983	0.0441592
3	0.241918	0.191983	0.0499345
4	0.148112	0.191983	0.0438714
5	0.212304	0.191983	0.0203209
6	0.18458	0.191983	0.00740342
7	0.194241	0.191983	0.00225751
8	0.191387	0.191983	0.000596327
9	0.192122	0.191983	0.000139153
10	0.191954	0.191983	2.90909e-05
11	0.191989	0.191983	5.50834e-06
12	0.191982	0.191983	9.53129e-07
13	0.191983	0.191983	1.51814e-07
14	0.191983	0.191983	2.24095e-08
15	0.191983	0.191983	3.07811e-09

## 5. Wizualizacja wyników

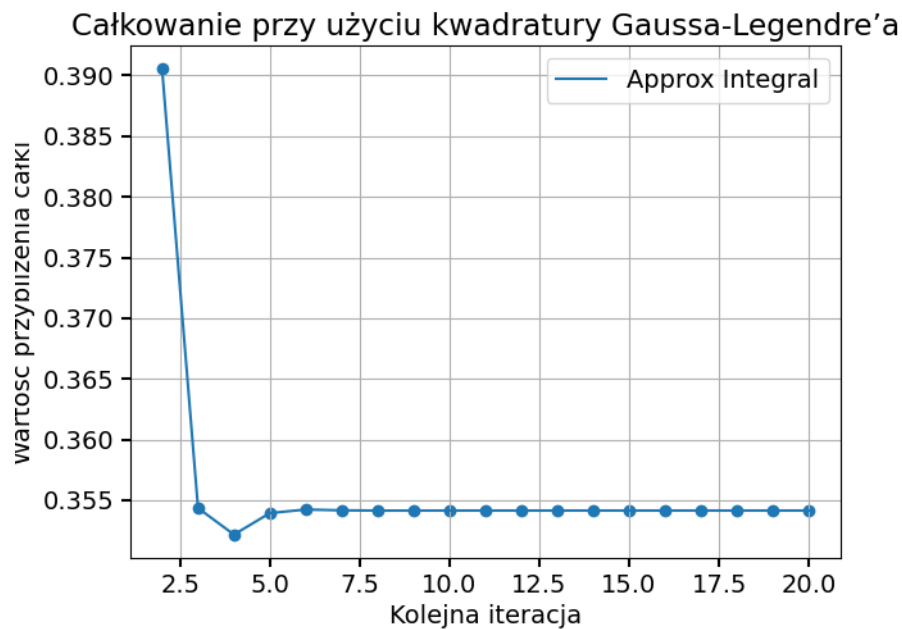


Figure 1: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Legendre'a

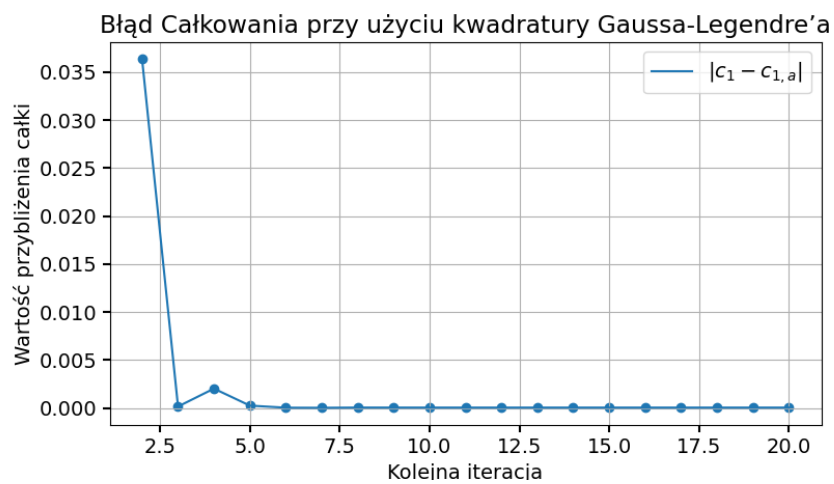


Figure 2: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Legendre'a - różnica wyniku a wartości dokładnej

### Całkowanie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a

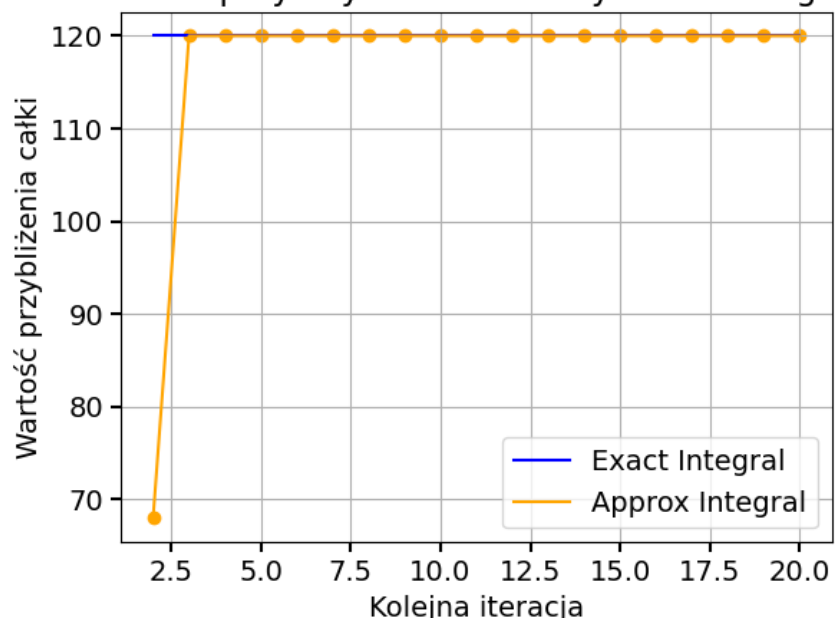


Figure 3: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Laguerre'a

### Całkowanie przy użyciu kwadratury Gaussa-Laguerre'a

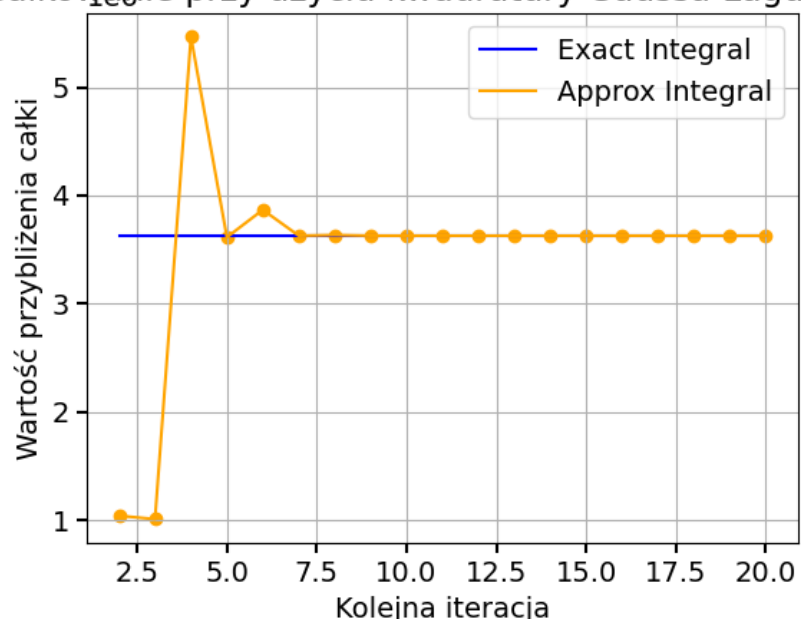


Figure 4: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Laguerre'a

### Wykres błędów przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a

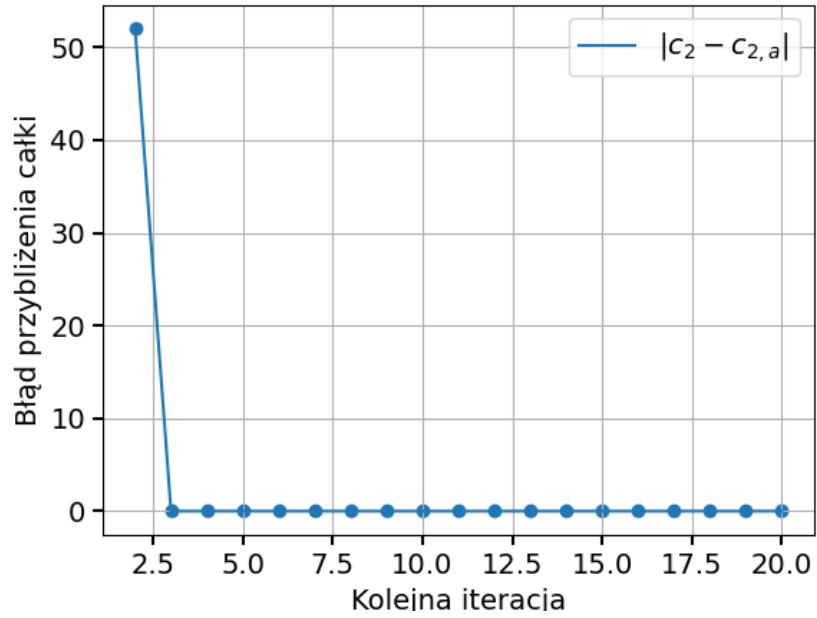


Figure 5: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Laguerre'a - różnica wyniku a wartości dokładnej

### Całkowanie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a

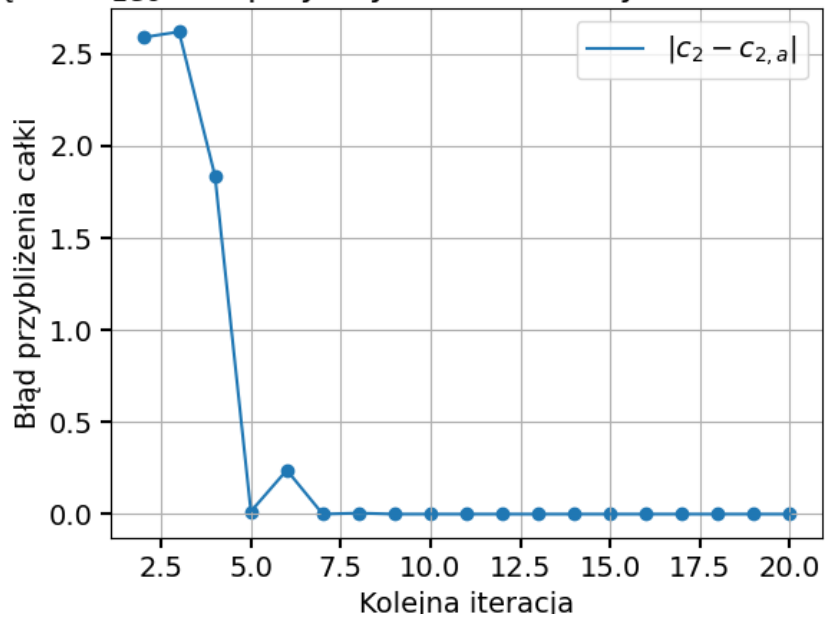


Figure 6: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Laguerre'a - różnica wyniku a wartości dokładnej

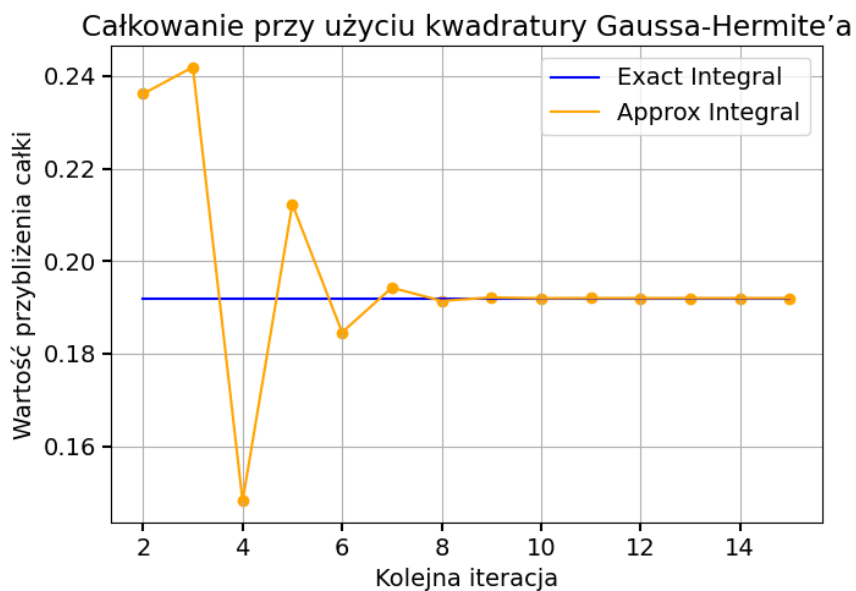


Figure 7: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Hermite'a

## Łąd Całkowania przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a

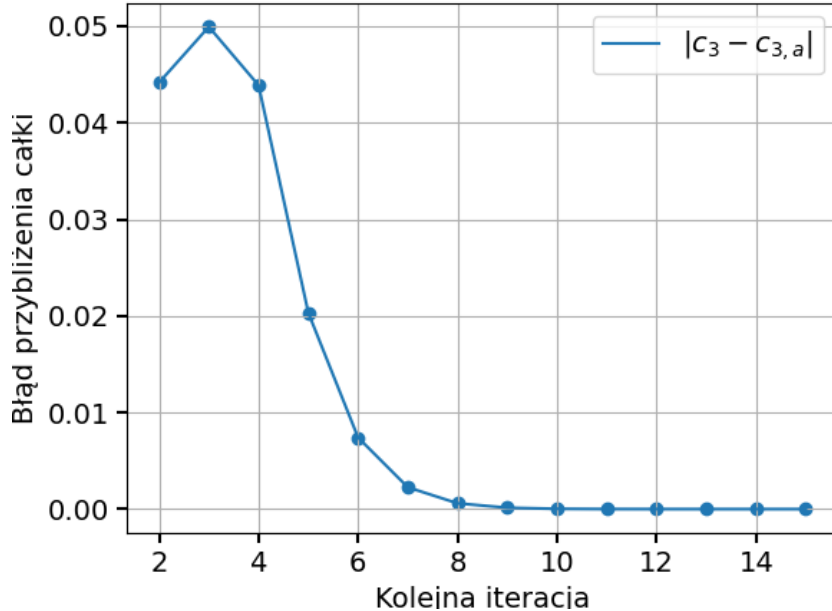


Figure 8: Całkowanie metodą Kwadratur Gaussa-Hermite'a - różnica wyniku a wartości dokładnej

## 6. Analiza wyników

### 6.1. Zadanie 1: Kwadratura Gaussa-Legendre'a

W celu rozwiązania całki numerycznie przy użyciu kwadratury Gaussa-Legendre'a, obliczyliśmy wartość całki  $\int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx$  dla różnych liczby węzłów  $n$ . Wartość dokładna tej całki wynosi 0.3542.

Wyniki przedstawione w tabeli pokazują, że metoda kwadratury Gaussa-Legendre'a zbiega do wartości analitycznej już przy stosunkowo niewielkiej liczbie węzłów. Dla  $n = 3$ , błąd wynosi jedynie 0.000160228. Przy  $n = 6$  i większej liczbie węzłów, błąd jest na poziomie rzędu  $10^{-5}$ , co świadczy o wysokiej precyzji metody.

Dodatkowo można zaobserwować że pozostały błąd jaki widoczny jest w kolumnie błęd wynika nie z samego wyniku pracy programu a z zaokrąglenia rozwiązania analitycznego. W związku z tym można uznać że metoda ta dała rozwiązanie powyżej oczekianej precyzji.

### 6.2. Zadanie 2: Kwadratura Gaussa-Laguerre'a

Na początku przybliżenia całki oscylują lecz dla  $n > 6$  Funkcja momentalnie wygasa oscylacje i dostarcza poprawny wynik. Choć ta metoda potrzebowała



większego  $n$  dla otrzymania wyniku bardzo dokładnego to była również w stanie wykonać cięższą całkę.

### 6.3. Zadanie 3: Kwadratura Gaussa-Hermite’a

Użycie metody kwadratury Gaussa-Hermite’a pozwoliło nam na wykonanie całki podwójnej. Wynik zaczyna być bardzo bliski wartości analitycznej dla ilości węzłów  $n \geq 7$ .

## 7. Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty z różnymi kwadraturami Gaussa (Legendre’a, Hermite’a i Laguerre’a) pozwoliły na głębokie zrozumienie ich zastosowań oraz skuteczności w numerycznym całkowaniu funkcji. Na podstawie wyników uzyskanych z zadań 1, 2 i 3, można wyciągnąć następujące wnioski:

#### 1. Skuteczność kwadratury Gaussa-Legendre’a:

- Kwadratura Gaussa-Legendre’a okazała się bardzo skuteczna w całkowaniu funkcji na przedziałach skończonych.
- Już przy niewielkiej liczbie węzłów ( $n = 3$ ) uzyskano wynik bardzo bliski wartości analitycznej.
- Metoda ta charakteryzuje się wysoką precyzją i szybką zbieżnością, co czyni ją idealnym narzędziem do numerycznego całkowania w wielu zastosowaniach.

#### 2. Zastosowanie kwadratury Gaussa-Laguerre’a:

- Kwadratura Gaussa-Laguerre’a wykazała swoją skuteczność w całkowaniu funkcji na przedziałach nieskończonych z wagą  $e^{-x}$ .
- Wyniki pokazały, że przy  $k = 5$  i  $k = 10$  metoda szybko zbiega do wartości analitycznej już przy  $n > 5$ .
- Metoda ta jest szczególnie przydatna w sytuacjach, gdzie funkcje mają istotne wartości dla dużych  $x$ , jak na przykład w fizyce statystycznej.

#### 3. Precyzja kwadratury Gaussa-Hermite’a:

- Kwadratura Gaussa-Hermite’a okazała się skuteczna w całkowaniu funkcji na przedziałach nieskończonych z wagą  $e^{-x^2}$ , jak również w obliczaniu podwójnych całek.
- Wyniki z zadania 3 pokazują, że metoda ta osiąga dużą precyzję już przy  $n \geq 7$ .
- Jej zastosowanie jest szerokie, zwłaszcza w problemach związanych z całkowaniem funkcji gaussowskich w wyższych wymiarach.

#### 4. Ogólne wnioski na temat kwadratur Gaussa:

- Kwadratury Gaussa oferują wydajne i precyzyjne metody numerycznego całkowania, które są szczególnie przydatne w przypadkach trudności analitycznych.

- Wybór odpowiedniego typu kwadratury zależy od charakterystyki funkcji podcałkowej oraz zakresu całkowania.
- Wszystkie trzy typy kwadratury Gaussa wykazały, że są zdolne do osiągnięcia wysokiej dokładności z relatywnie niewielką liczbą węzłów.